近世代数课后习题作业 5 参考解答

1.

证明：设 $H = A \bigcap B$，则由定理知 H 仍为群 G 的子群，则由拉格朗日定理得：

$|B| = |H| \cdot [B:H]$ ， 记 $j = [B:H] = \dfrac{|B|}{|H|}$ ， 则 $B = Hb_1 \bigcup Hb_2 \bigcup \cdots \bigcup Hb_j$ ，

$b_i \in B(i = 1, \cdots, j)$ 其中 $Hb_i(i = 1, \cdots, j)$ 为互不相同的右陪集。则 $AB = AHb_1 \bigcup AHb_2 \bigcup \cdots \bigcup AHb_j$，又 $AH = A$，所以 $AB = Ab_1 \bigcup Ab_2 \bigcup \cdots \bigcup Ab_j$，

又 $Ab_i \bigcap Ab_l = \phi$，否则，若 $Ab_i \bigcap Ab_l \neq \phi$，则由陪集的性质得：$Ab_i = Ab_l$，从而 $b_i b_l^{-1} \in A$，又 $b_i b_l^{-1} \in B$，所以 $b_i b_l^{-1} \in A \bigcap B$，即 $b_i b_l^{-1} \in H$，所以 $Hb_i = Hb_l$，矛盾。因此根据容斥原理有：$|AB| = |Ab_1| + |Ab_2| + \cdots + |Ab_j| = j \cdot |A|$

即 $|AB| = \dfrac{|B|}{|H|} \cdot |A| = \dfrac{|A||B|}{|A \bigcap B|}$

2.

证明：假设不成立，则 $\exists a \in G$，使得 $a^{-1}Ha \bigcap H = \{e\}$，记 $P = a^{-1}Ha$，由 H 为 G 的子群易知 P 也为 G 的子群，且 $|P| = |H| = n$（由映射 $\varphi(h) = a^{-1}ha$ 为单射），则由 1 题的结论：$|PH| = \dfrac{|P||H|}{|P \bigcap H|} = \dfrac{n \cdot n}{1} = n^2$，又 $PH \subseteq G$，$|G = n^2$，所以 $PH = G$，则由教材中的例题结论知 $P \bigcap H = H \neq \{e\}$，矛盾。

3.

证明：由前面的习题结论知六阶群中一定有三阶子群，假设不唯一，设 A, B 为六阶群 G 两个不同的三阶子群。不妨设 $A = \{e, a, b\}$， $B = \{e, c, d\}$，则 $A \bigcap B = \{e\}$。

从而 $|AB| = \dfrac{|A||B|}{|A \bigcap B|} = 9 > 6$ 矛盾。

4.

证明：设 H 为群 G 的子群，且有 $[G:H] = 2$，则其左陪集构成的划分为：H, aH $(a \notin H)$，其右陪集构成的划分为：$H, Ha(a \notin H)$，从而 $aH = G \setminus H$

$Ha = G \setminus H$，所以 $aH = Ha$。

5.

证明：设 H_1, H_2 为群 G 的两个正规子群，记 $H = H_1 \bigcap H_2$。则对 $\forall a \in G, h \in H$，由 H_1, H_2 为群 G 的两个正规子群得：$aha^{-1} \in H_1$，$aha^{-1} \in H_2$，所以 $aha^{-1} \in H_1 \bigcap H_2$，即 $aha^{-1} \in H$，故 H 是 G 的正规子群。

6.

证明：对 $\forall a, b \in NH$，则 $\exists n_1, n_2, h_1, h_2 \in NH$, 使得 $a = n_1 h_1, b = n_2 h_2$，则 $ab^{-1} = n_1 h_1 h_2^{-1} n_2^{-1}$。又由 N 是 G 的正规子群，则对 $\forall x \in G$，$xN = Nx$。故 $\exists n_3 \in N$ 使得 $h_2^{-1} n_2^{-1} = n_3 h_2^{-1}$，则 $ab^{-1} = n_1 h_1 n_3 h_2^{-1}$，同理 $\exists n_4 \in N$，使得 $h_1 n_3 = n_4 h_1$，从而 $ab^{-1} = n_1 n_4 h_1 h_2^{-1} = (n_1 n_4)(h_1 h_2^{-1}) \in NH$，则由子群的判定定理知 NH 是 G 的子群。

7.

证明：设 G 为群且 $|G| = 2n$，则由前面习题作业结论知偶数阶群 G 中一定存在一个阶为 2 元素，即 $\exists a \in G$，$a^2 = e$，从而 $H = (a) = \{e, a\}$。由 G 为交换群，则对 $\forall x \in G$，$xH = Hx = \{x, ax\} = \{x, xa\}$，故 H 为群 G 的一个 2 阶正规子群，根据拉格朗日定理以及正规子群和商群的关系知 G 必有一个 n 阶商群。

8.

证明：

必要性 $\Rightarrow$：对 $\forall a, b \in G$，由 H 为 G 的正规子群可得：$aH \cdot bH = a(Hb)H = a(bH)H = abHH = abH$，仍为 H 的左陪集。

充分性 $\Leftarrow$：由已知可得：对 $\forall a \in G$，$aH \cdot a^{-1}H = cH$，因为 $e \in aH \cdot a^{-1}H$，从而 $e \in cH$，；又 $e \in H$，即 $e \in cH \bigcap H$，则由左陪集的性质得：$cH = H$，所以 $aH \cdot a^{-1}H = H$，则对 $\forall h \in H$，$\exists h_1, h_2 \in H$，使得 $aha^{-1}h_1 = h_2 \Rightarrow aha^{-1} = h_2 h_1^{-1} \in H$

9.

证明：由 H 是群 G 的 2 阶正规子群可设 $H = \{e, a\}$，且对 $\forall x \in G$，$xH = Hx$，即 $\{x, xa\} = \{x, ax\}$，所以 $xa = ax$，故 $a \in C$，从而 $H \subseteq C$

1.

证明：设 $H=A\bigcap B$，则由定理知 H 仍为群 G 的子群，则由拉格朗日定理得：

$|B|=|H|\cdot[B:H]$，记 $j=[B:H]=\dfrac{|B|}{|H|}$，则 $B=Hb_1\bigcup Hb_2\bigcup\cdots\bigcup Hb_j$，

$b_i\in B(i=1,.\cdots,j)$ 其中 $Hb_i(i=1,\cdots,j)$ 为互不相同的右陪集。则

$AB=AHb_1\bigcup AHb_2\bigcup\cdots\bigcup AHb_j$，又 $AH=A$，所以 $AB=Ab_1\bigcup Ab_2\bigcup\cdots\bigcup Ab_j$，

又 $Ab_i\bigcap Ab_l=\phi$，否则，若 $Ab_i\bigcap Ab_l\neq\phi$，则由陪集的性质得：$Ab_i=Ab_l$，从

而 $b_ib_l^{-1}\in A$，又 $b_ib_l^{-1}\in B$，所以 $b_ib_l^{-1}\in A\bigcap B$，即 $b_ib_l^{-1}\in H$，所以 $Hb_i=Hb_l$，

矛盾。因此根据容斥原理有：$|AB|=|Ab_1|+|Ab_2|+\cdots+|Ab_j|=j\cdot|A|$

即 $|AB|=\dfrac{|B|}{|H|}\cdot|A|=\dfrac{|A||B|}{|A\bigcap B|}$

2.

证明：假设不成立，则 $\exists a\in G$，使得 $a^{-1}Ha\bigcap H=\{e\}$，记 $P=a^{-1}Ha$，由 H 为 G

的子群易知 P 也为 G 的子群，且 $|P|=|H|=n$（由映射 $\varphi(h)=a^{-1}ha$ 为单射），则

由 1 题的结论：$|PH|=\dfrac{|P||H|}{|P\bigcap H|}=\dfrac{n\cdot n}{1}=n^2$，又 $PH\subseteq G$，$|G=n^2$，所以 $PH=G$，

则由教材中的例题结论知 $P\bigcap H=H\neq\{e\}$，矛盾。

3.

证明：由前面的习题结论知六阶群中一定有三阶子群，假设不唯一，设 A,B 为六

阶群 G 两个不同的三阶子群。不妨设 $A=\{e,a,b\}$，$B=\{e,c,d\}$，则 $A\bigcap B=\{e\}$。

从而 $|AB|=\dfrac{|A||B|}{|A\bigcap B|}=9>6$ 矛盾。

4.

证明：设 H 为群 G 的子群，且有 $[G:H]=2$，则其左陪集构成的划分为：H,aH

$(a\notin H)$，其右陪集构成的划分为：$H,Ha(a\notin H)$，从而 $aH=G\setminus H$

$Ha=G\setminus H$，所以 $aH=Ha$。

5.

证明：设 H_1,H_2 为群 G 的两个正规子群，记 $H=H_1\bigcap H_2$。则对 $\forall a\in G,h\in H$，由 H_1,H_2 为群 G 的两个正规子群得：$aha^{-1}\in H_1$，$aha^{-1}\in H_2$，所以 $aha^{-1}\in H_1\bigcap H_2$，即 $aha^{-1}\in H$，故 H 是 G 的正规子群。

6.

证明：对 $\forall a,b\in NH$，则 $\exists n_1,n_2,h_1,h_2\in NH,$ 使得 $a=n_1h_1,b=n_2h_2$，则 $ab^{-1}=n_1h_1h_2{}^{-1}n_2{}^{-1}$。又由 N 是 G 的正规子群，则对 $\forall x\in G$，$xN=Nx$。故 $\exists n_3\in N$ 使得 $h_2{}^{-1}n_2{}^{-1}=n_3h_2{}^{-1}$，则 $ab^{-1}=n_1h_1n_3h_2{}^{-1}$，同理 $\exists n_4\in N$，使得 $h_1n_3=n_4h_1$，从而 $ab^{-1}=n_1n_4h_1h_2{}^{-1}=(n_1n_4)(h_1h_2{}^{-1})\in NH$，则由子群的判定定理知 NH 是 G 的子群。

7.

证明：设 G 为群且 $|G|=2n$，则由前面习题作业结论知偶数阶群 G 中一定存在一个阶为 2 元素，即 $\exists a\in G$，$a^2=e$，从而 $H=(a)=\{e,a\}$。由 G 为交换群，则对 $\forall x\in G$，$xH=Hx=\{x,ax\}=\{x,xa\}$，故 H 为群 G 的一个 2 阶正规子群，根据拉格朗日定理以及正规子群和商群的关系知 G 必有一个 n 阶商群。

8.

证明：

必要性 $\Rightarrow$：对 $\forall a,b\in G$，由 H 为 G 的正规子群可得：$aH\cdot bH=a(Hb)H=a(bH)H=abHH=abH$，仍为 H 的左陪集。

充分性 $\Leftarrow$：由已知可得：对 $\forall a\in G$，$aH\cdot a^{-1}H=cH$，因为 $e\in aH\cdot a^{-1}H$，从而 $e\in cH$，；又 $e\in H$，即 $e\in cH\bigcap H$，则由左陪集的性质得：$cH=H$，所以 $aH\cdot a^{-1}H=H$，则对 $\forall h\in H$，$\exists h_1,h_2\in H$，使得 $aha^{-1}h_1=h_2\Rightarrow aha^{-1}=h_2h_1{}^{-1}\in H$

9.

证明：由 H 是群 G 的 2 阶正规子群可设 $H=\{e,a\}$，且对 $\forall x\in G$，$xH=Hx$，即 $\{x,xa\}=\{x,ax\}$，所以 $xa=ax$，故 $a\in C$，从而 $H\subseteq C$