Вывод таблиц истинности

- $X \to X$

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A$

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X$

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X$

Упражнение

Доказать (построив вывод):

1. $\vdash_L (\neg\mathscr{A} \supset \mathscr{A}) \supset \mathscr{A}$.
2. $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}, \mathscr{B} \supset \mathscr{C} \vdash_L \mathscr{A} \supset \mathscr{C}$.
3. $\mathscr{A} \supset (\mathscr{B} \supset \mathscr{C}) \vdash_L \mathscr{B} \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{C})$.
4. $\vdash_L (\neg\mathscr{B} \supset \neg\mathscr{A}) \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{B})$.

В математических рассуждениях часто какое-нибудь утверждение доказывают в предположении верности другого утверждения $\mathscr{A}$, после чего заключают, что верно утверждение «если $\mathscr{A}$, то $\mathscr{B}$». Для системы L этот прием обосновывается следующей теоремой.

Предложение 1.8 *). (Теорема дедукции.) *Если Γ — множество формул, $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — формулы и $\Gamma, \mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$, то $\Gamma \vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{B}$. В частности, если $\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$, то $\vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{B}$* (Эрбран [1930]).

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n$ есть вывод из $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$, где $\mathscr{B}_n = \mathscr{B}$. Индукцией по i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ докажем, что $\Gamma \vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{B}_i$. Прежде всего, $\mathscr{B}_1$ должно быть либо элементом Γ, либо быть аксиомой системы L, либо совпадать с $\mathscr{A}$. По схеме аксиом (A1), $\mathscr{B}_1 \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{B}_1)$ есть аксиома. Поэтому в первых двух случаях $\Gamma \vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{B}_1$ по MP. В третьем случае, т. е. когда $\mathscr{B}_1$ совпадает с $\mathscr{A}$, по лемме 1.7 мы имеем $\vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{B}_1$ и, следовательно, $\Gamma \vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{B}_1$. Тем самым случай $i = 1$ исчерпан. Допустим теперь, что $\Gamma \vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{B}_k$ для любого $k < i$. Для $\mathscr{B}_i$ имеем четыре возможности: $\mathscr{B}_i$ есть аксиома, или $\mathscr{B}_i \in \Gamma$, или $\mathscr{B}_i$ есть $\mathscr{A}$, или $\mathscr{B}_i$ следует по modus ponens из некоторых $\mathscr{B}_j$ и $\mathscr{B}_m$, где $j < i$, $m < i$ и $\mathscr{B}_m$ имеет вид $\mathscr{B}_j \supset \mathscr{B}_i$. В первых трех случаях $\Gamma \vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{B}_i$ доказывается так же, как для $i = 1$. В последнем случае применим индуктивное предположение, согласно которому $\Gamma \vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{B}_j$ и $\Gamma \vdash \mathscr{A} \supset (\mathscr{B}_j \supset \mathscr{B}_i)$. По схеме аксиом (A2), $\vdash (\mathscr{A} \supset (\mathscr{B}_j \supset \mathscr{B}_i)) \supset ((\mathscr{A} \supset \mathscr{B}_j) \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{B}_i))$. Следовательно, по MP, $\Gamma \vdash (\mathscr{A} \supset \mathscr{B}_j) \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{B}_i)$ и, снова по MP, $\Gamma \vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{B}_i$. Таким образом, наше доказательство по индукции завершено, и для $i = n$ мы получаем требуемое утверждение. (Заметим, что проведенное доказательство позволяет по данному выводу $\mathscr{B}$ из Γ и $\mathscr{A}$ построить вывод $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ из Γ и что при доказательстве теоремы дедукции мы использовали только схемы аксиом (A1) и (A2).)

Следствие 1.9.

(i) $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}, \mathscr{B} \supset \mathscr{C} \vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{C}$.

(ii) $\mathscr{A} \supset (\mathscr{B} \supset \mathscr{C}), \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{C}$.

Доказательство (i).

(a) $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$	гипотеза
(b) $\mathscr{B} \supset \mathscr{C}$	гипотеза

*) Мы пишем $\Gamma, \mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$ вместо $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash \mathscr{B}$, и вообще $\Gamma, \mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B}$ вместо $\Gamma \cup \{\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n\} \vdash \mathscr{B}$.

(c) $\mathscr{A}$	гипотеза
(d) $\mathscr{B}$	(a), (c), MP
(e) $\mathscr{C}$	(b), (d), MP

Таким образом, $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}, \mathscr{B} \supset \mathscr{C}, \mathscr{A} \vdash \mathscr{C}$. Отсюда, по теореме дедукции, $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}, \mathscr{B} \supset \mathscr{C} \vdash \mathscr{A} \supset \mathscr{C}$.

Доказательство (ii) предлагается провести самостоятельно в качестве упражнения (использовать теорему дедукции).

Лемма 1.10. *Для любых формул $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ следующие формулы являются теоремами* L:

(a) $\neg\neg\mathscr{B} \supset \mathscr{B}$;
(b) $\mathscr{B} \supset \neg\neg\mathscr{B}$;
(c) $\neg\mathscr{A} \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{B})$;
(d) $(\neg\mathscr{B} \supset \neg\mathscr{A}) \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{B})$;
(e) $(\mathscr{A} \supset \mathscr{B}) \supset (\neg\mathscr{B} \supset \neg\mathscr{A})$;
(f) $\mathscr{A} \supset (\neg\mathscr{B} \supset \neg(\mathscr{A} \supset \mathscr{B}))$;
(g) $(\mathscr{A} \supset \mathscr{B}) \supset ((\neg\mathscr{A} \supset \mathscr{B}) \supset \mathscr{B})$.

Доказательство.

(a) $\vdash \neg\neg\mathscr{B} \supset \mathscr{B}$.

1. $(\neg\mathscr{B} \supset \neg\neg\mathscr{B}) \supset ((\neg\mathscr{B} \supset \neg\mathscr{B}) \supset \mathscr{B})$	схема аксиом (A3)
2. $\neg\mathscr{B} \supset \neg\mathscr{B}$	лемма 1.7 *)
3. $(\neg\mathscr{B} \supset \neg\neg\mathscr{B}) \supset \mathscr{B}$	1, 2, следствие 1.9 (ii)
4. $\neg\neg\mathscr{B} \supset (\neg\mathscr{B} \supset \neg\neg\mathscr{B})$	схема аксиом (A1)
5. $\neg\neg\mathscr{B} \supset \mathscr{B}$	3, 4, следствие 1.9 (i)

(b) $\vdash \mathscr{B} \supset \neg\neg\mathscr{B}$.

1. $(\neg\neg\neg\mathscr{B} \supset \neg\mathscr{B}) \supset ((\neg\neg\neg\mathscr{B} \supset \mathscr{B}) \supset \neg\neg\mathscr{B})$	схема аксиом (A3)
2. $\neg\neg\neg\mathscr{B} \supset \neg\mathscr{B}$	пункт (a), доказанный выше
3. $(\neg\neg\neg\mathscr{B} \supset \mathscr{B}) \supset \neg\neg\mathscr{B}$	1, 2, MP
4. $\mathscr{B} \supset (\neg\neg\neg\mathscr{B} \supset \mathscr{B})$	схема аксиом (A1)
5. $\mathscr{B} \supset \neg\neg\mathscr{B}$	3, 4, следствие 1.9 (i)

(c) $\vdash \neg\mathscr{A} \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{B})$.

1. $\neg\mathscr{A}$	гипотеза
2. $\mathscr{A}$	гипотеза

*) Вместо того чтобы приводить в этом месте полный вывод для $\neg\mathscr{B} \supset \neg\mathscr{B}$, мы просто ссылаемся на лемму 1.7. Поступая таким образом, мы указываем на то, что в этом месте вывод для $\neg\mathscr{B} \supset \neg\mathscr{B}$ мог бы быть выписан, имей мы на то желание, время и место. Разумеется, это есть не что иное, как обычное применение ранее установленных теорем.

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \;\Rightarrow\; A \to \neg\neg A$

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \ \Rightarrow\ \neg A \to \neg A \ \Rightarrow\ \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \ \Rightarrow\ A \to \neg\neg A \ \Rightarrow\ A \to \neg(\neg A)$

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \;\Rightarrow\; A \to \neg\neg A \;\Rightarrow\; A \to \neg(\neg A)$

A	$\neg A$

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \;\Rightarrow\; A \to \neg\neg A \;\Rightarrow\; A \to \neg(\neg A)$

A	$\neg A$
0	1

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \;\Rightarrow\; A \to \neg\neg A \;\Rightarrow\; A \to \neg(\neg A)$

A	$\neg A$
0	1
1	0

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \;\Rightarrow\; A \to \neg\neg A \;\Rightarrow\; A \to \neg(\neg A)$

A	$\neg A$
0	1
1	0

- $A \to (B \to A)$

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \ \Rightarrow\ \neg A \to \neg A \ \Rightarrow\ \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \ \Rightarrow\ A \to \neg\neg A \ \Rightarrow\ A \to \neg(\neg A)$

A	$\neg A$
0	1
1	0

- $A \to (B \to A)$
- $\neg X \to (X \to Y) \Rightarrow\ \neg A \to (A \to B)$

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \;\Rightarrow\; A \to \neg\neg A \;\Rightarrow\; A \to \neg(\neg A)$

A	$\neg A$
0	1
1	0

- $A \to (B \to A)$
- $\neg X \to (X \to Y) \Rightarrow \neg A \to (A \to B)$
- $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \;\Rightarrow\; A \to \neg\neg A \;\Rightarrow\; A \to \neg(\neg A)$

A	$\neg A$
0	1
1	0

- $A \to (B \to A)$
- $\neg X \to (X \to Y) \Rightarrow \neg A \to (A \to B)$
- $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

A	B	$A \to B$

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \;\Rightarrow\; A \to \neg\neg A \;\Rightarrow\; A \to \neg(\neg A)$

A	$\neg A$
0	1
1	0

- $A \to (B \to A)$
- $\neg X \to (X \to Y) \Rightarrow \neg A \to (A \to B)$
- $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

A	B	$A \to B$
0	0	1

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \;\Rightarrow\; A \to \neg\neg A \;\Rightarrow\; A \to \neg(\neg A)$

A	$\neg A$
0	1
1	0

- $A \to (B \to A)$
- $\neg X \to (X \to Y) \Rightarrow \neg A \to (A \to B)$
- $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \;\Rightarrow\; A \to \neg\neg A \;\Rightarrow\; A \to \neg(\neg A)$

A	$\neg A$
0	1
1	0

- $A \to (B \to A)$
- $\neg X \to (X \to Y) \Rightarrow \neg A \to (A \to B)$
- $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0

Вывод таблиц истинности

- $X \to X \;\Rightarrow\; \neg A \to \neg A \;\Rightarrow\; \neg(A) \to (\neg A)$
- $X \to \neg\neg X \;\Rightarrow\; A \to \neg\neg A \;\Rightarrow\; A \to \neg(\neg A)$

A	$\neg A$
0	1
1	0

- $A \to (B \to A)$
- $\neg X \to (X \to Y) \Rightarrow \neg A \to (A \to B)$
- $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Вывод таблиц истинности

- $A \vee B := \neg A \to B$

Вывод таблиц истинности

- $A \vee B := \neg A \to B$

A	B	$\neg A$	$\neg A \to B = A \vee B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

Вывод таблиц истинности

- $A \lor B := \neg A \to B$

A	B	$\neg A$	$\neg A \to B = A \lor B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

- $A \land B := \neg(A \to \neg B)$

Вывод таблиц истинности

- $A \vee B := \neg A \to B$

A	B	$\neg A$	$\neg A \to B = A \vee B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

- $A \wedge B := \neg(A \to \neg B)$

A	B	$\neg B$	$A \to \neg B$	$\neg(A \to \neg B) = A \wedge B$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1