Аксиомы теории групп

$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$

- $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \land (x \cdot y = u) \to (z = u)$

Аксиомы теории групп

$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$

- $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \to (z = u)$
- $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$

Аксиомы теории групп

$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$

- $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \to (z = u)$
- $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- $\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$

Аксиомы теории групп

$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$

- $\forall x, y, z, u \; (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \to (z = u)$
- $\forall x, y, z \; (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- $\exists e \forall x \; (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- $\forall x \exists y \; (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Аксиомы теории групп

$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$

- $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \to (z = u)$
- $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- $\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- $\forall x \exists y \ (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

Аксиомы теории групп

$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$

- $\forall x, y, z, u\ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- $\forall x, y, z\ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- $\exists e \forall x\ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- $\forall x \exists y\ (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

- $\forall i\ \ [\forall x\ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$

Аксиомы теории групп

$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$

- $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- $\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- $\forall x \exists y \ (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

- $\forall i \ \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$

Доказательство

Аксиомы теории групп

$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$

- $\forall x, y, z, u \; (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \to (z = u)$
- $\forall x, y, z \; (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- $\exists e \forall x \; (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- $\forall x \exists y \; (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

- $\forall i \;\; [\forall x \; (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \to (e = i)$

Доказательство

- $(i \cdot e) = i$

Аксиомы теории групп

$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$

- $\forall x, y, z, u\ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- $\forall x, y, z\ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- $\exists e \forall x\ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- $\forall x \exists y\ (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

- $\forall i\ \ [\forall x\ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$

Доказательство

- $(i \cdot e) = i$
- $(i \cdot e) = e$

Аксиомы теории групп

$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$

- $\forall x, y, z, u \; (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \to (z = u)$
- $\forall x, y, z \; (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- $\exists e \forall x \; (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- $\forall x \exists y \; (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

- $\forall i \;\; [\forall x \; (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \to (e = i)$

Доказательство

- $(i \cdot e) = i$
- $(i \cdot e) = e$
- $\therefore e = i$

Формализация аксиом

$$\mathfrak{G} = (\mathbb{G}, Eq, G)$$

$$Eq(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$G(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$$

$$\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \to (z = u)$$

- $\forall x \forall y \forall z \forall u \ \ G(x, y, z) \wedge G(x, y, u) \to Eq(z, u)$

Формализация аксиом

$$\mathfrak{G} = (\mathbb{G}, Eq, G)$$

$$Eq(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$G(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$$

$$\forall x, y, z, u\ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$$

- $\forall x \forall y \forall z \forall u\ G(x, y, z) \wedge G(x, y, u) \rightarrow Eq(z, u)$
- $\forall x \forall y \forall z \forall u\ \overline{G(x, y, z) \wedge G(x, y, u)} \vee Eq(z, u)$

Формализация аксиом

$$\mathfrak{G} = (\mathbb{G}, Eq, G)$$

$$Eq(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$G(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$$

$$\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$$

- $\forall x \forall y \forall z \forall u \ G(x, y, z) \wedge G(x, y, u) \rightarrow Eq(z, u)$
- $\forall x \forall y \forall z \forall u \ \overline{G(x, y, z) \wedge G(x, y, u)} \vee Eq(z, u)$
- $\forall x \forall y \forall z \forall u \ \neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$

Формализация аксиом

$$\mathfrak{G} = (\mathbb{G}, Eq, G)$$

$$Eq(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$G(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$$

$$\forall x, y, z, u\ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \to (z = u)$$

- $\forall x \forall y \forall z \forall u\ G(x, y, z) \wedge G(x, y, u) \to Eq(z, u)$
- $\forall x \forall y \forall z \forall u\ \overline{G(x, y, z) \wedge G(x, y, u)} \vee Eq(z, u)$
- $\forall x \forall y \forall z \forall u\ \neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$
- $\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$

Формализация аксиом

$$\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$$

- $\exists e \forall x \ G(x, e, x) \land G(e, x, x)$

Формализация аксиом

$$\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$$

- $\exists e \forall x \ G(x, e, x) \wedge G(e, x, x)$
- $G(x, e, x) \wedge G(e, x, x)$

Формализация аксиом

$$\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$$

- $\exists e \forall x \ \ G(x, e, x) \wedge G(e, x, x)$
- $G(x, e, x) \wedge G(e, x, x)$
- $G(t, e, t), \ \ G(e, t, t)$

Формализация теоремы

$$\forall i \;\; [\forall x \; (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$$

- $\forall i \;\; [\forall x \;\; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)$

Формализация теоремы

$$\forall i \; [\forall x \; (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \to (e = i)$$

- $\forall i \; [\forall x \; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \to Eq(e, i)$
- $\overline{\forall i \; [\forall x \; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \to Eq(e, i)}$

Формализация теоремы

$$\forall i\ \ [\forall x\ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \to (e = i)$$

- $\forall i\ \ [\forall x\ \ G(x, i, x) \land G(i, x, x)] \to Eq(e, i)$
- $\overline{\forall i\ \ [\forall x\ \ G(x, i, x) \land G(i, x, x)] \to Eq(e, i)}$
- $\overline{\forall i\ \overline{[\forall x\ \ G(x, i, x) \land G(i, x, x)]} \lor Eq(e, i)}$

Формализация теоремы

$$\forall i \; [\forall x \; (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \to (e = i)$$

- $\forall i \; [\forall x \; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \to Eq(e, i)$
- $\overline{\forall i \; [\forall x \; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \to Eq(e, i)}$
- $\overline{\forall i \; \overline{[\forall x \; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)]} \vee Eq(e, i)}$
- $\exists i \; \overline{\overline{[\forall x \; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)]} \vee Eq(e, i)}$

Формализация теоремы

$$\forall i\ \ [\forall x\ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \to (e = i)$$

- $\forall i\ \ [\forall x\ \ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x)] \to Eq(e,i)$
- $\overline{\forall i\ \ [\forall x\ \ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x)] \to Eq(e,i)}$
- $\overline{\forall i\ \overline{[\forall x\ \ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x)]} \vee Eq(e,i)}$
- $\exists i\ \overline{\overline{[\forall x\ \ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x)]} \vee Eq(e,i)}$
- $\exists i\ \overline{\overline{[\forall x\ \ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x)]}} \wedge \neg Eq(e,i)$

Формализация теоремы

$$\forall i \;\; [\forall x \; (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$$

- $\forall i \;\; [\forall x \;\; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)$
- $\overline{\forall i \;\; [\forall x \;\; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)}$
- $\overline{\forall i \; \overline{[\forall x \;\; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)]} \vee Eq(e, i)}$
- $\exists i \; \overline{\overline{[\forall x \;\; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)]} \vee Eq(e, i)}$
- $\exists i \; \overline{\overline{[\forall x \;\; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)]}} \wedge \neg Eq(e, i)$
- $\exists i \;\; [\forall x \;\; G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \wedge \neg Eq(e, i)$

Формализация теоремы

$$\forall i\ \ [\forall x\ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \to (e = i)$$

- $\forall i\ \ [\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \to Eq(e, i)$
- $\overline{\forall i\ \ [\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \to Eq(e, i)}$
- $\overline{\forall i\ \overline{[\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)]} \vee Eq(e, i)}$
- $\exists i\ \overline{\overline{[\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)]} \vee Eq(e, i)}$
- $\exists i\ \overline{\overline{[\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)]}} \wedge \neg Eq(e, i)$
- $\exists i\ \ [\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \wedge \neg Eq(e, i)$
- $\exists i \forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x) \neg Eq(e, i)$

Формализация теоремы

$$\forall i\ \ [\forall x\ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \to (e = i)$$

- $\forall i\ \ [\forall x\ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x)] \to Eq(e,i)$
- $\overline{\forall i\ \ [\forall x\ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x)] \to Eq(e,i)}$
- $\overline{\forall i\ \overline{[\forall x\ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x)]} \vee Eq(e,i)}$
- $\exists i\ \overline{\overline{[\forall x\ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x)]} \vee Eq(e,i)}$
- $\exists i\ \overline{\overline{[\forall x\ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x)]}} \wedge \neg Eq(e,i)$
- $\exists i\ \ [\forall x\ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x)] \wedge \neg Eq(e,i)$
- $\exists i \forall x\ G(x,i,x) \wedge G(i,x,x) \neg Eq(e,i)$
- $G(x,i,x) \wedge G(i,x,x) \wedge \neg Eq(e,i)$

Формализация теоремы

$$\forall i\ \ [\forall x\ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \to (e = i)$$

- $\forall i\ \ [\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \to Eq(e, i)$
- $\overline{\forall i\ \ [\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \to Eq(e, i)}$
- $\overline{\forall i\ \overline{[\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)]} \vee Eq(e, i)}$
- $\exists i\ \overline{\overline{[\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)]} \vee Eq(e, i)}$
- $\exists i\ \overline{\overline{[\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)]}} \wedge \neg Eq(e, i)$
- $\exists i\ \ [\forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \wedge \neg Eq(e, i)$
- $\exists i \forall x\ \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x) \neg Eq(e, i)$
- $G(x, i, x) \wedge G(i, x, x) \wedge \neg Eq(e, i)$
- $G(s, i, s),\ \ G(i, s, s),\ \ \neg Eq(e, i)$

Доказательство теоремы

$$\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$$

$$G(s, i, s)$$

$$G(i, s, s)$$

$$G(e, t, t)$$

$$G(t, e, t)$$

$$\neg Eq(e, i)$$

Доказательство теоремы

$$\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$$

$$\downarrow$$

$$x := i,\ \ y := s,\ \ z := s$$

$$\neg G(i, s, u) \vee Eq(s, u) \longleftarrow G(i, s, s)$$

$$G(s, i, s)$$

$$G(i, s, s)$$

$$G(e, t, t)$$

$$G(t, e, t)$$

$$\neg Eq(e, i)$$

Доказательство теоремы

$$
\begin{tikzcd}
\neg G(x,y,z) \vee \neg G(x,y,u) \vee Eq(z,u) \arrow[dd] & \\
& G(s,i,s) \\
\begin{array}{c} x := i,\ \ y := s,\ \ z := s \\ \neg G(i,s,u) \vee Eq(s,u) \end{array} \arrow[dd] & G(i,s,s) \arrow[l] \\
& G(e,t,t) \\
\begin{array}{c} t := i,\ \ s := e,\ \ u := t = i \\ Eq(e,i) \end{array} & G(t,e,t) \arrow[l] \\
& \neg Eq(e,i)
\end{tikzcd}
$$

Доказательство теоремы

$$
\begin{tikzcd}
\neg G(x, y, z) \lor \neg G(x, y, u) \lor Eq(z, u) \arrow[dd] & \\
& G(s, i, s) \\
\begin{array}{c} x := i,\ \ y := s,\ \ z := s \\ \neg G(i, s, u) \lor Eq(s, u) \end{array} \arrow[dd] & G(i, s, s) \arrow[l] \\
& G(e, t, t) \\
\begin{array}{c} t := i,\ \ s := e,\ \ u := t = i \\ Eq(e, i) \end{array} \arrow[d] & G(t, e, t) \arrow[l] \\
\square & \neg Eq(e, i) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$