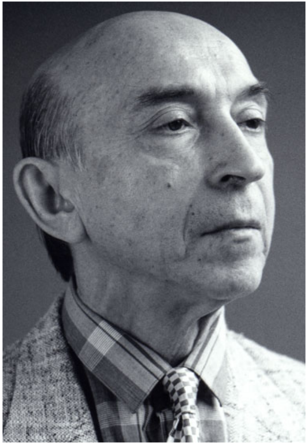

Lotfi Zadeh
Fuzzy sets (1965)

Нечеткие логические связки

$$x, y \in \{0, 1\}$$

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$ $\qquad$ $u, v \in [0, 1]$

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$

$u, v \in [0, 1]$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$

$u, v \in [0, 1]$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

$$\neg u = (1 - u)$$

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$u, v \in [0, 1]$

$\neg u = (1 - u)$

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$

$u, v \in [0, 1]$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

$$\neg u = (1 - u)$$

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$$u \widetilde{\wedge} v = \min(u, v)$$
$$u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad \max(u, v) = \max(v, u)$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad \max(u, v) = \max(v, u)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \min(u, v) = \min(u, v)$$

Нечеткие логические связки

$$
\begin{aligned}
x \vee y \qquad & \qquad u \widetilde{\vee} v = \max(u, v) \\
x \wedge y \qquad & \qquad u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v)
\end{aligned}
$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad \max(u, v) = \max(v, u)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \min(u, v) = \min(u, v)$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w)$$

Нечеткие логические связки

$$
\begin{array}{cc}
\begin{gathered} x \vee y \\ x \wedge y \end{gathered} & \begin{gathered} u \widetilde{\vee} v = \max(u, v) \\ u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v) \end{gathered} \\[1em]
x \vee y = y \vee x & \max(u, v) = \max(v, u) \\[1em]
x \wedge y = y \wedge x & \min(u, v) = \min(u, v) \\[1em]
x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z & \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w) \\[1em]
x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z & \min(u, \min(v, w)) = \min(\min(u, v), w)
\end{array}
$$

Нечеткие логические связки

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} x \vee y \\ x \wedge y \end{array} & \begin{array}{c} u \widetilde{\vee} v = \max(u, v) \\ u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v) \end{array} \\[1em]
x \vee y = y \vee x & \max(u, v) = \max(v, u) \\[1em]
x \wedge y = y \wedge x & \min(u, v) = \min(u, v) \\[1em]
x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z & \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w) \\[1em]
x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z & \min(u, \min(v, w)) = \min(\min(u, v), w) \\[1em]
\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} & 1 - \max(u, v) = \min(1 - u, 1 - v)
\end{array}
$$

Нечеткие логические связки

$$
\begin{aligned}
& x \vee y && u \widetilde{\vee} v = \max(u, v) \\
& x \wedge y && u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v) \\[1ex]
& x \vee y = y \vee x && \max(u, v) = \max(v, u) \\[1ex]
& x \wedge y = y \wedge x && \min(u, v) = \min(u, v) \\[1ex]
& x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z && \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w) \\[1ex]
& x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z && \min(u, \min(v, w)) = \min(\min(u, v), w) \\[1ex]
& \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} && 1 - \max(u, v) = \min(1 - u, 1 - v) \\[1ex]
& \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} && 1 - \min(u, v) = \max(1 - u, 1 - v)
\end{aligned}
$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$
$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$
$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \begin{aligned} &u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) = \\ &= u + v + w - uv - uw - vw + uvw \end{aligned}$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \tilde{\vee} v = u + v - uv$$
$$x \wedge y \qquad u \tilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \begin{aligned} &u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) = \\ &= u + v + w - uv - uw - vw + uvw \end{aligned}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad u(vw) = (uv)w$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$
$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \begin{aligned} & u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) = \\ & = u + v + w - uv - uw - vw + uvw \end{aligned}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad u(vw) = (uv)w$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \qquad \begin{aligned} & 1 - (u + v - vw) = 1 - u - v + vw = \\ & = (1 - u)(1 - v) \end{aligned}$$

Нечеткие логические связки

$x \vee y$	$u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$
$x \wedge y$	$u \widetilde{\wedge} v = uv$
$x \vee y = y \vee x$	$u + v - uv = v + u - vu$
$x \wedge y = y \wedge x$	$uv = vu$
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) =$ $= u + v + w - uv - uw - vw + uvw$
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	$u(vw) = (uv)w$
$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$	$1 - (u + v - vw) = 1 - u - v + vw =$ $= (1 - u)(1 - v)$
$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$	$(1 - u) + (1 - v) - (1 - u)(1 - v) =$ $= 1 - u + 1 - v - 1 + u + v + uv =$ $= 1 - uv$

Нормы и конормы

Функции $T, S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ называют нормой и конормой, если они:

1. монотонны;
2. ассоциативны;
3. коммутативны;
4. связаны соотношениями де Моргана $1 - T(u, v) = S(1-u, 1-v)$ и $1 - S(u, y) = T(1-u, 1-v)$;
5. удовлетворяют граничным условиям $T(0,0) = T(0,1) = T(1,0) = 0$, $T(1,1) = 1$, $S(1,1) = S(0,1) = T(1,0) = 1$, $S(0,0) = 0$