Übungsblatt 9 - mit Lösungen

Turing-Maschinen

Grundlagen der theoretischen Informatik / Theoretische Informatik

Studiengang Gesundheitsinformatik / Angewandte Informatik

Wintersemester 2015/2016

Prof. Barbara Staehle, HTWG Konstanz

Hinweise für alle Übungsaufgaben:

- Sie können und sollten alle in der Vorlesung vorgestellten Turing-Maschinen als Inspiration für die zu bearbeitenden Aufgaben nutzen.
- Insbesondere können Sie den bei der TM T_V verwendeten Trick nutzen, welcher die Bewegungsanweisung „nicht bewegen" ermöglicht. Ihre Bewegungsanweisungen vergrößern sich also auf $\leftarrow, \rightarrow, \circlearrowleft$ (nach link, nach rechts, stehenbleiben).

Aufgabe 9.1 Die Vorvorgängerfunktion

Teilaufgabe 9.1.1 Die Turing-Maschine T_{-2}, 3 Punkte

Erstellen Sie die Turingmaschine T_{-2} welche die Vorvorgängerfunktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto \begin{cases} n-2 & \text{falls } n \geq 2 \\ 0 & \text{falls } n < 2 \end{cases}$ berechnet.

Geben Sie die Zustandsübergangsfunktion δ sowohl in tabellarischer Form, als auch in Form eines erweiterten Zustandsübergangsdiagrammes an.

Achten Sie darauf, dass T_{-2}

- für die unär codierte Eingabe n die unär codierte Ausgabe $f(n)$ ausgibt und erfolgreich terminiert,
- auch $f(0), f(1), f(2)$ korrekt berechnet werden.

Lösung

$T_{-2} = (S, \Sigma, \Pi, \delta, s_0, \square, F)$ mit

- $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$
- $\Sigma = \{1\}$
- $\Pi = \{1, \square\}$
- $F = \{s_4\}$
- δ siehe Abbildung 1.

Teilaufgabe 9.1.2 Arbeitsweise von T_{-2}, 2 Punkte

Berechnen Sie die Endkonfiguration für T_{-2} unter der Eingabe von

1. $\omega = \varepsilon$
2. $\omega = 1$

δ	1	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, \square, \leftarrow)$
s_1	$(s_2, \square, \leftarrow)$	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	-	-

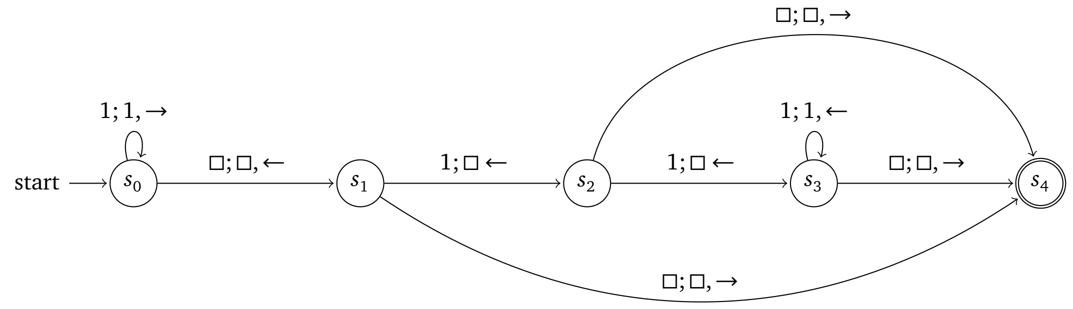


Abbildung 1: Zustandsübergangsfunktion von T_{-2}

3. $\omega = 11$
4. $\omega = 111$

Geben Sie alle Konfigurationen an, welche, ausgehend von der Startkonfiguration, durchlaufen werden.

Lösung

1. $(\square, s_0, \square) \vdash (\square, s_1, \square\square) \vdash (\square\square, s_4, \square)$
2. $(\square, s_0, 1) \vdash (\square 1, s_0, \square) \vdash (\square, s_1, 1\square) \vdash (\square, s_2, \square\square) \vdash (\square\square, s_4, \square)$
3. $(\square, s_0, 11) \vdash (\square 1, s_0, 1) \vdash (\square 11, s_0, \square) \vdash (\square 1, s_1, 1\square) \vdash (\square, s_2, 1\square\square) \vdash (\square, s_3, \square\square\square\square) \vdash (\square\square, s_4, \square\square\square\square)$
4. $(\square, s_0, 111) \vdash (\square 1, s_0, 11) \vdash (\square 11, s_0, 1) \vdash (\square 111, s_0, \square) \vdash (\square 11, s_1, 1\square) \vdash (\square, s_2, 11\square\square) \vdash (\square, s_3, 1\square\square\square) \vdash (\square, s_3, \square 1\square\square\square\square) \vdash (\square\square, s_4, 1\square\square\square\square)$

Teilaufgabe 9.1.3 Die Maschinen T_{-m}, 1 Punkt

Welche Idee würden Sie nutzen, um T_{-2} zur Maschine T_{-m} zu erweitern, welche für ein festes $2 < m \in \mathbb{N}$ die Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto \begin{cases} n - m & \text{falls } n \geq m \\ 0 & \text{falls } n < m \end{cases}$ berechnet? Wie unterscheiden sich T_{-m} und T_{-2}?

Lösung

Einfach statt bisher 2 „Rückwärtszuständen“ wo die 1er gelöscht werden, m Rückwärtszustände nutzen. T_{-m} hätte also $3 + m$ Zustände.

Aufgabe 9.2 Binäre Addition

Ziel dieser Aufgabe ist die Erstellung der TM T_{b+1}, welche zu einer *im Binärformat* angegeben Zahl n eine 1 addiert. Hierzu sollten Sie vorab zwei andere Teilaufgaben lösen.

Teilaufgabe 9.2.1 1 Punkt

Rechnen Sie die Zahlen $0 - 15$ ins Binärformat um und addieren Sie jeweils 1 zu jeder Zahl. Um den Additionsvorgang besser analysieren zu können, wäre es vorteilhaft, die Rechnungen alle untereinander zu schreiben, bzw. eine Tabelle mit den Spalten n und $n + 1$ anzulegen.

LÖSUNG

n	$n+1$
0	1
1	10
10	11
11	100
100	101
101	110
110	111
111	1000
1000	1001
1001	1010
1010	1011
1011	1100
1100	1101
1101	1110
1110	1111
1111	10000

TEILAUFGABE 9.2.2 2 PUNKTE

Analysieren Sie Ihre Additionstabelle und leiten Sie eine allgemeine Regel ab, wie sich die Zahl $n+1$ binär geschrieben von der Zahl n binär geschrieben unterscheidet. Nutzen Sie diese Regel, um grundlegende, für die TM T_{b+1} wichtige Mechanismen anzugeben und die Arbeitsweise von T_{b+1} zu beschreiben.

LÖSUNG

Beobachtungen:

- Wenn die letzte Stelle von n eine 0 ist, dann verändert sich diese bei $n+1$ einfach zur 1.
- Wenn die letzte Stelle von n eine 1 ist, dann verändert sich diese zur 0 und man wiederholt diese Betrachtung bei der vorletzten Stelle usw.
- Wenn n nur aus 1en besteht, dann ist $n+1$ eine um eine Stelle längere Zahl mit einer führenden 1 gefolgt von 0en.

Arbeitsweise von T_{b+1}

1. Laufe über das Eingabewort, kehre um, sobald das erste Blank gefunden ist
2. Sieh dir das letzte Zeichen X an.
3. Falls $X = 0$, dann ersetze diese durch eine 1, laufe zum linken Wortanfang, fertig.
4. Falls $X = 1$, dann ersetze diese durch eine 0, merke dir 1 im Übertrag gehe zu 2.
5. Falls $X = \square$ und noch ein Übertrag da ist, dann schreibe eine 1 und halte an.

TEILAUFGABE 9.2.3 3 PUNKTE

Nutzen Sie nun Ihre Überlegungen aus Aufgabe 9.2.2, um die TM T_{b+1} zu konstruieren, welche $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, f(n) = n+1$ mit binär codierter Eingabe n und Ausgabe $n+1$ berechnet.

Geben Sie die Zustandsübergangsfunktion δ in tabellarischer Form *oder* in Form eines erweiterten Zustandsübergangsdiagrammes an.

δ	0	1	$\square$
s_0	$(s_0, 0, \rightarrow)$	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, \square, \leftarrow)$
s_1	$(s_2, 1, \leftarrow)$	$(s_1, 0, \leftarrow)$	$(s_3, 1, \circlearrowleft)$
s_2	$(s_2, 0, \leftarrow)$	$(s_2, 1, \leftarrow)$	$(s_3, \square, \rightarrow)$
s_3	-	-	-

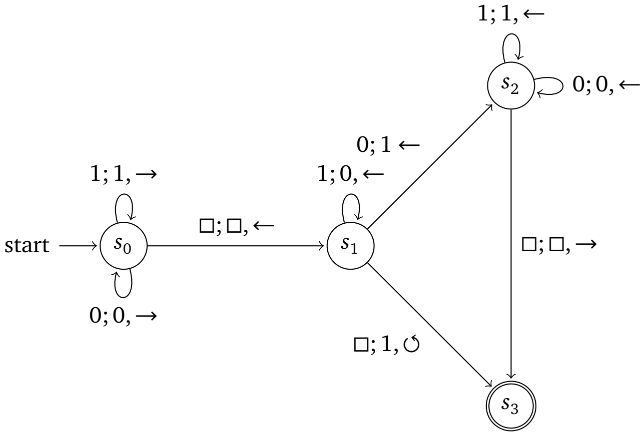


Abbildung 2: Zustandsübergangsfunktion von T_{b+1}

LÖSUNG

$T_{b+1} = (S, \Sigma, \Pi, \delta, s_0, \square, F)$ mit

- $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\Pi = \{0, 1, \square\}$
- $F = \{s_3\}$
- δ siehe Abbildung 2.

TEILAUFGABE 9.2.4 ARBEITSWEISE VON T_{b+1}, 2 PUNKTE

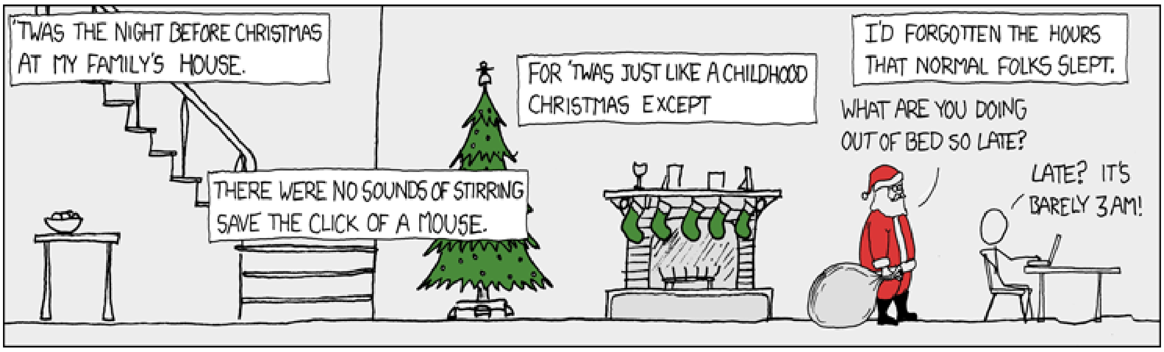
Berechnen Sie die Endkonfiguration für T_{b+1} unter der Eingabe von

1. $\omega = \varepsilon$
2. $\omega = 0$
3. $\omega = 1$
4. $\omega = 111$

Geben Sie alle Konfigurationen an, welche, ausgehend von der Startkonfiguration durchlaufen werden.

LÖSUNG

1. $(\square, s_0, \square) \vdash (\square, s_1, \square\square) \vdash (\square, s_3, 1\square)$
2. $(\square, s_0, 0) \vdash (0, s_0, \square) \vdash (\square, s_1, 0\square) \vdash (\square, s_2, \square 1\square) \vdash (\square\square, s_3, 1\square)$
3. $(\square, s_0, 1) \vdash (\square 1, s_0, \square) \vdash (\square, s_1, 1\square) \vdash (\square, s_1, \square 0\square) \vdash (\square, s_3, 10\square)$
4. $(\square, s_0, 111) \vdash (\square 1, s_0, 11) \vdash (\square 11, s_0, 1) \vdash (\square 111, s_0, \square) \vdash (\square 11, s_1, 1\square) \vdash (\square 1, s_1, 10\square) \vdash (\square, s_1, 100\square) \vdash (\square, s_1, \square 000\square) \vdash (\square, s_3, 1000\square)$



Frohe Weihnachten und erholsame Ferien ohne allzu viel Arbeit! (Quelle: xkcd.com)