4/4/95 $\boxed{\text{Eléments spectraux}}$ Cours Maday

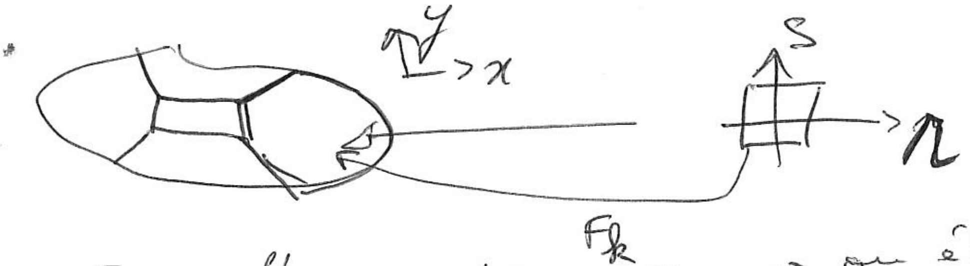
(1)

1er exemple : Eq de Poisson en multidomaine.

$-\Delta u = f$ sur Ω $\longrightarrow$ Elts spectraux

$\bar\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} \bar\Omega_k \qquad \Omega_k \cap \Omega_\ell = \emptyset$ (non recouvrants)

$\Omega_k = F_k(\mathcal{C}) \qquad \mathcal{C} =]-1,+1[^d \qquad d = 1, 2$ ou 3



F_k suffisamment régulier $\rightarrow$ on élimine les applic$^\text{e}$ du type

Formul$^\text{n}$ variationnelle :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

galerkin X_N approx de $H_0^1(\Omega)$

$$X_N = \{ v_N \in \mathcal{C}^0(\bar\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \mid v_N|_{\Omega_k} \circ F_k \in \mathbb{P}_N(\mathcal{C}) \}$$

$\mathbb{P}_N$ polynômes de degré par var $\leq N$

On cherche $u_N \mid \forall v_N \in X_N$

$$\longrightarrow \int_\Omega \nabla u_N \nabla v_N = \int_\Omega f v_N$$

$$\| u - u_N \|_{H_1} \leq C \inf_{v_N \in X_N} \| u - v_N \| \leq \sum_k N^{1-s} \|u\|_{H^s(\Omega_k)}$$

Rappels sur l'intégra$^\text{n}$ numérique :

Intégrer $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx$ de façon la plus exacte possible.

Plusieurs possibilités : $\rightarrow$ méth. composée $\begin{cases}\text{rectangle}\\ \text{trapèze}\\ \text{Simpson}\end{cases}$

$\rightarrow$ gauss.

méth de gauss : Intègre de façon <u>exacte</u> des polynômes de degré élevé.

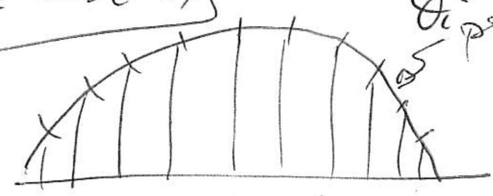
Th : $\exists$ des points $\xi_0 = -1 < \xi_1 < \dots < \xi_{N-1} < \xi_N = 1$ ②

$\exists\ \rho_0 \dots \rho_N > 0$

$$\sum_{i=0}^{N} \varphi(\xi_i)\rho_i = \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathbb{P}_{2N-1}$$ (intégra° exacte dans $\mathbb{P}_{2N-1}$)

$\boxed{\xi_i = \cos(\theta_i)}$

θ_i pratiqu^t equidistants.



ξ_i resserrés (points de gauss Lobatto)

gauss Lobatto

$$\forall \varphi \in \mathbb{P}_{2N-1} \quad \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = \sum_{GL} \varphi \equiv \sum_{i=0}^{N} \varphi(\xi_i)\rho_i$$

i.e. l'intégration des $\mathbb{P}_{2N-1}$ est <u>exacte</u>

Pour la formulation variationnelle.

$$\int_\Omega \underset{\text{discrétise en sous domaines}}{\longrightarrow} = \sum \int_{\Omega K} \underset{\text{par chgt de variable sur }]-1,+1[^d \text{ (Jacobien)}}{\longrightarrow} = \sum \int_{\mathcal{E}}$$

galerkin + Intégration numérique

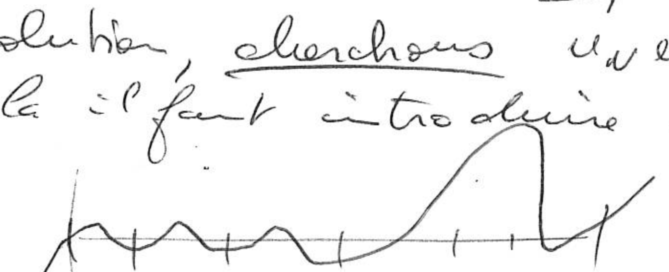
On cherche un $u_N \in X_N \mid \forall v_N \in X_N$

$$\sum_k \sum_{GL} (\nabla_{xy} u_N \nabla_{xy} v_N) \circ F_k J_k = \sum_k \sum_{GL} (f v_N) \circ F_k J_k$$

$$\sum_k \sum_{GL} \alpha_k \underline{\nabla_{rs}(u_N \circ F_k)}\ \underline{\nabla_{rs}(v_N \circ F_k)} J_k = \sum_k \sum_{GL} f \circ F_k\, v_N \circ F_k J_k$$

gradient de polynômes, donc trivial.

On est capable de calculer cette $\sum\sum$ si on nous donne u_N et v_N. Maintenant passons à l'étape suivante : au lieu de <u>vérifier</u> que u_N et v_N forment une solution, <u>cherchons</u> u_N et v_N tq solution. Pour cela il faut introduire une base.



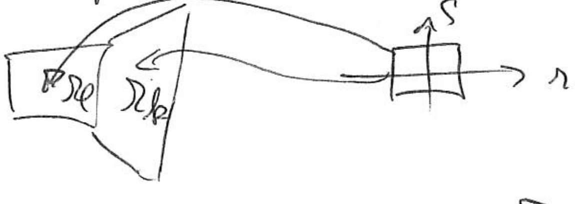
$h_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ h_i est l'interpolant de Lagrange valant 1 au point de Gauss Lobatto ξ_i et ϕ aux autres ξ_j

si $\varphi \in \mathbb{P}_N(-1,+1)$ $\quad \varphi = \sum_{i=0}^{N} \varphi(\xi_i) h_i$

$\Rightarrow \boxed{h_i(r)\, h_j(s) \text{ base de } \mathbb{P}_N(\Sigma)}$ Cette base est OK

car les inconnues sont les valeurs aux points.

Imposons maintenant des conditions de régularité par les transformations F_k, i.e. "recollons les morceaux".



"$F_k \equiv F_l$ sur $\Omega_k \cap \Omega_l$"

Base h_{ij}^k $\quad u_N(\xi_i^k, \xi_j^k)$ $\quad h_i$ fonction polynomiale

Cela nous donne une matrice de rigidité :

$$\sum_k \sum_{GL} \alpha_k D_{rs} h_{ij}^{l} D_{rs} h_{i'j'}^{l'} J_k$$ que l'on est capable de construire

facteur géométrique matrice 4x4 $\alpha(r,s)$)

$A(u) = F \Rightarrow u$

déplacts

A est symétrique définie positive par déf

$\Rightarrow$ solveur de type gradients conjugés marche très bien

(*) L'ordre de grandeur du nb de points par élément spectral est de l'ordre de 10 à 100.

Dans le cas général la matrice ne peut pas être inversée (pas de méthode directe) car elle est pleine (grosse largeur de bande). $\Rightarrow$ résolution par ~~une~~ méthode itérative

Taille matrice $\quad N^2 \times N^2 \Rightarrow N^4$ en $D=2$

$\qquad N^2 \times N^2 \times N^2 \Rightarrow N^6$ en $D=3$

$\Rightarrow$ Taille rédhibitoire

Il faut donc être rusé.

Évaluation du résidu (très important, permet une division par N^2 du temps calcul)

$$u_N^{P+1} = u_N^P + \alpha R^P$$
$$= u_N^P + \alpha (A u_N^P - f)$$

On doit évaluer :

$$\int_{\mathcal{C}} \hat{\lambda}(r,s) (\nabla \hat{u}_N)(r,s) (\nabla \hat{v}_N)(r,s)\, dr\, ds$$
$$- \int_{\mathcal{C}} \hat{f}(r,s)\, \hat{v}_N(r,s)\, h_i(r)\, h_j(s)$$

$$\sum_j \sum_i \hat{\lambda}(\xi_i, \xi_j) (\nabla \hat{u}_N)(\xi_i \xi_j) (\nabla \hat{v}_N)(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j - \sum_i \sum_j f v$$
$$\hookrightarrow h_m(r)\, h_n(s) \quad \boxed{\forall m, n}$$

$$\hat{u}_N = \sum_p \sum_q \hat{u}_N(\xi_p, \xi_q) h_p(r) h_q(s)$$

On doit calculer :

$$\forall m, \forall n \quad \sum_i \sum_j \hat{\lambda}(\xi_i, \xi_j) \left[\sum_p \sum_q \hat{u}_N(\xi_p \xi_q) \left[\nabla(h_p h_q)(\xi_i \xi_j)\right]\right] \left[\nabla(h_m h_n)(\xi_i, \xi_j)\right] \rho_i \rho_j$$

matrice de rigidité

À ce niveau somme $\underbrace{\text{quadruple}}_{N^4}$, ceci $\underbrace{\forall m, n}_{N^2}$ donc coût N^6

Si ce coût était exact on ne pourrait pas faire de méthodes spectrales. Mais regardons ce qui se passe en détail

$$\sum_i \sum_j \underbrace{\hat{\lambda}(\xi_i \xi_j)}_{\lambda_{ij}} \sum_p \sum_q \underbrace{\hat{u}_N(\xi_p, \xi_q)}_{u_{pq}} h'_p(\xi_i) \delta_{qj}$$

car $\frac{\partial}{\partial r}(h_p h_q) = (h'_p h_q)(\xi_i \xi_j) = h'_p(\xi_i) h_q(\xi_j)$
$= h'_p(\xi_i) \delta_{qj}$!

$$\Rightarrow \sum_i \sum_j \lambda_{ij} \sum_p \sum_q u_{pq} h'_p(\xi_i) \delta_{qj} h'_n(\xi_j) \delta_{mi} \rho_i \rho_j$$

$$= \sum_j \sum_p \lambda_{mj} u_{pj} d_{pm} d_{nj} \rho_m \rho_j$$ et on a supprimé deux Σ !

en ayant posé $\ldots_p(\mathcal{E}_m) = d_{pm}$

Or $\sum_j \left(\sum_p\right) \alpha_{mj}\, u_{pj}\, d_{pm}\, d_{mj}\, \rho_m\, \rho_j$ coût N^4

N^3

$\Rightarrow \sum_j \alpha_{mj}\, \beta_{jm}\, d_{mj}\, \rho_j \Rightarrow \Theta(N^3)$ opérations

$\Rightarrow$ $\boxed{\Theta(N^{d+1}) \text{ opérations (pour chaque itération)}}$

Le stockage mémoire est faible, seulement $\boxed{\Theta(N^2)}$ et non $\Theta(N^4)$ comme on pouvait le craindre a priori.

Maintenant le nombre d'itérations est lié au conditionnement de A qui est $K(A) = \Theta(N^3)$

donc le gradient conjugé converge en $N^{3/2}$

Cherchons un préconditionnement pour A :

préconditionneur $A_{\text{éléments finis}}$

$$K(A_{\text{éléments finis}}^{-1} A) = \Theta(1) \text{ indép de } N\,!!$$

(meilleur préconditionneur ?)

On peut utiliser aussi un préconditionneur plus simple :

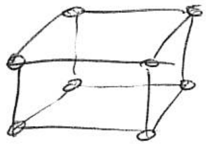
$(\mathrm{Diag}\, A)^{-1} A = \Theta(N^2)$ donc GC converge en $\Theta(N)$

mais comme $N \simeq 10$ on peut utiliser cette méthode car ~~parallélisation de~~ l'inversion de Diag A ne coûte rien (préconditionnement de Jacobi).

Parallélisme : Communication des infos aux interfaces : $\Theta(N)$
Calcul $\Theta(N3)$

donc rapport $\Theta\left(\frac{N}{N3}\right) = \Theta\left(\frac{1}{N^2}\right)$ donc OK on ne passe pas trop de temps à communiquer entre les différents processeurs $\Rightarrow$ bon speedup pour la parallélisation.

" en dimension 3 : 26 voisins (~~faces~~ arêtes, sommets)



Passons maintenant au cas de l'éq acoustique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{c^2}\Delta u = f$$

cond$^{\circ}$ périodiques $\begin{cases} u(x+2, y) = u(x,y) \\ u(x, y+2) = u(x,y) \end{cases}$

On peut prendre de l'Euler explicite pour l'intégration en temps

$$\Rightarrow \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\Delta t^2} - \frac{1}{c^2}\Delta u^k = f$$

$$\Rightarrow u^{k+1} = 2u^k - u^{k-1} - \frac{\Delta t^2}{c^2} A u^k + f\Delta t^2$$

Il nous faut seulement $\varphi_i'(\xi_i)$ ρ_i et ξ_i.

De plus dans ce cas bipériodique on a la solution analytique ~~avec~~ par la fonction de Green du milieu infini avec un point source.

Dans le cas de l'intégration explicite en temps on n'a pas à préconditionner. Mais le pas de temps a une contrainte forte car la distance entre 2 points minimale est en $\frac{1}{N^2}$ donc Δt a une contrainte forte.

En implicite cette contrainte de Δt disparaît, en revanche il faut préconditionner A avant résolution, par une méthode de type Jacobi (avec $\mathrm{Diag}^{-1}A$)