1 Choix du modèle

Assez intuitivement, nous nous sommes dirigés vers l'écriture d'un programme linéaire. Il y a deux raisons à cela.

La première est que le problème se prête bien à cette formulation (optimisation sous contrainte) et on voit assez rapidement les variables de décision (le fait de prendre un colis ou non).

Le deuxième raison est qu'une heuristique "à la main" semble compliquée du fait du grand nombre de contraintes qui vont apparaître en cours de route. Les contraintes de timing à elles seules rendent la solution non-triviale. Cela dit, en fonction des contraintes qui apparaîtront, on pourra revenir sur l'idée de créer une heuristique qui résout (au moins en partie) le problème.

2 Paramètres et variables

2.1 Variables

$x_{i,v}$ est la variable binaire qui vaut 1 si le colis i est placé dans le vol v et 0 sinon.

R_v est la variable binaire qui vaut 1 si vol v transporte un colis radioactif et 0 sinon.

P_v est la variable binaire qui vaut 1 si vol v transporte un colis périssable et 0 sinon.

α est la variable positive réelle qui représente l'écart maximal de remplissage (en proportion) entre les avions. Elle sera donc nécessairement inférieure à 1.

2.2 Paramètres

L'ensemble des colis est [n], l'ensemble des vols est V, et l'ensemble des types de soutes est K.

V_i et W_i représentent respectivement le volume et le poids du colis i.

V_v^{MAX} et W_v^{MAX} représentent les maximums en terme de volume et de poids pour le vol v.

t_i^d est la date à partir de laquelle le colis i est disponible. t_i^f est la date avant laquelle il doit être livré.

T_v^d est la date de départ du vol v. T_v^f est la date d'arrivée du vol.

$s_{i,k}$ est le nombre de compartiment de type k (MDP, LDP...) qui doivent être utilisés pour le colis i.

$S_{v,k}^{MAX}$ est le nombre de compartiment de type k disponible dans l'avion v.

p_i et r_i sont des paramètres binaires qui valent 1 si le colis i est périssable/radioactif et 0 sinon. On note P la somme des p_i et R la somme des r_i.

g_i représente le revenu (gain) apporté par le colis i si celui-ci est livré.

$\lambda_1 et \lambda_2$ indiquent les "niveaux de préférence" du gain en argent par rapport au gain en volume et à l'équilibrage. Ce sont des réels positifs.

oa_v représente l'origine de l'avion v. Cela vaut 1 si l'avion part de CDG, -1 si l'avion part d'Amsterdam.

oc_i représente l'origine du colis i. Cela vaut 1 si le colis part de CDG, -1 si le colis part d'Amsterdam.

pch_i est le paramètre qui vaut 1 s'il y a possibilité de changement de hub, 0 sinon.

3 Programme linéaire associé

$$min \sum_{v=1}^{|V|} (\sum_{i=1}^{n} V_i \times x_{i,v}) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{v=1}^{|V|} g_i \times x_{i,v} + \lambda_2 \times \alpha \tag{1}$$

$$s.t. \ \forall v \in V, \sum_{i=1}^{n} V_i \times x_{i,v} \leq V_v^{MAX} \tag{2}$$

$$\forall v \in V, \sum_{i=1}^{n} W_i \times x_{i,v} \leq W_v^{MAX} \tag{3}$$

$$\forall i \in [n], v \in V, t_i^d \times x_{i,v} \leq T_v^d \times x_{i,v} \tag{4}$$

$$\forall i \in [n], v \in V, T_v^f \times x_{i,v} \leq t_v^i \times x_{i,v} \tag{5}$$

$$\forall i \in [n], \sum_{v=1}^{|V|} x_{i,v} \ \leq \ 1 \tag{6}$$

$$\forall v \in V, k \in K, \sum_{i=1}^{n} x_{i,v} \times s_{i,k} \leq S_{v,k}^{MAX} \tag{7}$$

$$\forall v \in V, R_v + P_v \leq 1 \tag{8}$$

$$\forall v \in V, i \in [n], R_v \geq r_i \times x_{i,v} \tag{9}$$

$$\forall v \in V, i \in [n], P_v \geq p_i \times x_{i,v} \tag{10}$$

$$\forall v, v' \in V, \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \times x_{i,v}}{V_v^{MAX}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \times x_{i,v'}}{V_{v'}^{MAX}} \leq \alpha \tag{11}$$

$$\forall i \in [n] \mid pch_i = 0, v \in V, x_{i,v} \times oa_v = x_{i,v} \times oc_i \tag{12}$$

$$\forall i \in [n], v \in V, (x_{i,v}, P_v, R_v, \alpha) \in \{0,1\}^3 \times \mathbb{R}^+ \tag{13}$$

4 Commentaires

4.1 Sens des équations

L'objectif (1) maximise le revenu, l'espace vide dans les avions et minimise la différence d'équilibrage entre les avions (dans cet ordre, sous réserve de choisir des λ adéquats).

Les équations (2) et (3) sont les contraintes de volume et de poids pour chaque soute.

Les équations (4) et (5) sont les contraintes de timing.

L'équation (6) spécifie que tout colis n'est expédié qu'au plus une fois.

L'équation (7) correspond aux contraintes de position.

L'équation (8) assure qu'un vol ne peut pas à la fois être considéré comme transportant un colis radioactif et comme transportant un colis périssable.

Les équations (9) et (10) indiquent que si le vol transporte au moins un colis radioactif/périssable, alors le vol est bien considéré comme transportant des objets radioactifs/périssables.

Les équations (11) indiquent que la variable α est supérieure aux écarts deux à deux de remplisage des avions.

Les équations (12) sont les contraintes de changement de hub.

4.2 Fonction objectif et choix des λ

Dans cette formulation, la fonction à minimiser dépend de λ_1, qui indique la préférence du gain en argent par rapport au gain en volume. La valeur de ce paramètre dépend des souhaits de la compagnie. En effet, si on note $\lambda_1 = \frac{\sum_{v=1}^{|V|} V_v^{MAX}}{\eta}$, alors η correspond à la quantité d'argent qu'on préfère obtenir en remplissant $1m^3$ de moins. En d'autres termes, le programme choisira de maximiser d'abord le revenu tant que toute modification de palette rapportera au moins η euros/m^3. Sans plus d'information, on choisit arbitrairement $\eta = 1$ pour l'instant. Cela revient à dire que le revenu est toujours prioritaire devant les gains en volume ou en équilibrage car le revenu est connu à une unité près.

Par ailleurs, comme $\alpha \leq 1$, le gain en volume sera toujours prioritaire sur l'équilibrage des avions dès que $\lambda_2 \leq 0.1$ car le volume est connu à $0.1m^3$ près. On choisit $\lambda_2 = 0.1$.

4.3 Hypothèses à souligner

On a supposé qu'il n'est pas possible que le colis puisse prendre une correspondance (aller à destination via au moins 2 vols différents). Plus précisément, on ne considère qu'un seul aéroport de départ.

Si jamais le volume du colis est inférieur au volume réservé (par exemple, si un client a une palette de $9{,}6m^3$ qu'il veut placer dans un LDP de $10m^3$), alors un traitement des données sera effectué en amont pour que le volume du colis corresponde au volume réservé (de manière à ne pas biaiser la fonction objectif).

Il n'y a pas d'incertitude sur les paramètres (en particulier, V_v^{MAX} et W_v^{MAX} sont supposés connus parfaitement).

4.4 A propos de R_v et P_v

Rien n'empêche R_v et P_v de valoir 1 alors qu'il n'y a pas de colis radioactif/périssable à bord. Cela dit, cela ne change pas la solution du programme linéaire. De plus, les solveurs ont quasi-systématiquement comme comportement par défaut de mettre les variables non contraintes à 0.

4.5 Taille du problème

Les contraintes sont en $O(|V| \times (|K| + n)$ et les variables en $O(n \times |V|)$. Cela peut être énorme étant donné le contexte du problème. De plus, les variables sont binaires, ce qui fait que la combinatoire va vite devenir déraisonnable.

Cela dit, le nombre important de contraintes (notamment au niveau du timing) permet de faire des coupes importantes dans le polyhèdre. En effet, pour 30 colis et 3 avions, le solveur met 35 secondes à résoudre le problème sans les contraintes de temps et 0.2 secondes avec.

4.6 Implémentation

La modélisation sera faite avec la librairie Pyomo de Python et la résolution par le solveur CPLEX.