

# Teoria Dei Grafi: Esercizi (Insiemi Stabili)

*Prof. Ottavio D'Antona*

Marco Odore 868906

## Indice

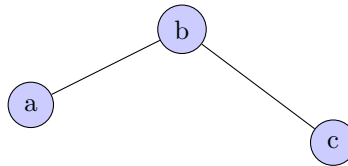
<b>Esercizio 1</b>	<b>3</b>
<b>Esercizio 1.1</b>	<b>3</b>
<b>Esercizio 1.2</b>	<b>5</b>
<b>Esercizio 2</b>	<b>6</b>
<b>Esercizio 2.1</b>	<b>7</b>

## Esercizio 1

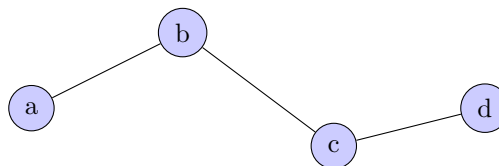
Dimostrare che il numero di insiemi stabili  $S$  di un cammino  $P_n$  (dove  $n$  indica il numero di vertici del cammino) ha la ricorrenza di *Fibonacci*

$$S(P_n) = S(P_{n-1}) + S(P_{n-2})$$

Per dimostrare la relazione tra il numero di set indipendenti di un cammino e la sequenza di *Fibonacci*, basta verificare cosa accade all'aggiungere di un vertice ad un cammino  $P_n$ . Ad esempio dato il seguente cammino:



Sappiamo che esistono 5 insiemi stabili, che sono dati dagli insiemi singoletto  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ , dall'insieme  $\{a, c\}$  e dall'insieme vuoto. Cosa accadrebbe se aggiungessimo un nodo  $d$ ? Avremmo il seguente cammino:



Sicuramente i set indipendenti precedentemente individuati con solo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  rimarrebbero. Quindi c'è qualcosa in più rispetto al cammino precedente. Ma cosa? Osservando il cammino ci rendiamo conto che il nodo aggiunto può generare set indipendenti con solo i nodi che non ha adiacenti, e cioè  $a$ ,  $b$ . Ma quanti nuovi set indipendenti può generare? Ne può generare tanti quanti sono i set generabili dal cammino composto solo da  $a$ ,  $b$ . Questo perché per generarli posso aggiungere l'elemento  $d$  ad ogni set presente in quest'ultimo cammino, e cioè  $\{a, d\}$ ,  $\{b, d\}$ ,  $\{d\}$ , dato che il cammino  $a b$  ha gli insiemi  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  e l'insieme vuoto, come set indipendenti. Quindi possiamo dire che il numero di set indipendenti di un cammino generico  $P_n$  si può ottenere come somma dei set indipendenti ottenuti dal cammino meno un nodo, e dai set indipendenti ottenuti dal cammino meno due nodi

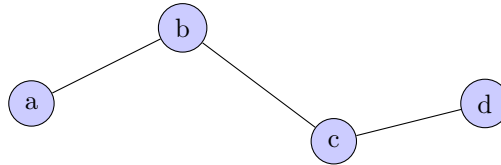
$$S(P_n) = S(P_{n-1}) + S(P_{n-2})$$

Che è effettivamente la ricorrenza di *Fibonacci*.

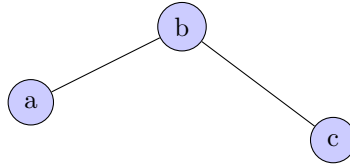
## Esercizio 1.1

Tabella degli insiemi stabili di un cammino  $P_{n,k}$  al variare della lunghezza del cammino  $n$  e del numero  $k$  di vertici non adiacenti.

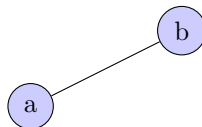
Per calcolare il numero di insiemi stabili con  $k$  vertici di un cammino di lunghezza  $n$  arbitraria, possiamo fare alcune osservazioni. Prendendo ad esempio il cammino  $P_n$  seguente



come facciamo a calcolare il numero di insiemi stabili composti da 2 vertici? Sicuramente sono presenti quegli insiemi stabili di 2 vertici che otterrei togliendo un vertice, e cioè quelli ottenibili da questo cammino



e cioè il solo insieme  $\{a, c\}$ . Quindi nel calcolo posso aggiungere  $S(P_{n-1, k})$ . Ma cosa accade aggiungendo un vertice? Dovrei trovare tutti i possibili insiemi stabili composti da 2 elementi, ma che non siano adiacenti al vertice aggiunto alla fine. Come posso calcolarli? Molto banalmente posso rendermi conto che se considero il cammino che non tiene presente del nodo adiacente e quello appena aggiunto,



se conto i suoi insiemi stabili di 1 elemento ( $S(P_{n-2, k-1})$ ), (cioè gli insiemi singoletto  $\{a\}$  e  $\{b\}$ ) ottengo automaticamente anche il numero di insiemi stabili da 2 elementi. Per ottenerli infatti basta aggiungere agli insiemi stabili da 1 il nuovo vertice  $d$ , ottenendo gli insiemi stabili validi  $\{a, d\}$  e  $\{b, d\}$  che corrispondono effettivamente agli insiemi stabili da 2 elementi mancanti. Possiamo quindi dedurre che nel calcolo del numero di insiemi stabili da  $k$  vertici di un cammino di lunghezza arbitraria  $n$  questa formula ricorsiva

$$S(P_{n, k}) = S(P_{n-2, k-1}) + S(P_{n-1, k})$$

è valida.

$P_{n,k}$		$k$									
$n$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	1									
	1	1	1								
	2	1	2								
	3	1	3	1							
	4	1	4	3							
	5	1	5	6	1						
	6	1	6	10	4						
	7	1	7	15	10	1					
	8	1	8	21	20	5					

Tabella 1: Numero di set indipendenti al variare del numero di vertici  $n$  e della larghezza del set  $k$

Per ottenere il numero totale di set indipendenti di un cammino basta effettuare la seguente somma

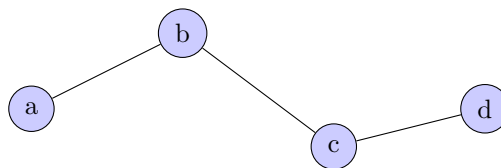
$$S(P_n) = \sum_{k=0}^n S(P_{n,k})$$

Dalla tabella è interessante inoltre notare come si sia generato il triangolo di *Fibonacci* (anche se non nella sua consueta forma) che è una diretta conseguenza della formula ricorsiva ottenuta.

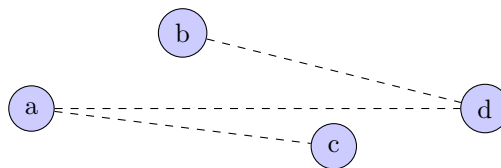
## Esercizio 1.2

Scrivere un algoritmo capace di enumerare gli insiemi stabili di un grafo arbitrario.

Prima di scrivere l'algoritmo, possiamo fare una considerazione: se generiamo il grafo complementare del grafo in input, come nell'esempio seguente



otteniamo questo grafo



Se cerchiamo tutte le *componenti connesse* di questo grafo (sottografi del grafo i cui vertici sono tutti collegati tra loro) otteniamo esattamente ciò che stiamo cercando e cioè i nostri set indipendenti, che nell'ordine sono  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ ,  $\{d\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{a, d\}$ ,  $\{b, d\}$  e l'insieme vuoto.

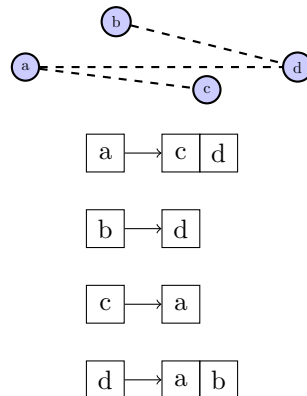
Questa proprietà del grafo complementare vale per qualsiasi tipo di grafo in input, che possiamo sfruttare per il seguente algoritmo

```
CompGraph = getCompGraph(Graph);
TotalSet = getTotalSet(CompGraph);
for each set in TotalSet do
    if IndependentSet(set, CompGraph) then
        yield set;
    end
end
```

**Algorithm 1:** Enumerazione Set Indipendenti

che adesso spiegheremo nel dettaglio.

Per la rappresentazione del grafo può essere utile utilizzare le *liste di adiacenza*. Cioè ad ognuno dei nodi viene associata una lista che contiene tutti i nodi ad esso adiacenti, come nell'esempio seguente



### ***getCompGraph(Graph)***

Per ottenere il grafo complementare da questa rappresentazione basta semplicemente complementare le liste (e cioè inserire nella lista vuota tutti i vertici che **non** erano presenti nel grafo originale).

### ***getTotalSet(CompGraph)***

Una volta poi ottenuto il grafo complemento si cominciano ad elencare tutti i sottoinsiemi di  $k$  vertici (al variare di  $k$  da 0 a  $n$ , che è il numero totale di vertici del grafo) per un totale di

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

sottoinsiemi differenti.

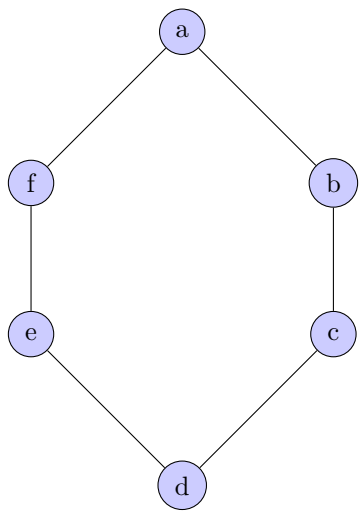
### ***IndependentSet(set, CompGraph)***

Infine si verifica per ognuno di questi set di  $k$  vertici se rappresentano un sottoinsieme completamente connesso (che corrisponde nel grafo complementare ad un set indipendente), e nel caso di esito positivo mandarlo nell'output.

## Esercizio 2

Tabella degli insiemi stabili di un ciclo  $C_{n,k}$  al variare della lunghezza del ciclo  $n$  e del numero  $k$  di vertici non adiacenti.

Così come lo abbiamo verificato per i set indipendenti dei cammini  $P_{n,k}$ , possiamo fare la medesima considerazione per i cicli  $C_{n,k}$



$C_{n,k}$		$k$									
$n$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	1									
	1	1	1								
	2	1	2								
	3	1	3								
	4	1	4	2							
	5	1	5	5							
	6	1	6	9	2						
	7	1	7	14	7						
	8	1	8	20	16	2					

Tabella 2: Numero di set indipendenti da  $k$  vertici in un ciclo di  $n$  elementi.

Esercizio 2.1

Trovare la formula di ricorrenza di un ciclo  $C_{n,k}$  al variare della lunghezza del ciclo  $n$  e del numero  $k$  di vertici non adiacenti.