

# **Teoria Dei Grafi: Esercizi (Insiemi Stabili)**

*Prof. Ottavio D'Antona*

**Marco Odore 868906**

## Indice

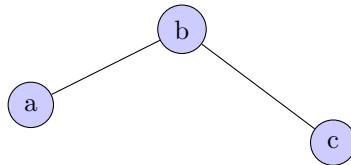
|                      |          |
|----------------------|----------|
| <b>Esercizio 1</b>   | <b>3</b> |
| <b>Esercizio 1.1</b> | <b>3</b> |
| <b>Esercizio 1.2</b> | <b>5</b> |
| <b>Esercizio 2</b>   | <b>6</b> |
| <b>Esercizio 2.1</b> | <b>6</b> |

## Esercizio 1

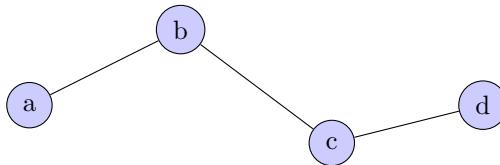
Dimostrare che il numero di insiemi stabili  $S$  di un cammino  $P_n$  (dove  $n$  indica il numero di vertici del cammino) ha la ricorrenza di *Fibonacci*

$$S(P_n) = S(P_{n-1}) + S(P_{n-2})$$

Per dimostrare la relazione tra il numero di set indipendenti di un cammino e la sequenza di *Fibonacci*, basta verificare cosa accade all'aggiungere di un vertice ad un cammino  $P_n$ . Ad esempio dato il seguente cammino:



Sappiamo che esistono 5 insiemi stabili, che sono dati dagli insiemi singoletto  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ , dall'insieme  $\{a, c\}$  e dall'insieme vuoto. Cosa accadrebbe se aggiungessimo un nodo  $d$ ? Avremmo il seguente cammino:



Sicuramente i set indipendenti precedentemente individuati con solo  $a, b, c$  rimarrebbero. Quindi c'è qualcosa in più rispetto al cammino precedente. Ma cosa? Osservando il cammino ci rendiamo conto che il nodo aggiunto può generare set indipendenti con solo i nodi che non ha adiacenti, e cioè  $a, b$ . Ma quanti nuovi set indipendenti può generare? Ne può generare tanti quanti sono i set generabili dal cammino composto solo da  $a, b$ . Questo perché per generarli posso aggiungere l'elemento  $d$  ad ogni set presente in quest'ultimo cammino, e cioè  $\{a, d\}, \{b, d\}, \{d\}$ , dato che il cammino  $a b$  ha gli insiemi  $\{a\}, \{b\}$  e l'insieme vuoto, come set indipendenti. Quindi possiamo dire che il numero di set indipendenti di un cammino generico  $P_n$  si può ottenere come somma dei set indipendenti ottenuti dal cammino meno un nodo, e dai set indipendenti ottenuti dal cammino meno due nodi

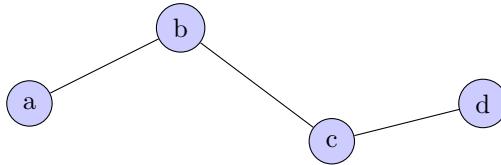
$$S(P_n) = S(P_{n-1}) + S(P_{n-2})$$

Che è effettivamente la ricorrenza di *Fibonacci*.

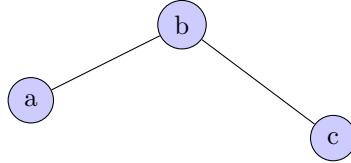
## Esercizio 1.1

Tabella degli insiemi stabili di un cammino  $P_{n,k}$  al variare della lunghezza del cammino  $n$  e del numero  $k$  di vertici non adiacenti.

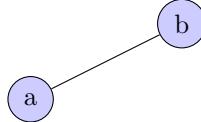
Per calcolare il numero di insiemi stabili con  $k$  vertici di un cammino di lunghezza  $n$  arbitraria, possiamo fare alcune osservazioni. Prendendo ad esempio il cammino  $P_n$  seguente



come facciamo a calcolare il numero di insiemi stabili composti da 2 vertici? Sicuramente sono presenti quegli insiemi stabili di 2 vertici che otterrei togliendo un vertice, e cioè quelli ottenibili da questo cammino



e cioè il solo insieme  $\{a, c\}$ . Quindi nel calcolo posso aggiungere  $S(P_{n-1,k})$ . Ma cosa accade aggiungendo un vertice? Dovrei trovare tutti i possibili insiemi stabili composti da 2 elementi, ma che non siano adiacenti al vertice aggiunto alla fine. Come posso calcolarli? Molto banalmente posso rendermi conto che se considero il cammino che non tiene presente del nodo adiacente e quello appena aggiunto,



se conto i suoi insiemi stabili di 1 elemento ( $S(P_{n-2,k-1})$ ), (cioè gli insiemi singoletto  $\{a\}$  e  $\{b\}$ ) ottengo automaticamente anche il numero di insiemi stabili da 2 elementi. Per ottenerli infatti basta aggiungere agli insiemi stabili da 1 il nuovo vertice  $d$ , ottenendo gli insiemi stabili validi  $\{a, d\}$  e  $\{b, d\}$  che corrispondono effettivamente agli insiemi stabili da 2 elementi mancati. Possiamo quindi dedurre che nel calcolo del numero di insiemi stabili da  $k$  vertici di un cammino di lunghezza arbitraria  $n$  questa formula ricorsiva

$$S(P_{n,k}) = S(P_{n-2,k-1}) + S(P_{n-1,k})$$

è valida.

| $P_{n,k}$ | $k$ |   |    |    |   |   |   |   |   |
|-----------|-----|---|----|----|---|---|---|---|---|
|           | 0   | 1 | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0         | 1   |   |    |    |   |   |   |   |   |
| 1         | 1   | 1 |    |    |   |   |   |   |   |
| 2         | 1   | 2 |    |    |   |   |   |   |   |
| 3         | 1   | 3 | 1  |    |   |   |   |   |   |
| 4         | 1   | 4 | 3  |    |   |   |   |   |   |
| 5         | 1   | 5 | 6  | 1  |   |   |   |   |   |
| 6         | 1   | 6 | 10 | 4  |   |   |   |   |   |
| 7         | 1   | 7 | 15 | 10 | 1 |   |   |   |   |
| 8         | 1   | 8 | 21 | 20 | 5 |   |   |   |   |

Tabella 1: Numero di set indipendenti al variare del numero di vertici  $n$  e della larghezza del set  $k$

Per ottenere il numero totale di set indipendenti di un cammino basta effettuare la seguente somma

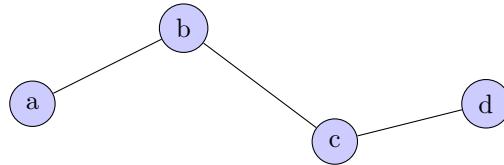
$$S(P_n) = \sum_{k=0}^n S(P_{n,k})$$

Dalla tabella è interessante inoltre notare come si sia generato il triangolo di *Fibonacci* (anche se non nella sua consueta forma) che è una diretta conseguenza della formula ricorsiva ottenuta.

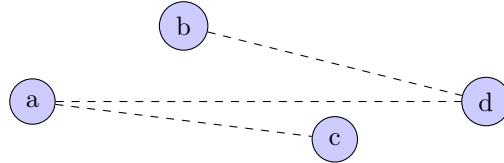
## Esercizio 1.2

Scrivere un algoritmo capace di enumerare gli insiemi stabili di un grafo arbitrario.

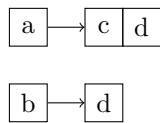
Prima di scrivere l'algoritmo, possiamo fare una considerazione: se consideriamo il grafo complementare del grafo in input, come nell'esempio seguente



otteniamo questo grafo



Se cerchiamo tutte le *componenti connesse* di questo grafo (sottografi del grafo i cui vertici sono tutti collegati tra loro) otteniamo esattamente ciò che stiamo cercando e cioè i nostri set indipendenti, che nell'ordine sono  $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}$  e l'insieme vuoto. Questa proprietà del grafo complementare vale per qualsiasi tipo di grafo in input, che possiamo sfruttare per il nostro algoritmo. Per la rappresentazione del grafo in questo caso può essere utile utilizzare le *liste di adiacenza*. Cioè ad ognuno dei nodi viene associata una lista che contiene tutti i nodi ad esso adiacenti, come nell'esempio seguente (riferito all'ultimo grafo)



```

CompGraph = getCompGraph(Graph);
TotalSet = getTotalSet(CompGraph);
for each set in TotalSet do
    if IndipendentSet(set, CompGraph) then
        | yield set;
    end
end

```

**Algorithm 1:** Enumerazione Set Indipendenti

## Esercizio 2

Tabella degli insiemi stabili di un ciclo  $C_{n,k}$  al variare della lunghezza del ciclo  $n$  e del numero  $k$  di vertici non adiacenti.

### Esercizio 2.1

Trovare la formula di ricorrenza di un ciclo  $C_{n,k}$  al variare della lunghezza del ciclo  $n$  e del numero  $k$  di vertici non adiacenti.