

# **Teoria Dei Grafi: Esercizi**

*Prof. Ottavio D'Antona*

**Marco Odore 868906**

## Indice

### Esercizio 1.3

Di quanti elementi è costituito l'insieme potenza dell'insieme vuoto? E del singoletto {a}?

Dato che la cardinalità dell'insieme potenza di un insieme S è pari a

$$|P(S)| = 2^{|S|}$$

la cardinalità dell'insieme potenza dell'insieme vuoto è

$$2^0 = 1$$

(l'insieme potenza contiene solo l'insieme vuoto)

mentre la cardinalità dell'insieme potenza dell'insieme singoletto {a} è pari a

$$2^1 = 2$$

(l'insieme potenza contiene l'insieme vuoto e il singoletto)

### Esercizio 1.5

Quanto vale  $S(n,2)$ ? Quanto vale  $S(n, n-1)$ ?

(i) Di base sappiamo che il numero di stirling di seconda specie  $S(n,k)$  si ottiene come

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n$$

Dato che stiamo considerando il caso in cui  $k = 2$  abbiamo che

$$S(n, 2) = \frac{(1 \cdot 1 \cdot 2^n)}{2!} + \frac{(-1 \cdot 2 \cdot 1^n)}{2!} = 2^{n-1} - 1$$

(ii) Partendo dal caso base  $S(2,1)$  otteniamo

$$S(2, 1) = 1$$

il caso  $S(3,2)$

$$S(3, 2) = S(2, 1) + 2S(2, 2) = 1 + 2 = 3$$

il caso  $S(4,3)$

$$S(4, 3) = S(3, 2) + 3S(3, 3) = 3 + 3 = 6$$

etc, possiamo dedurre che nel caso  $S(n,n-1)$ , il numero di stirling è pari a

$$\sum_{i=1}^{n-1} i$$

### Esercizio 1.6

Verificare che la suddivisione dei sottoinsiemi di un insieme S a seconda del numero di elementi che essi contengono costituisce una partizione dell'insieme potenza di S.

Dato un insieme esempio  $S = \{a, b, c\}$ , il suo insieme delle parti è dato da

$$\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, 0$$

Se raggruppiamo i sottoinsiemi a seconda del numero di elementi che essi contengono otteniamo:

$$|\{a, b, c\}|, |\{a, b\}|, |\{a, c\}|, |\{b, c\}|, |\{a\}|, |\{b\}|, |\{c\}|, |0|$$

che rappresenta esattamente una partizione dell'insieme delle parti.

## Esercizio 1.7

Quanto vale la somma degli elementi della n-esima riga del triangolo di Tartaglia?

Sapendo che ogni elemento di una riga del triangolo di tartaglia è calcolabile come il binomiale

$$\binom{n}{k}$$

dove n è la riga in oggetto, e k è la posizione nella riga corrente, possiamo calcolare la somma degli elementi della n-esemia riga del triangolo di tartaglia come

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

## Esercizio 1.8

Che relazione c'è tra la somma degli elementi di posto pari e quelli di posto dispari nelle righe del triangolo di Tartaglia? In che senso la soluzione a questo esercizio suggerisce un criterio di divisibilità tra polinomi?

Dato il triangolo di tartaglia

$$\begin{array}{ll}
 n = 0: & 1 \\
 n = 1: & 1 \quad 1 \\
 n = 2: & 1 \quad 2 \quad 1 \\
 n = 3: & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 n = 4: & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1
 \end{array}$$

partendo dalla seconda riga e sommando gli elementi di posto pari e di posto dispari otteniamo le coppie

$$(1, 1) \quad n = 1 \tag{1}$$

$$(2, 2) \quad n = 2 \tag{2}$$

$$(4, 4) \quad n = 3 \tag{3}$$

$$(8, 8) \quad n = 4 \tag{4}$$

$$etc \tag{5}$$

. Notiamo che le somme per pari e dispari sono identiche per riga (oltre a rappresentare le potenze di 2). Sviluppando poi i polinomi  $(x - 1)^n$  al variare di n, otteniamo

$$(x - 1)^1 = x - 1 \tag{6}$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 2 \tag{7}$$

$$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \tag{8}$$

$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \tag{9}$$

$$etc \tag{10}$$

e cioè polinomi i cui coefficienti sono gli elementi delle righe del triangolo di Tartaglia (che variano al variare di n). Possiamo inoltre notare che tali coefficienti hanno i segni alternati in base alle posizione (pari positivi, dispari negativi).

Secondo il teorema di Ruffini un polinomio è divisibile per il binomio  $(x - k)$  se e solo se  $p(k) = 0$ . Secondo il teorema del Resto,  $p(k)$  non è altro che il resto della divisione tra un polinomio e il binomio  $(x - k)$ . Dato che nel nostro caso  $k=1$ , possiamo verificare che  $p(1) = 0$  per ogni  $p = (x - 1)^n$ , dato che mettere x a 1 corrisponde a sommare i coefficienti del polinomio, che come abbiamo verificato in partenza corrispondono ai coefficienti della riga n-esima del triangolo di tartaglia, alternati di segno per la posizione, e che quindi sommati portano a 0.

## Esercizio 1.9

Dimostrare che, presi comunque  $a, b, n \in N$

$$(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n \in N$$

Sapendo che il binomio di Newton è calcolato come

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Svolgendo singolarmente  $(a+\sqrt{b})^n$  e  $(a-\sqrt{b})^n$  otteniamo

$$(a+\sqrt{b})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot (\sqrt{b})^k$$

$$(a-\sqrt{b})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot (-\sqrt{b})^k$$

quando  $k$  è pari il termine  $k$ -esimo dei due polinomi coincide (il segno negativo diventa positivo per il secondo termine del secondo binomio)

$$(\sqrt{b})^k = (-\sqrt{b})^k = b^{k/2} \in N$$

poichè  $k/2 \in N$ . Mentre quando  $k$  è dispari abbiamo che

$$(\sqrt{b})^k + (-\sqrt{b})^k = 0$$

che quindi porta all'eliminazione del termine  $k$ -esimo all'interno della sommatoria (i valori  $k$ -esimi sono i medesimi per i due binomi, ma opposti per segno).

Dato che  $n - k \in N$

$$\binom{n}{k} \in N$$

$$a^{n-k} \in N$$

Possiamo quindi affermare che comunque scelti  $a, b, n \in N$ , il termine  $k$ -esimo delle sommatoria (con  $k$  pari)

$$\binom{n}{k} a^{n-k} \cdot (\sqrt{b})^k \in N$$

e di conseguenza che

$$(a+\sqrt{b})^n + (a-\sqrt{b})^n \in N$$

## Esercizio 1.23

Dimostrare che l'elemento di posto  $(i, j)$  del prodotto di  $n$  matrici triangolari inferiori (di ordine arbitrario) è dato dalla somma di

$$\frac{\binom{n}{i-j}}{(i-j)!} = \left( \binom{n}{i-j} \right)$$

addendi.

Prima di tutto è importante ricordare una proprietà del valore  $\frac{\binom{n}{i-j}}{(i-j)!}$ , che può essere rappresentato come il binomiale

$$\binom{n+(i-j)-1}{i-j} = \binom{n+(i-j)-1}{n-1}$$

Inoltre data una matrice triangolare inferiore, il valore dell'elemento della matrice potenza  $N^n$  in posizione  $(i,j)$  è dato dalla formula ricorsiva:

$$(i,j)^n = \sum_{k=0}^{(i-j)} (a_{ik}^{n-1} \cdot a_{kj})$$

**Nota:**  $(i,j)^n$  e  $a_{ik}^{n-1}$  vanno intesi come elementi della matrice  $N^n$  e  $N^{n-1}$ , non come elementi elevati alla potenza n-esima  
Proviamo a calcolare la matrice N, risultato del seguente prodotto di matrici triangolari inferiori

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

che può essere scritta anche come il prodotto

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

dato che la matrice parziale P è uguale a

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

. Calcolando passo passo i valori degli elementi in posizione  $(i=2,j=0)$ ,  $(i=2,j=1)$ ,  $(i=2,j=2)$  della matrice P, otteniamo

$$(i=2,j=0) = (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 3(\text{addendi})$$

$$(i=2,j=1) = (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 2(\text{addendi})$$

$$(i=2,j=2) = (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) = 1(\text{addendi})$$

che effettivamente corrispondono ai valori calcolati con il binomiale (n=2)

$$\binom{n+(i-j)-1}{n-1}$$

$$(i=2,j=0) = \binom{2+(2-0)-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3$$

$$(i=2,j=1) = \binom{2+(2-1)-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$$

$$(i=2,j=2) = \binom{2+(2-2)-1}{2-1} = \binom{1}{1} = 1$$

Calcolando ora i valori degli elementi in posizione ( $i=2, j=0$ ), ( $i=2, j=1$ ), ( $i=2, j=2$ ) della matrice N, ricordandoci del calcolo fatto precedentemente con P, otteniamo

$$(i = 2, j = 0) = (((1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) = 3 + 2 + 1 = 6$$

addendi

$$(i = 2, j = 1) = (((1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 0) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) = 2 + 1 = 3$$

addendi

$$(i = 2, j = 2) = (((1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 0) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 0) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) = 1 = 1$$

addendi. Che effettivamente corrispondono ai valori calcolati con il binomiale ( $n=3$ )

$$(i = 2, j = 0) = \binom{3 + (2 - 0) - 1}{3 - 1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$(i = 2, j = 1) = \binom{3 + (2 - 1) - 1}{3 - 1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$(i = 2, j = 2) = \binom{3 + (2 - 2) - 1}{3 - 1} = \binom{2}{2} = 1$$

## Esercizio 1.25

Dimostrare che

$$P(n, x) = P(n - 1, x - 1) + P(n - x, x)$$

sapendo che

$$P(1, 1) = 1$$

e

$$P(n, x) = 0$$

se  $n \leq 0$

Ricordando che  $P(n, x)$  non rappresenta altro il numero di modi in cui possiamo ottenere il numero  $n$  sommando  $x$  numeri naturali, dimostriamo questa equazione per induzione, partendo dal caso base  $P(2, 1)$ , che sappiamo valere 1 (2 è rappresentabile in un solo modo usando una singola cifra):

$$P(2, 1) = P(1, 0) + P(1, 1) = 0 + 1 = 1$$

( $P(1, 0) = 0$  in quanto non esistono modi per rappresentare 1 con 0 cifre) Verifichiamolo ora per il caso  $n+1$

## Esercizio "Nuovo"

Dimostrare che

$$s(n, 1) = (n - 1)!$$

Sappiamo che il fattoriale di  $(n - 1)$  si può scrivere anche come

$$(n - 1)! = (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

e che generalmente

$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) + (n - 1) \cdot s(n - 1, k)$$

Svolgendo  $s(n, 1)$  otteniamo

$$s(n, 1) = s(n - 1, 0) + (n - 1) \cdot s(n - 1, 1)$$

Ma dato che

$$s(n - 1, 0) = 0$$

Possiamo affermare quindi che

$$s(n, 1) = (n - 1) \cdot s(n - 1, 1)$$

e conseguentemente

$$s(n - 1, 1) = (n - 2) \cdot s(n - 2, 1)$$

Calcolando quindi ricorsivamente  $s(n - i, 1)$  fino a che  $n - i = 1$  (arrivando al caso  $s(1, 1) = 1$ ) otteniamo

$$(n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = (n - 1)!$$