Teoria Dei Grafi: Esercizi

Prof. Ottavio D'Antona

Marco Odore 868906

Indice

Esercizio 1.3

Di quanti elementi è costituito l'insieme potenza dell'insieme vuoto? E del singoletto {a}?

Dato che la cardinalità dell'insieme potenza di un insieme S è pari a

$$|P(S)| = 2^{|S|}$$

la cardinalità dell'insieme potenza dell'insieme vuoto è

$$2^0 = 1$$

(l'insieme potenza contiene solo l'insieme vuoto)
mentre la cardinalità dell'insieme potenza dell'insieme singoletto {a} è pari a

$$2^1 = 2$$

(l'insieme potenza contiene l'insieme vuoto e il singoletto)

Esercizio 1.5

Quanto vale S(n,2)? Quanto vale S(n, n-1)?

(i) Calcolando il caso base S(2,2) otteniamo

$$S(2,2) = 1 = 2^1 - 1$$

(Il numero di Stirling di seconda specie ha i casi speciali S(n,n) = S(n,1) = 1)
il caso S(3,2)

$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$$

(dato che S(n,k) può essere calcolato come S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)))
il caso S(4,2)

$$S(4,2) = S(3,1) + 2S(3,2) = 1 + 6 = 7 = 2^3 - 1$$

etc, possiamo affermare che S(n,2) è pari a

$$2^{n-1} - 1$$

(ii) Partendo dal caso base S(2,1) otteniamo

$$S(2,1) = 1$$

il caso S(3,2)

$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 = 3$$

il caso S(4,3)

$$S(4,3) = S(3,2) + 3S(3,3) = 3 + 3 = 6$$

etc, possiamo dedurre che nel caso S(n,n-1), il numero di stirling è pari a

$$\sum_{i=1}^{n-1} i$$

Esercizio 1.6

Verificare che la suddivisione dei sottoinsiemi di un insieme S a seconda del numero di elementi che essi contengono costituisce una partizione dell'insieme potenza di S.

Dato un insieme esempio S = {a, b, c}, il suo insieme delle parti è dato da

$$\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, 0$$

Se raggruppiamo i sottoinsiemi a seconda del numero di elementi che essi contengono otteniamo:

$$|\{a, b, c\}|, |\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}|, |\{a\}, \{b\}|, |\{c\}|, |0|$$

che rappresenta esattamente una partizione dell'insieme delle parti.

Esercizio 1.7

Quanto vale la somma degli elementi della n-esima riga del triangolo di Tartaglia?

Sapendo che ogni elemnto di una riga del triangolo di tartaglia è calcolabile come il binomiale

$$\binom{n}{k}$$

dove n è la riga in oggetto, e k è la posizione nella riga corrente, possiamo calcolare la somma degli elementi della n-esemia riga del triangolo di tartaglia come

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Esercizio 1.8

Che relazione c'è tra la somma degli elementi di posto pari e quelli di posto dispari nelle righe del triangolo di Tartaglia? In che senso la soluzione a questo esercizio suggerisce un criterio di divisibilità tra polinomi?

Esercizio 1.8 continued on next page...

Dato il triangolo di tartaglia

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

partendo dalla seconda riga e sommando gli elemnti di posto pari e di posto dispari otteniamo le coppie

$$(1,1) \quad n=1 \tag{1}$$
$$(2,2) \quad n=2 \tag{2}$$
$$(4,4) \quad n=3 \tag{3}$$
$$(8,8) \quad n=4 \tag{4}$$
$$etc \tag{5}$$

. Notiamo che le somme per pari e dispari sono identiche per riga (oltre a rappresantare le potenze di 2). Sviluppando poi i polinomi $(x-1)^n$ al variare di n, otteniamo

$$(x-1)^1 = x-1 \tag{6}$$
$$(x-1)^2 = x^2-2x+2 \tag{7}$$
$$(x-1)^3 = x^3-3x+3x-1 \tag{8}$$
$$(x-1)^4 = x^4-4x^3+6x^2-4x+1 \tag{9}$$
$$etc \tag{10}$$

e cioè polinomi i cui coefficienti sono gli elementi delle righe del triangolo di Tartaglia (che variano al variare di n). Possiamo inoltre notare che tali coefficienti hanno i segni alternati in base alle posizione (pari positivi, dispari negativi).
Secondo il teorema di Ruffini un polinomio è divisibile per il binomio (x-k) se e solo se $p(k) = 0$. Secondo il teorema del Resto, p(k) non è altro che il resto della divisione tra un polinomio e il binomio (x-k). Dato che nel nostro caso k=1, possiamo verificare che $p(1) = 0$ per ogni $p = (x-1)^n$, dato che mettere x a 1 corrisponde a sommare i coefficienti del polinomio, che come abbiamo verificando in partenza corrispondo ai coefficienti della riga n-esima del triangolo di tartaglia, alternati di segno per la posizione, e che quindi sommati portano a 0.

Esercizio 1.23

Dimostrare che l'elemento di posto (i, j) del prodotto di n matrici triangolari inferiori (di ordine arbitrario) è dato dalla somma di

$$\frac{<n>_{i-j}}{(i-j)!} = \left(\binom{n}{i-j}\right)$$

addendi.

to do.