Teoria Dei Grafi: Esercizi (Insiemi Stabili)

Prof. Ottavio D'Antona

Marco Odore 868906

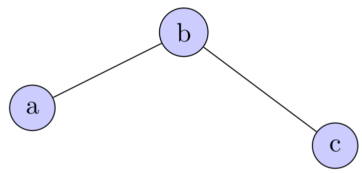
Indice

Esercizio 1

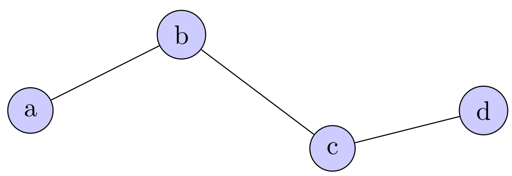
Dimostrare che il numero di insiemi stabili S di un cammino P_n (dove n indica il numero di vertici del cammino) ha la ricorrenza di *Fibonacci*

$$S(P_n) = S(P_{n-1}) + S(P_{n-2})$$

Per dimostrare la relazione tra il numero di set indipendenti di un cammino e la sequenza di *Fibonacci*, basta verificare cosa accade all'aggiungere di un vertice ad un cammino P_n. Ad esempio dato il seguente cammino:



Sappiamo che esistono 5 insiemi stabili, che sono dati dagli insiemi singoletto $\{a\}, \{b\}, \{c\}$, dall'insieme $\{a, c\}$ e dall'insieme vuoto. Cosa accadrebbe se aggiungessimo un nodo d? Avremmo il seguente cammino:



Sicuramente i set indipendenti precedentemente individuati con solo a, b, c rimarrebbero. Quindi c'è qualcosa in più rispetto al cammino precedente. Ma cosa? Osservando il cammino ci rendiamo conto che il nodo aggiunto può generare set indipendenti con solo i nodi che non ha adiacenti, e cioè a, b. Ma quanti nuovi set indipendenti può generare ? Ne può generare tanti quanti sono i set generabili dal cammino composto solo da a, b. Questo perché per generarli posso aggiungere l'elemento d ad ogni set presente in quest'ultimo cammino, e cioè $\{a, d\}$, $\{b, d\}$, $\{d\}$, dato che il cammino a b ha gli insiemi $\{a\}$, $\{b\}$ e l'insieme vuoto, come set indipendenti. Quindi possiamo dire che il numero di set indipententi di un cammino generico P_n si può ottenre come somma dei set indipendenti ottenuti dal cammino meno un nodo, e dai set indipendenti ottenuti dal cammino meno due nodi

$$S(P_n) = S(P_{n-1}) + S(P_{n-2})$$

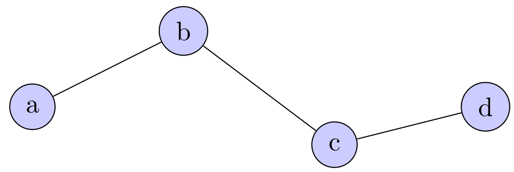
Che è effettivamente la ricorrenza di *Fibonacci*.

Esercizio 1.1

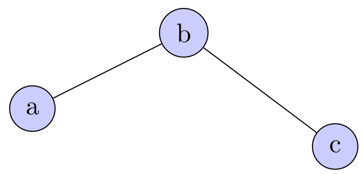
Tabella degli insiemi stabili di un cammino $P_{n,k}$ al variare della lunghezza del cammino n e del numero k di vertici non adiacenti.

Esercizio 1.1 continued on next page...

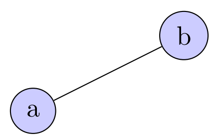
Per calcolare il numero di insiemi stabili con k vertici di un cammino di lunghezza n arbitraria, possiamo fare alcune osservazioni. Prendendo ad esempio il cammino P_n seguente



come facciamo a calcolare il numero di insiemi stabili composti da 2 vertici? Sicuramente sono presenti quegli insiemi stabili di 2 vertici che otterrei togliendo un vertice, e cioè quelli ottenibili da questo cammino



e cioè il solo insieme $\{a, c\}$. Quindi nel calcolo posso aggiungere $S(P_{n-1,k})$. Ma cosa accade aggiungendo un vertice? Dovrei trovare tutti i possibili insiemi stabili composti da 2 elementi, ma che non siano adiacenti al vertice aggiunto alla fine. Come posso calcolarli? Molto banalmente posso rendermi conto che se considero il cammino che non tiene presente del nodo adiacente e quello appena aggiunto,



se conto i suoi insiemi stabili di 1 elemento ($S(P_{n-2,k-1})$), (cioè gli insiemi singoletto $\{a\}$ e $\{b\}$) ottengo automaticamente anche il numero di insiemi stabili da 2 elementi. Per ottenerli infatti basta aggiungere agli insiemi stabili da 1 il nuovo vertice d, ottenendo gli insiemi stabili validi $\{a, d\}$ e $\{b, d\}$ che corrispondono effettivamente agli insiemi stabili da 2 elementi mancanti. Possiamo quindi dedurre che nel calcolo del numero di insiemi stabili da k vertici di un cammino di lunghezza arbitraria n questa formula ricorsiva

$$S(P_{n,k}) = S(P_{n-2,k-1}) + S(P_{n-1,k})$$

è valida.

$P_{n,k}$		k								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
n	0	1								
	1	1	1							
	2	1	2							
	3	1	3	1						
	4	1	4	3						
	5	1	5	6	1					
	6	1	6	10	4					
	7	1	7	15	10	1				
	8	1	8	21	20	5				

Tabella 1: Numero di set indipendenti al variare del numero di vertici n e della larghezza del set k

Per ottenere il numero totale di set indipendenti di un cammino basta effettuare la seguente somma

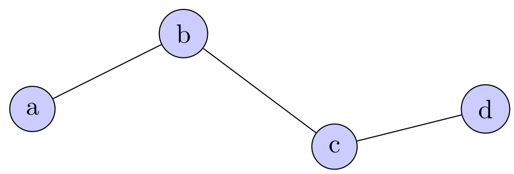
$$S(P_n) = \sum_{k=0}^{n} S(P_{n,k})$$

Dalla tabella è interessante inoltre notare come si sia generato il triangolo di *Fibonacci* (anche se non nella sua consueta forma) che è una diretta conseguenza della formula ricorsiva ottenuta.

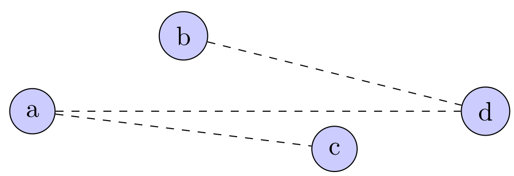
Esercizio 1.2

Scrivere un algoritmo capace di enumerare gli insiemi stabili di un grafo arbitrario.

Prima di scrivere l'algoritmo possiamo fare una considerazione: se generiamo il grafo complementare del grafo in input, come nell'esempio seguente



otteniamo questo grafo



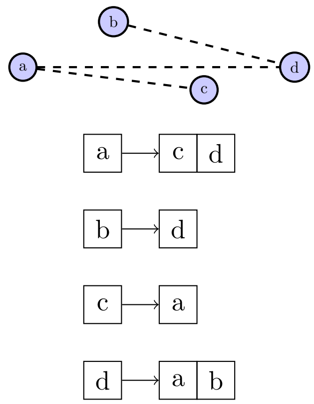
Se cerchiamo tutte le *componenti complete* di questo grafo (sottografi del grafo i cui vertici sono tutti collegati tra loro) otteniamo esattamente ciò che stiamo cercando e cioè i nostri set indipendenti, che nell'ordine sono $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}$ e l'insieme vuoto.
Questa proprietà del grafo complementare vale per qualsiasi tipo di grafo in input, che possiamo sfruttare per il seguente algoritmo

```
CompGraph = getCompGraph(Graph);
TotalSet = getTotalSet(CompGraph);
for each set in TotalSet do
    if IndipendentSet(set, CompGraph) then
        yield set;
    end
end
```

Algorithm 1: Enumerazione Set Indipendenti

che adesso spiegheremo nel dettaglio.

Per la rappresentazione del grafo può essere utile utilizzare le *liste di adiacenza*. Cioè ad ognuno dei nodi viene associata una lista che contiene tutti i nodi ad esso adiacenti, come nell'esempio seguente



***getCompGraph*(Graph)**
Per ottenere il grafo complementare da questa rappresentazione basta semplicemente complementare le liste (e cioè inserire nella lista vuota tutti i vertici che **non** erano presenti nel grafo originale).

***getTotalSet*(CompGraph)**
Una volta poi ottenuto il grafo complemento si cominciano ad elencare tutti i sottoinsiemi di k vertici (al variare di k da 0 a n, che è il numero totale di vertici del grafo) per un totale di

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

sottoinsiemi differenti.

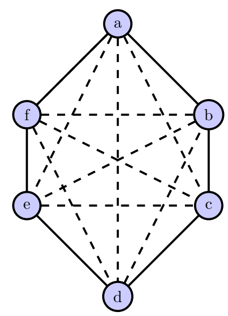
***IndipendentSet*(set, CompGraph)**
Infine si verifica per ognuno di questi set di k vertici se rappresentano un sottoinsieme di vertici completo (che corrisponde nel grafo complementare ad un set indipendente), e nel caso di esito positivo mandarlo nell'output.
Per migliorare l'algoritmo si possono fare alcune assunzioni. Come ad esempio quella che dato un grafo completo, anche tutti i suoi sottoinsiemi lo sono. Quindi un'idea potrebbe essere quella di ricercare i sottografi completi più grandi del grafo complemento, partendo quindi dagli insiemi di vertici più numerosi.

Esercizio 2

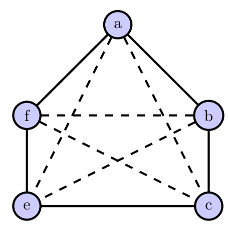
Trovare la formula di ricorrenza di un ciclo $C_{n,k}$ al variare della lunghezza del ciclo n e del numero k di vertici non adiacenti.

Esercizio 2 continued on next page...

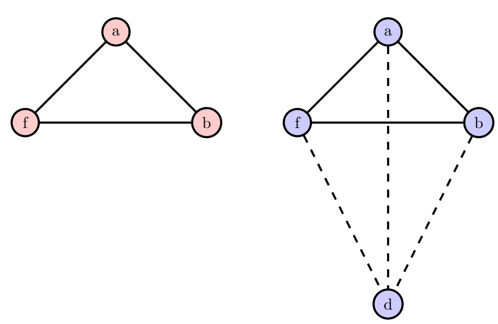
Così come lo abbiamo verificato per i set indipendenti dei cammini $P_{n,k}$, possiamo fare la medesima considerazione per i cicli $C_{n,k}$. Considerando ad esempio il ciclo seguente composto da 6 vertici (e il suo grafo complementare tratteggiato)



Se volessimo calcolare il numero di set indipendenti di 2 vertici, possiamo prima di tutto considerare il ciclo precedente a questo, privato di un vertice

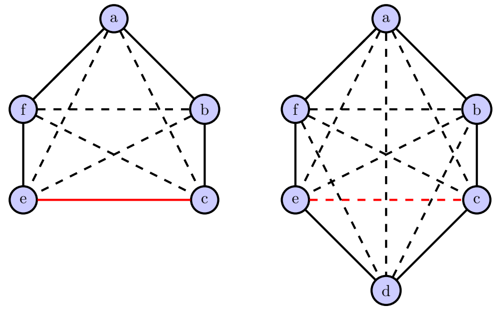


Dove infatti possiamo verificare che esistono ancora alcuni dei set indipendenti di 2 vertici presenti anche nel grafo iniziale. Quindi sappiamo per certo che per calcolare $S(C_{n,k})$ dobbiamo calcolare $S(C_{n-1,k})$ + qualcosa. Questo qualcosa si ottiene dall'aggiunta di un vertice. Ma cosa accade se aggiungo un vertice? Dovrei trovare tutti gli insiemi stabili che partono dal nuovo vertice in questione, ma non considerando i due vertici adiacenti all'aggiunta (e, c). In tal senso quindi mi basterebbe calcolare gli insiemi stabili di $k-1$ vertici con $n-3$ vertici totali $S(n-3, k-1)$, che nel nostro caso corrisponderebbe agli insiemi stabili composti da 1 vertice $(\{f\}, \{a\}, \{b\})$, che sono 3, aggiungendo poi il nuovo vertice d ad ognuno di questi $(\{f, d\}, \{a, d\}, \{b, d\})$, dovremmo ottenere i restanti set indipendenti da 2 vertici, come si evince dall'immagine seguente



Esercizio 2 continued on next page...

Purtroppo questo calcolo non tiene conto del fatto che nell'aggiunta di un nuovo nodo, un lato che prima era presente viene poi spezzato, come mostrato nell'immagine seguente



che rischierebbe così di non essere contato. Per questa motivazione, invece di considerare il passo $n-3$ nel calcolo degli elementi rimanenti, viene considerato il passo $n-2$ che conta invece 4 set indipendenti da 1 vertice, spezzando un lato che prima era presente (come abbiamo mostrato prima per l'aggiunta di un vertice), e che permette quindi di completare la formula ricorsiva

$$S(C_{n,k}) = S(C_{n-1,k}) + S(C_{n-2,k-1})$$

Esercizio 2.1

Tabella degli insiemi stabili di un ciclo $C_{n,k}$ al variare della lunghezza del ciclo n e del numero k di vertici non adiacenti.

$C_{n,k}$		k								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
n	0	1								
	1	1	1							
	2	1	2							
	3	1	3							
	4	1	4	2						
	5	1	5	5						
	6	1	6	9	2					
	7	1	7	14	7					
	8	1	8	20	16	2				

Tabella 2: Numero di set indipendenti da k vertici in un ciclo di n elementi.