

# Teoria Dei Grafi: Esercizi

*Prof. Ottavio D'Antona*

Marco Odore 868906

## Indice

<b>Esercizio 1.3</b>	<b>3</b>
<b>Esercizio 1.5</b>	<b>3</b>
<b>Esercizio 1.6</b>	<b>4</b>
<b>Esercizio 1.7</b>	<b>4</b>
<b>Esercizio 1.8</b>	<b>4</b>

### Esercizio 1.3

Di quanti elementi è costituito l'insieme potenza dell'insieme vuoto? E del singoletto  $\{a\}$ ?

Dato che la cardinalità dell'insieme potenza di un insieme  $S$  è pari a

$$|P(S)| = 2^{|S|}$$

la cardinalità dell'insieme potenza dell'insieme vuoto è

$$2^0 = 1$$

(l'insieme potenza contiene solo l'insieme vuoto)

mentre la cardinalità dell'insieme potenza dell'insieme singoletto  $\{a\}$  è pari a

$$2^1 = 2$$

(l'insieme potenza contiene l'insieme vuoto e il singoletto)

### Esercizio 1.5

Quanto vale  $S(n,2)$ ? Quanto vale  $S(n, n-1)$ ?

(i) Calcolando il caso base  $S(2,2)$  otteniamo

$$S(2,2) = 1 = 2^1 - 1$$

(Il numero di Stirling di seconda specie ha i casi speciali  $S(n,n) = S(n,1) = 1$ )

il caso  $S(3,2)$

$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$$

(dato che  $S(n,k)$  può essere calcolato come  $S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$ )

il caso  $S(4,2)$

$$S(4,2) = S(3,1) + 2S(3,2) = 1 + 6 = 7 = 2^3 - 1$$

etc, possiamo affermare che  $S(n,2)$  è pari a

$$2^{n-1} - 1$$

(ii) Partendo dal caso base  $S(2,1)$  otteniamo

$$S(2,1) = 1$$

il caso  $S(3,2)$

$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 = 3$$

il caso  $S(4,3)$

$$S(4,3) = S(3,2) + 3S(3,3) = 3 + 3 = 6$$

etc, possiamo dedurre che nel caso  $S(n,n-1)$ , il numero di stirling è pari a

$$\sum_{i=1}^{n-1} i$$

## Esercizio 1.6

Verificare che la suddivisione dei sottoinsiemi di un insieme  $S$  a seconda del numero di elementi che essi contengono costituisce una partizione dell'insieme potenza di  $S$ .

Dato un insieme esempio  $S = \{a, b, c\}$ , il suo insieme delle parti è dato da

$$\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset$$

Se raggruppiamo i sottoinsiemi a seconda del numero di elementi contengono otteniamo:

$$|\{a, b, c\}|, |\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}|, |\{a\}, \{b\}|, |\{c\}|, |\emptyset|$$

che rappresenta esattamente una partizione dell'insieme delle parti.

## Esercizio 1.7

Quanto vale la somma degli elementi della  $n$ -esima riga del triangolo di Tartaglia?

Sapendo che ogni elemento di una riga del triangolo di tartaglia è calcolabile come il binomiale

$$\binom{n}{k}$$

dove  $n$  è la riga in oggetto, e  $k$  è la posizione nella riga corrente, possiamo calcolare la somma degli elementi della  $n$ -esima riga del triangolo di tartaglia come

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

## Esercizio 1.8

Che relazione c'è tra la somma degli elementi di posto pari e quelli di posto dispari nelle righe del triangolo di Tartaglia? In che senso la soluzione a questo esercizio suggerisce un criterio di divisibilità tra polinomi?

Dato il triangolo di tartaglia

$$\begin{array}{cccccc}
 n = 0: & & & & & 1 \\
 n = 1: & & & 1 & & 1 \\
 n = 2: & & 1 & & 2 & & 1 \\
 n = 3: & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 n = 4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

partendo dalla seconda riga e sommando gli elemnti di posto pari e di posto dispari otteniamo le coppie

$$(1, 1) \quad n = 1 \quad (1)$$

$$(2, 2) \quad n = 2 \quad (2)$$

$$(4, 4) \quad n = 3 \quad (3)$$

$$(8, 8) \quad n = 4 \quad (4)$$

$$etc \quad (5)$$

. Notiamo che le somme per pari e dispari sono identiche per riga (oltre a rappresantare le potenze di 2). Sviluppando poi i polinomi  $(x - 1)^n$  al variare di n, otteniamo

$$(x - 1)^1 = x - 1 \quad (6)$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 2 \quad (7)$$

$$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad (8)$$

$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \quad (9)$$

$$etc \quad (10)$$

e cioè polinomi i cui coefficienti sono gli elementi delle righe del triangolo di Tartaglia (che variano al variare di n). Possiamo inoltre notare che tali coefficienti hanno i segni alternati in base alle posizione (pari positivi, dispari negativi).

Secondo il teorema di Ruffini un polinomio è divisibile per il binomio  $(x-k)$  se e solo se  $p(k) = 0$ . Secondo il teorema del Resto,  $p(k)$  non è altro che il resto della divisione tra un polinomio e il binomio  $(x-k)$ . Dato che nel nostro caso  $k=1$ , possiamo verificare che  $p(1) = 0$  per ogni  $p = (x - 1)^n$ , dato che mettere  $x$  a 1 corrisponde a sommare i coefficienti del polinomio, che come abbiamo verificando in partenza corrispondo ai coefficienti della riga  $n$ -esima del triangolo di tartaglia, alternati di segno per la posizione, e che quindi sommati portano a 0.