Teoria Dei Grafi: Esercizi (Insiemi Stabili)

Prof. Ottavio D'Antona

Marco Odore 868906

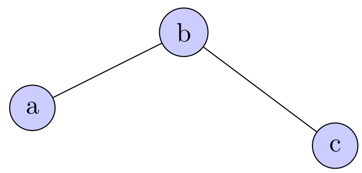
Indice

Esercizio 1

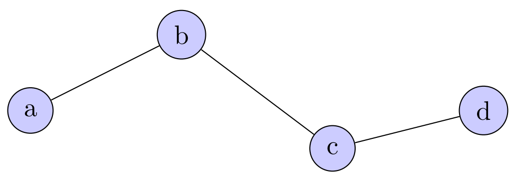
Dimostrare che il numero di insiemi stabili S di un cammino P_n (dove n indica il numero di vertici del cammino) ha la ricorrenza di *Fibonacci*

$$S(P_n) = S(P_{n-1}) + S(P_{n-2})$$

Per dimostrare la relazione tra il numero di set indipendenti di un cammino e la sequenza di *Fibonacci*, basta verificare cosa accade all'aggiungere di un vertice ad un cammino P_n. Ad esempio dato il seguente cammino:



Sappiamo che esistono 5 insiemi stabili, che sono dati dagli insiemi singoletto $\{a\}, \{b\}, \{c\}$, dall'insieme $\{a, c\}$ e dall'insieme vuoto. Cosa accadrebbe se aggiungessimo un nodo d? Avremmo il seguente cammino:



Sicuramente i set indipendenti precedentemente individuati con solo a, b, c rimarrebbero. Quindi c'è qualcosa in più rispetto al cammino precedente. Ma cosa? Osservando il cammino ci rendiamo conto che il nodo aggiunto può generare set indipendenti con solo i nodi che non ha adiacenti, e cioè a, b. Ma quanti nuovi set indipendenti può generare ? Ne può generare tanti quanti sono i set generabili dal cammino composto solo da a, b. Questo perché per generarli posso aggiungere l'elemento d ad ogni set presente in quest'ultimo cammino, e cioè $\{a, d\}$, $\{b, d\}$, $\{d\}$, dato che il cammino a b ha gli insiemi $\{a\}$, $\{b\}$ e l'insieme vuoto, come set indipendenti. Quindi possiamo dire che il numero di set indipententi di un cammino generico P_n si può ottenre come somma dei set indipendenti ottenuti dal cammino meno un nodo, e dai set indipendenti ottenuti dal cammino meno due nodi

$$S(P_n) = S(P_{n-1}) + S(P_{n-2})$$

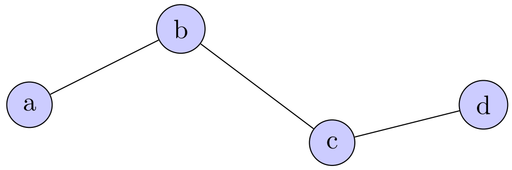
Che è effettivamente la ricorrenza di *Fibonacci*.

Esercizio 1.1

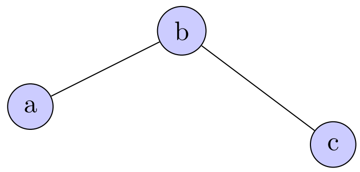
Tabella degli insiemi stabili di un cammino $P_{n,k}$ al variare della lunghezza del cammino n e del numero k di vertici non adiacenti.

Esercizio 1.1 continued on next page. . .

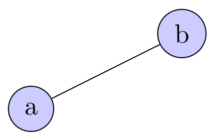
Per calcolare il numero di insiemi stabili con k vertici di un cammino di lunghezza n arbitraria, possiamo fare alcune osservazioni. Prendendo ad esempio il cammino P_n seguente



come facciamo a calcolare il numero di insiemi stabili composti da 2 vertici? Sicuramente sono presenti quegli insiemi stabili di 2 vertici che otterrei togliendo un vertice, e cioè quelli ottenibili da questo cammino



e cioè il solo insieme $\{a, c\}$. Quindi nel calcolo posso aggiungere $S(P_{n-1,k})$. Ma cosa accade aggiungendo un vertice? Dovrei trovare tutti i possibili insiemi stabili composti da 2 elementi, ma che non siano adiacenti al vertice aggiunto alla fine. Come posso calcolarli? Molto banalmente posso rendermi conto che se considero il cammino che non tiene presente del nodo adiacente e quello appena aggiunto,



se conto i suoi insiemi stabili di 1 elemento ($S(P_{n-2,k-1})$), (cioè gli insiemi singoletto $\{a\}$ e $\{b\}$) ottengo automaticamente anche il numero di insiemi stabili da 2 elementi. Per ottenerli infatti basta aggiungere agli insiemi stabili da 1 il nuovo vertice d, ottenendo gli insiemi stabili validi $\{a, d\}$ e $\{b, d\}$ che corrispondono effettivamente agli insiemi stabili da 2 elementi mancanti. Possiamo quindi dedurre che nel calcolo del numero di insiemi stabili da k vertici di un cammino di lunghezza arbitraria n questa formula ricorsiva

$$S(P_{n,k}) = S(P_{n-2,k-1}) + S(P_{n-1,k})$$

è valida.

$P_{n,k}$		k								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
n	0	1								
	1	1	1							
	2	1	2							
	3	1	3	1						
	4	1	4	3						
	5	1	5	6	1					
	6	1	6	10	4					
	7	1	7	15	10	1				
	8	1	8	21	20	5				

Tabella 1: Numero di set indipendenti al variare del numero di vertici n e della larghezza del set k

Esercizio 1.1 continued on next page. . .

Per ottenere il numero totale di set indipendenti di un cammino basta effettuare la seguente somma

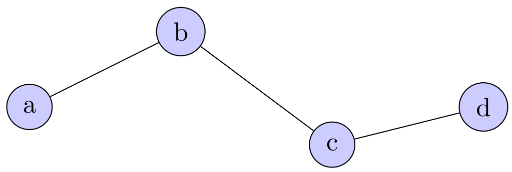
$$S(P_n) = \sum_{k=0}^{n} S(P_{n,k})$$

Dalla tabella è interessante inoltre notare come si sia generato il triangolo di *Fibonacci* (anche se non nella sua consueta forma) che è una diretta conseguenza della formula ricorsiva ottenuta.

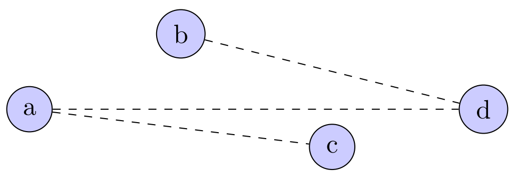
Esercizio 1.2

Scrivere un algoritmo capace di enumerare gli insiemi stabili di un grafo arbitrario.

Prima di scrivere l'algoritmo possiamo fare una considerazione: se generiamo il grafo complementare del grafo in input, come nell'esempio seguente



otteniamo questo grafo



Se cerchiamo tutte le *componenti connesse* di questo grafo (sottografi del grafo i cui vertici sono tutti collegati tra loro) otteniamo esattamente ciò che stiamo cercando e cioè i nostri set indipendenti, che nell'ordine sono $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}$ e l'insieme vuoto.
Questa proprietà del grafo complementare vale per qualsiasi tipo di grafo in input, che possiamo sfruttare per il seguente algoritmo

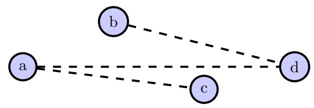
```
CompGraph = getCompGraph(Graph);
TotalSet = getTotalSet(CompGraph);
for each set in TotalSet do
    if IndipendentSet(set, CompGraph) then
        yield set;
    end
end
```

Algorithm 1: Enumerazione Set Indipendenti

che adesso spiegheremo nel dettaglio.

Esercizio 1.2 continued on next page...

Per la rappresentazione del grafo può essere utile utilizzare le *liste di adiacenza*. Cioè ad ognuno dei nodi viene associata una lista che contiene tutti i nodi ad esso adiacenti, come nell'esempio seguente



a →	c	d
b →	d	
c →	a	
d →	a	b

***getCompGraph*(Graph)**
Per ottenere il grafo complementare da questa rappresentazione basta semplicemente complementare le liste (e cioè inserire nella lista vuota tutti i vertici che **non** erano presenti nel grafo originale).

***getTotalSet*(CompGraph)**
Una volta poi ottenuto il grafo complemento si cominciano ad elencare tutti i sottoinsiemi di k vertici (al variare di k da 0 a n, che è il numero totale di vertici del grafo) per un totale di

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

sottoinsiemi differenti.

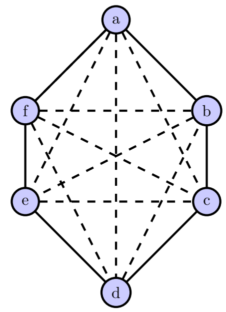
***IndipendentSet*(set, CompGraph)**
Infine si verifica per ognuno di questi set di k vertici se rappresentano un sottoinsieme completamente connesso (che corrisponde nel grafo complementare ad un set indipendente), e nel caso di esito positivo mandarlo nell'output.
Per migliorare l'algoritmo si possono fare alcune assunzioni. Come ad esempio quella che data una componente completamente connessa, anche tutti i suoi sottoinsiemi lo sono. Quindi un'idea potrebbe essere quella di ricercare le componenti connesse più grandi del grafo complemento, partendo quindi dagli insiemi di vertici più numerosi.

Esercizio 2

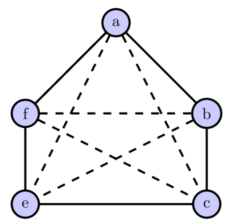
Tabella degli insiemi stabili di un ciclo $C_{n,k}$ al variare della lunghezza del ciclo n e del numero k di vertici non adiacenti.

Esercizio 2 continued on next page...

Così come lo abbiamo verificato per i set indipendenti dei cammini $P_{n,k}$, possiamo fare la medesima considerazione per i cicli $C_{n,k}$. Considerando ad esempio il ciclo seguente composto da 6 vertici (e il suo grafo complementare tratteggiato)



Se volessimo calcolare il numero di set indipendenti di 2 vertici, possiamo prima di tutto considerare il ciclo precedente a questo, privato di un vertice



Dove infatti possiamo verificare che esistono ancora alcuni dei set indipendenti di 2 vertici presenti anche nel grafo iniziale. Quindi sappiamo per certo che per calcolare $S(C_{n,k})$ dobbiamo calcolare $S(C_{n-1,k})$ + qualcosa. Questo qualcosa si ottiene dall'aggiunta di un vertice. Ma visto che non vogliamo considerare i vertici adiacenti a questa aggiunta

$C_{n,k}$		k								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
n	0	1								
	1	1	1							
	2	1	2							
	3	1	3							
	4	1	4	2						
	5	1	5	5						
	6	1	6	9	2					
	7	1	7	14	7					
	8	1	8	20	16	2				

Tabella 2: Numero di set indipendenti da k vertici in un ciclo di n elementi.

Esercizio 2.1

Trovare la formula di ricorrenza di un ciclo $C_{n,k}$ al variare della lunghezza del ciclo n e del numero k di vertici non adiacenti.