Teoria Dei Grafi: Esercizi (Insiemi Stabili)

Prof. Ottavio D'Antona

Marco Odore 868906

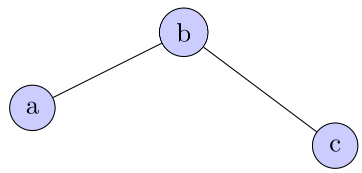
Indice

Esercizio 1

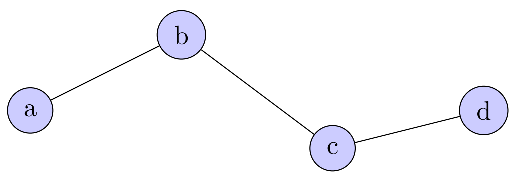
Dimostrare che il numero di insiemi stabili S di un cammino P_n (dove n indica il numero di vertici del cammino) ha la ricorrenza di *Fibonacci*

$$S(P_n) = S(P_{n-1}) + S(P_{n-2})$$

Per dimostrare la relazione tra il numero di set indipendenti di un cammino e la sequenza di *Fibonacci*, basta verificare cosa accade all'aggiungere di un vertice ad un cammino P_n. Ad esempio dato il seguente cammino:



Sappiamo che esistono 5 insiemi stabili, che sono dati dagli insiemi singoletto $\{a\}, \{b\}, \{c\}$, dall'insieme $\{a, c\}$ e dall'insieme vuoto. Cosa accadrebbe se aggiungessimo un nodo d? Avremmo il seguente path:



Sicuramente i set indipendenti precedentemente individuati con solo a, b, c rimarrebbero. Quindi c'è qualcosa in più rispetto al cammino precedente. Ma cosa? Osservando il cammino ci rendiamo conto che il nodo aggiunto può generare set indipendenti con solo i nodi che non ha adiacenti, e cioè a, b. Ma quanti nuovi set indipendenti può generare ? Ne può generare tanti quanti sono i set generabili dal cammino composto solo da a, b. Questo perché per generarli posso aggiungere l'elemento d ad ogni set presente in quest'ultimo cammino, e cioè $\{a, d\}$, $\{b, d\}$, $\{d\}$, dato che il cammino a b ha gli insiemi $\{a\}$, $\{b\}$ e l'insieme vuoto, come set indipendenti. Quindi possiamo dire che il numero di set indipententi di un cammino generico P_n si può ottenre come somma dei set indipendenti ottenuti dal cammino meno un nodo, e dai set indipendenti ottenuti dal cammino meno due nodi

$$S(P_n) = S(P_{n-1}) + S(P_{n-2})$$

Che è effettivamente la ricorrenza di *Fibonacci*.

Esercizio 1.1

Tabella degli insiemi stabili di un cammino $P_{n,k}$ al variare della lunghezza del cammino n e del numero k di vertici non adiacenti.

Esercizio 1.1 continued on next page...

$P_{n,k}$		k								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
n	0	1								
	1	1	1							
	2	1	2							
	3	1	3	1						
	4	1	4	3						
	5	1	5	6	1					
	6	1	6	10	4					
	7	1	7	15	10	1				
	8	1	8	21	20	5				

Tabella 1: Numero di set indipendenti al variare del numero di vertici n e della larghezza del set k

Esercizio 1.2

Scrivere un algoritmo capace di enumerare gli insiemi stabili di un grafo arbitrario.

Esercizio 2

Tabella degli insiemi stabili di un ciclo $C_{n,k}$ al variare della lunghezza del ciclo n e del numero k di vertici non adiacenti.

Esercizio 2.1

Trovare la formula di ricorrenza di un ciclo $C_{n,k}$ al variare della lunghezza del ciclo n e del numero k di vertici non adiacenti.