Teoria Dei Grafi: Esercizi (Partizioni Stabili)

Prof. Ottavio D'Antona

Marco Odore 868906

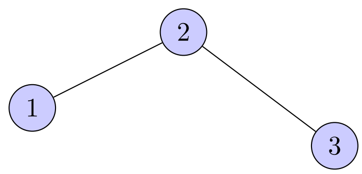
Indice

Esercizio 1

Dimostrare che il numero di partizioni stabili di un path di n elementi, è uguale al numero di partizioni di un insieme di $n-1$ elementi tramite biiezione.

N.B. Le partizioni stabili sono quelle partizioni che generano blocchi in cui i vertici non sono adiacenti.

Prendiamo ad esempio il sequente path:



Quest'ultimo genera le seguenti partizioni stabili:

$$|1|2|3|$$

$$|13|2|$$

Se consideriamo l'insieme di $n-1$ elementi, parallelo al precedente cammino e cioè $\{1,2\}$, possiamo verificare che possiede le seguenti partizioni:

$$|1|2|$$

$$|12|$$

Notiamo che il numero di partizioni stabili del path di $n=3$ elementi è effettivamente uguale al numero di partizioni dell'insieme composto da $n-1$ elementi (hanno entrambi 2 partizioni.)

Esercizio 1 continued on next page...

Come passare da una partizione all'altra? Prima di tutto useremo per comodità la notazione dei numeri naturali per i vertici del path e per gli elementi dell'insieme. Per passare dalle partizioni stabili di un cammino a quelle dell'insieme si possono eseguire 4 passaggi:

1. Si ordinano le partizioni in base all'elemento più piccolo presente nel blocco.

   $$|1|2|3|$$

   $$|13|2|$$

   (In questo caso restano uguali)

2. Se l'elemento n (n inteso come etichetta numerica associata al vertice) si trova in un blocco più grande nell'ordinamento (ordinamento definito nel punto 1), rispetto all'elemento $n-1$, si sposta l'elemento nel blocco inferiore.

   $$|12|3|-|$$

   $$|123|-|$$

3. Si eliminano i blocchi vuoti e si rinominano le etichette dei numeri, sottraendovi 1

   $$|01|2|$$

   $$|012|$$

4. Si eliminano i nodi con etichetta 0

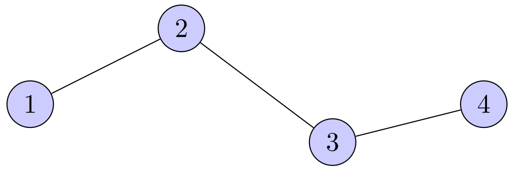
   $$|1|2|$$

   $$|12|$$

   Che effettivamente corrispondono alle nostre partizioni dell'insieme composto da $n-1$ elementi.

Se si esegue il procedimento all'inverso, punto per punto, si ritorna alla partizione del path.

Volendo fare un esempio più complesso, prendiamo il seguente path con 4 vertici:



Il quale ha le seguenti 5 partizioni stabili:

$$|1|2|3|4|$$
$$|13|24|$$
$$|1|3|24|$$
$$|13|2|4|$$
$$|14|2|3|$$

L'insieme corrispondente con 4-1=3 elementi $\{1, 2, 3\}$, ha sempre 5 partizioni:

$$|1|2|3|$$
$$|12|3|$$
$$|1|23|$$
$$|13|2|$$
$$|123|$$
$$|1|2|3|$$

Partiamo sempre dalle partizioni stabili del cammino, ed eseguiamo l'ordinamento dei blocchi in base all'elemento più piccolo presente negli stessi *(passo 1)*.

$$|1|2|3|4|$$
$$|13|24|$$
$$|1|24|3|$$
$$|13|2|4|$$
$$|14|2|3|$$

Poi spostiamo il vertice n nel blocco precedente, se n si trova in un blocco superiore a quello in cui è presente il vertice $n-1$ *(passo 2)*:

$$|12|3|4|-|$$
$$|1234|-|$$
$$|12|34|-|$$
$$|123|4|-|$$
$$|124|3|-|$$

Rinominiamo le etichette dei vertici facendo un -1 ed eliminiamo i blocchi vuoti *(passo 3)*:

$$|01|2|3|$$

$$|0123|$$

$$|01|23|$$

$$|012|3|$$

$$|013|2|$$

Infine eliminiamo gli 0 *(passo 4)*:

$$|1|2|3|$$

$$|123|$$

$$|1|23|$$

$$|12|3|$$

$$|13|2|$$

Che sono effettivamente le stesse partizioni dell'insieme composto da $n-1$ elementi. Eseguendo il passaggio all'inverso si può facilmente poi tornare alle partizioni del path.