Teoria Dei Grafi: Esercizi

Prof. Ottavio D'Antona

Marco Odore 868906

Indice

Esercizio 1.3

Di quanti elementi è costituito l'insieme potenza dell'insieme vuoto? E del singoletto {a}?

Dato che la cardinalità dell'insieme potenza di un insieme S è pari a

$$|P(S)| = 2^{|S|}$$

la cardinalità dell'insieme potenza dell'insieme vuoto è

$$2^0 = 1$$

(l'insieme potenza contiene solo l'insieme vuoto)
mentre la cardinalità dell'insieme potenza dell'insieme singoletto {a} è pari a

$$2^1 = 2$$

(l'insieme potenza contiene l'insieme vuoto e il singoletto)

Esercizio 1.5

Quanto vale S(n,2)? Quanto vale S(n, n-1)?

(i) Di base sappiamo che il numero di stirling di seconda specie S(n,k) si ottiene come

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n$$

Dato che stiamo considerando il caso in cui $k = 2$ abbiamo che

$$S(n,2) = \frac{(1 \cdot 1 \cdot 2^n)}{2!} + \frac{(-1 \cdot 2 \cdot 1^n)}{2!} = 2^{n-1} - 1$$

(ii) Partendo dal caso base S(2,1) otteniamo

$$S(2,1) = 1$$

il caso S(3,2)

$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 = 3$$

il caso S(4,3)

$$S(4,3) = S(3,2) + 3S(3,3) = 3 + 3 = 6$$

etc, possiamo dedurre che nel caso S(n,n-1), il numero di stirling è pari a

$$\sum_{i=1}^{n-1} i$$

Esercizio 1.6

Verificare che la suddivisione dei sottoinsiemi di un insieme S a seconda del numero di elementi che essi contengono costituisce una partizione dell'insieme potenza di S.

Esercizio 1.6 continued on next page. . .

Dato un insieme esempio S = {a, b, c}, il suo insieme delle parti è dato da

$$\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, 0$$

Se raggruppiamo i sottoinsiemi a seconda del numero di elementi che essi contengono otteniamo:

$$|\{a, b, c\}|, |\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}|, |\{a\}, \{b\}, \{c\}|, |0|$$

che rappresenta esattamente una partizione dell'insieme delle parti.

Esercizio 1.7

Quanto vale la somma degli elementi della n-esima riga del triangolo di Tartaglia?

Sapendo che ogni elemento di una riga del triangolo di tartaglia è calcolabile come il binomiale

$$\binom{n}{k}$$

dove n è la riga in oggetto, e k è la posizione nella riga corrente, possiamo calcolare la somma degli elementi della n-esemia riga del triangolo di tartaglia come

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Esercizio 1.8

Che relazione c'è tra la somma degli elementi di posto pari e quelli di posto dispari nelle righe del triangolo di Tartaglia? In che senso la soluzione a questo esercizio suggerisce un criterio di divisibilità tra polinomi?

Esercizio 1.8 continued on next page. . .

Dato il triangolo di tartaglia

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n = 0: & & & & & 1 & & & & \\
n = 1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n = 2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n = 3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n = 4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

partendo dalla seconda riga e sommando gli elementi di posto pari e di posto dispari otteniamo le coppie

$$(1, 1) \quad n = 1 \tag{1}$$
$$(2, 2) \quad n = 2 \tag{2}$$
$$(4, 4) \quad n = 3 \tag{3}$$
$$(8, 8) \quad n = 4 \tag{4}$$
$$etc \tag{5}$$

. Notiamo che le somme per pari e dispari sono identiche per riga (oltre a rappresantare le potenze di 2). Sviluppando poi i polinomi $(x - 1)^n$ al variare di n, otteniamo

$$(x - 1)^1 = x - 1 \tag{6}$$
$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 2 \tag{7}$$
$$(x - 1)^3 = x^3 - 3x + 3x - 1 \tag{8}$$
$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \tag{9}$$
$$etc \tag{10}$$

e cioè polinomi i cui coefficienti sono gli elementi delle righe del triangolo di Tartaglia (che variano al variare di n). Possiamo inoltre notare che tali coefficienti hanno i segni alternati in base alle posizione (pari positivi, dispari negativi).

Secondo il teorema di Ruffini un polinomio è divisibile per il binomio (x-k) se e solo se $p(k) = 0$. Secondo il teorema del Resto, p(k) non è altro che il resto della divisione tra un polinomio e il binomio (x-k). Dato che nel nostro caso k=1, possiamo verificare che $p(1) = 0$ per ogni $p = (x - 1)^n$, dato che mettere x a 1 corrisponde a sommare i coefficienti del polinomio, che come abbiamo verificando in partenza corrispondo ai coefficienti della riga n-esima del triangolo di tartaglia, alternati di segno per la posizione, e che quindi sommati portano a 0.

Esercizio 1.9

Dimostrare che, presi comunque $a, b, n \in N$

$$(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n \in N$$

Sapendo che il binomio di Newton è calcolato come

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Svolgendo singolarmente $(a+\sqrt{b})^n$ e $(a-\sqrt{b})^n$ otteniamo

$$(a+\sqrt{b})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot (\sqrt{b})^k$$

$$(a-\sqrt{b})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot (-\sqrt{b})^k$$

quando k è pari il termine k-esimo dei due polinomi coincide (il segno negativo diventa positivo per il secondo termine del secondo binomio)

$$(\sqrt{b})^k = (-\sqrt{b})^k = b^{k/2} \in N$$

poichè $k/2 \in N$. Mentre quando k è dispari abbiamo che

$$(\sqrt{b})^k + (-\sqrt{b})^k = 0$$

che quindi porta all'eliminazione del termine k-esimo all'interno della sommatoria (i valori k-esimi sono i medesimi per i due binomi, ma opposti per segno).
Dato che $n-k \in N$

$$\binom{n}{k} \in N$$

$$a^{n-k} \in N$$

Possiamo quindi affermare che comunque scelti $a, b, n \in N$, il termine k-esimo delle sommatoria (con k pari)

$$\binom{n}{k} a^{n-k} \cdot (\sqrt{b})^k \in N$$

e di conseguenza che

$$(a+\sqrt{b})^n + (a-\sqrt{b})^n \in N$$

Esercizio 1.23

Dimostrare che l'elemento di posto (i, j) del prodotto di n matrici triangolari inferiori (di ordine arbitrario) è dato dalla somma di

$$\frac{< n >_{i-j}}{(i-j)!} = \left(\binom{n}{i-j}\right)$$

addendi.

Esercizio 1.23 continued on next page...

Prima di tutto è importante ricordare una proprietà del valore $\frac{<n>_{i-j}}{(i-j)!}$, che può essere rappresentato come il binomiale

$$\binom{n+(i-j)-1}{i-j} = \binom{n+(i-j)-1}{n-1}$$

Inoltre data una matrice triangolare inferiore, il valore dell'elemento della matrice potenza N^n in posizione (i,j) è dato dalla formula ricorsiva:

$$(i,j)^n = \sum_{k=0}^{(i-j)} (a_{ik}^{n-1} \cdot a_{kj})$$

Nota: $(i,j)^n$ e a_{ik}^{n-1} vanno intesoi come elementi della matrice N^n e N^{n-1}, non come elementi elevati alla potenza n-esima

Proviamo a calcolare la matrice N, risultato del seguente prodotto di matrici triangolari inferiori

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

che può essere scritta anche come il prodotto

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

dato che la matrice parziale P è uguale a

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

. Calcolando passo passo i valori degli elementi in posizione (i=2,j=0), (i=2, j=1), (i=2, j=2) della matrice P, otteniamo

$$(i=2, j=0) = (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 3(addendi)$$

$$(i=2, j=1) = (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 2(addendi)$$

$$(i=2, j=2) = (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) = 1(addendi)$$

che effettivamente corrispondono ai valori calcolati con il binomiale (n=2)

$$\binom{n+(i-j)-1}{n-1}$$

$$(i=2, j=0) = \binom{2+(2-0)-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3$$

$$(i=2, j=1) = \binom{2+(2-1)-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$$

$$(i=2, j=2) = \binom{2+(2-2)-1}{2-1} = \binom{1}{1} = 1$$

Calcolando ora i valori degli elementi in posizione (i=2,j=0), (i=2, j=1), (i=2, j=2) della matrice N, ricordandoci del calcolo fatto precedentemente con P, otteniamo

$(i = 2, j = 0) = (((1\cdot1)+(1\cdot1)+(1\cdot1))\cdot1)+(((1\cdot0)+(1\cdot1)+(1\cdot1))\cdot1)+(((1\cdot0)+(1\cdot0)+(1\cdot1))\cdot1) = 3+2+1 = 6$

addendi

$(i = 2, j = 1) = (((1\cdot1)+(1\cdot1)+(1\cdot1))\cdot0)+(((1\cdot0)+(1\cdot1)+(1\cdot1))\cdot1)+(((1\cdot0)+(1\cdot0)+(1\cdot1))\cdot1) = 2+1 = 3$

addendi

$(i = 2, j = 2) = (((1\cdot1)+(1\cdot1)+(1\cdot1))\cdot0)+(((1\cdot0)+(1\cdot1)+(1\cdot1))\cdot0)+(((1\cdot0)+(1\cdot0)+(1\cdot1))\cdot1) = 1 = 1$

addendi. Che effettivamente corrispondono ai valori calcolati con il binomiale (n=3)

$$(i = 2, j = 0) = \binom{3 + (2 - 0) - 1}{3 - 1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$(i = 2, j = 1) = \binom{3 + (2 - 1) - 1}{3 - 1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$(i = 2, j = 2) = \binom{3 + (2 - 2) - 1}{3 - 1} = \binom{2}{2} = 1$$

Esercizio 1.25

Dimostrare che

$$P(n, x) = P(n - 1, x - 1) + P(n - x, x)$$

sapendo che

$$P(1, 1) = 1$$

e

$$P(n, x) = 0$$

se n ≤ 0

Ricordando che $P(n, x)$ non rappresenta altro il numero di modi in cui possiamo ottenere il numero n sommando x numeri naturali, dimostriamo questa equazione per induzione, partendo dal caso base $P(2, 1)$, che sappiamo valere 1 (2 è rappresentabile in un solo modo usando una singola cifra):

$$P(2, 1) = P(1, 0) + P(1, 1) = 0 + 1 = 1$$

($P(1, 0) = 0$ in quanto non esistono modi per rappresentare 1 con 0 cifre) Verifichiamolo ora per il caso n+1

Esercizio "Nuovo"

Dimostrare che

$$s(n, 1) = (n - 1)!$$

Esercizio "Nuovo" continued on next page. . .

Sappiamo che il fattoriale di $(n-1)$ si può scrivere anche come

$$(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1$$

e che generalmente

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1) \cdot s(n-1,k)$$

Svolgendo $s(n,1)$ otteniamo

$$s(n,1) = s(n-1,0) + (n-1) \cdot s(n-1,1)$$

Ma dato che

$$s(n-1,0) = 0$$

Possiamo affermare quindi che

$$s(n,1) = (n-1) \cdot s(n-1,1)$$

e conseguentemente

$$s(n-1,1) = (n-2) \cdot s(n-2,1)$$

Calcolando quindi ricorsivamente $s(n-i,1)$ fino a che $n-i=1$ (arrivando al caso $s(1,1)=1$)otteniamo

$$(n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1 = (n-1)!$$