

# Teoria Dei Grafi: Esercizi

*Prof. Ottavio D'Antona*

Marco Odore 868906

## Indice

Esercizio 1.3	3
Esercizio 1.5	3
Esercizio 1.6	4
Esercizio 1.7	4
Esercizio 1.8	4
Esercizio 1.23	5
Esercizio 1.25	7
Problem 8	7

### Esercizio 1.3

Di quanti elementi è costituito l'insieme potenza dell'insieme vuoto? E del singoletto  $\{a\}$ ?

Dato che la cardinalità dell'insieme potenza di un insieme  $S$  è pari a

$$|P(S)| = 2^{|S|}$$

la cardinalità dell'insieme potenza dell'insieme vuoto è

$$2^0 = 1$$

(l'insieme potenza contiene solo l'insieme vuoto)

mentre la cardinalità dell'insieme potenza dell'insieme singoletto  $\{a\}$  è pari a

$$2^1 = 2$$

(l'insieme potenza contiene l'insieme vuoto e il singoletto)

### Esercizio 1.5

Quanto vale  $S(n,2)$ ? Quanto vale  $S(n, n-1)$ ?

(i) Calcolando il caso base  $S(2,2)$  otteniamo

$$S(2,2) = 1 = 2^1 - 1$$

(Il numero di Stirling di seconda specie ha i casi speciali  $S(n,n) = S(n,1) = 1$ )

il caso  $S(3,2)$

$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$$

(dato che  $S(n,k)$  può essere calcolato come  $S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$ )

il caso  $S(4,2)$

$$S(4,2) = S(3,1) + 2S(3,2) = 1 + 6 = 7 = 2^3 - 1$$

etc, possiamo affermare che  $S(n,2)$  è pari a

$$2^{n-1} - 1$$

(ii) Partendo dal caso base  $S(2,1)$  otteniamo

$$S(2,1) = 1$$

il caso  $S(3,2)$

$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 = 3$$

il caso  $S(4,3)$

$$S(4,3) = S(3,2) + 3S(3,3) = 3 + 3 = 6$$

etc, possiamo dedurre che nel caso  $S(n,n-1)$ , il numero di stirling è pari a

$$\sum_{i=1}^{n-1} i$$

## Esercizio 1.6

Verificare che la suddivisione dei sottoinsiemi di un insieme  $S$  a seconda del numero di elementi che essi contengono costituisce una partizione dell'insieme potenza di  $S$ .

Dato un insieme esempio  $S = \{a, b, c\}$ , il suo insieme delle parti è dato da

$$\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset$$

Se raggruppiamo i sottoinsiemi a seconda del numero di elementi che essi contengono otteniamo:

$$|\{a, b, c\}|, |\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}|, |\{a\}, \{b\}|, |\{c\}|, |\emptyset|$$

che rappresenta esattamente una partizione dell'insieme delle parti.

## Esercizio 1.7

Quanto vale la somma degli elementi della  $n$ -esima riga del triangolo di Tartaglia?

Sapendo che ogni elemento di una riga del triangolo di tartaglia è calcolabile come il binomiale

$$\binom{n}{k}$$

dove  $n$  è la riga in oggetto, e  $k$  è la posizione nella riga corrente, possiamo calcolare la somma degli elementi della  $n$ -esima riga del triangolo di tartaglia come

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

## Esercizio 1.8

Che relazione c'è tra la somma degli elementi di posto pari e quelli di posto dispari nelle righe del triangolo di Tartaglia? In che senso la soluzione a questo esercizio suggerisce un criterio di divisibilità tra polinomi?

Dato il triangolo di tartaglia

$$\begin{array}{cccccc}
 n = 0: & & & & & 1 \\
 n = 1: & & & 1 & & 1 \\
 n = 2: & & 1 & & 2 & & 1 \\
 n = 3: & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 n = 4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

partendo dalla seconda riga e sommando gli elementi di posto pari e di posto dispari otteniamo le coppie

$$(1, 1) \quad n = 1 \quad (1)$$

$$(2, 2) \quad n = 2 \quad (2)$$

$$(4, 4) \quad n = 3 \quad (3)$$

$$(8, 8) \quad n = 4 \quad (4)$$

$$etc \quad (5)$$

. Notiamo che le somme per pari e dispari sono identiche per riga (oltre a rappresentare le potenze di 2). Sviluppando poi i polinomi  $(x - 1)^n$  al variare di n, otteniamo

$$(x - 1)^1 = x - 1 \quad (6)$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \quad (7)$$

$$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad (8)$$

$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \quad (9)$$

$$etc \quad (10)$$

e cioè polinomi i cui coefficienti sono gli elementi delle righe del triangolo di Tartaglia (che variano al variare di n). Possiamo inoltre notare che tali coefficienti hanno i segni alternati in base alla posizione (pari positivi, dispari negativi).

Secondo il teorema di Ruffini un polinomio è divisibile per il binomio  $(x-k)$  se e solo se  $p(k) = 0$ . Secondo il teorema del Resto,  $p(k)$  non è altro che il resto della divisione tra un polinomio e il binomio  $(x-k)$ . Dato che nel nostro caso  $k=1$ , possiamo verificare che  $p(1) = 0$  per ogni  $p = (x - 1)^n$ , dato che mettere  $x$  a 1 corrisponde a sommare i coefficienti del polinomio, che come abbiamo verificando in partenza corrisponde ai coefficienti della riga  $n$ -esima del triangolo di tartaglia, alternati di segno per la posizione, e che quindi sommati portano a 0.

## Esercizio 1.23

Dimostrare che l'elemento di posto  $(i, j)$  del prodotto di  $n$  matrici triangolari inferiori (di ordine arbitrario) è dato dalla somma di

$$\frac{< n >_{i-j}}{(i-j)!} = \left( \binom{n}{i-j} \right)$$

addendi.

Prima di tutto è importante ricordare una proprietà del valore  $\frac{\binom{n}{i-j}}{(i-j)!}$ , che può essere rappresentato come il binomiale

$$\binom{n+(i-j)-1}{i-j} = \binom{n+(i-j)-1}{n-1}$$

Proviamo a calcolare la matrice N, risultato del seguente prodotto di matrici triangolari inferiori

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

che può essere scritta anche come il prodotto

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

dato che la matrice parziale P è uguale a

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

. Calcolando passo passo i valori degli elementi in posizione  $(i=2, j=0)$ ,  $(i=2, j=1)$ ,  $(i=2, j=2)$  della matrice P, otteniamo

$$(i=2, j=0) = (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 3(\text{addendi})$$

$$(i=2, j=1) = (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 2(\text{addendi})$$

$$(i=2, j=2) = (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) = 1(\text{addendi})$$

che effettivamente corrispondono ai valori calcolati con il binomiale  $(n=2)$

$$\binom{n+(i-j)-1}{n-1}$$

$$(i=2, j=0) = \binom{2+(2-0)-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3$$

$$(i=2, j=1) = \binom{2+(2-1)-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$$

$$(i=2, j=2) = \binom{2+(2-2)-1}{2-1} = \binom{1}{1} = 1$$

Calcolando ora i valori degli elementi in posizione  $(i=2, j=0)$ ,  $(i=2, j=1)$ ,  $(i=2, j=2)$  della matrice  $N$ , ricordandoci del calcolo fatto precedentemente con  $P$ , otteniamo

$$(i = 2, j = 0) = (((1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) = 3 + 2 + 1 = 6$$

addendi

$$(i = 2, j = 1) = (((1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 0) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) = 2 + 1 = 3$$

addendi

$$(i = 2, j = 2) = (((1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 0) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)) \cdot 0) + (((1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1)) \cdot 1) = 1 = 1$$

addendi. Che effettivamente corrispondono ai valori calcolati con il binomiale ( $n=3$ )

$$(i = 2, j = 0) = \binom{3 + (2 - 0) - 1}{3 - 1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$(i = 2, j = 1) = \binom{3 + (2 - 1) - 1}{3 - 1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$(i = 2, j = 2) = \binom{3 + (2 - 2) - 1}{3 - 1} = \binom{2}{2} = 1$$

## Esercizio 1.25

Dimostrare che

$$P(n, x) = P(n - 1, x - 1) + P(n - x, x)$$

sapendo che

$$P(1, 1) = 1$$

e

$$P(n, x) = 0$$

se  $n \leq 0$

Ricordando che  $P(n, x)$  non rappresenta altro il numero di modi in cui possiamo ottenere il numero  $n$  sommando  $x$  numeri naturali, dimostriamo questa equazione per induzione, partendo dal caso base  $P(2, 1)$ , che sappiamo valere 1 (2 è rappresentabile in un solo modo usando una singola cifra):

$$P(2, 1) = P(1, 0) + P(1, 1) = 0 + 1 = 1$$

$(P(1, 0) = 0$  in quanto non esistono modi per rappresentare 1 con 0 cifre) Verifichiamolo ora per il caso  $n+1$

## Problem 8

Dimostrare che

$$s(n, 1) = (n - 1)!$$

Sappiamo che il fattoriale di  $(n - 1)$  si può scrivere anche come

$$(n - 1)! = (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

e che generalmente

$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) + (n - 1) \cdot s(n - 1, k)$$

Svolgendo  $s(n, 1)$  otteniamo

$$s(n, 1) = s(n - 1, 0) + (n - 1) \cdot s(n - 1, 1)$$

Ma dato che

$$s(n - 1, 0) = 0$$

Possiamo affermare quindi che

$$s(n, 1) = (n - 1) \cdot s(n - 1, 1)$$

e conseguentemente

$$s(n - 1, 1) = (n - 2) \cdot s(n - 2, 1)$$

Calcolando quindi ricorsivamente  $s(n - i, 1)$  fino a che  $n - i = 1$  (arrivando al caso  $s(1, 1) = 1$ ) otteniamo

$$(n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = (n - 1)!$$