Sección 6.1

1. ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan con 0 y terminan con 101?
2. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 3 libros cada uno de un tema diferente, entre un conjunto de 6 libros de historia, 9 libros clásicos, 7 libros de leyes y 4 libros de educación, todos distintos?
3. ¿Cuántas funciones hay de un conjunto de n elementos sobre $\{0, 1\}$?
4. Un comité de 7 personas compuesto por Gregorio, Humberto, Isaac, Jazmín, Karen, Laura y Manuel debe seleccionar presidente, vicepresidente, coordinador de eventos sociales, secretario y tesorero. ¿De cuántas maneras pueden asignarse los puestos si Gregorio es secretario o no le asignan un puesto?

1) □ □ □ □ □ □ □ □

0 1 0 1

$(1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1)$ posibil.

$2^4 = 16$

2) 3 Libros c/u tema dif

6H 9C . 7L . 4E } 26 libros

□ □ □

4 comb. de generos sin rep

1° comb. totales => $\binom{26}{3}$

$6\text{ op.} \cdot 9\text{ op} \cdot (7+4)\text{ op.}$

$6 \cdot 9 \cdot 11$

594

(ii) Sea a_n la sucesión definida recursivamente por

$$a_1 = 2,$$
$$a_2 = 16,$$
$$a_n = 8\,a_{n-1} - 15\,a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3 .$$

Probar que $a_n = 5^n - 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base.

$a_1 = 2,\ n=1,\ a_1 = 5^1 - 3^1 = 2$ ✓

$a_2 = 16,\ n=2,\ a_2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$ ✓

2) Hi, $n = h$

$a_h = 5^h - 3^h \quad 1 \leq h \leq k$ + verdadero

3) Paso inductivo, vale para k ¿vale para k+1?

$a_{k+1} = 8a_{k-1+1} + 15a_{k-2+1}$ {recursividad}

$= 8a_k + 15a_{k-1}$

$= 8(5^k - 3^k) + 15(5^{k-1} - 3^{k-1})$ {Hi}

$= 8\cdot 5^k + 8\cdot(-3^k) + 15\cdot(5^{k-1}) + 15(-3^{k-1})$

$= 8\cdot 5^k + 8\cdot(-3^k) + (5\cdot 3)\cdot(5^{k-1}) + (3\cdot 5)\cdot(-3^{k-1})$ {Factorizo $3\cdot 5 = 15$}

$= 8\cdot 5^k + 8\cdot(-3^k) + 3\cdot 5^k + 5\cdot(-3^k)$

$= (-8+5)\cdot 3^k + (-3+8)\,5^k$

$(-3)\cdot 3^k + (+5)\,5^k = 3^{k+1} + 5^{k+1}$

4. (25 puntos) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra LOLLAPALOOZA si
(i) no hay restricciones?
(ii) consonantes y vocales deben alternarse?
(iii) todas las L's deben estar juntas?

L O L L a P a l o o z a

1 1 2 3 1 1 2 4 2 3 1 3

12 letras = L=4, a=3, o=3

i) $\frac{12!}{4!3!3!}$

ii) Vocales = a, o = 2. Cons = L, P, Z, = 3

3, 3 = 6   4, 1, 1 = 6

lolozoPalala = |V|C|V|C|V|C|V|C|V|C|V|C|

C V C V C V C V C V C V

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1 Letras, 6VP, 6CP, $6\times 6 = 6!\,6!$

5×5

4×4

3×3

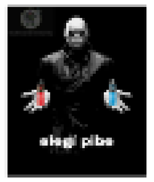
2×2

1×1

iii) Todas Las L's Juntas

L=4. |LLLL| | | | | | | | |

$8!\cdot 4!$ ⊖ $\frac{8!}{3!\,3!}$ ✓



(LLLL) 9!

$\frac{9!}{3!\,3!}$

(1) (30%) ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra REMOTAMENTE?

(2) En una veterinaria hay 16 cobayos, 7 perros cachorros, 22 ardillas, 10 lagartijas y 8 gatos cachorros. Queremos elegir un total de 6 mascotas. ¿De cuantas formas podemos hacerlo?

(a) (10%) Si no hay restricciones.

(b) (20%) Si debe haber 2 ardillas y 4 lagartijas.

(c) (20%) Si debe haber al menos 4 ardillas.

(d) (20%) Si debe haber al menos un animal de cada clase, es decir debe haber al menos un cobayo, un perro cachorro, una ardilla, una lagartija y un gato cachorro.

1 1 1 1 2 2 2 3

Remotamente

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$\frac{11!}{3!\,2!\,2!}$$

c) Habrá una cantidad de casos según cuantas ardillas ose ea $4 \geq A$

$\cdot \binom{22}{4}\cdot\binom{41}{2}$

$\cdot \binom{22}{5}\cdot\binom{41}{1}$

$\cdot \binom{22}{6}\cdot\binom{41}{0}$

Y lo sumo

$16+7+22+10+8=63$

a) $\binom{63}{6}$

b) $\underbrace{\square\,\square}\;\underbrace{\square\,\square\,\square\,\square}$

$\binom{22}{2}\cdot\binom{10}{4}$

c) $\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square$

$1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 59\cdot 58 \to \cancel{3422}$

$\binom{22}{4}\cdot\binom{41}{2} \to 5998300$

$+\binom{22}{5}\cdot\binom{41}{1}$

$\binom{22}{6}$

$\cancel{9.629.466}$ 7152607

3/10

I2) *Conmutatividad.* $a + b = b + a; \qquad ab = ba.$

I3) *Asociatividad.* $(a + b) + c = a + (b + c); \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$

I4) *Existencia de elemento neutro.* Existen números $0, 1 \in \mathbb{Z}$ con $0 \neq 1$ tal que $a + 0 = a; \qquad a \cdot 1 = a.$

I5) *Distributividad.* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

I6) *Existencia del inverso aditivo, también llamado opuesto.* Por cada a en $\mathbb{Z}$ existe un único entero $-a$ en $\mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0.$

I7) *Cancelación.* Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$.

I8) *Ley de tricotomía.* Vale una y sólo una de las relaciones siguientes:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

I9) *Ley transitiva.* Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

I10) *Compatibilidad de la suma con el orden.* Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

I11) *Compatibilidad del producto con el orden.* Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

(11) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue: $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ y $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que $u_n = 3^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(12) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue: $u_1 = 9$, $u_2 = 33$, $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2}$, $\forall n \geq 3$. Probar que $u_n = 2^{n+1} + 5^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

12) $u_1 = 9$, $u_2 = 33$, $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2}$ $\forall n \geq 3$

$u_n = 2^{n+1} + 5^n$

1) casos base

$u_1 = 9$ $n=1$ $u_1 = 2^{1+1} + 5^1 = 9$ ✓

$2^2 + 5 = 9$

$u_2 = 33$, $n=2$ $u_2 = 2^{2+1} + 5^2 = 8 + 25 = 33$ ✓

(11) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue: $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ y $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que $u_n = 3^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(12) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue: $u_1 = 9$, $u_2 = 33$, $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2}$, $\forall n \geq 3$. Probar que $u_n = 2^{n+1} + 5^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2) Hi. $n = h$

$u_h = 2^{h+1} + 5^h$ $1 \leq h \leq k$ verdadero

3) $u_{k+1} = 7u_{k+1-1} - 10u_{k-2+1}$ {recursivo}

$= 7u_k - 10u_{k-1}$

$= 7(2^{k+1} + 5^k) - 10(2^{k+1-1} + 5^{k-1})$ {Hi}

$= 7\cdot(2^{k+1}) + 7\cdot(5^k) - 10(2^k) - 10(5^{k-1})$

$2\cdot 5 = 10$

$= 7\cdot(2^{k+1}) + 7\cdot(5^k) - (5\cdot 2)\cdot(2^k) - (2\cdot 5)\cdot(5^{k-1})$ {Factorización}

$= 7\cdot(2^{k+1}) + 7\cdot(5^k) - (5)\cdot(2^{k+1}) - (2)\cdot(5^k)$

$= (7-5)\cdot 2^{k+1} + (7-2)5^k$

$(2)\cdot 2^{k+1} + 5\cdot 5^k$

$= 7\cdot(2^{k+1}) + 7\cdot(5^k) - (5\cdot 2)\cdot(2^k) - (2\cdot 5)\cdot(5^{k-1})$

$= 7\cdot(2^{k+1}) + 7\cdot(5^k) - (5)\cdot(2^{k+1}) - (2)\cdot(5^k)$

$= (7-5)\cdot 2^{k+1} + (7-2)5^k$

$(2)\cdot 2^{k+1} + 5\cdot 5^k$

$2^{k+1+1} + 5^{k+1} =$

$2^{k+2} + 5^{k+1} =$

Sección 6.2

5. ¿Cuántas combinaciones de 3 hay de 6 objetos?
6. ¿Cuántas cadenas se pueden formar ordenando las letras *ABCDEF* si *A* aparece antes de *C* y *E* aparece antes de *C*?
7. ¿Cuántas manos de 6 cartas seleccionadas de una baraja común de 52 cartas contienen 3 cartas de un palo y 3 cartas de otro palo?
8. Un envío de 100 discos compactos contiene 5 defectuosos. De cuántas maneras se puede seleccionar un conjunto de 4 discos compactos que contenga más discos defectuosos que buenos?

C ∧ C
V V V
F V V
V V F

C

4
= C . _ _ _
_C _ _ .
A C _ _ _ .
E C _ _ _ .

ABCDEF → 6 letras

1° C . $5! = 120$

2° $5 \cdot 1 \cdot 4! = 120$

3° ☐ ☐ C ☐ ☐ ☐

→ A → $1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3! = 24$
→ E → $1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3! = 24$
→ A ∧ E → $2! \cdot 1 \cdot 3! = 12$

60

4° ☐ ☐ ☐ C ☐ ☐

A $\frac{3!}{(2-2)!}$ (1) $\frac{2!}{(2-2)!}$ 24

1° caso

(A 4 . 3) (1) . 2

12 . 2

$\boxed{24}$

Sección 6.4

13. Se selecciona una carta al azar de una baraja común de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un corazón?

14. Se lanzan dos dados no cargados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números que aparecen sea 8?

15. En el juego "Cash In Hand" de Maryland, el concursante elige 7 números distintos entre 1 y 31. Él gana una cantidad modesta ($40) si exactamente 5 números, en cualquier orden, coinciden con 5 de los 7 elegidos aleatoriamente por un representante de la lotería. ¿Cuál es la probabilidad de ganar $40?

16. Encuentre la probabilidad de obtener una mano de bridge con distribución 6–5–2–0, es decir, 6 cartas de un palo, 5 de otro palo, 2 de otro y ninguna carta del cuarto palo.

13) 52 → 13♡ → 25% ←

$\binom{52}{13}$ $\binom{13}{1}$

♡ ♣ ♢ ♠

$\frac{13}{52}$ $\binom{?}{}$

Ejemplo 6.4.3 ▶

Se lanzan dos dados no cargados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números en los dados sea 10?

Como el primer dado puede mostrar cualquiera de seis números y el segundo dado puede mostrar cualquiera de seis números, por el principio de la multiplicación hay $6 \cdot 6 = 36$ sumas posibles; es decir, el tamaño del espacio muestra es 36. Existen tres maneras posibles de obtener la suma de 10, (4, 6), (5, 5), (6, 4); esto es, el tamaño del evento consistente en "obtener una suma de 10" es 3. [La notación (x, y) significa obtener x en el primer dado y y en el segundo]. Por lo tanto, la probabilidad es $3/36 = 1/12$. ◀

1er dado

6 · 6 = 36 sumas posibles

1er dado

$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ (4,6), (5,5), (6,4) → 3

36 sumas

(3,1), (2,2), (1,3) $= \frac{1}{12}$

(1,2)(2,1) — $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

(1,1)

(4,4)(3,5)(5,3)(2,6)(6,2)

(b) (25 %) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 5, \\ a_2 = 13, \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$0 < h \leq k$

$a_k = 2^k + 3^k$

$5a_k - 6a_{k-1} \Rightarrow 2^{k+1} + 3^{k+1}$

$5.(2^k + 3^k) - 6.(2^{k-1} + 3^{k-1})$

$5.2^k + 5.3^k - 6.2^{k-1} - 6.3^{k-1}$

$5.2^k - 6.2^{k-1} + 5.3^k - 6.3^{k-1}$

$5.2^k - 3.2.2^{k-1} + 5\,3^k - 2.3.3^{k-1}$

$5.2^k - 3.2^k + 5.3^k - 2.3^k$

$2^k.(5-3) + 3^k(5-2)$

$2.2^k + 3.3^k \longrightarrow 2^{k+1} + 3^{k+1}$

$b < x < 2b$

$b - b < x - b < 2b - 2$

$0 < a - b < b$

(2) *a)* Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b.
Rta: $a = b \cdot (q+1) + r - b$, con $0 \leq r - b < b$ por lo tanto el cociente es $q + 1$ y el resto $r - b$.

$a = bq + b - b + r$

$a = b(q+1) + r - b$

Permutación $= n!$ selecciones ordenadas y sin repetición

Combinatorio $= \binom{n}{m}$

4. (*25 puntos*) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra LOLLAPALOOZA si
(i) no hay restricciones?
(ii) consonantes y vocales deben alternarse?
(iii) todas las L's deben estar juntas?

1)

l o l l a p a l o o z a
1 1 2 3 1 1 2 4 2 3 1 3

L = 4, a = 3, o = 3 Letras 12

i) $\frac{12!}{4!\,3!\,3!}$ = 554K

o, a = 6 c = 6

ii)
V	C	V	C	V	C	V	C	V	C	V	C
C	V	C	V	C	V	C	V	C	V	C	V

lolalolazopa ≠ lalolalozapo

Permutación!

→ 6! · 6!

iii) todas las L's juntas

L	L	L	L								

Si sería diferente → permutación

LLLLoooaaapz ≠ pzaaaoooLLLL

LLLL								

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\frac{9!}{3!\,3!\,4!}}$

L = 4! → Se mueven juntos.

total 12 letras − 4 letras (L) = 9.

420.

$\frac{9!}{3!\,3!\,4!}$ =

{LLLL}

12 caracteres → 8 letras
→ 4 Números

Mezclados

Abcdefge 1234

bcdefgeA 3421 ≠ → Permutación

b) 26 letras = {a, b, c, d, e, ...}

8 Letras → $26^8 \cdot 10^4$

3. Un aspirante a 'hacker' quiere entrar en el correo electrónico de su vecino. Para ello necesita conocer una clave de 12 caracteres, formada por 4 números y 8 letras todos mezclados.

(a) (10p) Teniendo en cuenta que hay 26 letras, ¿cuál es el máximo número de intentos que debería hacer?

(b) (10p) Si se enterara que su vecino ha formado la clave mezclando las ocho letras de su nombre (*EZEQUIEL*) y las cuatro cifras de su año de nacimiento (*1989*). ¿Cuántos intentos debería hacer ahora como máximo?

Ezequiel
1 1 2 1 1 1 3 1

1989

e = 3, letras = 8

$$\left(\frac{8!}{3!}\right) \cdot \left(\frac{4!}{2!}\right)$$

(2) Sea a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones.

a) $c < 0$ implica que $0 < -c$.

b) $a + c < b + c$ implica que $a < b$.

c) $0 < a$ y $0 < b$ implican $0 < a \cdot b$

d) $a < b$ y $c < 0$ implican $b \cdot c < a \cdot c$

(3) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar las siguientes afirmaciones, justificando los pasos que realiza.

a) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$.

b) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.

c) Si $a \neq b$ entonces $a^2 + b^2 > 0$.

I2) *Conmutatividad.* $a + b = b + a$; $\quad ab = ba$.

I3) *Asociatividad.* $(a + b) + c = a + (b + c)$; $\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

I4) *Existencia de elemento neutro.* Existen números $0, 1 \in \mathbb{Z}$ con $0 \neq 1$ tal que $a + 0 = a$; $\quad a \cdot 1 = a$.

I5) *Distributividad.* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

I6) *Existencia del inverso aditivo, también llamado opuesto.* Por cada a en $\mathbb{Z}$ existe un único entero $-a$ en $\mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$.

I7) *Cancelación.* Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$.

arbitrarios.

I8) *Ley de tricotomía.* Vale una y sólo una de las relaciones siguientes:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

I9) *Ley transitiva.* Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

I10) *Compatibilidad de la suma con el orden.* Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

I11) *Compatibilidad del producto con el orden.* Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

1. (20 ptos) **Elección multiple.** Marcar en cada caso la única opción correcta.

(a) [redacted]

(b) $(316)_7 = (112011)_3$. $\quad (316)_7 = (12221)_3$. $\quad (316)_7 = (20201)_3$.

2. (10 ptos) Binomi... Probar que si

(2) (*30 puntos*) Probar por inducción $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(12) Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue: $u_1 = 9$, $u_2 = 33$, $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2}$, $\forall n \geq 3$. Probar que $u_n = 2^{n+1} + 5^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.