Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$

a)
Determinar : • Puntos críticos
• Intervalos de crecimiento y decrecimiento
• Máximos y mínimos locales

b) Escribir la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $\left(1, -\frac{8}{3}\right)$

Solución:

• Puntos críticos: son aquellos valores de x en los que la derivada se anula ó no existe.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{(3-1)} - 3 = \underline{x^2 - 3}$$ (Está definida $\forall x$)

$$f'(x) = 0 = x^2 - 3$$ (diferencia de cuadrados)

$$0 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$ (el producto de dos números es cero cuando alguno lo es)

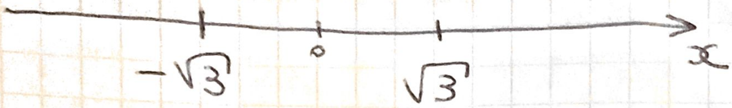
$(x - \sqrt{3}) = 0$ ó $(x + \sqrt{3}) = 0$

$$\boxed{x = \sqrt{3} \qquad x = -\sqrt{3}}$$

→ Puntos críticos de la función.

• Intervalos de crecimiento y decrecimiento: una función es creciente en aquellos intervalos donde su derivada es positiva, y es decreciente donde su derivada es negativa.

Analisis de los signos de $f'(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

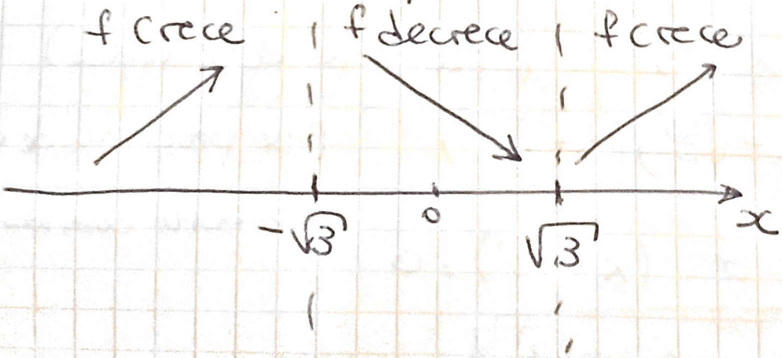


	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$x=\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$x=\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$(x-\sqrt{3})$	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0	$+$
$(x+\sqrt{3})$	$-$	0	$+$	$2\cdot\sqrt{3}$	$+$
$f'(x)=(x-\sqrt{3})\cdot(x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

f es creciente si $f'>0$: $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$

f es decreciente si $f'<0$: $(-\sqrt{3},+\sqrt{3})$

- Determinar máximos y mínimos locales



Viendo el comportamiento de la función vemos que f tiene un máximo local en $x=-\sqrt{3}$ y un mínimo local en $x=\sqrt{3}$

b) Escribir la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $\left(1, -\frac{8}{3}\right) \rightsquigarrow \begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = -\frac{8}{3} \end{matrix}$

→ La ecuación de una recta es $y = a.x + b$

La recta tangente cumple que:

LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA FUNCIÓN EN UN PUNTO ES LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN EN ESE PUNTO (definición de derivada!)

Entonces: $a = f'(1)$ $\qquad f'(x) = x^2 - 3$

$a = 1^2 - 3 = -2$

$\boxed{a = -2}$

La recta tangente es: $y = -2 \cdot x + b$

Para determinar b, sabemos que la recta tiene que pasar por el mismo punto que pasa la función:

$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 = -\frac{8}{3}$ $\qquad x_0 = 1$

$y_0 = -\frac{8}{3}$

$y_0 = -2 \cdot x_0 + b$

$-\frac{8}{3} = -2 \cdot 1 + b \rightsquigarrow b = -\frac{8}{3} + 2 = -\frac{8}{3} + \frac{6}{3}$

$\boxed{b = -\frac{2}{3}}$

La recta tangente en $\left(1, -\frac{8}{3}\right)$ es:

$$\boxed{y = -2 \cdot x - \frac{2}{3}}$$