17. A partir de los valores conocidos del seno y del coseno de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$, calcule en forma exacta las expresiones que se dan a continuación:

$a)\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \tan\frac{5\pi}{3}$ $\qquad b)\ \overset{\frac{1}{2}}{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}} + \overset{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\frac{7\pi}{6}} + \tan\frac{5\pi}{6}$

Tabla de ángulos notables

	ÁNGULO				
RAZÓN	0°	30°	45°	60°	90°
$sen\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\ \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\to\infty$

$$b)\ \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + t) = \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(t) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(t)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

Tabla de ángulos notables

	ÁNGULO				
RAZÓN	0°	30°	45°	60°	90°
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\to\infty$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Tabla de ángulos notables

	ÁNGULO				
RAZÓN	0°	30°	45°	60°	90°
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\to\infty$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \qquad \cos$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Tabla de ángulos notables

RAZÓN	0°	30°	45°	60°	90°
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\to\infty$

	ÁNGULO				
RAZÓN	0º	30º	45º	60º	90º
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{-\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sen

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{3}}{\cancel{4}\,2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

17. A partir de los valores conocidos del seno y del coseno de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$, calcu
las expresiones que se dan a continuación:

a) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + \tan \frac{5\pi}{3}$

b) $\overset{\frac{1}{2}}{\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}} + \overset{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos \frac{7\pi}{6}} + \tan \frac{5\pi}{6}$

$$\tan \frac{5\pi}{6} =$$

17. A partir de los valores conocidos del seno y del coseno de 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$, calcule en forma exacta las expresiones que se dan a continuación:

a) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \tan\frac{5\pi}{3}$ *b*) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{7\pi}{6} + \tan\frac{5\pi}{6}$

Miguea5

b) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)$

$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$ Formula $= \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{3} +$ sigo

Tabla de ángulos notables

	ÁNGULO				
RAZÓN	0º	30º	45º	60º	90º
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\to \infty$

8. Determine $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ y $g \circ f$ si

a) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \qquad g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

$(f \circ f)(x) = f(f(x))$

1;

$f(f(x)) = (x^2)^2 = x^4$

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x+1}\right)+1} = \dfrac{1}{\frac{1+1(x+1)}{(x+1)(1)}} = \dfrac{1}{\frac{x+2}{x+1}} \neq 0$

$x \neq -1$

-2

20-e)

1) $\operatorname{sen} x = \cos(2x)$

$\operatorname{sen} x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos(2x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

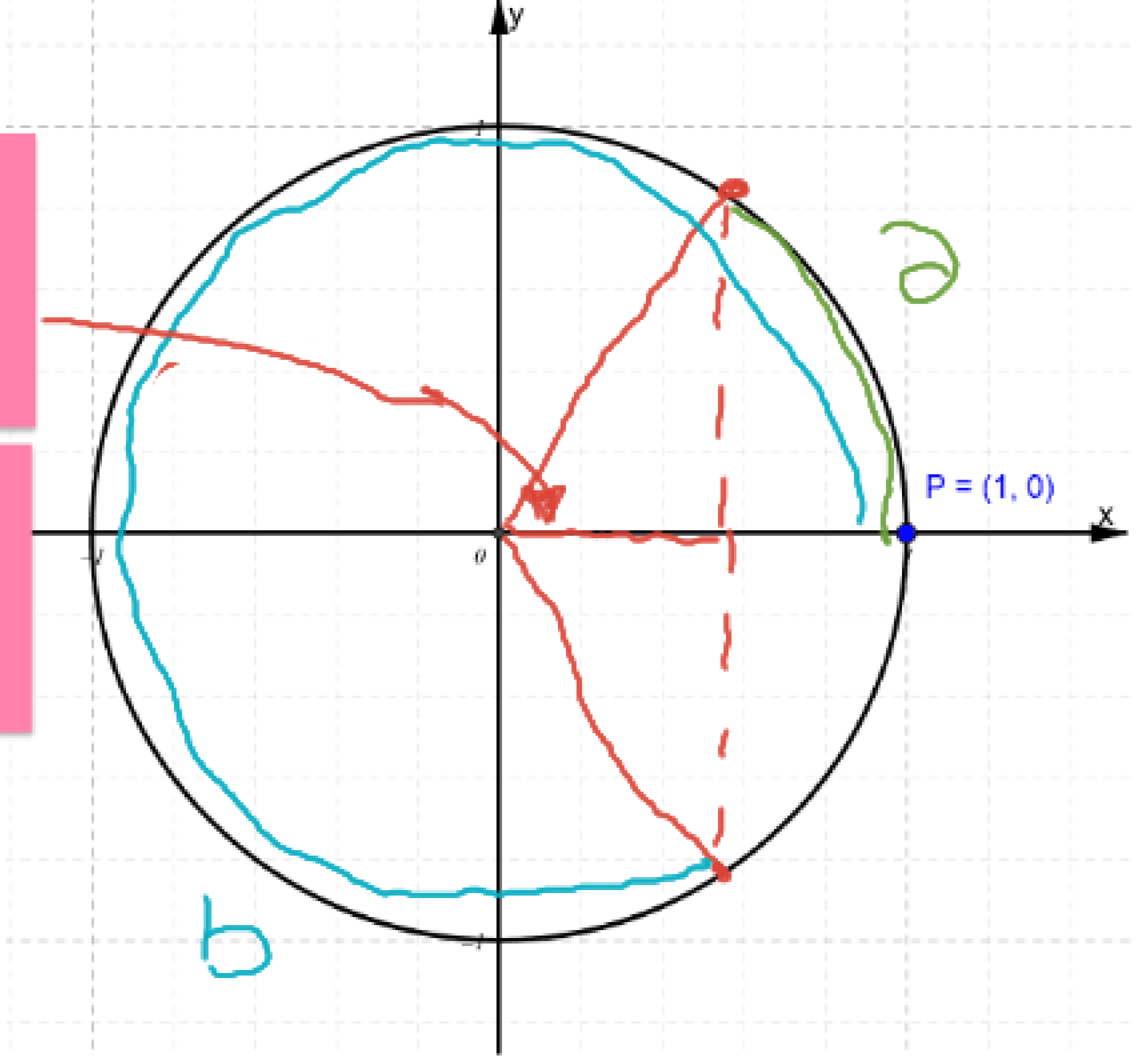
$2x = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k_1$

$2x - x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k_1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k_1 , \; k \in \mathbb{Z}$

cos(2x) o cos (x-(pi/2))

en terminos generales cos(a)=cos(b)



$a = x - \frac{\pi}{2}$

$b = 2\pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$b = 2\pi + x + \frac{\pi}{2}$

a es un ángulo expresado en radianes

Hay dos ángulos para los que la igualdad se cumple

Si el perímetro de la circunferencia es 2pi, entonces, el valor del segundo es el 2pi - el arco A

designaremos a b como el coseno inverso

2) (coseno inversa)

2pi? Con 2pi le das la vuelta a la circunferencia, no sería solo pi en esa parte para invertirlo?

$$2x = 2\pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi \cdot k_2 , k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = 2\pi - x + \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k_2$$

$$x + 2x = \frac{5\pi}{2} + 2\pi \cdot k_2$$

$$3x = \frac{5}{2}\pi \cdot k_2 \Rightarrow \frac{5}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi \cdot k_2 \in \mathbb{Z}$$

este si :D

20e) $\operatorname{sen}(x) = \cos(2x)$

1° pasar el $\operatorname{sen}(x)$ a su coseno

$$\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

2° reescribir la fórmula

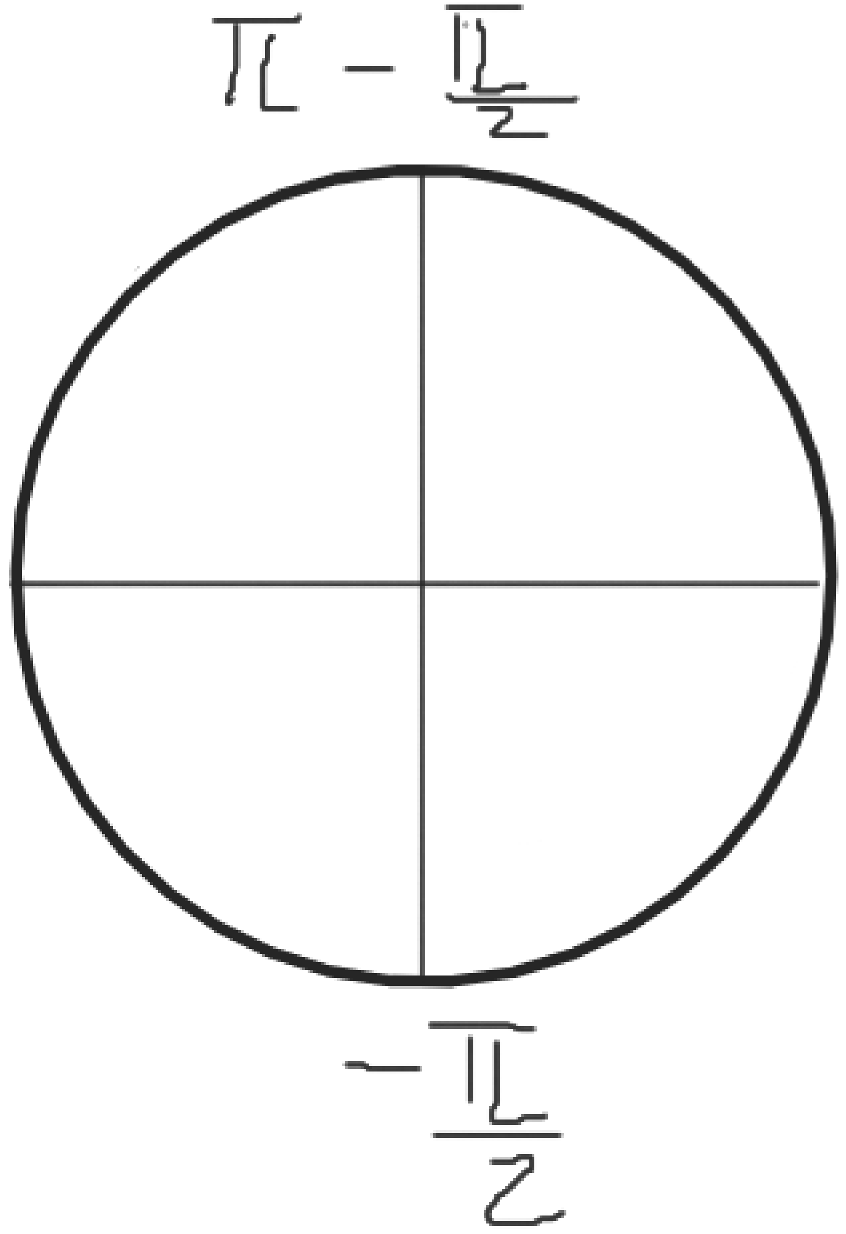
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2x)$$

3° Resolver ecuacion entre vals. de cos

$$x - \frac{\pi}{2} = 2x$$

$$-\frac{\pi}{2} = 2x - x$$

$$-\frac{\pi}{2} = x$$



$\therefore$ $-\frac{\pi}{2}$ es una solución? $\boxed{\text{Si}}$ ✓

↳ $\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ es otra solución? $\boxed{\text{Si}}$ ✓

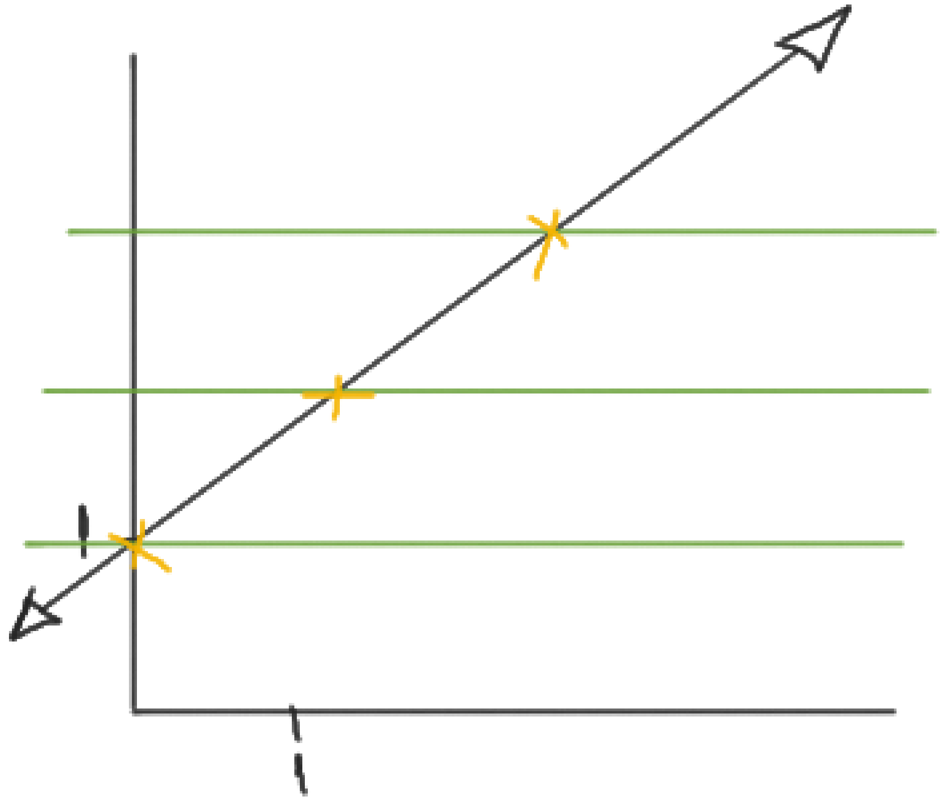
a) $f(x) = 2x + 1$

Dom = $\mathbb{R}$

Codom = $\mathbb{R}$ (por ser igual al dominio de su inversa)

Calculos auxiliares CA

¿Es inyectiva? (Las lineales lo son)



¡Demos 1!

Si $a = b$, entonces

$$2 \cdot a + 1 = 2 \cdot b + 1$$
$$2a = 2b + 1 - 1$$
$$a = \frac{2b}{2}$$
$$a = b$$

¡Demos 2!

$$2x + 1 = b$$
$$2x = b - 1$$
$$x = \frac{b-1}{2}$$

$$\therefore F^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$\mathrm{Dom}(F^{-1}) = \mathbb{R}$$

a) $x^2 - 6x + y^2 - 4y = -9$

$$(x-3)^2 - 3^2 + y^2 - 4y = -9$$
$$(x-3)^2 - 3^2 + (y-2)^2 - 2^2 = -9$$
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = -9 + 9 + 4$$
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$
$$= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

$\therefore$ Centro $= (3, 2)$

Radio $= 2$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Calculos auxiliares

Objetivo: Llegar a esta fórmula

$$a^2 + 2ab + b^2$$
$$x^2 + -6x + b^2$$
$$x^2 + -2.(bx) + b^2$$

$$2.b.x = 6x$$
$$b = 3$$

$$x^2 - 2.(3.x) + 3^2 - 3^2$$
$$(x^2 - 6x + 3^2) - 3^2$$
$$(x-3)^2 - 3^2$$

IMPORTANTE: si agregas un valor para algun lado DEBES neutralizarlo para mantener la equivalencia

$$x^2 - 6x$$
$$(x^2 - 2.(3x) + 3^2) - 3^2$$
$$(x-3)^2 - 3^2$$

$$y^2 - 4y$$
$$(y^2 - 2.(2x) + 2^2) - 2^2$$
$$(y-2)^2 - 2^2$$

a) $9x^2 + y^2 - 9 = 0$

$$9x^2 + y^2 = 9$$

$$\frac{1}{9}\cdot(9x^2 + y^2) = 9\cdot\frac{1}{9}$$ por igualar a 1

$$x^2 + \frac{1}{9}\cdot y^2 = 1$$

$$(x+0)^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\underbrace{(x+0)^2}_{?} + \frac{(y+0)^2}{9} = 1$$ por completar cuad. en y

9 → no es n^2 AÚN

$$\frac{(x+0)^2}{1} + \frac{(y+0)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x+0)^2}{(1)^2} + \frac{(y+0)^2}{(3)^2} = 1 \longrightarrow \left(\frac{x+0}{1}\right)^2 + \left(\frac{y+0}{3}\right)^2 = 1$$

x_0 y_0

Focos/semiejes

$$\boxed{\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1}$$ → Si o si es igual a UNO

CALCULOS AUXILIARES

Objetivo: De x^2 a forma $(x-x_0)^2$

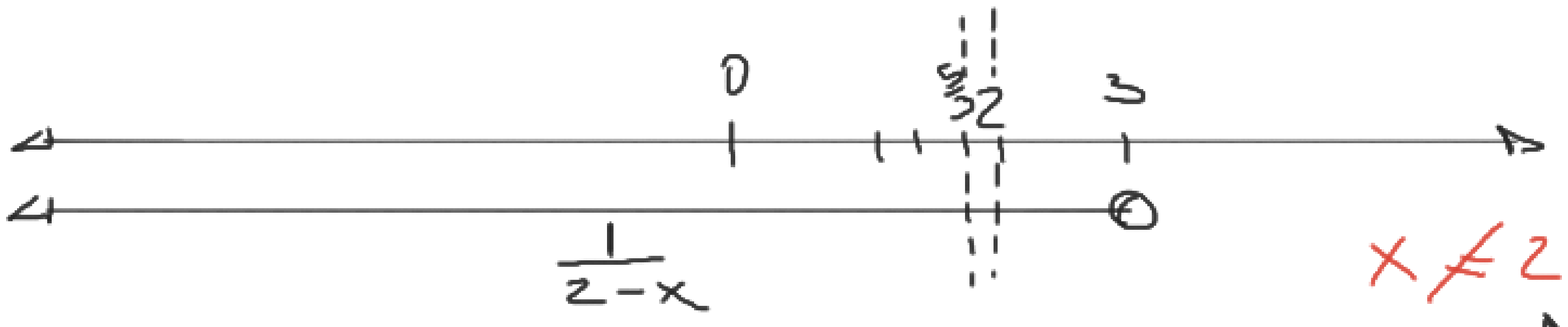
1° Necesito llegar a forma $a^2 + 2ab + b^2$

$$x^2 + 2\cdot x\cdot b + b^2 = x^2$$

$$(x^2 + 2\cdot x\cdot 0 + 0^2) - 0^2 = x^2$$

$$(x+0)^2$$

b) $\frac{1}{2-x} < 3$



$x \neq 2$

Primer paso:

$$\frac{1}{2-x} - 3 < 0$$

$$\frac{1}{2-x} - 3 \cdot \frac{2-x}{2-x} < 0$$

$$\frac{1-6+3x}{2-x} < 0$$

$$\frac{-5+3x}{2-x} < 0$$

Como el resultado es negativo UNA parte de la fracción debe ser negativa

Segundo paso

Calcular puntos críticos $\longrightarrow \left\{\frac{5}{3}, 2\right\}$

$$-5+3x = 0 \qquad 3x = 5 \qquad x = 5/3$$

$$2-x = 0 \qquad -x = -2 \qquad x = 2$$

Tercer paso

Hacer tablas con puntos crit

	$(-\infty, \frac{5}{3})$	$\{\frac{5}{3}\}$	$(5/3, 2)$	$\{2\}$	$(2, +\infty)$
$-5+3x$	$-$	0	$\emptyset$	$\nexists$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$\vdots$	$\vdots$	$-$
$\frac{-5+3x}{2-x}$	$-$	0	$\emptyset$	$\nexists$	$-$

CONCLUSION: $(-\infty, \frac{5}{3}) \cup (2, +\infty)$