

Análisis Matemático I/Cálculo I
Licenciatura en Ciencias de la Computación
Licenciatura en Matemática Aplicada
FAMAF, UNC — Año 2024

Guía de Ejercicios Nro. 2: Funciones

Propiedades generales

1. Determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $g(x) = \frac{2}{3x-5}$

c) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

d) $g(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$

2. Encuentre las ecuaciones de las rectas, con las condiciones especificadas en cada ítem, y gráfíquelas:

a) Tiene pendiente igual a 3 y pasa por el punto $(-2, 7)$.

b) Pasa por los puntos $(-2, 6)$ y $(3, -5)$.

c) Tiene pendiente igual a 0 e intersección con el eje y igual a -5 .

d) Tiene pendiente igual a -3 e intersección con el eje y igual a 0.

e) Pasa por el punto $(1, -4)$ y es paralela a la recta $x + 5y + 19 = 0$.

f) Pasa por el punto $(3, -2)$ y es perpendicular a la recta $2x + 3y + 4 = 0$.

3. Esboce la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x| & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x-1| & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0 \text{ ó } x > 2 \end{cases}$

4. Considere un triángulo isósceles cuyos lados iguales valen 10 m.

a) Exprese la superficie del triángulo como función de la base.

b) Identifique el dominio de la función.

5. Determine el dominio, contradominio y trace la gráfica de

a) $g(x) = \sqrt{6-2x}$

b) $h(x) = |2x-3|$

6. Diga si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos casos e indique su dominio.

a) $f(x) = 3x - x^3$
 b) $f(x) = x + x^2$

c) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

7. Considere las funciones $g(x) = \sqrt{3x}$ y $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ y determine el dominio de

a) $g(x) + f(x)$

b) $\frac{g(x)}{f(x)}$

8. Determine $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ y $g \circ f$ si

a) $f(x) = x^2$ $g(x) = \frac{1}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

9. Evalúe las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el punto $t+1$

c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ en el punto $\frac{1}{t}$

b) $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ en el punto $-t$

10. Sea $f(x) = \frac{x+1}{x}$. Escriba las siguientes funciones en la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios:

a) $f(x) + 1$

c) $f \circ f(x)$

b) $f(x+1)$

Funciones inversas

11. Halle el dominio y contradominio de las siguientes funciones y diga si se puede definir la inversa de las mismas. En caso afirmativo, calcule dicha inversa.

a) $f(x) = 2x + 1$

c) $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$

d) $f(x) = -\sqrt{x^2 - 4x + 4}$

b) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

12. Esboce el gráfico y calcule la inversa de las siguientes funciones cuando sea posible. De no existir la inversa, indíquelo.

a) $f(x) = x^2$ $-\infty < x < \infty$

c) $f(x) = \frac{2-x}{3+x}$ $x \neq -3$

b) $f(x) = x^2$ $x \leq 0$

d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $-1 \leq x < 0$

13. El agua se congela a 32 grados Fahrenheit y a 0 grados Celsius. A nivel del mar el agua hierve a 212 grados Fahrenheit y a 100 grados Celsius.

a) Encuentre la función lineal que transforma grados Fahrenheit en grados Celsius y gráfíquela.

b) Calcule su inversa, gráfíquela y explique qué representa esa función.

Gráficos de parábolas

14. Escriba las ecuaciones de las siguientes parábolas en la forma $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ (completando cuadrados en los casos que haga falta).

a) $y = x^2 - 2x + 3$

b) $y = x^2 + 6x + 5$

c) $y = 2x^2 + 8x + 7$

Circunferencias y elipses

15. Encuentre el centro y el radio de las siguientes circunferencias y grafíquelas:

a) $x^2 - 6x + y^2 - 4y = -9$

b) $x^2 + 8x + y^2 = -12$

16. Encuentre el centro y el radio de las siguientes elipses y grafíquelas:

a) $9x^2 + y^2 - 9 = 0$

b) $x^2 + 4y^2 - 8x = -16y - 28$

Funciones trigonométricas y sus inversas

17. A partir de los valores conocidos del seno y del coseno de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$, calcule en forma exacta las expresiones que se dan a continuación:

a) $\sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + \tan \frac{5\pi}{3}$

b) $\sin \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{5\pi}{6}$

18. Esboce la gráfica de

a) $\sin \frac{x}{2}$

c) $f(x) = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

b) $f(x) = \cos 2x$

d) $f(x) = 1 + \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

19. Escriba cada una de las siguientes funciones $\sin x^2$, $\sin^2 x$ y $\sin(\sin x)$ como una composición de funciones. Son iguales estas funciones?

20. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\cos x = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right)$

d) $\cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\sin x = \cos(2x)$

c) $\sin x = \sin 2$

f) $\sin(2x) = \sqrt{3} \cos(2x)$ en el intervalo $-\frac{19\pi}{2} < x < -\frac{15\pi}{2}$

Funciones exponencial y logaritmo

21. Esboce en un mismo gráfico las funciones

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = e^x$

c) $l(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

22. Considere la función $f(x) = c e^{Kx}$.

a) Determine las constantes c y K si sabe que $f(2) = 2$ y $f(3) = 3$.

b) Calcule $f(4)$.

c) Para qué valores de x vale que $f(x) = 4$?

23. Esboce la gráfica de las funciones $f(x) = \ln(x + 5)$, $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ y $h(x) = \ln|x|$.

24. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{e^x} = e^{\sqrt{x}}$

d) $\ln(x + 2) + \ln(x + 4) = \ln(2x + 5)$

b) $(\sqrt{e})^x = e^{\sqrt{x}}$

e) $\sqrt{\ln x} = \ln \sqrt{x}$

c) $\sqrt{\ln(x^2 - 1)} = \sqrt{\ln(x + 1) + \ln(x - 1)}$

f) $\sqrt{x - 1} = \sqrt{-x - 2}$

Material Extra

Extra 1. Halle las ecuaciones de las rectas con las condiciones dadas y grafique:

- a) Tiene pendiente igual a $-4/3$ y pasa por el punto $(-1, 7)$.
- b) Pasa por los puntos $(8, -2)$ y $(7, -2)$.
- c) Pasa por el punto $(-1, -3)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(5, 7)$.
- d) Pasa por el punto $(-5, 3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(7, 0)$ y $(-8, 1)$

Extra 2. Un recipiente de almacenamiento en forma de paralelepípedo recto (sin tapa), tiene $10m^3$ de volumen. El largo de su base es el doble de su ancho x . El material de la base cuesta \$10 por m^2 , el de los laterales cuesta \$6 por m^2 . Obtenga la función $C(x)$ que da el costo del recipiente en función de x . Determine su dominio.

Extra 3. La Bahía de Fundy en Canadá es conocida por tener la mayor diferencia entre sus mareas alta y baja, siendo aproximadamente de 15m. Supongamos que en un punto particular de la bahía la profundidad del agua (y) medida en metros en función del tiempo (t) medido en horas desde la medianoche del 1 de Enero de 1994, está dada por

$$y = y_o + A \sin(B(t - t_o))$$

- a) Cuál es el significado físico de y_o ?
- b) Cuál es el valor de A ?
- c) Asumiendo que la marea sube cada 12 horas y media. Cuál es el valor de B ?
- d) Cuál es el significado físico de t_o ?
- e) Esboce el gráfico correspondiente.

Extra 4. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones

a) $1 + \sin x = 2 \cos^2 x$

c) $2 \cos(2x) + 4 \sin x = 3$

b) $\cos x \sin x = 0$