Obviaré propiedades muy lógicas y tontas, la mayoría la tomaré de Análisis 2.

Repasando...

Expresar el conjunto solución como intervalos:

$$x^2 \geq 3$$

$$x^2 - 3 \geq 0$$

(diferencia de cuadrados ó busco raíces con Baskhara y escribo en forma factorizada)

$$(x-\sqrt{3}).(x+\sqrt{3}) \geq 0$$

Forma analítica de resolver: **Ambos** positivos $(+).(+) > 0$ **ó** **Ambos** negativos $(-).(-) > 0$

$$\left(x-\sqrt{3} \geq 0 \wedge x+\sqrt{3} \geq 0\right) \vee \left(x-\sqrt{3} \leq 0 \wedge x+\sqrt{3} \leq 0\right)$$

$$\left(x \geq \sqrt{3} \wedge x \geq -\sqrt{3}\right) \vee \left(x \leq \sqrt{3} \wedge x \leq -\sqrt{3}\right)$$

$$\left([\sqrt{3},+\infty) \cap (-\sqrt{3},+\infty]\right) \cup \left((-\infty,\sqrt{3}] \cap (-\infty,-\sqrt{3}]\right)$$

$$[\sqrt{3},+\infty) \cup (-\infty,-\sqrt{3}]$$

Repasando...

Expresar el conjunto solución como intervalos:

$$x^2 \geq 3$$

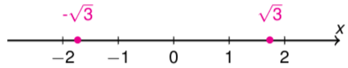
$$x^2 - 3 \geq 0$$

(diferencia de cuadrados ó busco raíces con Baskhara y escribo en forma factorizada)

$$(x-\sqrt{3}).(x+\sqrt{3}) \geq 0$$

Tabla para resolver:

1. Buscamos los puntos que anulan (hacen 0) la expresión
   El producto de dos factores es cero cuando alguno de ellos lo es. Entonces $x=\sqrt{3}$ y $x=\sqrt{3}$ anulan la expresión.
2. Dibujarlos sobre la recta real



3. Escribir los intervalos definidos por esos puntos:

$$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right) \quad \left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right) \quad \left(\sqrt{3},+\infty\right)$$

Repasando...

4. Construir una tabla para ver signos de los factores en cada intervalo y los signos resultantes del producto

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$x=-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$x=\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$(x-\sqrt{3})$					
$(x+\sqrt{3})$					
$(x-\sqrt{3}).(x+\sqrt{3})$					

5. Elegir un número cualquiera en cada intervalo de las columnas y evaluarlo en cada factor de las filas y anotar el signo del resultado
   (por ejemplo: elegimos $x=-10000$ para la primer columna, $x=0$ para la columna del centro y $x=10000$ para la última columna)

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$x=-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$x=\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$(x-\sqrt{3})$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+\sqrt{3})$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-\sqrt{3}).(x+\sqrt{3})$	$+$	0	$-$	0	$+$

6. Seleccionar las columnas que tengan el signo de la desigualdad que estamos resolviendo

$$(x-\sqrt{3}).(x+\sqrt{3}) \geq 0 \Rightarrow (-\infty,-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3},+\infty)$$

Valor absoluto de a

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Porque un Abs si toma negativos, es +

El valor absoluto de un número es siempre ≥ 0:
$|7| = 7$ ya que $7 \geq 0$
$|-7| = -(-7) = 7$ ya que $-7 < 0$

Siempre podemos pensar el valor absoluto como una distancia (medida con una regla por ejemplo): es la distancia desde ese número al 0. Y las distancias son siempre positivas!

Teoremas:

1. $|a| = \sqrt{a^2}$
2. $|a|^2 = a^2$
3. $|a.b| = |a|.|b|$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$
5. $|a-b| = |b-a|$

$$|x+1| = 2$$

Por cada par de barras de módulo tendremos 2 casos (i.e, para "deshacernos" de las barras de módulo debemos reescribir 2 veces la ecuación original)

$$|x+1| = 2$$

El miembro izquierdo de la ecuación será:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & si \quad x+1 < 0 \end{cases}$$

Caso 1: $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
Ecuación a resolver

$$x+1 = 2$$

Solución:

$$x = 2-1$$

$$x = 1$$

Vive en el intervalo que estoy trabajando?
SÍ: $\Rightarrow x = 1$ es una solución

Caso 2: $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$
Ecuación a resolver

$$-(x+1) = 2$$

$$-x-1 = 2$$

$$-1-2 = x$$

$$-3 = x$$

Vive en el intervalo que estoy trabajando?
SÍ: $\Rightarrow x = -3$ es una solución

La solución final es la unión de las dos soluciones:
Solución: $x=-3$ **y** $x=1$

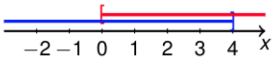
De igual manera, puedo separar los casos en desigualdades y resolver

$$|x| \leq 4$$

El miembro izquierdo de la ecuación será:

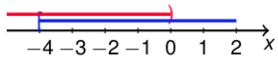
$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Caso 1: $x \geq 0$
Ecuación a resolver
$x \leq 4$
$(-\infty, 4]$
Vive en el intervalo que estoy trabajando?
PARCIALMENTE! $\Rightarrow$ Busco la intersección entre el intervalo solución y el de definición



Solución: $[0, 4]$

Caso 2: $x < 0$
Ecuación a resolver
$-x \leq 4$
$(-1).(-x) \geq (-1).4$
$x \geq -4$
$[-4, \infty)$
Vive en el intervalo que estoy trabajando?
PARCIALMENTE! $\Rightarrow$ Busco la intersección entre el intervalo solución y el de definición

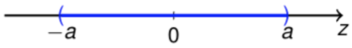


Solución: $[-4, 0)$

La solución final es la unión de las dos soluciones:
Solución: $[-4, 0) \cup [0, 4] = [-4, 4] = -4 \leq x \leq 4$

|z|<a

Sea $a > 0$, un número z satisface la desigualdad $|z| < a$ sí y sólo sí $-a < z < a$

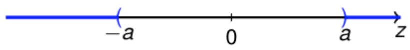


Solución: $(-a, a)$

(similarmente con $\leq$)

|z|>a

Sea $a > 0$, un número z satisface la desigualdad $|z| > a$ sí y sólo sí $z < -a \vee z > a$



Solución: $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

(similarmente con $\geq$)

Generalización

$$|x + 4| < 1$$

(uso propiedad $|z| < a \Leftrightarrow -a < z < a$):

$$-1 < x + 4 < 1$$

(sumo -4 en todos lados):

$$-1 - 4 < x + 4 - 4 < 1 - 4$$

$$-5 < x < -3$$

Solución= (-5,-3)

también se dice Acotado

Funciones:

Dominio

Es el subconjunto de todos los valores x del conjunto de salida en los cuales la función está definida

$$Dom\, f = \{x \in A \,/\, \exists\, f(x)\}$$

(valores válidos para una función)

} en x

Imagen

Es el subconjunto de todos los valores y del conjunto de llegada que puede llegar a tomar la función

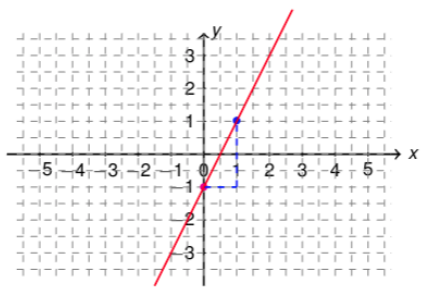
$$Im\, f = \{y \in B \,/\, \exists\, x \in A, f(x) = y\}$$

} en y

$$y = ax + b$$

a: pendiente
b: ordenada al origen

$$y = 2x - 1$$



$$y = ax + b$$

Qué significa que pase por un punto? Por ej.: pasa por el punto (x_0, y_0)

$$f(x_0) = y_0$$

Dar la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)
2 datos, 2 incógnitas: sistema de ecuaciones (repasar del curso de nivelación)

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Despejamos a y b

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

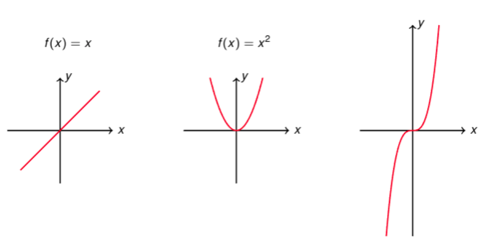
Paralelas

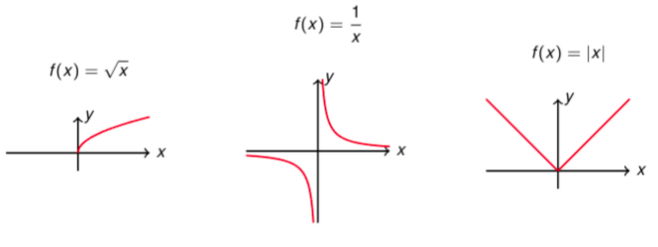
Dadas la recta $y = a_1 x + b_1$ y la recta $y = a_2 x + b_2$, son paralelas si $a_1 = a_2$

Perpendiculares

Dadas la recta $y = a_1 x + b_1$ y la recta $y = a_2 x + b_2$, son perpendiculares si $a_1 = -\frac{1}{a_2}$

Funciones elementales:

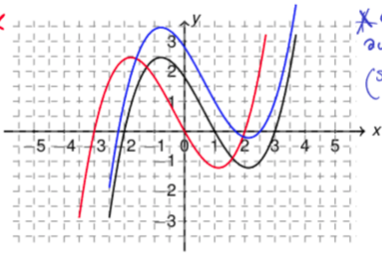




$f(x)$, $f(x+1)$ y $f(x)+1$:

* Los valores en x aumentan en 1, Desplaza a la izq (si fuera − 1 es derecha)

* Como f(x)=), aumenta la Altura en 1 (si fuera − disminuye)



Sea $a > 0$:

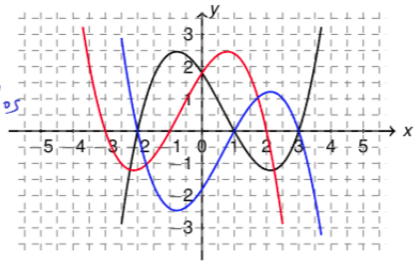
- $f(x+a)$ es un desplazamiento horizontal en a unidades hacia la izquierda ⟵
- $f(x-a)$ es un desplazamiento horizontal en a unidades hacia la derecha ⟶
- $f(x)+a$ es un desplazamiento vertical en a unidades hacia arriba ↑
- $f(x)-a$ es un desplazamiento vertical en a unidades hacia abajo ↓

$f(x)$, $f(-x)$ y $-f(x)$:

$f(-x) = -1(x^2+6)$ ← Distribuyo el valor

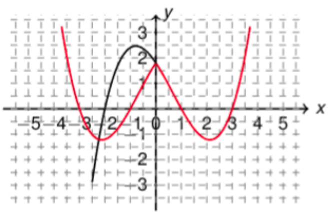
* invierte los puntos en x.

* invierte los puntos en y.

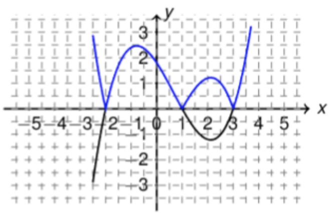


- $f(-x)$ es una rotación respecto del eje y (dejar fijo $f(0)$)
- $-f(x)$ es una rotación respecto del eje x (dejar fijas las raíces $f(x) = 0$)

$f(x)$ y $f(|x|)$

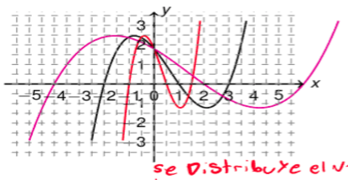


$f(x)$ y $|f(x)|$



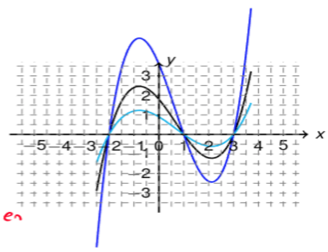
- $f(|x|)$ la función no cambia para los $x > 0$ y para los $x < 0$ es un reflejo respecto del eje y de la parte de la función definida para $x > 0$
- $|f(x)|$ la función no cambia en las regiones en las que $f(x) > 0$ y en los intervalos en los que $f(x) < 0$ se le hace rotar con respecto al eje x para convertirla en positiva

$f(x)$, $f(2x)$ y $f\left(\frac{1}{2}x\right)$



se Distribuye el valor en la Funcion

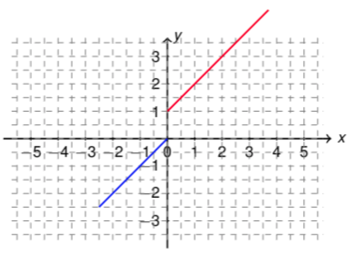
$f(x)$, $2f(x)$ y $\frac{1}{2}f(x)$



Sea $a > 1$

- $f(ax)$ se comprime el gráfico sobre el eje x en un factor $\frac{1}{a}$ (Ej: si a=2 se comprime a la mitad, si a=3 se comprime a un tercio). Queda fijo $f(0)$
- $f\left(\frac{1}{a}x\right)$ se estira el gráfico sobre el eje x en un factor a (al doble, triple, etc). Queda fijo f(0) ⟷
- $af(x)$ se estira el gráfico sobre el eje y un factor a. Quedan fijas las raíces ($f(x) = 0$) ↕
- $\frac{1}{a}f(x)$ se comprime el gráfico en el eje y en un factor $\frac{1}{a}$. Quedan fijas las raíces ($f(x) = 0$)

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \le 0 \\ x+1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$



Función Par

Una función se dice par si $f(-x) = f(x)$

Función Impar

Una función se dice impar si $f(-x) = -f(x)$

Una Función es Par si devuelve la misma Función

Una Función es impar si devuelve la Función invertida de signo

1. Determinar si $f(x) = x^2$ es par, impar o ninguna

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2x^2 = x^2 = f(x)$$

Por lo tanto $f(x) = x^2$ es par

2. Determinar si $f(x) = x^3$ es par, impar o ninguna

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -1\,x^3 = -x^3 = -f(x)$$

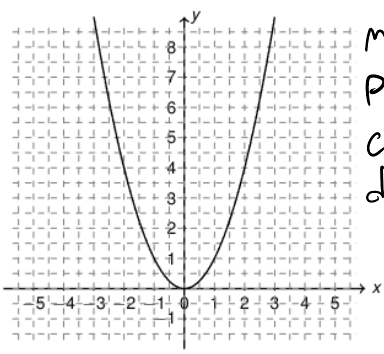
Por lo tanto $f(x) = x^3$ es impar

3. Determinar si $f(x) = x + x^2$ es par, impar o ninguna

$$f(-x) = (-x) + (-x)^2 = -x + x^2 = -(x - x^2)$$

Por lo tanto $f(x) = x + x^2$ no es par ni impar.

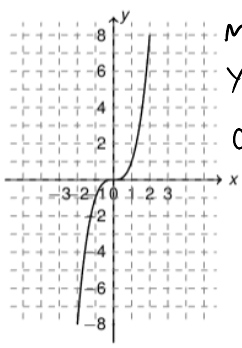
Función Par: $f(x) = x^2 \Rightarrow f(-x) = f(x)$



mismos Punto x cambiado de eje

después de hacer una rotación en el eje vertical sigue quedando igual! Las funciones pares son simétricas respecto del eje vertical

Función Impar: $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$



mismos Puntos y Pero Cambiado de eje

Para dibujar la función para $x < 0$ hago un reflejo respecto del eje vertical y luego un reflejo con respecto al eje horizontal.

Composición de Funciones:

¿Qué es evaluar una función en un punto?

$$f(x) = 3.x + 7$$

Evaluar en $x = 2$

$$f(2) = 3.2 + 7 = 6 + 7 = 13$$

Evaluar en el punto t+1

$$f(t+1) = 3.(t+1) + 7$$

Evaluar en g(x)

$$f(g(x)) = 3.g(x) + 7$$

es meter en x una función

Inyectivas

Una función $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ se dice **inyectiva** si no hay dos elementos del dominio de f con igual imagen. Es decir, si

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Sobreyectiva (o suryectiva)

Una función $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ se dice **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto de llegada es un elemento de la imagen de f. Es decir, si

$$\mathbb{B} = Im\, f$$

Cada punto de y, le corresponde un x

Biyectiva

Una función se dice **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva

Normalmente:
si es inyectiva → es biyecta.
sin necesidad de ver si es sobreyectiva

Función Inversa

Si una función $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es **biyectiva**, entonces tiene inversa y se llama f^{-1}. Se define de manera que

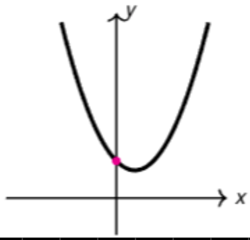
$$f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x))$$

↳ Dada la función, cambio las x por y, y despejo y.

Forma polinómica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- c es el valor de la función para $x = 0 \to$ corte en el eje y
- El signo de a indica si las ramas son hacia arriba o hacia abajo



Forma factorizada:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- x_1 y x_2 son las raíces, i.e., $f(x_1) = 0$ y $f(x_2) = 0 \to$ corte en el eje x
- El signo de a indica si las ramas son hacia arriba o hacia abajo

Para pasar de la forma polinómica a la forma factorizada → Baskhara

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para pasar de la forma factorizada a la forma polinómica → Propiedad distributiva

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \to (x_1 + x_2) = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Forma canónica

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

- x_v e y_v son las coordenadas del vértice de la curva
- El signo de a indica si las ramas son hacia arriba o hacia abajo

La forma canónica es igual a completar cuadrados.

$$x_v = \frac{-b}{2a}, \quad y_v = a(x_v)^2 + B(x_v) + C$$

Queremos que aparezca el cuadrado de un binomio: $(x + B)^2 = x^2 + 2Bx + B$
Queremos:

- que el término lineal sea "el doble producto del primero por el segundo"
- que aparezca el término "el segundo al cuadrado"
- construir el binomio al cuadrado

Cómo hacemos?

- Saco factor común a y trabajo adentro del otro factor
- Multiplico el término lineal por el número 1 escrito como $\frac{2}{2}$
- Identifico cuál es el valor del término del binomio (el otro que no es x!)
- Sumo y resto ese término al cuadrado
- Reordeno los términos para identificar el binomio

Circunferencia

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

→ Radio = R, Puntos (x_0, y_0)

Elipse

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$ ← obligatorio

Centro en (x_0, y_0) con semieje a lo largo del eje x = a, y semieje a lo largo del eje y = b

Ejemplo: Encontrar el centro y semiejes de la siguiente elipse

$x^2 + 4y^2 - 8x = -16y - 28 \quad \Rightarrow (x^2 - 8x) + (4y^2 + 16y) = -28$

$x^2 - 8x = x^2 - 2.4x =$

$x^2 - 2.4.x + 4^2 - 4^2 = (x-4)^2 - 16$

$4y^2 + 16y = 4(y^2 + 4y) = 4(y^2 + 2.2.y)$

$4(y^2 + 2.2.y + 2^2 - 2^2) = 4((y+2)^2 - 4)$

$(x-4)^2 - 16 + 4(y+2)^2 - 16 = -28 \Rightarrow (x-4)^2 + 4(y+2)^2 = -28 + 32 = 4$

$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{4(y+2)^2}{4} = 1 \qquad \frac{(x-4)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1 \qquad x_0 = 4, y_0 = -2, a = 2, b = 1$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

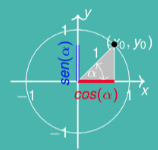
Fórmula para suma de ángulos:

¡¡ $\left\{ \begin{array}{l} cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y) \\ sen(x+y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y) \end{array} \right\}$!!

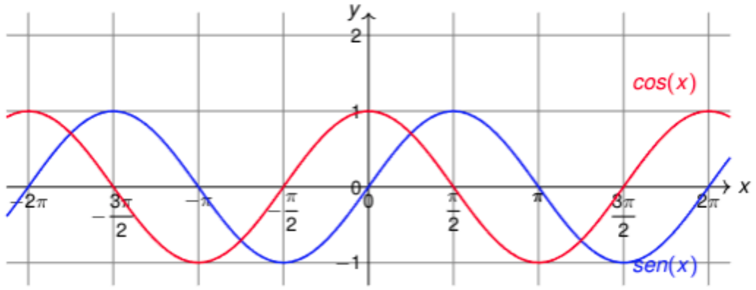
$cos(x)$ es una función par: $cos(-x) = cos(x)$
$sen(x)$ es una función impar: $sen(-x) = -sen(x)$

Funciones trigonométricas

- Partiendo de la circunferencia unitaria, se definen $x = cos(\alpha)$ y $y = sen(\alpha)$



- Identidad trigonométrica: $cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) = 1$
- Otras funciones trigonométricas:
  - $tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$
  - $sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}$
  - $cosec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$
  - $cotan(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)}$



$$cos(x + 2\pi) = cos(x)$$
$$sen(x + 2\pi) = sen(x)$$
$$sen(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad cos(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

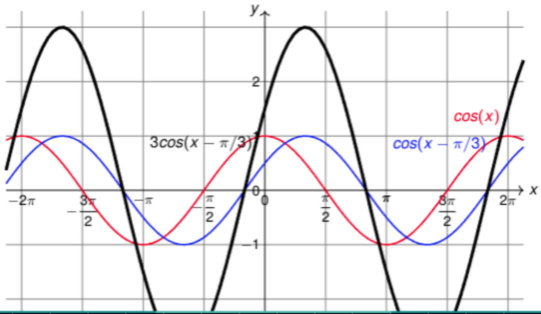
Gráficos

Dibujar

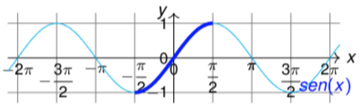
Esto es Horrible

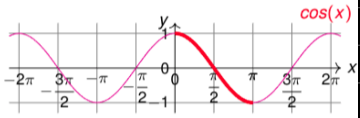
$$f(x) = 3cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$F(x) = cos(x)$ $\quad F\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad 3F\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$



Las funciones trigonométricas tienen inversa si restringimos su dominio/imagen





$sen(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ $\qquad cos(x) : [0, \pi] \to [-1, 1]$

Los Funciones trigonometricas inversas son Los Arcsen, Arctg, etc.

Los nombres de las funciones inversas de las trigonométricas son: "arco[nombre]" y se denotan:

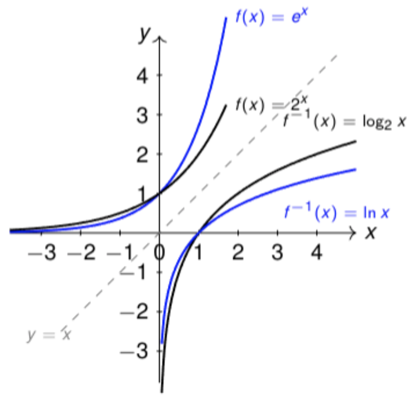
$arcsen(x)$ $arccos(x)$ $arctan(x)$ etc

$arcsen(x) : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad arccos(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$a > 1$

$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ $\qquad f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

← Funciones elementales



Notemos que
$f(x) = e^x$
$f^{-1}(x) = ln(x)$
$\wedge$
$g(x) = 2^x$
$g^{-1}(x) = log_2(x)$

$log_a(1) = 0$

Propiedades del logaritmo

Sea $a > 1$

Ln tmb $\left\{ \begin{array}{l} \text{1 } log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y) \\ \text{2 } log_a(x^y) = y\, log_a(x) \\ \text{3 } log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y) = log_a(x) + log_a(y^{-1}) \end{array} \right.$

Podemos escribir las funciones exponenciales y los logaritmos en cualquier base utilizando sólo la base e:

$$a^x = e^{x\, ln(a)}$$
$$log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$$

← Mas que todo para bajar exponentes

Límites

Si al acercarnos a un valor de $x = a$, la función se acerca a un valor L, diremos que **el límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a a**

q es un Punto No Definido.

Notación: $f(x) \to L$ cuando $x \to a$, o

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Siempre hay q Poner $\lim_{x \to a}$ cuando opero

Pero... cuán cerca es "cerca"?

Definición

△ Def. de

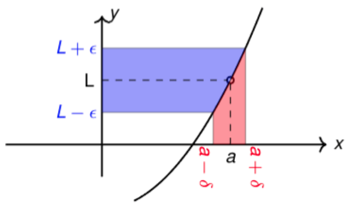
Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene al punto a, excepto quizás en $x = a$, Decimos que: el límite para x que tiende a a de $f(x)$ es el número L si para todo número $\epsilon > 0$, existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que si la distancia entre x y a es menor que δ, entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ϵ

Definición Formal, la q. hay q dar si la piden

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \text{si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$



Proposiciones y teoremas

1. Si $f(x) = c$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = c$
2. Si $f(x) = cx$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = ca$
3. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces:
   a. $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$
   b. $\lim_{x \to a} (f.g)(x) = L.M$
   c. Si $M \neq 0$, $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$
   d. Si $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (si n es par, L debe ser positivo)
4. Si $f(x) \leq g(x)$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$
5. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (quizás excepto en a), y además $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$ (Teorema del sandwich)

Límites laterales

Límite por derecha

Decimos que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha si los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando nos acercamos a $x = a$ por valores más grandes (pero cercanos) que a: $L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Siempre Sacar

Límite por izquierda

Decimos que M es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda si los valores de $f(x)$ se aproximan a M cuando nos acercamos a $x = a$ por valores más chicos (pero cercanos) que a: $M = \lim_{x \to a^-} f(x)$

Siempre Sacar

Teorema

Sea una función definida en un intervalo abierto que contiene a a (excepto quizás en $x = a$), entonces: el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y vale L, sí y sólo sí existen ambos límites laterales y son iguales:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} |x| & si \quad x \leq 0 \\ 9 - (x-3)^2 & si \quad 0 < x < 4 \\ -1 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Calcular: $\lim_{x \to 4^-} f(x)$, $\lim_{x \to 4^+} f(x)$, $\lim_{x \to 4} f(x)$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0} f(x)$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x)$$

$x \to 4^- \Rightarrow x < 4$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} 9 - (x-3)^2 = 8$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x)$$

$x \to 4^+ \Rightarrow x > 4$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} -1 = -1$$

ya que los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \nexists$$

Tipos de indeterminaciones

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad 0.\infty \qquad (\infty - \infty)$$

Por ahora...

¿Qué hago si es indeterminado? OPERAR!

Dando Primero: $\lim_{x \to a} f(x) \longrightarrow$ ind

No Pongo =

Asíntota vertical

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Asíntota horizontal

La recta $y = L$ se llama asíntota horizontal de la gráfica de una función f si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ o (ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Evaluo el lim Dado en ∞ /

Lim $\to \infty$ = es Sacar Factor Común

Límites Notables

LÍMITES NOTABLES

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \lim_{u\to \infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=e$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}=\lim_{5x\to 0}5\cdot\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}=5\cdot\lim_{5x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(5x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{sen(5x)}^{\to 0}}{\underbrace{2x}_{\to 0}}\left(\to\frac{0}{0}\ IND\right)=\lim_{x\to 0}\frac{sen(5x)}{2x}\frac{5}{5}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(5x)}{5x}\frac{5}{2}=$$

$$\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sen(5x)}{5x}$$

Cambio de variable $u=5x\Rightarrow x\to 0, u\to 0$

$$=\frac{5}{2}\underbrace{\lim_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u}}_{Lim.Notable:\to 1}=\frac{5}{2}$$

Continuidad en un punto

Definición

Una función f es continua en un número a si:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

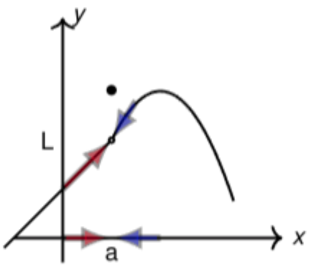
Se deben cumplir las siguientes 3 características:

1. f debe estar definida en $x=a$
2. Tiene que existir el límite de f alrededor de a
   a. f está definida en un intervalo abierto que contiene a a
   b. los límites laterales son iguales: $\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a}f(x)$
3. Deben coincidir el valor del límite y el valor de la función en el punto ((1) = (2))

1. $a\in Dom\,f,\Rightarrow\exists f(a)$
2. $\exists\lim_{x\to a}f(x)$
3. $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$

Si alguno de los 3 items NO se cumple, decimos que **f es discontinua en a**

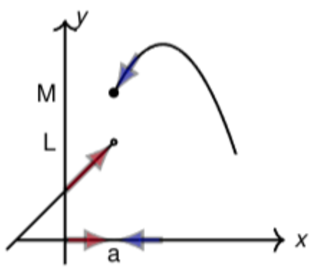
1. $a\in Dom\,f,\Rightarrow\exists f(a)$ ✔✗
2. $\exists\lim_{x\to a}f(x)$ ✔
3. $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$ ✗



DISCONTINUIDAD EVITABLE
(la evito redefiniendo f(a)=L)

1. $a\in Dom\,f,\Rightarrow\exists f(a)$ ✔✗
2. $\nexists\lim_{x\to a}f(x)$ ✗

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=L\neq M=\lim_{x\to a^+}f(x)$$

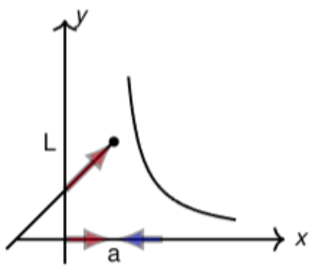


DISCONTINUIDAD DE SALTO

1. $a\in Dom\,f,\Rightarrow\exists f(a)$ ✔✗
2. $\nexists\lim_{x\to a}f(x)$ ✗

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty \text{ o bien } \lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$$

tiene Asíntota



DISCONTINUIDAD ESENCIAL

(Una función es continua si puedo dibujarla sin levantar nunca el lápiz)

Continua por izquierda

Una función es continua por izquierda en un número a si

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & si\quad x\le 1\\ -3 & si\quad x>1\end{cases}$$

f es continua por izquierda en $a=1$

Continua por derecha

Una función es continua por derecha en un número a si

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$$

$$f(x)=\begin{cases}-1 & si\quad x<0\\ x & si\quad x\ge 0\end{cases}$$

f es continua por derecha en $a=0$

Si f es continua en a, entonces es continua por derecha y por izquierda en el punto a

f es continua en un intervalo abierto (a,b) si es continua en todo número del intervalo

f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ si :

- es continua en todo número del intervalo abierto (a,b),
- es continua por derecha en a, y
- es continua por izquierda en b

(similarmente se puede definir continuidad en $(a,b]$ o en $[a,b)$)

Propiedades

Sean f y g continuas en a, entonces también son continuas en a las siguientes funciones:

1. $(f+g)(x)$
2. $(f.g)(x)$
3. $c.f(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, si $g(a) \neq 0$
5. $(f\, o\, g)(x)$, si f es continua en $g(a)$

a cualquier punto en el dominio (sin los extremos):

- Los polinomios son continuos en $\mathbb{R}$
- Toda función racional es continua en cualquier punto **de su dominio**
- La radicación es continua en los puntos de su dominio (sin extremos)
- Las funciones trigonométricas $sen(x)$ y $cos(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$

el Resto, como ln, están definidas en $x>0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-k}{x-1} & si \quad x \geq 0 \\ \sqrt{2-x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

2. ¿Para qué valor de k la función tendrá una discontinuidad evitable? Indicar en qué valor de x se presenta la discontinuidad.

¿Qué pasa en x=1?

1. $1 \notin Dom\, f,\ \nexists\, f(1)$ ✗ **f es discontinua en $x = 1$** qué tipo de discontinuidad?

2. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-k}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^3-k}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} \Rightarrow 1^3 - k = 0 \to \boxed{k=1}$

$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^3-1}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} \to \frac{0}{0}\ IND \qquad x^3 - 1 = (x-1).p(x)$

(cuenta auxiliar)

$$\begin{array}{rl|l} x^3 & -1 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & & x^2+x+1 \\ x^2 & & \\ -x^2+x & & \\ x-1 & & \\ -x+1 & & \\ 0 & & \end{array}$$

$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3$ ✔

Tomando $k=1$ la discontinuidad en $x=1$ es del tipo EVITABLE.

Tarea: ¿qué pasa ahora en $x=0$?...

Teorema del V.I.

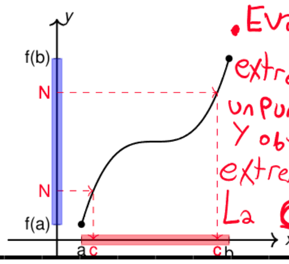
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, y N es un número estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en (a,b) tal que $f(c) = N$

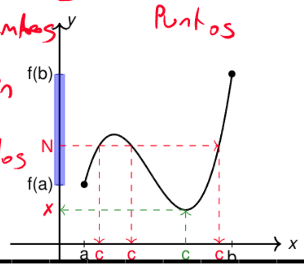
$$f \text{ continua en } [a,b], \text{ si } f(a) < N < f(b) \text{ o } f(b) < N < f(a)$$

$$\Rightarrow\ \exists\, c : a < c < b \ /\ f(c) = N$$

(en otras palabras: f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$) ∃ un Num entre dos Puntos

.Evaluo Ambos extremos en un Punto, y obtengo los extremos y la c





Demostrar que la ecuación $x^5 + 3x^3 - 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$

En otras palabras: queremos ver que la función $f(x) = x^5 + 3x^3 - 1$ tiene una raíz (i.e, alguna vez toma el valor $y = 0$) para algún $-1 < x < 1$

Tomemos el intervalo cerrado $[-1, 1]$:

- La función $f(x)$ es continua en $[-1,1]$ (los polinomios son continuos en $\mathbb{R}$, entonces es continua en un intervalo cerrado contenido allí dentro)
- Evaluemos la función en los extremos

¡

$$f(-1) = (-1)^5 + 3(-1)^3 - 1 = -1 - 3 - 1 = -5$$

!

$$f(1) = 1 + 3 - 1 = 3$$

Por el Teo V.I: si f es continua en [-1,1] ✔
para cualquier N que cumpla que $-5 < N < 3$ vamos a poder encontrar un valor $c \in (-1,1)$ tal que $f(c) = N$

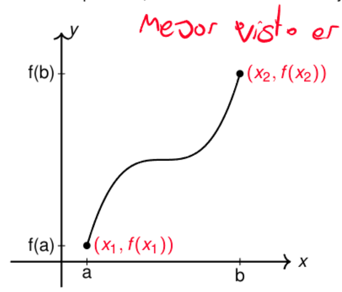
Elijamos $N = 0$, ya que $f(-1) < 0$ y $f(1) > 0$. i.e. $f(-1) < 0 < f(1)$, el teo V.I. nos asegura que existe al menos un $c \in (-1,1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, que es una raíz del polinomio.

Teo de Weierstrass

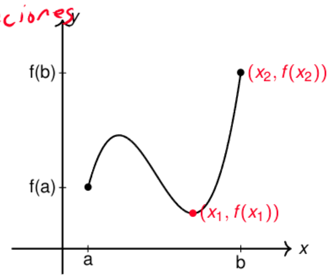
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces hay al menos dos puntos x_1 y x_2 en el $[a,b]$, tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todos los $x \in [a,b]$

En otras palabras, f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en el $[a,b]$

Mejor visto en Funciones



$f(x_1) = f(a) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(b)\ \forall\, x \in [a,b]$



$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(b)\ \forall\, x \in [a,b]$

Derivada de f en a

Sea a un número en el dominio de f, la derivada de la función f en a es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto:

$$\frac{df}{dx} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

es Por Definicion. Cuando nos Pidan ver derivada Por izq, derecha, para ver si existe, usamos definición.

Derivadas laterales

Se define la derivada a izquierda de f en a si nos acercamos al punto a con valores negativos de h ($a + h < a$!!!):

$$f'^{-}(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se define la derivada a derecha de f en a si nos acercamos al punto a con valores positivos de h ($a + h > a$!!!):

$$f'^{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Teorema

Si f es diferenciable en a entonces f es continua en a

$$\exists f'(a) \Rightarrow f \text{ es continua en } a$$

[No es Contrareciproco]

Las Derivadas son:

Suma: $f' \pm g'$
Resta

Cociente: $\frac{f}{g} = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$

Aprendan las derivadas elementales gracias

Producto: $f' \cdot g + f \cdot g'$

Regla de Cadena: $f'(g(x)) \cdot g'$

Reglas de derivacion y derivadas de funciones elementales

$F(x)$	$F'(x)$
$f+g$	$f'+g'$
$f.g$	$f'.g+f.g'$
$c.f$	$c.f'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)).g'(x)$
$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

	$f(x)$	$f'(x)$
constante	c	0
$r \in \mathbb{R}$	x^r	$r.x^{r-1}$
	$sen(x)$	$cos(x)$
	$cos(x)$	$-sen(x)$
	e^x	e^x
$a > 0$	a^x	$ln(a) \cdot a^x$
$x > 0$	$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$a > 0 \wedge x > 0$	$log_a(x)$	$\frac{1}{ln(a) \cdot x}$
$-1 \leq x \leq 1$	$arcsen(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$-1 \leq x \leq 1$	$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

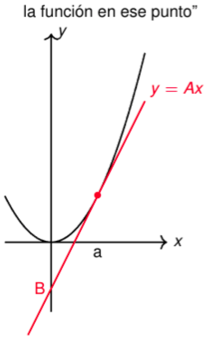
$$f^{-1}(x) \,/\, \boxed{f^{-1}(f(x)) = x = f\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Ejemplos:

- $f(x) = x^3$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad f(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x))^3 = (\sqrt[3]{x})^3 = x$
- $f(x) = e^x$ y $f^{-1}(x) = ln(x)$ $\quad f(f^{-1}(x)) = e^{ln(x)} = x = ln(e^x)$
- a^x y $log_a(x)$
- $sen(x)$ y $arcsen(x)$
- $cos(x)$ y $arccos(x)$
- $tan(x)$ y $arctan(x)$
- ...

Ecuación de la recta tangente

"La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta que es tangente a la función en ese punto"



$y = Ax + B$ A Se consigue

$A = f'(a)$ evaluando la $f'(a)$

$B???\ x = a \Rightarrow y = f(a) \Rightarrow f(a) = A \cdot a + B$

es la Función evaluada en a

$B = f(a) - A \cdot a = f(a) - f'(a) \cdot a$

$$y = \overbrace{f'(a)}^{A}\, x + \overbrace{f(a) - a\,f'(a)}^{B} = \boxed{f'(a)(x-a) + f(a) = y}$$

es calcular c/u por separado y despues unir de forma q quede $y = Ax + B$

Derivada de orden superior → Derivada de Derivada

Analisis de Funciones

Resumen

$$f(x)\begin{cases} Dom\,f \\ simetria \to opcional \\ cruce\ con\ los\ ejes\ (0,f(0))\ (x_0,0) \to opcional \\ A.V.(\lim_{x\to a^\pm} = \pm\infty) \\ A.H.(\lim_{x\to\pm\infty} = L) \end{cases}$$

(Par, impar)

extremos del Dom

$f(c)=0$

$$f'(x)\begin{cases} P.C.\ (x_c \in Dom\,f\ /\ f'(x_c)=0\ \vee\ f'(x_c)\nexists) \\ f'(x)>0 \Rightarrow f\ \nearrow,\ f'(x)<0 \Rightarrow f\ \searrow \\ max/min\ local\ \nearrow\searrow\ \searrow\nearrow \end{cases}$$

crece

Decrece

Concava hacia Arriba

Concava hacia abajo

$$f''(x)\begin{cases} f''(x)>0 \to f\ \bigcup,\ f''(x)<0 \to f\ \bigcap \\ P.I.\ (x_i \in Dom\,f\ /\ \cup\cap\ \vee\cap\cup) \\ x_c : \underline{min\ local}\ si\ f''(x_c)>0,\ \underline{max\ local}\ si\ f''(x_c)<0 \to opcional \end{cases}$$

Punto inflexión

De $f(x)$

1. Dominio de f: el conjunto de valores x en los que la función está bien definida

$$Dom\,f = \{x \in \mathbb{R}\ /\ \exists f\}$$

2. Simetrías - Paridad de f:

$$\text{si } f(-x)=f(x) \Rightarrow \text{ f par} \qquad \text{si } f(-x)=-f(x) \Rightarrow \text{ f impar}$$

3. Cruce del gráfico con los ejes coordenados
$(0,f(0))$ cruce con el eje de las y; $(x_0,0)$ cruce con el eje de las x (raíces)

4. Asíntotas Verticales (en un punto $x=a$ que NO pertenece al Dom f)

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to a-} f(x)=\pm\infty$$

5. Asíntotas horizontales (comportamiento lejos) en $y=L$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

De $F'(x)$

1. Puntos críticos: Puntos del dominio de f en los que $f'(x) = 0$ o que la función no es derivable

$$P.C. = \{x \in Dom\, f \ / \ f'(x) = 0 \vee \nexists\, f'(x)\}$$

2. Crecimiento/Decrecimiento de la funión

$$\text{si } f'(x) > 0 \text{ en } \mathbb{I} \Rightarrow \ f \text{ crece en } \mathbb{I}$$

$$\text{si } f'(x) < 0 \text{ en } \mathbb{I} \Rightarrow \ f \text{ decrece en } \mathbb{I}$$

3. Máximos y mínimos locales
Si f crece a la izquierda de un punto crítico, y f decrece a la derecha del punto crítico, entonces es un punto de máximo local $\nearrow\searrow$
Si f decrece a la izquierda de un punto crítico, y f crece a la derecha del punto crítico, entonces es un punto de mínimo local $\searrow\nearrow$

De $F''(x)$

1. Concavidad hacia arriba y hacia abajo

$$\text{si } f''(x) > 0 \text{ en } \mathbb{I} \Rightarrow \ f \text{ concava hacia arriba en } \mathbb{I} \qquad \bigcup$$

$$\text{si } f''(x) < 0 \text{ en } \mathbb{I} \Rightarrow \ f \text{ concava hacia abajo en } \mathbb{I} \qquad \bigcap$$

2. Puntos de inflexión: son puntos en el dominio de f en los que cambia la concavidad de la función, pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

$$P.I. = \{x_i \in Dom\, f \ / \ \text{f es } \bigcup x_i \bigcap \vee \text{ f es } \bigcap x_i \bigcup\}$$

3. Máximo y mínimo local con $f''(x_c)$
Si x_c es un P.C. y $f''(x_c) > 0 \Rightarrow x_c$ es mínimo local
Si x_c es un P.C. y $f''(x_c) < 0 \Rightarrow x_c$ es máximo local

L' Hôpital $\rightarrow$ Derivo p y q $\leftrightarrow$ $\frac{p}{q}$

Si un límite de cociente de funciones nos da una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, entonces podemos calcularlo como el límite del cociente de las derivadas

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Antiderivada

Sea f una función definida en un intervalo $\mathbb{I}$. Decimos que F es **una antiderivada o primitiva de f** si

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{I}$$

Integral Indefinida

Sea f una función definida en un intervalo $\mathbb{I}$. Se llama **integral indefinida de f al conjunto de TODAS las antiderivadas de f** y se simboliza:

$$\int f(x)\,dx$$

Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces la integral indefinida es **el conjunto infinito** de todas las funciones que tienen la forma $G(x) = F(x) + c$, y se denota:

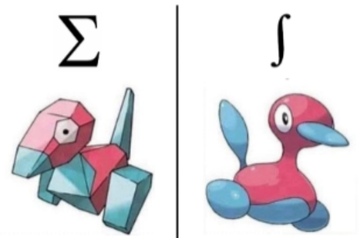
$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$$

Integral definida

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, o bien es una función acotada y con un número finito de discontinuidades en el intervalo. La **integral definida de f en** $[a, b]$ **se denota** $\int_a^b f(x)dx$ y está dada por el área bajo la curva $y = f(x)$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$:

$$\int_a^b f(x)dx = A = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k$$

Los extremos del intervalo se llaman límite inferior y límite superior de integración



Segundo Teorema fundamental del Cálculo . Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea G una primitiva de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b \quad \boxed{\text{Regla de Barrow}}$$

Método de sustitución para la integral definida

Sean f y g' funciones continuas en sus dominios, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

En particular, si F es una primitiva de f, etonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

Para la def solo Agrego Barrow

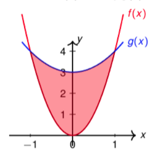
Área entre dos curvas

Sean f y g tales que $f(x) \geq g(x)\, \forall x \in [a, b]$. Entonces **el área comprendida entre los gráficos de f y g y las rectas verticales x=a y x=b está dada por**

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Ejemplo 2

Calcular el área encerrada por las curvas de $f(x) = 4x^2$ y $g(x) = x^2 + 3$



$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 3 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$A = \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{1} (x^2 + 3)dx - \int_{-1}^{1} 4x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_{-1}^{1} - 4\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 3 - \left(\frac{(-1)}{3} + 3(-1)\right)\right) - 4\left(\frac{1}{3} - \frac{(-1)}{3}\right) = \frac{2}{3} + 6 - \frac{8}{3} = \boxed{4}$$