(0) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (33-2x)^{\frac{4}{3}}$
b) $f(x) = e^{2x}$
c) $f(x) = 2^x$
d) $f(x) = \ln(7-x)$
e) $f(x) = \ln(x^2+3x+4)$
f) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
g) $f(x) = \ln(\cos(x) + \operatorname{sen}(x))$
h) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

$\frac{4}{3} - 1 =$

a) $F(x) = u^x \rightarrow$

$u = -2x + 33 \qquad u' = -2$

$x = u^{\frac{4}{3}} \rightarrow x' = \frac{4}{3}u^{\frac{1}{3}} \rightarrow F(x)' = \frac{4}{3}(-2)^{\frac{1}{3}}$ ✓

d) $\ln(7-x) \rightarrow \ln(u)$

$u = 7 - x \rightarrow u' = -1$

$F = \ln(u) \rightarrow \frac{1}{u} \qquad \rightarrow F'(x) = \frac{1}{-2}$

e) $\ln(x^2 + 3x + 4)$

$F(x) \ln(x) \qquad F' = \frac{1}{x}$

$g = x^2 + 3x + 4 \qquad g' = 2x + 3 \qquad \rightarrow F'(x) = \frac{1}{2x+3}$ ✓

h) $\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \rightarrow \frac{F(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{F' \cdot g - g' \cdot F}{g^2}$ ✓

$F(x) = \cos(x), \qquad F'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

$g(x) = \operatorname{sen}(x) - \qquad g'(x) = \cos(x)$

$\Rightarrow \dfrac{-\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$

(3) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int e^{2x}\,dx$
b) $\int 2^x\,dx$
c) $\int \sqrt[3]{33-2x}\,dx$
d) $\int \dfrac{dx}{7-x}$
e) $\int \dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx$
f) $\int \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$
g) $\int \dfrac{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\cos(x) + \operatorname{sen}(x)}\,dx$
h) $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$

$e^{2x} = \frac{1 \cdot e^{2x}}{2}$

Definición: Dado $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f: I \to \mathbb{R}$, se llama integral indefinida de f al conjunto de todas las primitivas de f y se denota ③

$\int f(x)\,dx$.

Observaciones:

1) El símbolo $\int$ se llama integral y dx se llama diferencial (de x). Además, denotamos por diferencial de una función F a $d(F(x)) = F'(x)\,dx$.

2) En la definición de integral indef. podríamos usar otra letra. Por ejemplo, $\int f(y)\,dy$, $\int f(t)\,dt$, etc.

a) $\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

$= \frac{e^{2x}}{2} + c$ ✓

D) $\int \frac{1}{7-x} \cdot dx \qquad u = 7-x$

$\frac{du}{dx} = 7 - x \rightarrow du = -dx$

$\int \frac{1}{u} \cdot (-du)$

$-1 \int \frac{1}{u}\,du = -1 + \ln(|u|) + c$

$-1 + \ln(|7-x|) + c$ ✓

e) $\int \dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx$

$u = x^2 + 3x + 4$

$du = 2x + 3dx$

$\int \frac{1}{x^2+3x+4} \cdot (2x+3)\,dx = \int \frac{2x+3}{u}\,du \rightarrow \ln(|x^2+3x+4|) + c$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u} \cdot 2\cos(x)\,dx$$

$u = \operatorname{sen}^2(x)$

$\frac{du}{dx} = \operatorname{sen}^2(x)$

$du = 2\cos(x)\,du$

$$2\int \frac{1}{u}\cdot \cos(x)\,dx = 2\cdot \ln(|u|) + \operatorname{sen}(x) + c$$

$$2\ln(|\operatorname{sen}^2(x)|) + \operatorname{sen}(u) + c$$

a) $\int_1^2 2^x\,dx$ c) $\int_1^5 \frac{dx}{7-x}$ e) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

b) $\int_3^5 \sqrt[3]{33-2x}\,dx$ d) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx$ f) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}\,dx$

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont. y $F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces,

(i) F es derivable y $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$. O sea, F es primitiva de f.

(ii) Si G es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \doteq G(x)\Big|_a^b$

(La parte (ii) se conoce como Regla de Barrow)

a) $$\frac{2^x}{\ln(2)}\Bigg|_1^2 = \frac{2^2}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} = \frac{2}{\ln(2)}$$ ✓

$u = 33 - 2x$

$\frac{du}{dx} = 33 - 2x$

$du = -2\,dx$

b) $$\int_3^5 \sqrt[3]{(u)}\,dx$$

$$\int_3^5 \sqrt[3]{u}\,-2dx = -2\cdot\left(\frac{3u^{\frac{4}{3}}}{4}\right)\Bigg|_3^5 = \frac{-2(33-2(5))^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{2(33-6)^{\frac{4}{3}}}{4}$$ ✓

$$\frac{-2(23)^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{2(27)^{\frac{4}{3}}}{4} = \frac{-2\sqrt[3]{23}^4}{4} + \frac{2\sqrt[3]{27}^4}{4}$$

$$\int_1^5 \frac{1}{7-x}\,dx = \int_2^6 \frac{1}{u}\,-dx = -1\ln(|7-x|)\Big|_2^6$$

$u = 7 - x$

$\frac{du}{dx} = 7 - x$

$du = -dx$

$$-\ln(|2|) + \ln(|5|) = \ln(|3|)$$

$x = 5 \to u = 7 - 5 = 2$

$x = 1 \to u = 7 - 1 = 6$

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+4}\,2x+3\,dx$$

(Por integral anterior)

$$= \ln(|x^2+3x+4|)\Big|_0^1 = \ln(|8|) - \ln(|4|) = \ln(|4|)$$ ✓

¿ $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$?

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \ln(e^x + e^{-x})\Big|_{\ln(2)}^{\ln(3)}$$

$$= \ln(3 + \tfrac{1}{3}) - \ln(2 + \tfrac{1}{2}) = \ln(\tfrac{10}{3}) - \ln(\tfrac{5}{2})$$

$$= \ln(\tfrac{4}{3})$$

Teorema (Método de integración por partes). Si f' y g' son continuas, entonces

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \qquad (\star)$$

(7) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int x\,e^x\,dx$ d) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2(x)}$ g) $\int_0^2 x\ln(x^2+4)\,dx$

b) $\int_{-1}^1 (1-2x)\,e^{-2x}\,dx$ e) $\int_3^9 x\ln(x-1)\,dx$ h) $\int e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\,dx$

c) $\int x^2\cos(x)\,dx$ f) $\int \ln(x^2+1)\,dx$ i) $\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\,dx$

Teorema (Método de Sustitución). Sean $f:(d,e)\to\mathbb{R}$ y $g:(a,b)\to(d,e)$ derivable en su dominio. Entonces, si F es una primitiva de f en (d,e), $H(x) = (F\circ g)(x)$ es primitiva de $h(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$ en (a,b). O sea,

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x \in (a,b).$$

a) $\int x\,e^x\,dx$ ← Por partes

$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$

$g'(x) = x$ $g(x) = 1$

$$= e^x\cdot x - \int e^x\,dx$$

$$= x\,e^x - e^x$$ ✓

b) $\int_{-1}^{1} \underbrace{(1-2x)}_{F} \underbrace{e^{-2x}}_{g} \, dx$

$$e^{2x} = \frac{e^{(-2x)}}{2}$$

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ cont. y $F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces,

(i) F es derivable y $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$. O sea, F es primitiva de f.

(ii) Si G es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \doteq G(x)\Big|_a^b$

(La parte (ii) se conoce como Regla de Barrow)

Teorema (Mét. de Sust.): Sean $f:[c,d] \to \mathbb{R}$ y $g:[a,b] \to [c,d]$ tq f y g' son continuas en sus respectivos dominios. Entonces, si $u = g(x)$ vale que

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du .$$

En particular, si F es primitiva de f tenemos que $\int^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$.

Teorema (Int. por Partes). Sean f y g derivables en (a,b) y tq f' y g' tienen a lo sumo un número finito de dis cont. en $[a,b]$ y son acotadas. Entonces

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{u} \underbrace{g'(x)\,dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g(x)}_{v}\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{g(x)}_{v} \underbrace{f'(x)\,dx}_{du}$$

$$F(x) = (1-2x) \to F'(x) = -2$$

$$g(x) = e^{-2x} \to g'(x) = -2e^{-2x}$$

$$(1-2x) \cdot e^{-2x}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{-2x} \cdot -2\,dx$$

$$(+3)e^{+2} + 1 \cdot e^{-2} - 2 \cdot e^{-2} - e^{+2}$$

$$3e^{2} + e^{-2} - 2 = e^{2} + e^{-2}$$ ✓

c)

$\int x^2 \cos(x)\,dx$

$$F(x) = x^2 \to F'(x) = 2x$$

$$g'(x) = \cos(x) \to g(x) = \operatorname{Sen}(x)$$

$$x^2 \cdot \operatorname{Sen}(x) - \int \underbrace{2x}_{F} \underbrace{\operatorname{Sen}(x)}_{g'}\,dx$$

$$F(x) = 2x \qquad F'(x) = 2$$

$$g'(x) = \operatorname{sen}(x) \to g(x) = -\cos(x)$$

$$x^2 \cdot \operatorname{Sen} - 2x \cdot -\cos(x) - \int 2 \cdot -\cos(x)\,dx$$

$$x^2 - \operatorname{sen} + 2x \cdot \cos(x) - 2 + \operatorname{Sen}(x) + C$$ ✓

d) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2(x)}$

$\boxed{\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x}$ ◁– Usar

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{Sen}^2(x)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{Sen}^2(x)} \cdot x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\csc^2(x)\,dx$$

→ integro Por Partes

$$F(x) = x, \quad F'(x) = 1 \quad (du = dx)$$

$$g(x) = \csc^2(x) \quad g'(x) = -\cot$$

$$\to x \cdot -\cot(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int (-\cot(x))\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot -\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} \cdot -\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ln(|\operatorname{Sen}(x)|)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot -\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} \cdot -\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ln\left(\left|\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\right) - \ln\left(\left|\operatorname{Sen}\frac{\pi}{4}\right|\right)$$

e) $\displaystyle\int_3^9 x\ln(x-1)\,dx$

Por Partes

Teorema (Int. por Partes). Sean f y g derivables en (a,b) y tq f' y g' tienen a lo sumo un número finito de dis cont. en $[a,b]$ y son acotadas. Entonces

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g'(x)\,dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g(x)}_{v}\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{g(x)}_{v}\underbrace{f'(x)\,dx}_{du}$$

$$\int F(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\int_a^b \quad F^P(x)\cdot g'(x) - \int F^P(x)\cdot g^P(x)\,dx$$

→ tenemos que:

$F(x) = x \quad \rightarrow F^P(x) = \dfrac{x^2}{2}$

$g'(x) = \ln(x-1) \quad g^P(x) = \dfrac{1}{x-1}$

quedando:

$$\underbrace{\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x-1)\Big|_3^9}_{\text{Evaluoyo.}} - \int_3^9 \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\frac{1}{2}.}\cdot\frac{1}{x-1}\,dx = \frac{81}{2}\cdot\ln(8) - \frac{9}{2}\cdot\ln(2) - \frac{1}{2}\int_3^9 x^2\cdot\frac{1}{x-1}\,dx$$

$$\frac{72}{2}\cdot\ln(6) - \frac{1}{2}\int_3^9 \underbrace{\frac{x^2}{x-1}}_{\text{división de Polinomios}}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-1 \\ -x^2+x & x-1 \\ \hline -x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

o: → $x^2 = \dfrac{(x+1)(x-1)+1}{x-1}$ *

→

$$36\ln(6) - \frac{1}{2}\int_3^9 \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)\,dx}{\cancel{x+1}} + \int_3^9 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$36\ln(6) - \frac{1}{2}\int_3^9 x-1\,dx + \int_3^9 \frac{1}{x+1}\,dx \rightarrow \begin{array}{l} u = x+1 \\ \frac{du}{dx} = x+1 \rightarrow du = dx \\ x = 9 \rightarrow 9+1 = 10 \\ \quad 3+1 = 4 \end{array}$$

$$36\ln(6) - \frac{3}{2}\int_3^9 x\,dx + \int_4^{10} \frac{1}{u}\,du$$

$$36\ln(6) - \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_3^9\right) + \ln(|u|)\Big|_4^{10}$$

$$36\ln(6) - \frac{3}{2}\left(\frac{81}{2} - \frac{9}{2}\right) + \ln(|10+1|) - \ln(|4+1|)$$

$$36\ln(6) - \frac{3}{2}\left(\frac{72}{2}\right) + \ln(|11|) - \ln(|3|) = 36\ln(6) - 3\cdot 18 + \ln(|8|)$$

$$36\ln(6) - 54 + \ln(|8|) \checkmark$$

(10) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2+4x+24}{x^2-4x+8}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx$ c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx$

a) $$\int_2^4 \frac{x^2-4x+8+8x+16}{x^2-4x+8} = \int_2^4 dx + \int_2^4 \frac{8x+16}{x^2-4x+8}\,dx$$

$$= x\Big|_2^4 + \int_2^4 \frac{8x+16}{x^2-4x+8}\,dx$$

$$= 2 + \int_2^4 \frac{8x+16}{x^2-4x+8}\,dx \;*$$

Observación: para integrar términos de la forma $\dfrac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$, debemos hallar constantes K_1 y K_2 tq

$$\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} = K_1\underbrace{\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}}_{\substack{\text{Fácil de integrar usando}\\ \text{la sust. } u = x^2+\alpha x+\beta}} + K_2\underbrace{\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}}_{(\star)}.$$

Igualando los coef. de los numeradores se obtiene $K_1 = B/2$, $K_2 = C - K_1\alpha$

F(x)

$$* \; \frac{8x+16}{x^2-4x+8} \underset{*}{=} K_1\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+8} + K_2\frac{1}{x^2-4x+8}$$

Se igualan los coeficientes según grad

* es una igualdad.

$$= \frac{2xK_1 - 4K_1 + K_2}{x^2-4x+8} \Rightarrow \begin{cases} 2K_1 = 8 & \rightarrow K_1 = 4 \\ -4K_1 + K_2 = 16 & \rightarrow K_2 = 32 \end{cases}$$

$$2+4\int_2^4 \frac{x-4}{x^2-4x+8}\,dx + 32\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

$*$ $u = x^2-4x+8$ $\quad x=4 \to 4^2-4(4)+8=8$

$\frac{du}{dx} = x^2-4x+8$ $\quad$ y $\quad x=2 \to 2^2-4\cdot 2+8=4$

$du = 2x-4\,dx$

$\frac{du}{2x-4} = dx$

$$2+4\int_4^8 \frac{x-4}{u}\cdot\frac{du}{2x-4} + 32\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

Relaciono

$$2+4\int_4^8 \frac{\frac{1}{2}(\cancel{2x-4})}{u}\cdot\frac{du}{\cancel{2x-4}} + 32\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

$*$ $u = x-2$ $\quad x=4 \to 4-2=2$

$\frac{du}{dx} = x-2$ $\quad x=2 \to 2-2=0$

$du = -2\,dx$

$-\frac{du}{2} = dx$

$$2+4\int_4^8 \frac{du}{u} + 32\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

$$2+4\cdot\left(\ln(|u|)\Big|_4^8\right) + 32\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+4+4}$$

$$2+4\cdot\left(\ln(|8^2-4(8)+8|)-\ln(|4^2-4(4)+8|)\right) + 32\int_2^4 \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx$$

$$2+4(\ln(|40|)-4\ln(|8|)) + 32\int_0^2 \frac{1}{u^2+2^2}\cdot\left(-\frac{du}{2}\right)$$

$$2+4(\ln(|40|)-4\ln(|8|)) + 32 -\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{u^2+2^2}\,du$$

$$2+4(\ln(|40|)-4\ln(|8|)) + \frac{63}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot \mathrm{Arctg}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\Big|_0^2$$

$$2+\ln(|32|) + \frac{63}{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{Arctg}\left(\frac{x-2}{2}\right)}{2}\right)\Big|_0^2$$

$$2+\ln(|32|) + \frac{63}{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{Arctg}(0)}{2} - \frac{\mathrm{Arctg}(-1)}{2}\right)$$

$$2+\ln(|32|) + \frac{63\,\mathrm{Arctg}(0)}{4} - \frac{63\,\mathrm{Arctg}(-1)}{4}$$

b) $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx$ Notemos que $\frac{P(x)}{q(x)}$ y que $P(x) < q(x)$

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int_0^2 \frac{x-1}{(x+2)(x-2)}\,dx \to \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x-2)}$$

Siendo:

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{A_1(x-2)+A_2(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{xA_1-2A_1+xA_2+2A_2}{(x+2)(x-2)} \quad X$$

No tiene X

$$\frac{1x-1}{\cancel{(x+2)(x-2)}} = \frac{A_1x+A_2x-2A_1+2A_2}{\cancel{(x+2)(x-2)}} = 2A_1-2A_2$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 & \to A_1 = 1 - A_2 \quad A_1 = 1 - \frac{1}{4} \quad A_1 = \frac{3}{4} \\ -2A_1 + 2A_2 = -1 & -2(1-A_2) + 2A_2 = -1 \to -2 + 2A_2 + 2A_2 = -1 \end{cases}$$

$$4A_2 = 1$$

$$A_2 = \frac{1}{4}$$

Nos queda que:

$$\frac{\frac{3}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2} = \int_0^2 \frac{\frac{3}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2}\, dx$$

$$\int_0^2 \frac{\frac{3}{4}}{x+2}\, dx + \int_0^2 \frac{\frac{1}{4}}{x-2}\, dx$$

$u = x+2$

$\frac{du}{dx} = x+2$

$du = dx$

$x=2 \to 2-2=0$

$x=0 \to 0-2=-2$

$x=2 \to 2+2=4$

$x=0 \to 2=2$

$$\frac{3}{4}\int_2^4 \frac{1}{u}\, du + \frac{1}{4}\int_{-2}^0 \frac{1}{u}\, du$$

$$\frac{3}{4} \cdot \ln(|u|) + \frac{1}{4} \ln(|u|) \Big|_{-2}^{0}$$

$$\frac{3 \cdot \ln(|u|)}{4}\Big|_2^4 + \frac{\ln(|u|)}{4}\Big|_{-2}^{0}$$

$$\frac{3 \cdot \ln(|6|)}{4} - \frac{3\ln(|4|)}{4} + \frac{\ln(|2|)}{4} - \frac{\ln(|0|)}{4} \;?$$

Converge = L

diverge = ∞

(13) Determinar si las siguientes integrales impropias convergen y en tal caso calcularlas

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s+1}}\, ds$ b) $\int_0^2 \frac{1}{(1-y)^{2/3}}\, dy$ c) $\int_{-\infty}^0 x\, e^{-x^2}\, dx$

<u>Integrales Impropias de tipo I</u>: funciones continuas y al menos uno de los límites de integración no es finito.

<u>Definición</u>: Sea $a \in \mathbb{R}$.

1 • Si f es continua en $[a, \infty)$, definimos $\int_a^\infty f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$, si este límite existe y es finito. En tal caso decimos que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge; si no decimos que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

2 • Si f es continua en $(-\infty, a]$, definimos $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$; y decimos que converge o diverge según corresponda.

3 • Si f es continua en $\mathbb{R}$, definimos $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \doteq \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$, siempre que estas últimas dos integrales converjan. y en tal caso decimos que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ converge. Si alguna no converge, decimos que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ diverge.

$$a)\ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx$$

$t+1$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \int_1^{t+1} u^{-\frac{1}{2}}\, du.$$

$$\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^{t+1} = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^{t+1}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{(t+1)+1}}{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{\infty+1+1}}{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

Diverge.

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{5-2n}{-7+3n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(\frac{5}{n}-2)}{n(-\frac{7}{n}+3)} = \frac{-2}{3}$ converge

$a_n = \frac{n}{\ln(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\infty}{\infty} = \infty$ diverge

$\lim_{n \to \infty} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ Como n lo hará alternar entre + si n es par, - si n es impar el límite No $\exists$

$a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^n$ notemos que:

$\lim_{n \to \infty} \left(1-\frac{5}{n}\right)^n$

Si $n \to \infty$, $\frac{5}{n} = 0$, y 1 se quedaría en 1, Entonces converge

---

$a_{n+1} \leq a_n$ decreciente $a_n \leq a_{n+1}$ creciente

$a_{n+1} < a_n$ estric. decr. $a_n < a_{n+1}$ " estrictamente

Acotada inf. si $\exists m_i \in \mathbb{R}$ $M_i \leq a_n$

" Sup $\exists m_s \in \mathbb{R}$ $a_n \leq M_s$

Acotado $\exists$ si $M \in \mathbb{R}$ tq $|a_n| \leq mS$

$a_n = \frac{2n}{n^2+1}$

i) Acotada sup.

ii) Negativo, ya q n^2 siempre positivo, pero n será negativo y solo negativo toda la suc.

$m_i = \frac{2n}{n^2} \geq \frac{2n}{n^2+1}$

1 $\frac{4}{5}$ 0,8

iii) $a_{n+1} = \frac{2n+2}{n^2+2n+2}$ $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$

$\frac{6}{8} \leq \frac{4}{5}$

0,8

iv) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n^2+1} = 2$ $\exists$ el L converg

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen}(0) = 0$ Converge

ii) positiva si $n \geq 0$
negativa si $n < 0$

iii) $a_{n+1} = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \to$ Decrece

iv) $m_i = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \to$ Acot. inf.

c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{e^n}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{e^n} = \infty$ Diverge

ii) n es par $\to -1$ es $+$ Pero n sería $- \leq 0$
n " impar $\to -1$ es $-$. $+ \geq 0$

iii) $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\ n+1}{e^{n+1}} = \frac{(-1)^n \cdot (-1)(n+1)}{e^n \cdot e} = \frac{(-1)^n - n - 1}{e^n \cdot e}$

notemos q crecerá más

$a_{n+1} \leq a_n$ iv) mismo, acot inf.
Decrece

Sucesiones

(1) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es convergente o no. Si la sucesió converge, calcular su límite.

(a) $a_n = \frac{5-2n}{3n-7}$ (c) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ (e) $a_n = \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n$

(b) $a_n = \frac{n}{\ln(n+1)}$ (d) $a_n = n \operatorname{sen}(6/n)$ (f) $a_n = \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{4^n}$

(2) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es: (i) acotada superior y/o inf riormente; (ii) positiva o negativa (a partir de cierto n_0); (iii) creciente, decreciente alternante; (iv) convergente, divergente, divergente a ∞ o $-\infty$.

(a) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$ (c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{e^n}$ (e) $a_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

(b) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ (d) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

3) b)
Converjen o divergen

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^{2/3}}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}\,dx \quad \text{Cont en } [0,1) \cup (1,2)$$

$(x-1)(x-1)$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+1}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$$

$$\ln(|\sqrt[3]{x^2-2x+1}|)\Big|_0^1 + \ln(|\sqrt[3]{x^2-2x+1}|)\Big|_1^2$$

$$(|\sqrt[3]{0}|) - \ln(|\sqrt[3]{0}|) + \ln(|\sqrt[3]{1}|) - \ln(|\sqrt[3]{0}|)$$

$$\infty + \infty + 0 - \infty = \text{diverge}$$

4)
a) $$\int_4^\infty \frac{1}{\sqrt{s}-1}\,ds = \ln(|\sqrt{s}-1|)\Big|_4^\infty$$

$$\ln(|\sqrt{\infty}-1|) \to \text{diverge}$$

b) $$\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^{2/3}}\,dx = $$ La Integral No está definida Para 3.

$$\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{2/3}}\,dx + \int_0^3 \frac{1}{(x-3)^{2/3}}$$

$$\ln(|(x-3)^{2/3}|)\Big|_3^4 + \ln(|(x-3)^{2/3}|)\Big|_0^3$$

$$\ln(|1|^{2/3}) - \ln(|0|^{2/3}) + \ln(|0|)^{2/3} - \ln(|-3|^{2/3} = \infty \text{ diverge}$$

Series Numéricas

(3) Dadas las siguientes series, calcular su suma o demostrar que divergen.

(a) $4+\frac{8}{5}+\frac{16}{25}+\frac{32}{125}+\dots$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(e) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$

Definición: dada $\{a_n\}$ sucesión de números reales, llamaremos serie de términos a_n a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la k-ésima suma parcial S_k de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como $S_k \doteq a_1+\dots+a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Luego, $\{S_k\}$ es una sucesión de números reales. Si el límite de la suc. $\{S_k\}$ existe y es finito, i.e. $\lim_{k\to\infty} S_k \doteq S<\infty$, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y definimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \doteq S$.

Si $\lim_{k\to\infty} S_k$ no existe o es $\pm\infty$, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Definición: dado $r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1+r+r^2+\dots$ se llama serie geométrica.

Teorema:

(i) Si $|r|<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente y además $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

(ii) Si $|r|\geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

b) $3\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$

$= 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}\cdot(-4)$

$= -12\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n} \quad \wedge \quad \left(-\frac{1}{4}\right)^{n} = r^n \Rightarrow \left|-\frac{1}{4}\right| = 0{,}25$

$-12\sum_{n=1}^{\infty}$ $|r|<1$ converge, $\Rightarrow$ calculo $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$ ✓

$-12\cdot\frac{4}{5} = -\frac{48}{5}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} 5\cdot\frac{1}{10^{3n}} = 5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^3}\right)^n = 5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1000}\right)^n \quad \left|\frac{1}{1000}\right| = 0{,}001$

$= 5\sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad |r|<1$ converge

$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{1000}\right)} \approx \frac{1000}{999}$ ✓

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$1 < 2n-1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_1}{(2n-1)} + \frac{A_2}{(2n+1)} = \frac{A_1(2n+1)+A_2(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$

$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2nA_1+A_1+2nA_2-A_2}{(2n-1)(2n+1)}$

$\frac{1n^0+0n^1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2nA_1+2nA_2+A_1n^0-A_2n^0}{(2n-1)\;2n+1} = \begin{cases} A_1n^0 - A_1n^0 = -1n^0 \\ 2A_1n^1+2A_2n^1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2A_1+2A_2=0 \\ A_1-A_2=+1 \end{cases}$ $2(1+A_2)+2A_2=0 \Rightarrow 2+2A_2+2A_2=0 \Rightarrow A_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow A_1 = 1+A_2 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{(2n-1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(2n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}}{(2n+1)}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2n+1}$$

(comportamiento)

esemplo de la serie:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5}}_{\times} \underbrace{- \frac{1}{7} + \frac{1}{7}}_{\times} - \dots\right)$$

se van cancelando $\rightarrow$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1+1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(2)}{\cancel{n}(2+\frac{1}{n})}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2+0} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

converge

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2^3}{e^{-3}}\right)^k = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{8}{e^{-3}}\right)^k = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k \cdot 8 \cdot e^3$$

Dado por e^{-3} (gracias mach

Serie geometrica :D $\frac{r}{1-r}$

$$\left|\frac{1}{e}\right| < 1 \quad = 8e^3 \cdot \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = 8e^3 \cdot \frac{\frac{1}{e}}{-1} = -\frac{8e^3}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$$

$$\sqrt{\ } = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2 \cdot 1} \quad x_1 = \frac{-7+1}{2} = -3 \quad x_2 = \frac{-8}{2} = -4$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} < \frac{A_1}{n+3} + \frac{A_2}{n+4}$$

$$\frac{A_1(n+4) + A_2(n+3)}{(n+3)(n+4)} = \frac{A_1 n + 4A_1 + A_2 n + A_2 3}{(n+3)(n+4)} = \frac{A_1 n + A_2 n + 4A_1 + 3A_2}{(n+3)(n+4)}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ 4A_1 + 3A_2 = 1 \end{cases} \qquad A_1 = -A_2 \rightarrow A_1 = 1$$

$$\rightarrow -4A_2 + 3A_2 = 1 \rightarrow A_2 = -1$$

$$\frac{1}{(n+3)} - \frac{+1}{(n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \qquad 0 \leq \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \leq 1$$

Veamos el comportamiento:

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \ldots \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{Converge}\right.$$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \ln n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}$

1) Analizo
2) Comparación con criterio
3) veo si converge o diver
4) Caso q diverge ver C/i/y.

Definición: decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge y converge condicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge. (45)

Teorema (Criterio del cociente). Sean $a_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$ y $r \doteq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. (46)

(i) Si $r < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (y por lo tanto es convergente).

(ii) Si $r > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente (puede ser $r = \infty$).

(iii) Si $r = 1$, entonces no se puede asegurar nada.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2 + \ln(n)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+\ln(n)}\right| = 0$$

Observación: no vale el recíproco del teorema. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Definición: dado $r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \ldots$ se llama serie geométrica

Teorema:
(i) Si $|r| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente y además $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

(ii) Si $|r| \geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

$$\frac{1}{2} <$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = r^n$$ converge por Serie geométrica.
Darí un L → Absolutamente

$$\frac{1}{1-r^1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 : \frac{1}{2} = 2 \rightarrow \text{converge abs}$$

Sabemos que:

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

Esto se debe a que:

- Si n es par, $\cos(n\pi) = 1$.
- Si n es impar, $\cos(n\pi) = -1$.

Por lo tanto, podemos simplificar el término $\cos(n\pi)$ como $(-1)^n$. La serie se reduce a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100(-1)^n}{2n+3}$$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100(-1)^n}{2n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{100}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{100}{2\infty+3} = 0 \quad \text{Converge}$$

Pero $\frac{1}{n}$ (serie harmonica) Diverge.

→ converge Condicionalmente.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^{-1}}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n (-1)}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{-1} = -1$

$(-1)^n \to$ Alternante

$= \left| \frac{-1 \cdot (-1)}{\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|$

Obs:

$\frac{1}{n} \to$ Serie harmonica. Pero tenemos $\frac{1}{\sqrt{n}}$. ¿es lo mismo?

si, creo.

$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{\infty}} \right| = 0$ Converge Pero la serie harmonica No

$\to$ Converge condicionalmente ✓

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$

sabemos que: $\cos(n\pi) \begin{cases} 1 & n \text{ es Par} \\ -1 & n \text{ es impar} \end{cases}$

* ln toma valores muy bajos.

$\to \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \right| = 0$ Converge.

Pero $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)} = \infty$ Diverge $\to$ converge Cond.

(6) Utilizar el criterio de la integral para series numéricas y determinar si las siguientes integrales convergen o no.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x^x}\, dx$ (b) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^x}$

Teorema (Criterio de la integral para series)

Sea f una función continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Si $a_n = f(n)$, entonces $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{C_1}$ converge $\iff$ $\underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}_{C_2}$ converge.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^x}{x^x} = \sum_{n=}^{\infty} \left(\frac{e}{x}\right)^x = \sum_{n=1}^{\infty} r^n$ y $|r^n| < 1 \to$ Converge. $\lim_{n\to\infty} = 0$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^x}$ Serie harmonica, diverge, $= \infty$

Parciales:

ANÁLISIS MATEMÁTICO II (LC) - CÁLCULO II (LMA)
PARCIAL 1

29 de Septiembre de 2023

1. Ejercicio 1 *(34 Pts.)*

   (a) *(17 Pts.)* Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+7}}\,dx$.

   (b) *(17 Pts.)* Dibuje y calcule el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = (x^2-1)^2$ y $g(x) = 1 - x^2$ para $0 \le x \le 2$.

$u = 2x^2+7 \qquad x' = 1$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+7}} \cdot x \, dx$

$\frac{du}{dx} = 2x^2+7$

$du = 4x\,dx$

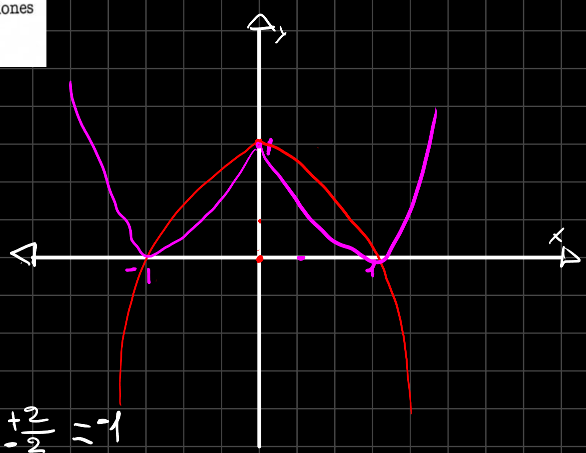
$\frac{du}{4x} = dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{4}$

$\frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2x^2+7}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} : \sqrt{2x^2+7} + c = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2x^2+7} = \frac{2\sqrt{2x^2+7}}{2} + c$

(b) *(17 Pts.)* Dibuje y calcule el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = (x^2-1)^2$ y $g(x) = 1 - x^2$ para $0 \le x \le 2$.



* $-x^2+1=$

$x_v = \frac{-b}{2a} = 0$

$y_v = 1$

$\sqrt{\ } = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot(-1)} = \frac{\pm\sqrt{4}}{-2} = \begin{cases} x_1 = \frac{+2}{-2} = -1 \\ x_2 = +\frac{2}{2} = +1 \end{cases}$

* $(x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

$x^2 = u \to u^2 - 2u + 1 \qquad \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1 \begin{cases} +1 \\ u^2 \\ -1 \end{cases}$

$x_v = \frac{0}{2\cdot(-1)} = 0$

$y_v = +1$!!

Para ver en donde está definida la integral, igualo:

$(x^2-1)^2 = -x^2+1$

$(x^2-1)(x^2-1) = -x^2+1$

$x^4 - 2x^2 + 1 = -x^2+1$

$x^4 - 2x^2 = -x^2$

$x^4 - x^2 =$

$x = \pm 1$

$0 \le x \le 2$

$x = 0$

$x = 1$

$x = -1$ X

$\int_0^1$

$$\int_0^1 (F(x) - g(x))\, dx$$

Como es entre 0 y 2 no defino la otra integral del lado izq.

$$\int_0^1 (x^2-1)^2 + x^2 + 1 \, dx =$$

$$\int_0^1 (x^2-1)^2 dx + \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 1\, dy$$

$$\left.\frac{(x^2-1)^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left. x \right|_0^1$$

$$\frac{(1^2-1)^3}{3} - \left(\frac{0-1}{3}\right)^3 + \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} + 1 - 0 =$$

$$0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \approx 1{,}66$$

$$\int_1^2 (F(x) - g(x))\, dx$$

$$\int_1^2 (x^2-1)^2 + x^2 + 1 =$$

$$\int_1^2 (x^2-1)^2 dx + \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 1\, dx$$

$$\left.\frac{(x^2-1)^3}{3}\right|_1^2 + \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + \left. x \right|_1^2$$

$$\frac{(2^2-1)^3}{3} - \frac{(1^2-1)^3}{3} + \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} + 2 - 1$$

$$\frac{(3)^3}{3} - 0 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{27}{3} + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{27}{3} + \frac{7}{3} + \frac{3}{3} = \frac{37}{3}$$

2. Ejercicio 2 *(32 Pts.)* Determine si las siguientes sucesiones tienen límite.

(a) *(16 Pts.)* $a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^2}$

(b) *(16 Pts.)* $b_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$

$$a)\ a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n \cdot (n)^{1/2}}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n \cdot 1}{n^{3/2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^\infty}{\infty} = 0 \text{ Converge.}$$

Notemos que $(-1)^n$ es una serie alternante, o sea que:

$$(-1^n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ es par.} \\ -1 \text{ si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} - 2 = \frac{3}{2}$$

b)

$$b_n = \sqrt{n^2+2n} - n = \sqrt{n^2+2n} - 1 \cdot \frac{\sqrt{n^2+2n} - n}{\sqrt{n^2+2n} - n} = \frac{(\sqrt{n^2+2n} - n) \cdot (\sqrt{n^2+2n} - n)}{\sqrt{n^2+2n} - n}$$

$$\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)\cdot(\sqrt{n^2+2n}-n)}{\sqrt{n^2+2n}-n} = \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}-n} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}-n} = \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{n+2}-n}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+2}-n}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}-n} = 0 \quad \text{Converge.}$$

Podemos usar:

cual ?
1) Crit. de comp.
2) $|r|<1$, $|r|>1$ $\to$ Serie geométrica
3) $\lim_{n\to\infty} = L$ y ver a donde va la suma.

3. Ejercicio 3. *(34 Pts.)* Utilice algún criterio de convergencia y determine si las siguientes series convergen o divergen:

(a) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 8n!}{(n+1)!}$

(b) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 8n!}{(n+1)!}$$

$\to$ Notemos:

$! \to$ criterio de cociente.

$(-1)^n \to$ Serie Alternante $\to 1 \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

$\to$ Por criterio de cociente:

Teorema (Criterio del cociente). Sean $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y $r \doteq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. (46)

(i) Si $r<1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (y por lo tanto es convergente)

(ii) Si $r>1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente (puede ser $r=\infty$).

(iii) Si $r=1$, entonces no se puede asegurar nada.

$$a_n = \frac{(-1)^n 8n!}{(n+1)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} 8(n+1)!}{(n+1+1)!}$$

quedando la Serie:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} 8(n+1)!}{(n+1+1)!}}{\frac{(-1)^n 8n!}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1 \cdot 8(n+1)!}{(n+1+1)!}}{\frac{1 \cdot 8n!}{(n+1)!}} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} = \left| \frac{\frac{8(n+1)!}{(n+2)!}}{\frac{8n!}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{8(n+1)!}{(n+2)!} : \frac{8n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{8(n+1)! \cdot (n+1)!}{8n! \cdot (n+2)!} \right|$$

Separo por comodidad.

$$\sum_{n=1} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{8(n+1)!}{8n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{n+1 \cdot n!}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)\cdot(n+1)!} \right| \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \lim_{n\to\infty} n+1 \cdot \frac{1}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+1} = 1 \quad \text{Converge}$$

(b) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}$

$\Leftrightarrow |r|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n = 5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n = 5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0$$

Anulado

$$= 5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1$$

ANÁLISIS MATEMÁTICO II (LC) - CÁLCULO II (LMA)
PARCIAL 1
29 de Septiembre de 2023 3 hojas

1. Ejercicio 1 *(34 Pts.)*

(a) *(17 Pts.)* Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$.

a) $\int \frac{1}{x^2}\cdot \ln(x)\,dx$

Notemos que tiene la Forma de una integración Por Partes. $\int g'\cdot F\,dx = F\cdot g - \int F' g$

$\int F(x)\cdot g(x)\,dx$

Notemos que: $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ entonces

$\int x^{-2}\cdot \ln(x)\,dx$

$g'(x) = x^{-2}$ $\quad g(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = \frac{1}{-x}$

$F(x) = \ln(x)$ $\quad F'(x) = \frac{1}{x}$

$$\ln(x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) - \int \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$-\frac{\ln(x)}{x} - \int -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$-\frac{\ln(x)}{x} + \int x^{-2}\,dx = -\frac{\ln(x)}{x} + x^{-1} + c$$

(b) *(17 Pts.)* Decida si la siguiente integral impropia converge o diverge $\int_0^1 \frac{x}{x^2-1}\,dx$.

Veamos que si $x=1$ $\quad \frac{1}{1^2-1} \Rightarrow \frac{1}{0}$ indF.

Entonces tenemos:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-1} = \lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{x}{x^2-1}\,dx = \lim_{t\to 0}\int_0^t \frac{1}{x^2-1}\cdot x\,dx$$

$\Leftarrow$ integración Por Partes

Formula
$\int_a^b F\cdot g$
$F\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b F'\cdot g$

$$\int_0^1 \frac{1}{u}\cdot\frac{2x}{2}\cdot dx$$

$u = x^2-1$ $\quad x=1,\ u=0$

$\frac{du}{dx} = x^2-1$ $\quad x=0,\ u=-1$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2x} = dx$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{1}{u}\cdot du$$

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to -1}\int_t^0 \frac{1}{u}\cdot du = \frac{1}{2}\lim_{t\to -1} \ln(|x^2-1|)\Big|_t^0$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \to -1} \ln(|x^2-1|) \Big|_t^0 = \frac{1}{2} \lim_{t \to -1} \ln(|t^2-1|) - \ln(|0^2-1|)$$

$$\frac{1}{2} \lim_{t \to -1} \ln(|-1^2-1|) - \ln(|-1|)$$

$$\frac{1}{2} \lim_{t \to -1} \ln(|0|) - \ln(|-1|) = \infty$$

otra manera

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-1} = \int_0^1 \frac{p(x)}{q(x)} \quad y \; p < q$$

$$y \quad x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A_1(x-1)+A_2(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A_1x - A_1 + A_2x + A_2}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A_1x + A_2x + A_2 - A_1}{(x+1)(x-1)} = \begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \to 2A_1 = 1 \to A_1 = \frac{1}{2} \\ A_2 - A_1 = 0 \to A_2 = A_1 \to A_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

quedando:

$$\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{x-1} dx$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx$$

No dara problema — si dara

$$\to$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln(|x+1|)\right) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx \leftarrow \text{Presenta Problema en 1}$$

$$\frac{\ln(|2|)}{2} - \frac{\ln(|1|)}{2} + \frac{1}{2} \lim_{t \to 1} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx$$

$$\frac{\ln(|1|)}{2} + \frac{1}{2} \left(\lim_{t \to -1} \frac{1}{x-1} \Big|_0^t \right) = \frac{\ln(|1|)}{2} + \left(\lim_{t \to -1} \frac{\ln(|-1|)}{2} - \frac{\ln(|t-1|)}{2} \right)$$

$$= \frac{\ln(|1|)}{2} + \left(\frac{\ln(|-1|)}{2} - \frac{\ln(|0|)}{2} \right) = \infty$$

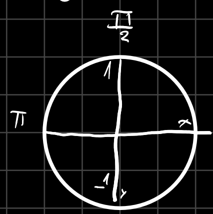
da inf.

Ejercicio 2 *(32 Pts.)* Determine si las siguientes sucesiones tienen límite:

(a) *(16 Pts.)* $a_n = \frac{\text{sen}(2n)}{n^2+1}$

(b) *(16 Pts.)* $b_n = \frac{n}{e^n}$

Veamos el gráfico de Sen



Para Sen

$$a_n = \lim_{n\to\infty} = \left(\frac{\text{Sen}(2n)}{n^2+1}\right)$$

Sabemos que $-1 \leq \text{Sen}(x) \leq 1$

Si tomamos el Abs será 1

$$a_n = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n^2+1}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0$$

Por teorema $a_n = 0 \Leftrightarrow |a_n| = 0$

Veamos a_n

$$a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Sen}(2n)}{n^2+1} = 0$$

Ya q Sen Alterna entre $-1 \leq \text{Sen}() \leq 1$, sin importar q valor asuma, por el denominador será 0.

(16 Pts.) $b_n = \frac{n}{e^n}$

$$b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} \overset{L'h}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^\infty} = 0$$

tiene Límite

3. Ejercicio 3. *(34 Pts.)* Utilice algún criterio de convergenci[a] ... convergen o divergen:

(a) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n^3+3n}$

Convergencia de la serie p

La convergencia de la serie p depende del valor de p:

- **Convergente** si $p > 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge.
- **Divergente** si $0 < p \leq 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

$$3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/3}+3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{8/3}+3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/3}}$$

Pues $n^{8/3}$ crece más rápido.

Por serie P, $8/3 > 1$, entonces converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\infty} = 0$$

(b) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$

$$a_n = \frac{2^n}{(n+1)!} \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}, \qquad r = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2^{n+1}}{(n+2)!} : \frac{2^n}{(n+1)!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2^{n+1}(n+1)!}{2^n(n+2)!}\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2^n \cdot 2(n+1)!}{2^n \cdot (n+2)(n+1)!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2^n}{2^n} \cdot \frac{1}{(n+2)} \cdot \frac{2(n+1)!}{(n+1)!}\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n+2} \cdot 2\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+2}$ Nuestr r es $\frac{2}{n+2}$, Notemos que empieza desde $n=1$, veamos su comportamiento:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+2} \left(\frac{2}{1+2} + \frac{2}{2+2} + \frac{2}{3+2} \dots \right)$ Nunca llegando al uno (pues empieza desde $n=1$)

Entonces $\frac{2}{n+2} < 1$, por lo tanto converge.

Análisis Matemático II (LCC) - Cálculo II (LMA) MAÑANA 5 de octubre de 2022

Apellido y Nombre: Achkun Berzero Tomás

Carrera (LCC/LMA): LCC

Comisión (MAÑANA/TARDE): MAÑANA

Primer Parcial

Análisis Matemático II (LC) - Cálculo II (LMA)

1. (22 pts.) Calcular las siguientes integrales e indicar el método utilizado.

(a) $\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,\mathrm{sen}(2x)\,dx$ (b) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

$$\int_a^b f \cdot g' = f \cdot g \Big|_a^b - \int f' \cdot g$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f \cdot g \; dx$$

$f(x) = \cos(2x) \rightarrow f'(x) = \cos(2x) \cdot 2$

c. aux.

$g'(x) = \mathrm{sen}(2x) \rightarrow \int \mathrm{sen}(2x)\,dx$ $\rightarrow u = 2x$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$g(x) = -\frac{\cos(2x)}{2}$ $\int \mathrm{sen}(u) \cdot \frac{1}{2}\,du$ $du = 2\,dx$

$\frac{1}{2} \int \mathrm{sen}(u)\,du = -\frac{\cos(2x)}{2}$ $\frac{du}{2} = dx$

$$\Rightarrow \cos(2x) \cdot \left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) 2 \cdot \left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)$$

$$\cos(0) \cdot \left(-\frac{\cos(0)}{2}\right) - \cos(2\tfrac{\pi}{4}) \cdot \left(-\frac{\cos(2\frac{\pi}{4})}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \cdot (-\cos(2x))\,dx$$

$$-\frac{1}{2} - 0 \cdot 0 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\cos(2x)\,dx = -\frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\cos(2x)\,dx$$

$-\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\cos(u) \cdot \frac{1}{2}\,dx$ $u = 2x$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)$ $du = 2\,dx$

$\frac{du}{2} = dx$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Sen}(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{Sen}(0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 = -1$$

(b) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ Hecho anteriormente.

Errores de mi parcial:

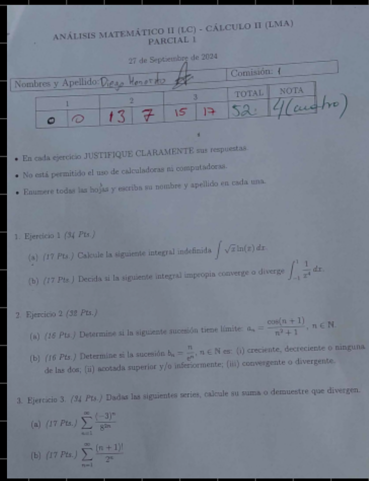
1. Por favor que atentado esas integrales, practicalas dios. 1) AyB

2. repasar lo de:
Creciente, decreciente o ninguna
Acotada superior / Inferiormente
Converge o diverte.

3. Ver en sucesiones lo de limites

4. La hoja 4 tiene un error de correcion, dios pq no veo las cosas. cos si esta entre -1 y 1. Pero el profe no se dio cuenta que lo puse arriba xD

5. los signos lol



ANÁLISIS MATEMÁTICO II (LC) - CÁLCULO II (LMA)
PARCIAL 1

27 de Septiembre de 2024

Nombres y Apellido: Diego [illegible] | Comisión: 1

1		2		3		TOTAL	NOTA
0	0	13	7	15	17	52	4(cuatro)

- En cada ejercicio JUSTIFIQUE CLARAMENTE sus respuestas.
- No está permitido el uso de calculadoras ni computadoras.
- Enumere todas las hojas y escriba su nombre y apellido en cada una.

1. Ejercicio 1 *(34 Pts.)*
   (a) *(17 Pts.)* Calcule la siguiente integral indefinida $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$.
   (b) *(17 Pts.)* Decida si la siguiente integral impropia converge o diverge $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx$.

2. Ejercicio 2 *(32 Pts.)*
   (a) *(16 Pts.)* Determine si la siguiente sucesión tiene límite: $a_n = \frac{\cos(n+1)}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
   (b) *(16 Pts.)* Determine si la sucesión $b_n = \frac{n}{e^n}$, $n \in \mathbb{N}$ es: (i) creciente, decreciente o ninguna de las dos; (ii) acotada superior y/o inferiormente; (iii) convergente o divergente.

3. Ejercicio 3. *(34 Pts.)* Dadas las siguientes series, calcule su suma o demuestre que divergen.
   (a) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{8^{2n}}$
   (b) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n}$

Teorico:

Integral indefinida:

Teorema (Método de Sustitución). Sean $f:(d,e)\to\mathbb{R}$ y $g:(a,b)\to(d,e)$ derivable en su dominio. Entonces, si F es una primitiva de f en (d,e), $H(x)=(F\circ g)(x)$ es primitiva de $h(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$ en (a,b). O sea,

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))+C \quad , \text{ con } C\in\mathbb{R} \text{ y } \forall x\in(a,b).$$

Teorema (Método de integración por partes). Si f' y g' son continuas, entonces

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \qquad (\star)$$

Dem: Por la regla de derivación del producto de funciones (Prop 4) tenemos que $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$, o equivalentemente

$$f(x)\cdot g'(x) = (f\cdot g)'(x) - f'(x)\,g(x).$$

Integrando a ambos lados obtenemos

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int (f\cdot g)'(x)\,dx - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx \overset{\text{pues } f\cdot g \text{ es primitiva de } (f\cdot g)'}{=} f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

Observación: la ecuación $(\star)$ se llama fórmula de integración por partes. Resulta más fácil recordarla utilizando la siguiente notación. 6

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$

entonces $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$,

luego $(\star)$ se reescribe como $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Integral definida:

Algunas propiedades de la integral definida

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones acotadas y continuas, salvo a lo sumo un número finito de ptos. Las siguientes son válidas:

1) Si $f\geq 0$ en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
2) $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, $\forall c\in\mathbb{R}$.
3) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
4) Si $d\in[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$
5) Si $f\leq g$ en $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont. y $F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x\in[a,b]$. Entonces,

(i) F es derivable y $F'(x) = f(x)$ $\forall x\in(a,b)$. O sea, F es primitiva de f.

(ii) Si G es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a) \doteq G(x)\Big|_a^b$

(La parte (ii) se conoce como Regla de Barrow)

Teorema (Mét. de Sust.): Sean $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ y $g:[a,b]\to[c,d]$ tq f y g' son continuas en sus respectivos dominios. Entonces, si $u=g(x)$ vale que

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

En particular, si F es primitiva de f tenemos que $\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$.

Teorema (Int. por Partes). Sean f y g derivables en (a,b) y tq f' y g' tienen a lo sumo un número finito de dis cont. en $[a,b]$ y son acotadas. Entonces

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{u}\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g(x)}_{v}\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{g(x)}_{v}\,\underbrace{f'(x)\,dx}_{du}$$

Area bajo la curva:

Teorema: Sea f y g funciones acotadas, con un nro. finito de dis cont. y tales que $f(x)\geq g(x)$ $\forall x\in[a,b]$. Entonces, el área entre los gráficos de f y g y las rectas $x=a$ y $x=b$ es

$$A = \int_a^b \big(\underbrace{f(x)-g(x)}_{\geq 0}\big)\,dx$$

Notar que $f(x)\geq g(x)$ nos dice que $f(x)-g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$.

Para saber en que area se define, debo igualar
g(x)=f(x) y operar.

Integracion de funciones racionales usando funciones simples.

Integración de funciones racionales usando fracciones simples. (14)

• Queremos integrar funciones que son cocientes de polinomios (func. racionales), o sea $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$.

Hay algunas que ya sabemos integrar, por ejemplo

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln(|x-2|) + C \,, \qquad \int \frac{1}{(x+3)^3}\,dx = \frac{(x+3)^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(x+3)^2} + C \,,$$

pero otras más complicadas no sabemos, por ejemplo $\int \frac{x^2+3x}{x^3-1}\,dx$.

• De ahora en más vamos a suponer que la func. racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ satisface:

① $gr(p) < gr(q)$

Ya que si no fuera cierto hacemos la división de $p(x)$ por $q(x)$ y por lo tanto

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{Q(x)}_{\text{polinomio fácil de integrar ✓}} + \frac{r(x)}{q(x)} \,,$$ donde $r(x)$ es el resto que satisface $gr(r) < gr(q)$

$\Rightarrow$ saber integrar $\frac{p(x)}{q(x)}$ se traduce en saber integrar $\frac{r(x)}{q(x)}$ con $gr(r) < gr(q)$.

② El coeficiente que acompaña a la potencia de mayor grado de q es 1.

Ya que si no fuera cierto hacemos

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{p(x)}{a_n \underbrace{\left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}\right)}_{\tilde{q}(x)}} = \int \frac{p(x)/a_n}{\tilde{q}(x)} = \int \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$$

con $\tilde{q}$ tq $\tilde{a}_n = 1$ (es decir es mónico).

Utilizaremos el siguiente teorema para factorizar al polinomio $q(x)$.

Caso 1: q es producto de polinomios de grado 1 y todos distintos. O sea,

$$q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_k) \,, \text{ con } r_j \neq r_i \text{ si } j \neq i .$$

En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ (una cte. por cada pol. de $gr = 1$) tales que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \dots + \frac{A_k}{x-r_k} \,,$$ luego cada término $\frac{A_i}{(x-r_i)}$ es muy fácil de integrar ✓

Caso 2: q es producto de pol. de grado 1 todos iguales. O sea $q(x) = (x-r)^k$

En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ (tantos como grado de q) tales que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k} \,,$$ luego cada término $\frac{A_i}{(x-r)^i}$ es fácil de integrar ✓

Caso 3: q es producto de pols. de grado 1 algunos de los cuales se repiten. O sea

$$q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_{i-1})(x-r_i)^{k_i}\dots(x-r_n)^{k_n} .$$

En este caso aplicamos los procedimientos de los casos 1 y 2.

Caso 4: q es producto de factores $(x-r_i)^{k_i}$ y/o de polinomios de grado 2 (17) sin raíces reales y no se repiten. O sea,

$$q(x) = (x-r_1)^{k_1}\dots(x-r_n)^{k_n} \cdot (x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\dots(x^2+\alpha_m x+\beta_m)$$

En este caso $\frac{p}{q}$ se escribe como una suma donde por cada "factor lineal" aparecen tantos términos como indican los casos 1 y 2, y para cada "factor cuadrático" aparecen términos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$, con B y C constantes a encontrar.

Ejemplo: Si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)}$, entonces debemos hallar constantes A_1, A_2, A_3, B y C tq

$$\frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x^2} + \underbrace{\frac{Bx+C}{x^2+4}}_{\text{Integral ¿?}}$$

Fácil de integrar ✓

Observación: para integrar términos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$, debemos hallar constantes K_1 y K_2 tq

$$\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} = K_1 \underbrace{\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}}_{\text{Fácil de integrar usando la sust. } u = x^2+\alpha x+\beta} + K_2 \underbrace{\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}}_{(\star)} .$$

Igualando los coef. de los numeradores se obtiene $K_1 = B/2$

$K_2 = C - K_1\alpha$

Integrales impropias:

Integrales Impropias de tipo I: funciones continuas y al menos uno de los límites de integración no es finito.

Definición: Sea $a \in \mathbb{R}$.

- Si f es continua en $[a, \infty)$, definimos $\int_a^\infty f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$, si este límite existe y es finito. En tal caso decimos que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge; si no decimos que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.
- Si f es continua en $(-\infty, a]$, definimos $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$; y decimos que converge o diverge según corresponda.
- Si f es continua en $\mathbb{R}$, definimos $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \doteq \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$, siempre que estos últimos dos integrales converjan. y en tal caso decimos que $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ converge. Si alguna no converge, decimos que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ diverge.

Integrales Impropias de tipo II: límites de integración finitos $(a, b \in \mathbb{R})$ pero funciones que tienen una asíntota vertical en un punto $c \in [a,b]$.

Definición:

- Sea f continua en $[a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Definimos $\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$ si este límite existe y es finito.
- Sea f continua en $(a,b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$. Definimos $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$ si el límite existe y es finito.
- Sea $c \in (a,b)$. Si f es continua en $[a,c) \cup (c,b]$ y los integrales $\int_a^c f$ y $\int_c^b f$ existen y son finitos definimos $\int_a^b f(x)\,dx \doteq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
- Cuando las integrales que hemos definido existe y son $< \infty$, decimos que convergen, si no decimos que divergen.

Escaneado con CamScanner

Criterio de Comparación para integrales impropias.

En algunos casos encontrar la primitiva de una función puede ser muy difícil y por lo tanto se complica decidir si una integral impropia converge o diverge utilizando directamente la definición. A continuación veremos un criterio que nos servirá para determinar si una integral impropia es convergente o divergente (sin hacer el cálculo directo, sino que lo haremos con una función más fácil de integrar).

Teorema (Crit. Comp. para Int. Imp. Tipo I). Sea f y g funct. continuas y $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,\infty)$. Entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ converg. $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ converg. o equivalentemente si $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge.

De manera análoga

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in (-\infty, a]$. Entonces $\int_{-\infty}^a g(x)dx$ conv. $\Rightarrow \int_{-\infty}^a f(x)dx$ conv. o equiv. si $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_{-\infty}^a g(x)dx$ div.

Teorema (Crit. Comp. para Int. Imp. Tipo II)

Sean f, g func. cont en $[a,b)$ y tq $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$

Entonces, si $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge, o equiv. $\int_a^b f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ diverge

- Vale un resultado análogo para $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Sucesiones

Definición: una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $l \in \mathbb{R}$ y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ si los términos a_n se acercan a l tanto como queramos al hacer n suficientemente grande. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Definición: dada una sucesión $\{a_n\}$, decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ si los términos se hacen arbitrariamente grande al hacer n grande.

crit

Teorema: Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \mp \lim_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (c\,a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

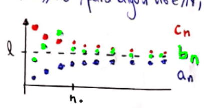
(iv) Si $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Definición: si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $l \in \mathbb{R}$ (o sea $l \neq \pm\infty$) decimos que $\{a_n\}$ converge a l. En los demás casos decimos que diverge.

Observación: NO es cierto que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, entonces cualquier función f tal que $f(n) = a_n$ cumple $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ (este límite puede NO existir).

Por ejemplo, si $a_n = \operatorname{sen}(\pi n)$ $(=0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ es claro que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ pero $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\pi x)$ no existe

Teorema (del "sandwich" para sucesiones). Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.



Ejemplos.

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Si $L = 0$

Definiciones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es

- creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$;
- estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$;
- decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n$;
- estrictamente decreciente si $a_{n+1} < a_n$ $\forall n$.

Si $\{a_n\}$ es creciente o decreciente, decimos que es monótona.

crit.

Definiciones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es

(i) acotada inferiormente, si $\exists M_i \in \mathbb{R}$ tq $M_i \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) acotada superiormente, si $\exists M_s \in \mathbb{R}$ tq $a_n \leq M_s$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) acotada si existe $M \in \mathbb{R}$ tq $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

crit.

Observación: en la definición anterior decimos que M_i es una cota inferior de $\{a_n\}$ y M_s es una cota superior de $\{a_n\}$. (31)

Análogamente se puede definir cota superior e inferior de cualquier subconjunto de números reales.

- Notar que las cotas sup. e inf. NO son únicas.

Por ejemplo si $a_n = (-1)^n \Rightarrow M_s = 10$, $M_s = 2$, $M_s = 1$ son todas cotas superiores.

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Si A es acotado sup., la menor cota superior se llama supremo de A y la denotamos $\sup(A)$.
- Si A es acot. inf., la mayor cota inferior se llama ínfimo de A y la denotamos $\inf(A)$.

Además, si $\sup(A) \in A$, decimos que es el máximo de A y si $\inf(A) \in A$, decimos que es el mínimo de A.

Teorema: Si $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow$ es acotada. (32)

Observación: La recíproca es falsa, o sea, $\{a_n\}$ acotada $\not\Rightarrow$ convergente.

Por ejemplo, $a_n = (-1)^n$.

Sin embargo, sí es cierto si la sucesión es creciente o decreciente.

cril

Teorema:

(i) Si $\{a_n\}$ es creciente y acotado superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 = \sup(\{a_n\})$

(ii) Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_2 = \inf(\{a_n\})$

Subsucesiones

Definición: una subsucesión de una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de la forma (33)

$\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\} = \{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ donde los $n_j \in \mathbb{N}$ y cumplen $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Por ejemplo, $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots\}$.

$a_1 \to a_{n_1}$, $n_1 = 1$; $a_3 \to a_{n_2}$, $n_2 = 3$; $a_5 \to a_{n_3}$, $n_3 = 5$. O sea $n_j = 2j - 1$, $j \in \mathbb{N}$.

- Notar que $\{a_{n_j}\}$ es una sucesión, o sea podemos escribir $\{a_{n_j}\} = \{b_j\}$.

Teorema: toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y además los límite son iguales.

Observación: el teorema anterior es muy útil para demostrar que una sucesión no tiene límite: basta encontrar dos subsucesiones distintas que converjan a distintos límites.

Teorema (Bolzano-Weierstrass): Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

Series

Definición: dada $\{a_n\}$ sucesión de números reales, llamaremos serie de términos a_n a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definición: dado $r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots$ se llama serie geométrica.

$\sum_{n=0}$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armónica)

Vale que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, pero veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Teorema:

(i) Si $|r| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente y además $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

(ii) Si $|r| \geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

Observación: Si $|r|<1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$.

Hay distintos criterios para cada sucesiones para saber si diverge o converge, aca todos:

Teorema (Criterio de la divergencia). Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Equivalentemente, si $\lim a_n \neq 0$ o $\lim a_n \nexists$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Observación: no vale el recíproco del teorema. Es decir,
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

(40)

Teorema (Criterio de comparación para series)

Si $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.
Equivalentemente, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge.

(41)

Teorema (Criterio de comparación en el límite)

Sean $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ series de términos positivos. Entonces

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \doteq c > 0$, ent. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge

(ii) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, ent. $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ conv. (o equiv. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ div $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge)

(iii) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, ent. $\sum b_n$ div. $\Rightarrow \sum a_n$ div. (o equiv. $\sum a_n$ conv $\Rightarrow \sum b_n$ conv.)

Teorema (Criterio de la integral para series)

Sea f una función continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Si $a_n = f(n)$, entonces $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{C_1}$ converge $\Longleftrightarrow \underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}_{C_2}$ converge.

Observaciones:

① No es cierto en general que $C_1 = C_2$.

② No es necesario iniciar la serie o la integral en $n=1$. Por ejemplo para la serie $\sum_{n=5} \frac{1}{(n-4)^2}$ consideramos la integral $\int_5^{\infty} \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$.

Teorema (Criterio para series alternantes). Si $a_n \geq a_{n+1} > 0 \;\forall n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge (y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ también converge)

Teorema (Criterio del cociente). Sean $a_n \neq 0 \;\forall n \geq n_0$ y $r \doteq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. (46)

(i) Si $r < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (y por lo tanto es convergente)

(ii) Si $r > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente (puede ser $r = \infty$).

(iii) Si $r = 1$, entonces no se puede asegurar nada.

→ Para $n!$

$n=1$ Criterio Por Serie P.

Convergencia de la serie p

La convergencia de la serie p depende del valor de p:

- **Convergente** si $p > 1$: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge.}$$
- **Divergente** si $0 < p \leq 1$: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{diverge.}$$

Teorema (Criterio de la raíz). Dada la serie $\sum_{n=1} a_n$, sea $r \doteq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. (48)

(i) Si $r < 1$, entonces la serie es absolutamente conv. (y por tanto es converg.)

(ii) Si $r > 1$, entonces la serie diverge.

(iii) Si $r = 1$, no se puede asegurar nada.

(45)

Definición: decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge y converge condicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge.