Errores de mi parcial:

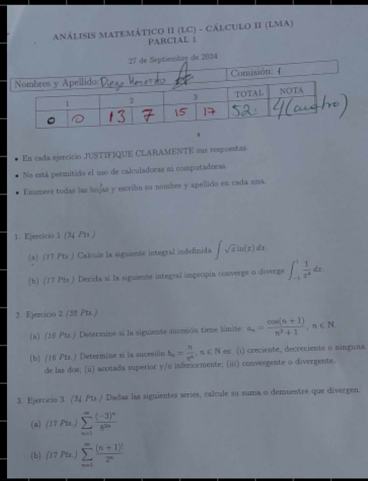
1. Por favor que atentado esas integrales, practicalas dios. 1) AyB

2. repasar lo de:
Creciente, decreciente o ninguna
Acotada superior / Inferiormente
Converge o diverte.

3. Ver en sucesiones lo de limites

4. La hoja 4 tiene un error de correcion, dios pq no veo las cosas. cos si esta entre -1 y 1. Pero el profe no se dio cuenta que lo puse arriba xD

5. los signos lol



ANÁLISIS MATEMÁTICO II (LC) - CÁLCULO II (LMA)
PARCIAL 1

27 de Septiembre de 2024

Nombres y Apellido: Diego [illegible]	Comisión: 1

1		2		3		TOTAL	NOTA
0	0	13	7	15	17	52	4(cuatro)

- En cada ejercicio JUSTIFIQUE CLARAMENTE sus respuestas.
- No está permitido el uso de calculadoras ni computadoras.
- Enumere todas las hojas y escriba su nombre y apellido en cada una.

1. Ejercicio 1 *(34 Pts.)*
   (a) *(17 Pts.)* Calcule la siguiente integral indefinida $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$.
   (b) *(17 Pts.)* Decida si la siguiente integral impropia converge o diverge $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx$.

2. Ejercicio 2 *(32 Pts.)*
   (a) *(16 Pts.)* Determine si la siguiente sucesión tiene límite: $a_n = \frac{\cos(n+1)}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
   (b) *(16 Pts.)* Determine si la sucesión $b_n = \frac{n}{e^n}$, $n \in \mathbb{N}$ es: (i) creciente, decreciente o ninguna de las dos; (ii) acotada superior y/o inferiormente; (iii) convergente o divergente.

3. Ejercicio 3. *(34 Pts.)* Dadas las siguientes series, calcule su suma o demuestre que divergen.
   (a) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{8^{2n}}$
   (b) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n}$

Teorico:

Integral indefinida:

Teorema (Método de Sustitución). Sean $f:(d,e)\to\mathbb{R}$ y $g:(a,b)\to(d,e)$ derivable en su dominio. Entonces, si F es una primitiva de f en (d,e), $H(x)=(F\circ g)(x)$ es primitiva de $h(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$ en (a,b). O sea,

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))+C \quad, \text{ con } C\in\mathbb{R} \text{ y } \forall x\in(a,b).$$

Teorema (Método de integración por partes). Si f' y g' son continuas, entonces

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \qquad (\star)$$

Dem: Por la regla de derivación del producto de funciones (Prop 4) tenemos que $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$, o equivalentemente

$$f(x)\cdot g'(x) = (f\cdot g)'(x) - f'(x)\,g(x).$$

Integrando a ambos lados obtenemos

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int (f\cdot g)'(x)\,dx - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx \overset{\text{pues } f\cdot g \text{ es primitiva de } (f\cdot g)'}{=} f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \quad \blacksquare$$

Observación: la ecuación $(\star)$ se llama fórmula de integración por partes. (6)
Resulta más fácil recordarla utilizando la siguiente notación.

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$

entonces $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$,

luego $(\star)$ se reescribe como $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Integral definida:

Algunas propiedades de la integral definida

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones acotadas y continuas, salvo a lo sumo un número finito de ptos. Las siguientes son válidas:

1) Si $f\geq 0$ en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
2) $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, $\forall c\in\mathbb{R}$.
3) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
4) Si $d\in[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$
5) Si $f\leq g$ en $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont. y $F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x\in[a,b]$. Entonces,

(i) F es derivable y $F'(x) = f(x)$ $\forall x\in(a,b)$. O sea, F es primitiva de f.

(ii) Si G es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a) \doteq G(x)\Big|_a^b$

(La parte (ii) se conoce como Regla de Barrow)

Teorema (Mét. de Sust.): Sean $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ y $g:[a,b]\to[c,d]$ tq f y g' son continuas en sus respectivos dominios. Entonces, si $u=g(x)$ vale que

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

En particular, si F es primitiva de f tenemos que $\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$.

Teorema (Int. por Partes). Sean f y g derivables en (a,b) y tq f' y g' tienen a lo sumo un número finito de dis cont. en $[a,b]$ y son acotadas. Entonces

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{u}\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g(x)}_{v}\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{g(x)}_{v}\,\underbrace{f'(x)\,dx}_{du}$$

Area bajo la curva:

Teorema: Sea f y g funciones acotadas, con un nro. finito de dis cont. y tales que $f(x)\geq g(x)$ $\forall x\in[a,b]$. Entonces, el área entre los gráficos de f y g y las rectas $x=a$ y $x=b$ es

$$A = \int_a^b \underbrace{(f(x)-g(x))}_{\geq 0}\,dx$$

Notar que $f(x)\geq g(x)$ nos dice que $f(x)-g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$.

Para saber en que area se define, debo igualar
g(x)=f(x) y operar.

Integracion de funciones racionales usando funciones simples.

Integración de funciones racionales usando fracciones simples. (14)

• Queremos integrar funciones que son cocientes de polinomios (func. racionales), o sea $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$.

Hay algunas que ya sabemos integrar, por ejemplo

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln(|x-2|) + C \ , \qquad \int \frac{1}{(x+3)^3}\,dx = \frac{(x+3)^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(x+3)^2} + C \ ,$$

pero otras más complicadas no sabemos, por ejemplo $\int \frac{x^2+3x}{x^3-1}\,dx$.

• De ahora en más vamos a suponer que la func. racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ satisface:

① $gr(p) < gr(q)$

Ya que si no fuera cierto hacemos la división de $p(x)$ por $q(x)$ y por lo tanto

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{Q(x)}_{\text{polinomio fácil de integrar ✓}} + \frac{r(x)}{q(x)} \ ,$$ donde $r(x)$ es el resto que satisface $gr(r) < gr(q)$

$\Rightarrow$ saber integrar $\frac{p(x)}{q(x)}$ se traduce en saber integrar $\frac{r(x)}{q(x)}$ con $gr(r) < gr(q)$.

② El coeficiente que acompaña a la potencia de mayor grado de q es 1.

Ya que si no fuera cierto hacemos

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{p(x)}{a_n \underbrace{\left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}\right)}_{\tilde{q}(x)}} = \int \frac{p(x)/a_n}{\tilde{q}(x)} = \int \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$$

con $\tilde{q}$ tq $\tilde{a}_n = 1$ (es decir es mónico).

Utilizaremos el siguiente teorema para factorizar al polinomio $q(x)$.

Caso 1: q es producto de polinomios de grado 1 y todos distintos. O sea,

$$q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_k) \ , \text{ con } r_j \neq r_i \text{ si } j \neq i.$$

En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ (una cte. por cada pol. de $gr = 1$) tales que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \dots + \frac{A_k}{x-r_k} \ ,$$ luego cada término $\frac{A_i}{(x-r_i)}$ es muy fácil de integrar ✓

Caso 2: q es producto de pol. de grado 1 todos iguales. O sea $q(x) = (x-r)^k$

En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ (tantos como grado de q) tales que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k} \ ,$$ luego cada término $\frac{A_i}{(x-r)^i}$ es fácil de integrar ✓

Caso 3: q es producto de pols. de grado 1 algunos de los cuales se repiten. O sea

$$q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_{i-1})(x-r_i)^{k_i}\dots(x-r_n)^{k_n}.$$

En este caso aplicamos los procedimientos de los casos 1 y 2.

Caso 4: q es producto de factores $(x-r_i)^{k_i}$ y/o de polinomios de grado 2 (17) sin raíces reales y no se repiten. O sea,

$$q(x) = (x-r_1)^{k_1}\dots(x-r_n)^{k_n}\cdot(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\dots(x^2+\alpha_m x+\beta_m)$$

En este caso $\frac{p}{q}$ se escribe como una suma donde por cada "factor lineal" aparecen tantos términos como indican los casos 1 y 2, y para cada "factor cuadrático" aparecen términos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$, con B y C constantes a encontrar.

Ejemplo: Si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)}$, entonces debemos hallar constantes A_1, A_2, A_3, B y C tq

$$\frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x^2} + \underbrace{\frac{Bx+C}{x^2+4}}_{\text{Integral ¿?}}$$

Fácil de integrar ✓

Observación: para integrar términos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$, debemos hallar constantes K_1 y K_2 tq

$$\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} = K_1 \underbrace{\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}}_{\text{Fácil de integrar usando la sust. } u = x^2+\alpha x+\beta} + K_2 \underbrace{\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}}_{(\star)} .$$

Igualando los coef. de los numeradores se obtiene $K_1 = B/2$, $K_2 = C - K_1\alpha$

Integrales impropias:

Integrales Impropias de tipo I: funciones continuas y al menos uno de los límites de integración no es finito.

Definición: Sea $a \in \mathbb{R}$.

- Si f es continua en $[a, \infty)$, definimos $\int_a^\infty f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$, si este límite existe y es finito. En tal caso decimos que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge; si no decimos que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.
- Si f es continua en $(-\infty, a]$, definimos $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$; y decimos que converge o diverge según corresponda.
- Si f es continua en $\mathbb{R}$, definimos $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \doteq \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$, siempre que estas últimas dos integrales converjan. y en tal caso decimos que $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ converge. Si alguna no converge, decimos que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ diverge.

Integrales Impropias de tipo II: límites de integración finitos $(a, b \in \mathbb{R})$ pero funciones que tienen una asíntota vertical en un punto $c \in [a,b]$.

Definición:

- Sea f continua en $[a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Definimos $\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$ si este límite existe y es finito.
- Sea f continua en $(a,b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$. Definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$ si el límite existe y es finito.
- Sea $c \in (a,b)$. Si f es continua en $[a,c) \cup (c,b]$ y las integrales $\int_a^c f$ y $\int_c^b f$ existen y son finitas definimos $\int_a^b f(x)\,dx \doteq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
- Cuando las integrales que hemos definido existe y son $< \infty$, decimos que convergen, si no decimos que divergen.

Escaneado con CamScanner

Criterio de Comparación para integrales impropias.

En algunos casos encontrar la primitiva de una función puede ser muy difícil y por lo tanto se complica decidir si una integral impropia converge o diverge utilizando directamente la definición. A continuación veremos un criterio que nos servirá para determinar si una integral impropia es convergente o divergente (sin hacer el cálculo directo, sino que lo haremos con una función más fácil de integrar).

Teorema (Crit. Comp. para Int. Imp. Tipo I). Sea f y g funct. continuas y $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a, \infty)$. Entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ converg. $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ converg. o equivalentemente si $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge.

De manera análoga

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in (-\infty, a]$. Entonces $\int_{-\infty}^a g(x)dx$ conv. $\Rightarrow \int_{-\infty}^a f(x)dx$ conv. o equiv. si $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_{-\infty}^a g(x)dx$ div.

Teorema (Crit. Comp. para Int. Imp. Tipo II)

Sean f, g func. cont en $[a,b)$ y tq $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$

Entonces, si $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge, o equiv. $\int_a^b f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ diverge

- Vale un resultado análogo para $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Sucesiones

Definición: una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $l \in \mathbb{R}$ y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ si los términos a_n se acercan a l tanto como queramos al hacer n suficientemente grande. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Definición: dada una sucesión $\{a_n\}$, decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ si los términos se hacen arbitrariamente grande al hacer n grande.

crit

Teorema: Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \mp \lim_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (c\, a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

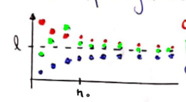
(iv) Si $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Definición: si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $l \in \mathbb{R}$ (o sea $l \neq \pm\infty$) decimos que $\{a_n\}$ converge a l. En los demás casos decimos que diverge.

Observación: NO es cierto que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, entonces cualquier función f tal que $f(n) = a_n$ cumple $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ (este límite puede NO existir).

Por ejemplo, si $a_n = \operatorname{sen}(\pi n)$ $(=0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ es claro que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ pero $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\pi x)$ no existe

Teorema (del "sandwich" para sucesiones). Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.



Ejemplos.

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Si

$L = 0$

Definiciones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es

- creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$;
- estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$;
- decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n$;
- estrictamente decreciente si $a_{n+1} < a_n$ $\forall n$.

Si $\{a_n\}$ es creciente ó decreciente, decimos que es monótona.

crit.

Definiciones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es

(i) acotada inferiormente, si $\exists\, M_i \in \mathbb{R}$ tq $M_i \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) acotada superiormente, si $\exists\, M_s \in \mathbb{R}$ tq $a_n \leq M_s$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) acotada si existe $M \in \mathbb{R}$ tq $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

crit.

Observación: en la definición anterior decimos que M_i es una cota inferior (31) de $\{a_n\}$ y M_s es una cota superior de $\{a_n\}$.

Análogamente se puede definir cota superior e inferior de cualquier subconjunto de números reales.

- Notar que las cotas sup. e inf. NO son únicas.
  Por ejemplo si $a_n = (-1)^n \Rightarrow M_s = 10$, $M_s = 2$, $M_s = 1$ son todas cotas superiores.

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Si A es acotado sup., la menor cota superior se llama supremo de A y la denotamos $\sup(A)$.
- Si A es acot. inf., la mayor cota inferior se llama ínfimo de A y la denotamos $\inf(A)$.

Además, si $\sup(A) \in A$, decimos que es el máximo de A y
si $\inf(A) \in A$, decimos que es el mínimo de A.

Teorema: Si $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow$ es acotada. (32)

Observación: La recíproca es falsa, o sea $\{a_n\}$ acotada $\not\Rightarrow$ convergente.
Por ejemplo, $a_n = (-1)^n$.
Sin embargo, sí es cierto si la sucesión es creciente o decreciente.

cril

Teorema:

(i) Si $\{a_n\}$ es creciente y acotado superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 = \sup(\{a_n\})$

(ii) Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_2 = \inf(\{a_n\})$

Subsucesiones

Definición: una subsucesión de una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de la forma (33)
$\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\} = \{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ donde los $n_j \in \mathbb{N}$ y cumplen $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Por ejemplo, $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots\}$.

$a_1 \to a_{n_1}$, $n_1 = 1$; $a_3 \to a_{n_2}$, $n_2 = 3$; $a_5 \to a_{n_3}$, $n_3 = 5$. O sea $n_j = 2j - 1$, $j \in \mathbb{N}$.

- Notar que $\{a_{n_j}\}$ es una sucesión, o sea podemos escribir $\{a_{n_j}\} = \{b_j\}$.

Teorema: toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y además los límite son iguales.

Observación: el teorema anterior es muy útil para demostrar que una sucesión No tiene límite: basta encontrar dos subsucesiones distintas que converjan a distintos límites.

Teorema (Bolzano-Weierstrass): Toda sucesión acotada tiene al menos una subsución convergente.

Series

Definición: dada $\{a_n\}$ sucesión de números reales, llamaremos serie de términos a_n a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definición: dado $r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots$ se llama serie geométrica.

$$\sum_{n=0}^{\infty}$$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armónica)

Vale que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, pero veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Teorema:

(i) Si $|r| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente y además $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

(ii) Si $|r| \geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

Observación: Si $|r|<1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$.

Hay distintos criterios para cada sucesiones para saber si diverge o converge, aca todos:

Teorema (Criterio de la divergencia). Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Equivalentemente, si $\lim a_n \neq 0$ o $\lim a_n \nexists$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Observación: no vale el recíproco del teorema. Es decir, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Teorema (Criterio de comparación para series) (40)

Si $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.

Equivalentemente, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge.

solo para divergencias

Teorema (Criterio de comparación en el límite) (41)

Sean $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ series de términos positivos. Entonces

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \doteq c > 0$, ent. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge

(ii) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, ent. $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ conv. (o equiv. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ div $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge)

(iii) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, ent. $\sum b_n$ div. $\Rightarrow \sum a_n$ div. (o equiv. $\sum a_n$ conv $\Rightarrow \sum b_n$ conv.)

útil para series con diferencia numérica mínima, ejemplo:

$$a_n = \frac{n}{n^4 - 2} \rightarrow b_n = \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

y comparar.

Teorema (Criterio de la integral para series)

Sea f una función continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Si $a_n = f(n)$, entonces $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{C_1}$ converge $\Longleftrightarrow \underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}_{C_2}$ converge.

Observaciones:

1. No es cierto en general que $C_1 = C_2$.
2. No es necesario iniciar la serie o la integral en $n=1$. Por ejemplo para la serie $\sum_{n=5} \frac{1}{(n-4)^2}$ consideramos la integral $\int_5^{\infty} \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$.

si $\frac{1}{n^p}$ $p>1$ Conv. $p<1$ Diver.

Teorema (Criterio para series alternantes). Si $a_n \geq a_{n+1} > 0$ $\forall n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge (y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ también converge)

Teorema (Criterio del cociente). Sean $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y $r \doteq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (46)

→ Para $n!$

(i) Si $r < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (y por lo tanto es convergente)

(ii) Si $r > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente (puede ser $r = \infty$).

(iii) Si $r = 1$, entonces no se puede asegurar nada.

Convergencia de la serie p

La convergencia de la serie p depende del valor de p:

- Convergente si $p > 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge.
- Divergente si $0 < p \leq 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

$n=1$ Criterio por serie P.

$\sum_{k=1}^{\infty}$ solo si no oso serie geométrica

Teorema (Criterio de la raíz). Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $r \doteq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. (48)

(i) Si $r < 1$, entonces la serie es absolutamente conv. (y por tanto es converg.)

(ii) Si $r > 1$, entonces la serie diverge.

(iii) Si $r = 1$, no se puede asegurar nada.

Definición: decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge y converge condicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge. (45)