(1) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es convergente o no. Si la sucesión converge, calcular su límite.

(a) $a_n = \dfrac{5-2n}{3n-7}$ (c) $a_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ (e) $a_n = \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n$

(b) $a_n = \dfrac{n}{\ln(n+1)}$ (d) $a_n = n\,\text{sen}(6/n)$ (f) $a_n = \dfrac{\text{sen}^2(n)}{4^n}$

a) $a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{5-2n}{3n-7} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n(-2+\frac{5}{n})}{n(3-\frac{7}{n})} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{-2+0}{3+0} = -\dfrac{2}{3}$ Converge

b) $a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{n+1}} = \infty$ Diverge

$(n \geq -1)$

c) $a_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ el $\lim_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ No $\exists$, Diverge

(d) $a_n = n\,\text{sen}(6/n)$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}\left(\dfrac{6}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \infty\,\text{sen}(0) = \infty$ Diverge ¿q dice 6?

(e) $a_n = \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n$ se q tiene de estos limites comun o esos q tienen la sol det.

$\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ $\lim_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n = e^{-5}$ Diverge

(f) $a_n = \dfrac{\text{sen}^2(n)}{4^n}$ Por teo sandwich.

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\text{sen}^2(n)}{4^n} = 0 \leq \dfrac{\text{sen}^2(n)}{4^n} \leq \dfrac{1}{4^n}$

$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{4^n}$ diverge en 0.

(2) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es: (i) acotada superior y/o inferiormente; (ii) positiva o negativa (a partir de cierto n_0); (iii) creciente, decreciente o alternante; (iv) convergente, divergente, divergente a ∞ o $-\infty$.

(a) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ (c) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{e^n}$ (e) $a_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$

(b) $a_n = \text{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (d) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

(IV)

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2(\frac{2}{n})}{n^2+1} = \dfrac{0}{1} = 0$ Converge.

(i) $\dfrac{2n}{n^2+1} < \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{2}{n}$ Acotada SUP.

(Ambas)

$\dfrac{2n}{n^2+1} < \dfrac{2n}{n^2+n^2} = \dfrac{1}{n}$ Acotad inf.

(ii) Positivo para $n > 1$, (mirar $2n$)

(iii) $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n^2+2n+2} > \frac{2n}{n^2+1}$

(Veo con 1) $\frac{4}{1+2+2} > \frac{2}{2}$

$\frac{4}{5} > 1 \rightarrow \frac{2(n+1)}{n^2+2n+2} < \frac{2n}{n^2+1}$ Decrece para $n>0$

(b) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

(i) Sen es una F tq está entre -1 y 1

Por lo tanto lo esta inf y sup.

(ii) Para $n>0$ es Positivo

(iii) como $\frac{1}{n}$ decrece, entonces $\operatorname{Sen}(\frac{1}{n})$ decrece.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Sen}(0) = 0$, Converge

(c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{e^n}$

(i)

(ii) Positiva $\leftrightarrow$ n es par. $\leftrightarrow n \bmod 2 \neq 0$ Decreciente y decreciente (monotona)

(iii) $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} n+1}{e^{n+1}} < \frac{(-1)^n n}{e^n}$

$n=0$

$\frac{-1+1}{e} = 0$

$\frac{(-1)^0 \cdot 0}{e^0} = 0$

(IV) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{e^n} = 0$ Converge

(d) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

1) Acotado

$$0 \le \frac{2^n}{n!} \le 2 \quad \text{Acotado}$$

2) es Positivo

3) $$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{2^n}{n} \quad \text{Decreciente}$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \quad \text{Converge.}$$

(e) $a_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$

i) $\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \ge \ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$

ii) ln Debe ser Positivo para $n \ge 1$

iii) $a_{n+1} = \ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right) \to \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \ge \ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$

iv) $$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}\right) = \ln\left(\frac{1}{1}\right) = \ln(1)$$

Converge

(3) Dadas las siguientes series, calcular su suma o demostrar que divergen.

(a) $4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \dots$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(e) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$

$r < 1 \;\; y \;\; \frac{r}{1-r}$

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{c}{4} \cdot \left(\overset{r}{\frac{2}{5}}\right)^n$$ Siendo una serie geometrica $\left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}\right)$ $|r| \ge 1$

Si $r = \left(\frac{2}{5}\right)^n \to \dfrac{\frac{2}{5}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)}$ y $r < 1$, Converge y es $= \dfrac{20}{3}$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{3(-4)}_{\text{es C, lo Pude haber sacado}}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} -12\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

Serie Geometrica

$\to \dfrac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$ y $r < 1$ converge $= \dfrac{12}{5}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{5}{1}}_{\text{esc.}} \cdot \frac{1}{10^{3n}}\right)$$

$$5 \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10^3}\right)^n = \text{Serie geometrica}$$

Como $\frac{1}{1-(10^3)}$ = Algo no tengo calcular. y $|r| < 1$ converge.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{(2n-1)} + \frac{b}{(2n+1)}$?

ignorar momentaneamente

$$\frac{a(2n+1)+b(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2na+a+2nb-b}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{n(2a+2b)+(a-b)}{(2n+1)(2n-1)}.$$

$2A+2b=0 \to A=-b \to A=\frac{1}{2}$

$A-b=1 \to -2b=1 \to b=-\frac{1}{2}$

$$\frac{\frac{1}{2}}{(2n-1)} + \frac{-\frac{1}{2}}{(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}}{(2n-1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(2n+1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}\right)$$

Veamos algunos términos de la serie:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdots\right)$$

el $\frac{1}{2n-1}$ siempre se cancelará con el siguiente n.

$$\to \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{1(2n+1)-1}{2n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

(e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}} = \sum_{K=2}^{\infty} \left(\frac{2^3}{e^{-3}}\right)^K = \sum_{K=2}^{\infty} \left(\frac{8}{e^{-3}}\right)^K = \sum_{K=2}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^K \cdot 8 \cdot e^3$

$\displaystyle = 8e^3 \sum_{K=2}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^K$ Serie geometrica :D $\displaystyle\frac{r}{1-r}$.

$\displaystyle \left|\frac{1}{e}\right| < 1 \quad = 8e^3 \cdot \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = 8e^3 \cdot \frac{\frac{1}{e}}{-1} = -\frac{8e^3}{e}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$

$\displaystyle \sqrt{\ } = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2 \cdot 1} \qquad x_1 = \frac{-7+1}{2} = -3$

$\displaystyle x_2 = \frac{-8}{2} = -4$

$$\frac{A_1}{(n+3)} + \frac{A_2}{(n-4)} = \frac{A_1(n+4) + A_2(n+3)}{(n+3)(n+4)} = \frac{A_1 n + 4A_1 + A_2 n + 3A_2}{(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{n(A_2+A_1) + (4A_1+3A_2)}{(n+3)(n+4)}$$

$A_2 + A_1 = 0 \Rightarrow A_2 = -A_1 \Rightarrow A_2 = -1$

$4A_1 + 3A_2 = 1 \Rightarrow 4A_1 - 3A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = 1$

quedando:

$$\frac{1}{(n+3)} - \frac{1}{(n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)} - \frac{1}{(n-4)}$$

Veamos como queda la serie con Algunos n.

$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \dots$ y Aca llego yo y me Ayuda chatgpt xd

esto es una serie telescopica

Los términos se cancelan, y nos queda:

$$\frac{1}{4} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+4} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Conclusión

La suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$$

converge y es igual a:

$$\frac{1}{4}.$$

← No vi q este en el Apunte

(4) Usar los tests de convergencia para determinar si las siguientes series convergen o divergen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2e^n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Teorema (Criterio de la divergencia). Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Equivalentemente, si $\lim a_n \neq 0$ o $\lim a_n \nexists$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Definición: dado $r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots$ se llama serie geométrica

Teorema:
(i) Si $|r|<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente y además $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$
(ii) Si $|r| \geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^4\left(1-\frac{2}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ Converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{3/2}+n+1} = 0$ Converge

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n\cdot(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)n\left(1-\frac{2}{n}\right)n\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdot(n-4)!}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdot(n-4)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1)\cdot(1)\cdot(1)\cdot(n-4)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} 0$ Converge

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^2e^n} = \infty$? Diverge.