Análisis Matemático II/ Cálculo II (2024)

Práctico 3

Ejercicio 6:

Determinar el orden de los polinomios de Taylor que deberían usarse para aproximar los siguientes valores con un error menor que $5 \cdot 10^{-5}$.

a) $e^{0.1}$

b) $\ln(1.4)$

Solución del ejercicio 6 b):[1]

El objetivo es determinar el orden n del polinomio de Taylor necesario para aproximar $\ln(1.4)$ con un error menor que $5 \cdot 10^{-5}$.

En primer lugar debemos determinar cuál es el desarrollo de Taylor adecuado para calcular $\ln(1.4)$. Dado que $1.4 = 1 + 0.4$, podemos usar el desarrollo de la función $f(x) = \ln(1+x)$, centrado en $a = 0$, es decir:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \ \frac{x^k}{k}} \qquad (-1 < x \leq 1)$$

Entonces, la función $f(x) = \ln(1+x)$ se puede aproximar mediante su polinomio de Taylor $T_{n,a}(x)$, centrado en $a = 0$, de la siguiente forma:

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \ \frac{x^k}{k}$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de $\ln(1+x)$, alrededor de $x = 0$, es:

$$T_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \ \frac{x^n}{n}$$

Error (Resto de Lagrange): Parte 1

Recordemos que el error cometido al truncar el polinomio de Taylor en el término n-ésimo para calcular la función $f(x)$ puede escribirse, utilizando la fórmula de Lagrange, de la siguiente forma:

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

donde c es un valor entre a y x. En este caso, $a = 0$ y estamos aproximando $\ln(1.4)$ utilizando el desarrollo en serie de $\ln(1+x)$, centrado en $a = 0$. Entonces, dado que $x = 0.4$, tenemos que $c \in (0, 0.4)$.

[1] reportar errores a: tristan.osan@unc.edu.ar

Por lo tanto, en este caso, el resto de Lagrange se puede escribir como:

$$\boxed{R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}$$

• **Observación:** Necesitamos conocer la forma de $f^{(n+1)}(x)$ para $f(x) = \ln(1+x)$

Deducción de la derivada de orden $n+1$ de $\ln(1+x)$:

Dado que $f(x) = \ln(1+x)$, comenzamos calculando las primeras derivadas de la función para observar un patrón.

▷ Primera derivada:

La primera derivada de $\ln(1+x)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

▷ Segunda derivada:

La segunda derivada se obtiene derivando nuevamente:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

▷ Tercera derivada:

La tercera derivada es:

$$f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$$

▷ Cuarta derivada:

La cuarta derivada es:

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}\left(2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3}\right) = -2 \cdot 3 \frac{1}{(1+x)^4}$$

▷ Patrón general:

A partir de estos cálculos, observamos un patrón. La derivada de orden n de $\ln(1+x)$ sigue la forma:

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}} \qquad (\blacktriangle)$$

Deducción de la derivada de orden $n+1$ de $\ln(1+x)$ utilizando inducción completa

Vamos a demostrar que la forma general de la derivada de orden n de $\ln(1+x)$ tiene la forma de la ecuación ($\blacktriangle$) usando el *principio de inducción completa*.

Paso base

Para $n = 1$, tenemos que la derivada de $\ln(1 + x)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$$

Lo cual coincide con la expresión general (▲) para $n = 1$, ya que:

$$f'(x) = (-1)^2 \cdot 0! \cdot \frac{1}{(1 + x)^1} = \frac{1}{1 + x}$$

Por lo tanto, la fórmula (▲) se cumple para $n = 1$ (Recordar que $0! = 1$).

Paso inductivo

Veamos que si suponemos que la hipótesis inductiva se satisface para el caso n esto implica que también se satisface para el caso $n + 1$. Entonces, supongamos que la fórmula (▲) es válida para $f^{(n)}(x)$. Por lo tanto, queremos demostrar que la fórmula también se cumple para $f^{(n+1)}(x)$.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(n)}(x)\right)$$

Utilizando la hipótesis inductiva para $f^{(n)}(x)$, tenemos entonces que:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left((-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1 + x)^n}\right)$$

Calculando la derivada, tenemos:

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(-n)\frac{1}{(1 + x)^{n+1}}$$

Simplificando, obtenemos finalmente:

$$\boxed{f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(1 + x)^{n+1}}} \qquad (\blacktriangle\blacktriangle)$$

Esto demuestra que la fórmula (▲) es válida para $n + 1$, completando así el paso inductivo (Nota: si reemplazamos en la ecuación (▲) $n \to n + 1$, obtenemos precisamente la ecuación (▲▲)).

Error (Resto de Lagrange): Parte 2

Habíamos dicho que el error de truncar el polinomio de Taylor en el término n-ésimo está dado por el término de Lagrange:

$$\boxed{R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}$$

donde $c \in (0, 0.4)$.
Hemos demostrado que la derivada de orden $n + 1$ de $\ln(1 + x)$ es:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(1 + x)^{n+1}},$$

entonces:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $0.4 = 2/5$, el error se puede expresar como:

$$|R_{n,0}(2/5)| = \left|\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\right|$$

Dado que $0 \leq c \leq 2/5$, entonces $(1+c)^{n+1} \geq (1+0)^{n+1} = 1 \ \forall c \in (0, 2/5)$, por lo tanto:

$$\frac{1}{(1+c)^{n+1}} \leq 1 \qquad \forall c \in (0, 2/5).$$

Entonces, podemos usar el resultado anterior para acotar superiormente $|R_{n,0}(2/5)|$:

$$|R_{n,0}(2/5)| = \left|\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\right| \leq \frac{(2/5)^{n+1}}{n+1},$$

es decir:

$$|R_{n,0}(2/5)| \leq \frac{(2/5)^{n+1}}{n+1}$$

Determinación del orden n

Buscamos que el error sea menor que $5 \cdot 10^{-5}$, entonces buscamos que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$\boxed{|R_{n,0}(2/5)| \leq \frac{(2/5)^{n+1}}{n+1} < 5 \cdot 10^{-5}} \qquad (\star)$$

Ahora, buscamos el menor valor de n para el cual se cumpla la desigualdad anterior. Evaluando para distintos valores de n, obtenemos:

- Para $n = 1$:
$$\frac{(2/5)^2}{2} = 0.08$$
- Para $n = 2$:
$$\frac{(2/5)^3}{3} = 0.02$$
- Para $n = 3$:
$$\frac{(2/5)^4}{4} = 0.006$$
- Para $n = 4$:
$$\frac{(2/5)^5}{5} = 0.002 \cdot 10^{-5}$$
- Para $n = 5$:
$$\frac{(2/5)^6}{6} = 6.8 \cdot 10^{-4}$$

- Para $n = 6$:
$$\frac{(2/5)^7}{7} = 2.3 \cdot 10^{-4}$$
- Para $n = 7$:
$$\frac{(2/5)^8}{8} = 8.2 \cdot 10^{-5}$$
- Para $n = 8$:
$$\frac{(2/5)^8}{8} = 2.9 \cdot 10^{-5}$$

Por lo tanto, el valor de n que satisface la condición impuesta por la desigualdad ($\star$) es $\boxed{n = 8}$.

Conclusión: El polinomio de Taylor de orden $\boxed{n = 8}$ es suficiente para aproximar $\ln(1.4)$ con un error menor que $5 \cdot 10^{-5}$.