Ejercicio 2

a) (*1.5 Pts.*) Determinar el plano horizontal que es tangente a la superficie dada por $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$ y cuál es el punto de tangencia $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$.

(Ayuda: un plano es horizontal sólo si su ecuación es de la forma $z = k$, para alguna constante k. Pensar entonces qué deben satisfacer $z_x(x_0, y_0)$ y $z_y(x_0, y_0)$)

A partir de lo visto en el teórico, tenemos que la ecuación del plano tangente a una superficie dada por la función f(x,y) en un punto (a,b,f(a,b)) es:

$$\boxed{z(x,y) = (x-a)\, f_x(a,b) + (y-b)\, f_y(a,b) + f(a,b)}$$

donde $\Pi = \{(x, y, z(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ es el conjunto q' describe el plano.

Ahora, como este plano además debe ser HORIZONTAL, sabemos que z (su altura) debe ser constante, i.e. se debe cumplir que z(x,y) = k para alguna cte. k. Entonces, al observar la fórmula de z(x,y), vemos que la única manera que se cumpla lo anterior es en los puntos (a,b) donde $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ se anulen y así obtener:

$$z(x,y) = (x-a)\cdot 0 + (y-b)\cdot 0 + f(a,b) = f(a,b) \longrightarrow \text{constante!!}$$

Finalmente calculamos las derivadas parciales de la función f y buscamos los puntos (a,b) de su dominio donde se anulen ambas derivadas. Por lo visto hasta aquí, sabremos que en esos puntos el plano tangente será horizontal.

Sea $f(x,y) = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1 \Rightarrow \begin{cases} f_x(a,b) = 2a - 4b + 12 \overset{?}{=} 0 \\ f_y(a,b) = -4a - 4b - 12 \overset{?}{=} 0 \end{cases} \longrightarrow$ Tenemos que resolver este sistema de ecuac!!

La solución al sistema es un único pto de la forma: $(a,b) = (-4,1)$ y así:

$z(x,y) = f(-4,1) = -31$ es la ecuac. del plano buscado en el pto de tangencia $(-4, 1, -31)$ ∎