Practico 4. Cálculo vectorial.

Definición: $\mathbb{R}^n = \{A \doteq (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\ \forall i\}$. En $\mathbb{R}^n$ se definen dos operaciones:

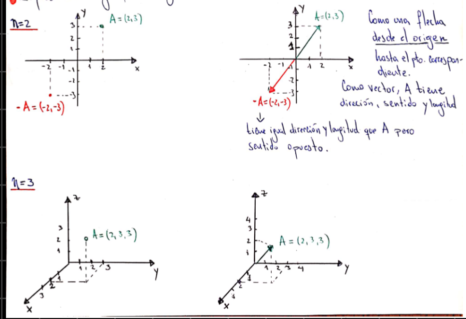
- suma: $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \doteq (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$
- multiplicación por escalores: para $r \in \mathbb{R}$, $r.(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$

Con estas op., $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sus elementos se llaman vectores. (o puntos)

Observación: (1) denotamos por $-A = (-1).A$ y definimos la resta $B - A = B + (-A)$

(2) A veces denotamos al vector nulo simplemente $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

- Representación gráfica o geométrica de vectores en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$.



Producto escalar, rectas y planos

(1) Calcular los vectores $A + B$, $A - B$, $3A$, $-2B$, y representarlos gráficamente.

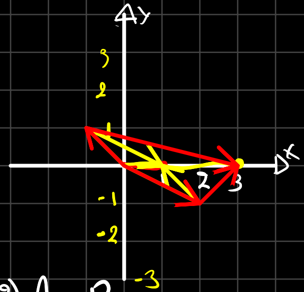
(a) $A = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$ (b) $A = (0, 3, -1)$, $B = (2, -3, 7)$

1)

a)

1) A+B

$A = (2, -1)$, $B = (-1, 1) = A+B = (1, 0)$

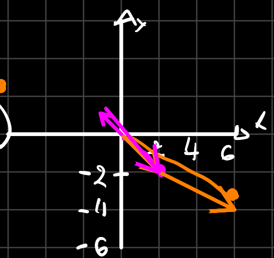


2) A−B

$A = (2, -1)$, $B = (-1, 1) \Rightarrow A - B = (2-(-1), -1-1) = (3, 0)$

3) 3A

$A = 3(2, -1) \Rightarrow 3A = (6, -3)$



4) −2B

$B = (-1, 1)$, $-2B = -2(-1, 1) \Rightarrow -2B = (+2, -2)$

$A + B$, $A - B$, $3A$, $-2B$, y representarlos gráficamente.

$(-1, 1)$ (b) $A = (0, 3, -1)$, $B = (2, -3, 7)$

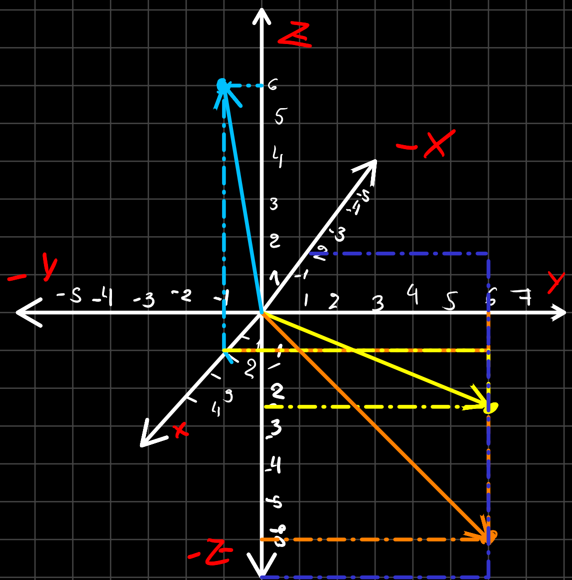
1) $A+B = (2, 0, 6)$

2) $A-B = (-2, 6, -8)$

3) $3A = (0, 6, -2)$

4) $-2B = (-4, +6, -14)$

Para la proxima hago un gráfico para c/u



(a) Calcular el producto escalar o interno $A \cdot B$:

(i) $A = (-1, 3)$, $B = (0, 4)$ (ii) $A = (-1, -1, 3)$, $B = (-1, 3, -4)$.

i) $\langle A, B \rangle = (-1 \cdot 0, 3 \cdot 4) = (0, 12)$

ii) $\langle A, B \rangle = (-1 \cdot (-1), -1 \cdot 3, 3 \cdot (-4)) = (1, -3, -12)$

Definición (producto escalar o producto interno en $\mathbb{R}^n$): dados $A, B \in \mathbb{R}^n$ con $A = (a_1, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, \dots, b_n)$ el producto escalar entre A y B es el número

$$\langle A, B \rangle \doteq a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j.$$

Ejemplo: Calcular el producto escalar entre $A = (1, -2, 3)$ y $B = (5, 1/2, 0)$.

Por definición, $\langle A, B \rangle = 1.5 + (-2).\frac{1}{2} + 3.0 = 5 - 1 + 0 = 4$.

Observación: a veces el producto escalar (interno) entre A y B se denota por $A \cdot B$

(b) ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores son perpendiculares ($A \cdot B = 0$) entre si?

(i) $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 3, 1)$ (ii) $A = (-5, 2, 7)$, $B = (3, -1, 2)$.

Cuando dos **vectores** son **perpendiculares**, significa que forman un ángulo de 90 grados entre ellos. Matemáticamente, dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares si el producto punto (o **producto escalar**) entre ellos es igual a 0:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

El **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$ en el espacio tridimensional (o en el plano bidimensional si omites el tercer componente) es:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$\langle A \cdot B \rangle = (1 \cdot 2, -1 \cdot 3, 1 \cdot 1) = (2, -3, 1) \Rightarrow 2 + (-3) + 1 = 0$

Es Perpendicular.

$\langle A \cdot B \rangle = (-5 \cdot 3, 2 \cdot (-1), 7 \cdot 2) = (-15, -2, 14) = 3$ No es vector Perpendicular.

(c) Obtener la longitud o norma ($\sqrt{X \cdot X}$) de cada uno de los siguientes vectores:

$A = (2, -1)$, $B = (2, 3, 1)$, $C = (-t/2, 2, 7)$.

Definición: definimos la norma de un vector $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$\|A\| \doteq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\langle A, A \rangle}$.

Observación: notar que si $n = 1$, o sea en $\mathbb{R}$, $\|A\| = |A|$.

$\|A\| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{\langle A, A \rangle}$

$\|A\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$\|B\| = \sqrt{B \cdot B \cdot B} = \sqrt{\langle B, BB \rangle}$

$\|B\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

$\|C\| = \sqrt{C \cdot C \cdot C} = \sqrt{\langle C, C, C \rangle}$

$\|C\| = \sqrt{\frac{-t^2}{2^2} + 2^2 + 7^2} = \sqrt{\frac{t^2}{4} + 4 + 49} = \sqrt{\frac{t^2}{2} + \frac{4(54}{4})}$

(3) Dar la ecuación vectorial de las siguientes rectas:

(a) L pasa por $(-3, 2)$ y es paralela a $(1, -2)$.

(b) L está definida por $x = 3t + 1$; $y = 5t - 2$; $z = 2t + 1$.

(c) L pasa por $(2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

Definición: dados $P_0 \in \mathbb{R}^n$ y $V \in \mathbb{R}^n$ con $V \neq 0$, la recta ℓ que pasa por el punto P_0 y tiene dirección V es el conjunto de todos los puntos $X = (x, y)$ (o $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$) tales que $X = P_0 + tV$, con $t \in \mathbb{R}$ → Ecuación vectorial de la recta

O sea, $\ell = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = P_0 + tV, \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$ (si $n = 2$, $X = (x, y)$)

$\ell = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = P_0 + tV, \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$ (si $n = 3$ $X = (x, y, z)$)

a) $P_0 = (-3, 2)$ $V = (1, -2)$

$X = P_0 + tV_d$ $V_d \to$ Dirección Parte con t.

$X = (-3, 2) + t(1, -2)$

$(-3, 2) + (t, -2t) = (-3 + t, 2 - 2t)$

b) $x = 3t + 1$, $y = 5t - 2$, $z = 2t + 1$

$X = (1, -2, 1) + t(3, 5, 2) = (1, -2, 1) + (3t, 5t, 2t)$

$= (3t + 1, 5t - 2, 2t + 1)$

c) (c) L pasa por $(2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

② • Las rectas $X = (2, \pi, 0) + t(1, 0, 0)$, con $t \in \mathbb{R}$

y $X = (3, \pi, 0) + t(0, 2, 100)$, con $t \in \mathbb{R}$

son perpendiculares ya que sus vectores dirección son ortogonales

En efecto, $\langle (1, 0, 0), (0, 2, 100) \rangle = 1.0 + 0.2 + 0.100$

$= 0 + 0 + 0 = 0$ ✓

$P_0 = (2, 0)$ $V_d = (1, 3)$ Debe cumplir

$P_0 \cdot V_d = a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

$\to X = (2, 0) + t(-3, 1) = (2, 0) + (-3t, 1)$

$= (2 - 3t, 1)$

Debo buscar que V_d sea ortogonal.

o sea, $V_d(1) + V_d(3) = 0$

$V_{d_1} + V_d(3)^2 = 0 \Rightarrow V_{d_1} = -V_d(3)$

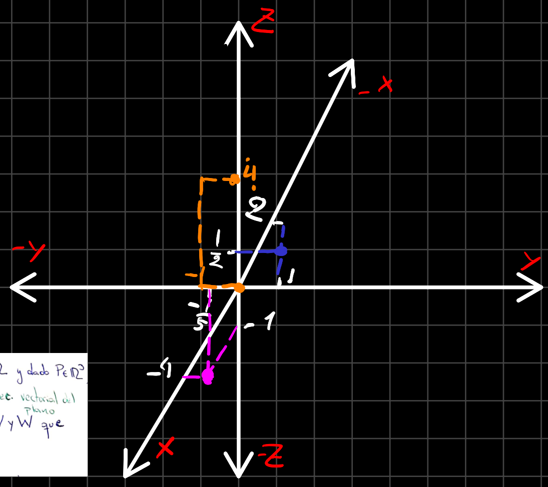
su ortogonal será $(-3, 1)$

4 (a) Dar la ecuación vectorial del plano S generado por $(-2,1,\frac{1}{2})$ y $(4,-\frac{1}{5},-1)$ y contiene al punto $(0,-1,4)$

- ¿Pasa este plano por el origen?
- ¿Contiene a los puntos $(1,-1,\frac{1}{2})$, $(0,-\frac{1}{10},\frac{7}{2})$ y $(0,\frac{3}{2},1)$?

$V=(-2,1,\frac{1}{2})$ $\quad w=(4,-\frac{1}{5},-1)$ $\quad x \; y \; z$

$P=$ Contiene $(0,-1,4)$ $\quad x \; y \; z$



$X = P+tv+rw$

$(0,-1,4)+t(-2,1,\frac{1}{2})+s(4,-\frac{1}{5},-1)$

$=(0,-1,4)+(-2t,t,\frac{t}{2})+(4s,-\frac{s}{5},-s)$

Definición: Dados $V,W\in\mathbb{R}^3$ con $V\neq 0\neq W$ y $V\neq sW$ $\forall s\in\mathbb{R}$ y dado $P\in\mathbb{R}^3$ decimos que $X = P+tV+rW$, con $t,r\in\mathbb{R}$ → ec. vectorial del plano es la ecuación vectorial del plano generado por V y W que pasa por el punto P.

$(-2t+4s,\,-1+t-\frac{s}{5},\,4+\frac{t}{2}-s)$ Ecuación del Plano Vectorial

No Pasa

No ✗

- ¿Contiene a los puntos $(1,-1,\frac{1}{2})$, $(0,-\frac{1}{10},\frac{7}{2})$ y $(0,\frac{3}{2},1)$?

- ¿Pasa este plano por el origen? $0,0,0$

$$\begin{cases} 1)\; -2t+4s=1 \\ 2)\; -1+t-\frac{s}{5}=-1 \\ 3)\; 4+\frac{t}{2}-s=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Y también tengamos en cuenta q si No pasa por 1 de los 3 puntos No pasa por el punto.

1) $-2t=1-4s$

$t=\frac{1-4s}{-2}=\frac{1}{2}-2s$

2) $-1+\frac{1}{2}-2s-\frac{s}{5}=-1$

$-\frac{1}{2}-\frac{10s-s}{5}=-1$

$-\frac{9s}{5}=\frac{1}{2}$

$s=\frac{1}{2}:(-\frac{9}{5})$

$s=-\frac{5}{18}$

$-1+\frac{1}{2}=-\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

$s=-\frac{5}{18}$

$t=\frac{1}{2}-2(\frac{5}{18})=\frac{1}{2}-\frac{10}{18}=-\frac{1}{18}$

3) $4+(-\frac{1}{18}):5-\frac{5}{18}=\frac{1}{2}$

$4-\frac{1}{90}-\frac{5}{18}\neq\frac{1}{2}$ No Pasa

$$\begin{cases} 1)\; -2t+4s=0 \\ 2)\; -1+t-\frac{s}{5}=0 \\ 3)\; 4+\frac{t}{2}-s=0 \end{cases}$$

1) $-2t=-4s = t=+\frac{4s}{2} = t=-2s$

$t=-2(\frac{5}{9})=\boxed{t=\frac{10}{9}}$

2) $-1+2s-\frac{s}{5}=0$

$-1+\frac{10s-s}{5}=0,\quad \frac{-5+9s}{5}=-\frac{5}{5}+\frac{9s}{5}=0$

$\frac{9s}{5}=+1$

$9s=5$

$\boxed{s=\frac{5}{9}}$

3) $4+\frac{10}{9}:\frac{1}{2}-\frac{5}{9}=0$

$4+\frac{20}{9}-\frac{5}{9}\neq 0$ No Pasa

(b) Dar la ecuación vectorial del plano que determina la ecuación $3x + 3y + z = 1$.