Apellido y Nombre: ACHÁVAL BERZERO TOMÁS

Carrera (LCC/LMA):

Comisión (MAÑANA/TARDE): MAÑANA

Segundo Parcial
Análisis Matemático II (LC) - Cálculo II (LMA)

Justificar todas las respuestas.

1. (20 pts.) Calcular la serie de Taylor de la función $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x^3)$ alrededor de $a = 0$.
(RESUELTO EN ÚLTIMA PÁGINA)

2. (25 pts.) Sea $f(x,y) = \dfrac{xy-1}{x^2}$.

   a) Calcular las derivadas parciales de f.
   b) Dar la ecuación cartesiana del plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,2)$.
   c) Calcular la derivada direccional de f en la dirección del vector $v = (4,3)$, en el punto $(1,1)$.

3. (25 pts.) Sea $f(x,y) = \dfrac{x+1}{y-1}$, con $x(s,t) = st^2$ y $y(s,t) = t - s$.

   Usar la Regla de la Cadena para calcular las derivadas parciales de $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ con respecto a las variables s y t.

4. (30 pts.) Encontrar y clasificar los puntos críticos de

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

1	2	3	4	Total	Nota
20	25	15	30	90	9

(nueve).

EJERCICIO N°1:

SERIE DE TAYLOR DE $f(x) = x\,sen(x^3)$ CENTRADA EN $a=0$

• VEAMOS PRIMERO LA SERIE PARA $\underbrace{sen(u)}_{f(u)}$, SERÁ DE LA FORMA $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} u^n$

ANALICEMOS LAS DERIVADAS

$f(u) = sen(u) \longrightarrow f(0) = 0$

$f'(u) = cos(u) \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(u) = -sen(u) \longrightarrow f''(0) = 0$

$f'''(u) = -cos(u) \longrightarrow f'''(0) = -1$

CICLO

$f^{(n)}(0) = sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$

LUEGO SU SERIE DE TAYLOR ES

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!} u^n$$

NOTEMOS QUE $f(x) = x\,sen(u)$, SI $u = x^3$

LUEGO LA SERIE DE TAYLOR PARA $f(x)$ SERÁ $x \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n!} (x^3)^n}_{\text{SERIE DE TAYLOR PARA } sen(u), \text{ CON } u = x^3} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \cdot x^{3n+1}}$

SEGUNDO PARCIAL ANALISIS MATEMATICO II - LCC

Tomás Achaval Berterro
45085746 - comisión 1

Ejercicio N°1: Resuelto al final del parcial!

Serie de Taylor para $f(x) = x\,\text{sen}(x^3)$ alrededor de $a=0$.

· Sabemos que será de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, por lo cual es necesario analizar el comportamiento de las derivadas de $f(x)$ evaluadas en 0.

· Veamos:

$f(x) = x\,\text{sen}(x^3) \longrightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \text{sen}(x^3) + x\,3x^2\cos(x^3) \longrightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 3x^2\cos(x^3) + 6x^2\cos(x^3) + 3x^3(-\text{sen}(x^3))3x^2 \longrightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = 6x\cos(x^3) + 3x^2(-\text{sen}(x^3)) + 12x\cos(x^3) + 6x^2(-\text{sen}(x^3)) + 40x^4(-\text{sen}(x^3)) + 9x^5(-\cos(x^3))3x^2 \longrightarrow f'''(0) = 0$

Ejercicio N°2

$f(x,y) = \frac{xy-1}{x^2} = \frac{xy}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$

y constante

a) $f_x = \left(\frac{y}{x}\right)' - \left(x^{-2}\right)' = \boxed{\frac{-y}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$

$\boxed{f_y = \frac{1}{x}}$

b) Ecuación cartesiana del plano tangente a $f(x)$ en $(1,2)$

Sabemos que la ecuación vectorial es de la forma $X = (a, b, f(a,b)) + t(1, 0, f_x(a,b)) + s(0, 1, f_y(a,b))$ y tenemos:

$f(1,2) = \frac{2\cdot 1 - 1}{1^2} = 1$ Luego el plano tangente es $X = (1,2,1) + t(1,0,0) + s(0,1,1)$

$f_x(1,2) = -2+2 = 0$ La ecuación cartesiana se despeja a partir de un vector normal (y la ecuación normal)

$f_y(1,2) = 1$ · Un vector normal al plano tangente en el punto $(1,2)$

es: $(1,0,f_x(1,2)) \times (0,1,f_y(1,2)) = (-f_x(1,2), -f_y(1,2), 1) = (0,-1,1)$

· De esta forma la ecuación normal será

$\langle (x,y,z) - (1,2,1), (0,-1,1) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow$

$0(x-1) - 1(y-2) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow -y+2+z-1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{z - y = -1}$

Ecuación cartesiana del plano tangente a $f(x)$ en $(1,2)$

NOTA

c) Calcular $D_v f(1,1) = \langle \nabla f(1,1), u \rangle$ → debe ser un vector unitario.

- El vector unitario con la dirección de $v=(4,3)$ es $u = \frac{(4,3)}{\|(4,3)\|} = \frac{(4,3)}{\sqrt{16+9}} = \frac{(4,3)}{5} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

- $\nabla f(1,1) = (f_x(1,1), f_y(1,1))$
$= (1, 1)$

- De esta forma, la derivada en $(1,1)$ con dirección de $(4,3)$ está dada por

$$\boxed{D_v f(1,1)} = \left\langle (1,1), \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \right\rangle = 1 \cdot \frac{4}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4+3}{5} = \boxed{\frac{7}{5}}$$

Ejercicio N° 3:

$f(x,y) = \frac{x+1}{y-1}$ $\quad x(s,t) = st^2 \quad y(s,t) = t-s$

← dónde está bien definida?

Derivar $\underbrace{f(x(s,t), y(s,t))}_{g(s,t)}$ con respecto a s y t por regla de la cadena.

- Voy a necesitar algunos cálculos previos:

$f_x = \frac{1}{y-1} \qquad \frac{\partial x}{\partial s} = t^2 \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = 2ts$

$f_y = \frac{-x-1}{(y-1)^2} \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = -1 \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = 1$

dónde son continuas?

Luego,

por qué se puede usar este resultado?

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t)) \frac{\partial y}{\partial s}(s,t).$$

$$= \frac{1 \cdot t^2}{t-s-1} + \frac{-st^2-1}{(t-s-1)^2} \cdot (-1) = \boxed{\frac{t^2}{t-s-1} + \frac{st^2+1}{(t-s-1)^2}}$$ → Derivada parcial de $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ con respecto a s.

$$\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t)) \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t)) \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$

$$= \frac{1 \cdot 2ts}{t-s-1} + \frac{-st^2-1}{(t-s-1)^2} \cdot 1 = \boxed{\frac{2ts}{t-s-1} - \frac{st^2+1}{(t-s-1)^2}}$$ → Derivada parcial de $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ con respecto a t.

NOTA

HOJA N°

FECHA

Tomás Achaval Becú

Ejercicio N° 4

ENCONTRAR Y CLASIFICAR PUNTOS CRÍTICOS DE

$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$

$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y$

$f_y(x,y) = 3y^2 - 3x$

$\overbrace{\nabla f(x,y) = (0,0)}^{\substack{(x,y) \\ \text{PUNTO CRÍTICO}}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^2-y) = 0 \Leftrightarrow x^2 = y \\ 3(y^2-x) = 0 \Leftrightarrow y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x(x^3-1) = 0$

$x^4 - x = 0$

$\Rightarrow x = 0 \lor x = 1$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$y = 0 \qquad y = 1$

$\nabla f(x,y) = (3x^2-3y, 3y^2-3x)$

PUNTOS CRÍTICOS $(0,0)$ y $(1,1)$ $(\nabla f(0,0) = (0,0)$ y $\nabla f(1,1) = (0,0))$

PARA UTILIZAR EL CRITERIO DE LAS DERIVADAS SEGUNDAS, (TODAS LAS ECUACIONES SON POLINOMIOS CONTINUOS Y DERIVABLES EN TODO SU DOMINIO)

NECESITO LAS DERIVADAS SEGUNDAS:

$f_{xx}(x,y) = 6x \qquad f_{xy}(x,y) = -3 = f_{yx}(x,y)$

$f_{yy}(x,y) = 6y$

LUEGO,

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D_f(0,0) = \det(H_f(0,0)) = -(-3 \cdot -3) = -9$

Y COMO $D_f(0,0) < 0$, SABEMOS QUE HABRÁ UN "PUNTO SILLA" EN $(0,0)$

$\Rightarrow H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow D_f(1,1) = \det(H_f(1,1)) = 36 - 9 = 27$

Y COMO $D_f(1,1) > 0$ Y $f_{xx}(1,1) > 0$, HABRÁ UN MÍNIMO LOCAL EN $(1,1)$