# Series de taylor

La Serie de taylor se da una serie $\{c_n\}^{\infty}$ de números Reales llamada serie de Potencias numérica centrada en $n=0$ $\leftarrow$ siempre se da

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

(notar que adoptamos la convención $(x-a)^0 = 1$, aún cuando $x=a$).

En el caso particular de $a=0$, la serie de pot. es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Se debe ver para cuales $x \in \mathbb{R}$ converge.

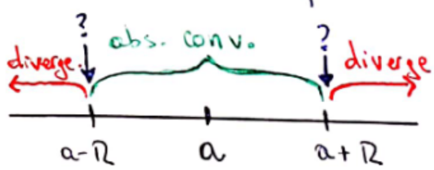
si $x=a$, en $\sum^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 < \infty \rightarrow$ converge

**Teorema:** Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ una serie de pot. Entonces, se cumple exactamente una de las siguientes:

(i) La serie converge sólo cuando $x=a$.

(ii) La serie es absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\exists R > 0$ tq la serie conv. absolutamente $\forall x$ tq $|x-a| < R$ y es divergente $\forall x$ tq $|x-a| > R$.




(más adelante veremos una manera de calcular $R$)

**Definición:** decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge y converge condicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge. (45)

**Definición:** Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ una serie de potencias.

(A) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R=0$ si sólo converge en $x=a$.

(B) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R=\infty$ si converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

(C) Si ocurre (iii) en el teorema anterior decimos que $R$ es su radio de convergencia

**Definición:** Llamamos intervalo de convergencia al conjunto

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ converge} \right\}$$

**Observación:**

- Si $R=0$, entonces $I = \{a\}$.
- Si $R=\infty$, entonces $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.
- Si $0 < R < \infty$, entonces $I$ puede ser

$(a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$ o $[a-R, a+R]$

# Crit. Para Ver si Conv. o diverge.

**Teorema (Crit. del cociente para series de potencias):** Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, con $c_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y $R$ su radio de convergencia. Escribimos

$$L \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}.$$

(i) Si $0 < L < \infty$, entonces $R = \frac{1}{L}$

(ii) Si $L = 0$, entonces $R = \infty$

(iii) Si $L = \infty$, entonces $R = 0$.

¡Ideal Para Factorial!

¿es solo 1 criterio? en el apunte no hay mas

# Serie de taylor y Polinomio de taylor

**Teorema:** Si $f$ se puede representar como una serie de potencias centrada en a (58), es decir, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ $\forall x$ tq $|x-a| < R$. Entonces

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

**Definición:** dada una función $f$ que tiene derivadas de todos los órdenes en a, se llama serie de Taylor de f centrada en a a la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

**Observaciones**

① Para el caso especial $a=0$ la serie queda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ y se suele llamar S. de Maclaurin.

② El teorema anterior nos dice que si $f$ se puede representar como una serie de potencias centrada en a, entonces esa serie es la serie de Taylor de f centrada en a (y por tanto f es igual a su serie de Taylor).

"en Resumen:"

Series de taylor

**Definición:** Sea $f$ tq existen $f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$. Para $n \geq 0$, definimos el polinomio de Taylor de f de orden n centrado en a como

1) La Formula: $\sum_{n=0}^{\infty}$ $\qquad T_{n,a}(x) \doteq \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ $\qquad \frac{F^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$

2) Calculo tantas derivadas de $F(x)$ según el grado del Polinomio.

3) Evaluo cada Función derivada en a.

4) Escribo en términos de la Función

$F(x) = \cos(x)$ $\qquad F(0) = \cos(0) = 1$

$F'(x) = -\operatorname{Sen}(x)$ $\qquad F(0) = -\operatorname{Sen}(0) = 0$

$F''(x) = -\cos(x)$ $\qquad F(0) = -\cos(0) = -1$

$F^3(x) = \operatorname{Sen}(x)$ $\qquad F(0) = \operatorname{Sen}(0) = 0$

$F^4(x) = \cos(x)$ $\qquad F(0) = \cos(0) = 1$

**Definición:** se define el resto de Taylor de orden $n$ centrado en $a$ como

$$R_{n,a}(x) \doteq f(x) - T_{n,a}(x).$$

(Por lo tanto, $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$).

error de taylor

**Teorema (Fórmula de Lagrange para el resto).** Sea $f$ una función tq existen $f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ en un intervalo abierto $I$ y sea $a \in I$. Entonces, para cada $x \in I$ existe $t$ entre $x$ y $a$ ($t \in (x,a)$ si $x<a$ y $t \in (a,x)$ si $x>a$) tq

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Resuelvo y comparo con el error $\leq \vee \geq$

Notar que es una función de $x$, de la que solo sabemos $R_{n,a}(a) = 0$ (el polinomio y la función son iguales en $x = a$ y valen ambos $f(a)$).

- Tenemos una fórmula

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para un $c$ *indeterminado* que está entre $x$ y $a$ (y que depende de $x$).

Por esto, en general **no nos importa el valor exacto**, sino que buscamos acotarlo o estimarlo:

$$|R_{n,a}(x)| \leq \epsilon. \tag{1}$$

Notemos que en esta fórmula hay **tres** datos que podemos modificar: el grado $n$ del polinomio, el punto $x$ en donde comparamos la función y el polinomio y finamente la cota o estimación $\epsilon$.

En general, los problemas que vamos a plantear van a tener que ver con la relación de dos de estos datos, ya dados, con el tercero, por descubrir.

Para encontrar los $n$ q satisfacen debo despejar.

**Ejemplo:** Estimar el error que se comete si se aproxima $\operatorname{sen}(0.2)$ por el valor en $x=0.2$ de su polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$, o sea $T_{7,0}(0.2)$.

- Queremos estimar el valor de $|\operatorname{sen}(0.2) - T_{7,0}(0.2)|$.

Sabemos que $\operatorname{sen}(x) = T_{7,0}(x) + R_{7,0}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Fórmula de Taylor)

Por lo tanto $|\operatorname{sen}(0.2) - T_{7,0}(0.2)| = |R_{7,0}(0.2)|$.

Ahora, $R_{7,0}(0.2) = \dfrac{\operatorname{sen}^{(8)}(t)\,(0.2)^8}{8!}$, para algún $t \in (0, 0.2)$. Como $|\operatorname{sen}^{(8)}(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, entonces

$$|R_{7,0}(0.2)| = \frac{|\operatorname{sen}^{(8)}(t)|\,(0.2)^8}{8!} \leq \frac{1}{8!}\left(\frac{2}{10}\right)^8 = \frac{1}{8!\,5^8}.$$

- Conclusión: el error que se comete al aproximar $\operatorname{sen}(0.2)$ por $T_{7,0}(0.2)$ es menor que $\dfrac{1}{8!\,5^8} \approx 6.3 \times 10^{-11}$.

# Cálculo vectorial (gráfica $R^3$)

**Definición:** $\mathbb{R}^n = \{A \doteq (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R} \ \forall i\}$. En $\mathbb{R}^n$ se definen dos operaciones:

- suma: $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \doteq (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$
- multiplicación por escalares: para $r \in \mathbb{R}$, $r.(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$

Con estas op., $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sus elementos se llaman vectores (o puntos).

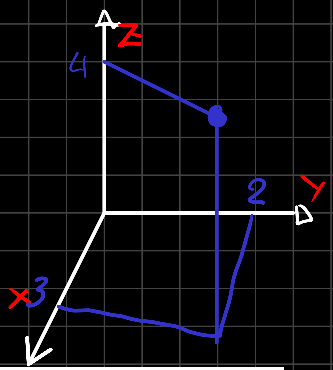
**Observación:** (1) denotamos por $-A = (-1).A$ y definimos la resta

$B - A = B + (-A)$

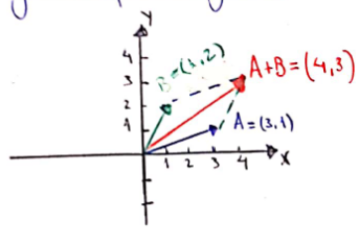
(2) A veces denotamos al vector nulo simplemente $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

Siendo su Representación

1) Marco y
2) Marco x
3) Uno x e y.
4) Subo hasta z




Regla del paralelogramo.




**Definición** (producto escalar o producto interno en $\mathbb{R}^n$): dados $A, B \in \mathbb{R}^n$ con $A = (a_1, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, \dots, b_n)$ el producto escalar entre $A$ y $B$ es el número

$A \circ B$ $\langle A, B \rangle \doteq a_1.b_1 + a_2.b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$.

EJ: $A(1, 2, 3)$ $B(3, 2, 1)$

$\to \langle A, B \rangle = (1\cdot 3, 2\cdot 2, 1\cdot 3)$

$(3, 4, 3)$

**Teorema** (Propiedades del producto interno). Dados $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, las siguientes son válidas:

(1) $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$

(2) $\langle A+B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$ y $\langle A, B+C \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle$

(3) $r\langle A, B \rangle = \langle rA, B \rangle = \langle A, rB \rangle$

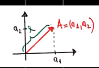
(4) $\langle A, A \rangle \geq 0$

(5) $\langle A, A \rangle = 0 \iff A = (0, \dots, 0)$.

**Definición:** definimos la norma de un vector $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$\|A\| \doteq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\langle A, A \rangle}$.

En $\mathbb{R}^2$




**Definición:** definimos la distancia entre dos vectores $A$ y $B$ en $\mathbb{R}^n$ como

$d(A, B) = \|A - B\|$ (notar que $d(A, 0) = \|A\|$)

Ejemplo: la distancia entre $A = (1, 0, 2)$ y $B = (1, 3, -1)$ es

$d(A, B) = \|A - B\| = \|(1,0,2) - (1,3,-1)\| = \|(0,-3,3)\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18}$.

**Teorema** (Propiedades de la norma de un vector). Sean $A, B \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$. Entonces,

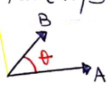
(1) $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0 \iff A = (0, 0, \dots, 0)$

(2) $\|rA\| = |r| \, \|A\|$

(3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (desigualdad triangular)

(4) $\langle A, B \rangle = \|A\| \|B\| \cos\theta$, donde $0 \leq \theta \leq \pi$ es el ángulo (radianes) entre $A$ y $B$

(5) $|\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \|B\|$. (desigualdad de Cauchy-Schwarz)




**Definición:** dados $A, B \in \mathbb{R}^n$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$ decimos que $A$ y $B$

(i) son ortogonales (o perpendiculares) si $\langle A, B \rangle = 0$

(ii) son paralelos si $A = rB$ para algún $r \in \mathbb{R}$.

# Rectas en $R^2$ ∧ $R^3$

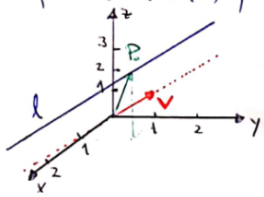
**Definición:** dados $P_0 \in \mathbb{R}^n$ y $V \in \mathbb{R}^n$ con $V \neq 0$, la recta $\ell$ que pasa por el punto $P_0$ y tiene dirección $V$ es el conjunto de todos los puntos $X = (x,y)$ (ó $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$) tales que $X = P_0 + tV$, con $t \in \mathbb{R}$ → Ecuación vectorial de la recta

O sea, $\ell = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = P_0 + tV,\ \text{con } t \in \mathbb{R}\}$ (si $n=2$, $X = (x,y)$)

$\ell = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = P_0 + tV,\ \text{con } t \in \mathbb{R}\}$ (si $n=3$ $X = (x,y,z)$)

Distributividad del $t$ con algun $V$.
Ej.
$V = (1,2,3) = t(1,2,3)$

**Ejemplo:** Dar la ecuación vectorial de la recta $\ell$ que pasa por $P_0 = (1,1,3)$ y tiene dirección $V = (0,1,1)$.




- La ecuación vectorial es
  $X = (1,1,3) + t\,(0,1,1)$, con $t \in \mathbb{R}$.

**Definición:** decimos que dos rectas son paralelas si sus vectores dirección son paralelos y decimos que son ortogonales (o perpendiculares) si sus vectores dirección son ortogonales.

**Ejemplos:**

1. • Las rectas $X = (0,1,3) + t\,(1,-3,0)$, con $t \in \mathbb{R}$
   y $X = t\,(-2,6,0)$, con $t \in \mathbb{R}$
   son paralelas ya que $V_1 = (1,-3,0)$ y $V_2 = (-2,6,0)$ son paralelos.

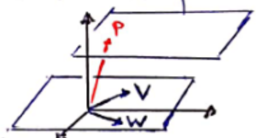
2. • Las rectas $X = (2,\pi,0) + t\,(1,0,0)$, con $t \in \mathbb{R}$
   y $X = (3,\pi,0) + t\,(0,2,100)$, con $t \in \mathbb{R}$
   son perpendiculares ya que sus vectores dirección son ortogonales.
   En efecto, $\langle (1,0,0), (0,2,100) \rangle = 1.0 + 0.2 + 0.100$
   $= 0 + 0 + 0 = 0$ ✓

$\nexists$ lo veo como
si son multiplos → Paralelo
si NO son multiplos → ortogonal
(Perpendicular, 90°)

Es Sólo en $R^2$.

## En $R^3$:

**Definición:** Dados $V, W \in \mathbb{R}^3$ con $V \neq 0 \neq W$ y $V \neq sW\ \forall s \in \mathbb{R}$ y dado $P \in \mathbb{R}^3$ decimos que $X = P + tV + rW$, con $t, r \in \mathbb{R}$ → ec. vectorial del plano
es la ecuación vectorial del plano generado por $V$ y $W$ que pasa por el punto $P$.




**Ejemplo:** Dar la ec. vectorial del plano que pasa por $(1,2,4)$ y está generado por $(1,2,2)$ y $(2,5,0)$.

- La ecuación del plano es: $X = (1,2,4) + t\,(1,2,2) + r\,(2,5,0)$, con $t, r \in \mathbb{R}$.

De Aca opero, Junto los X, Y ∧ Z. Queda: $(2r+t+1,\ 2t+rs+2,\ 2t+4)$

Para ver si un punto pasa por el plano, ej, $(0,1,0)$ hago un sistema:

$$\begin{cases} 2r+t+1=0 \\ 2t+5r+2=1 \\ 2t+4=0 \end{cases}$$

y opero. Si un solo punto no pasa, no pasara.

Es mejor operar de arriba a abajo.

**Definición:** el plano normal a $N$ y que pasa por $P_0$ es el conjunto de puntos $X \in \mathbb{R}^3$ tq $X - P_0$ es perpendicular a $N$, es decir

$$\langle X - P_0, N \rangle = 0 \rightarrow \text{ecuación normal del plano.}$$

**Observación:** sean $X = (x,y,z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $N = (a,b,c)$, entonces la ec. normal del plano queda

$$\langle (x,y,z) - (x_0,y_0,z_0), (a,b,c) \rangle = 0 \iff \langle (x-x_0, y-y_0, z-z_0), (a,b,c) \rangle = 0$$

$$\iff (x-x_0)a + (y-y_0)b + (z-z_0)c = 0 \iff ax+by+cz = \underbrace{ax_0+by_0+cz_0}_{\doteq d \text{ (dato)}}.$$

Es decir, $ax+by+cz=d \rightarrow$ ecuación cartesiana del plano.

**Ejemplo:** dar la ecuación normal y cartesiana del plano normal a $N=(3,2,1)$ y q' pasa por $(2,-1,1)$

- La ecuación normal del plano es: $\langle (x,y,z) - (2,-1,1), (3,2,1) \rangle = 0$.
- La ecuación cartesiana del plano es: $3x+2y+z=d$ para un "cierto" $d \in \mathbb{R}$

¿Cómo hallar $d$? $\rightarrow$ reemplazamos $(x,y,z)$ por $(2,-1,1)$ o sea

$d = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 6-2+1 = 5$ (lo que hicimos fue calcular $ax_0+by_0+cz_0$)

La ecuación cartesiana es: $3x+2y+z=5$

Para saber si un punto corresponde al plano, reemplazo $x$, $y$ y $z$.
No tiene q quedar Abs.

**Definición:** dados dos vectores $V=(v_1,v_2,v_3)$ y $W=(w_1,w_2,w_3)$ definimos el producto vectorial $V \times W$ como

$$V \times W = (v_2w_3 - w_2v_3,\ w_1v_3 - v_1w_3,\ v_1w_2 - w_1v_2) \qquad \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \quad + \ - \ +$$

**Ejemplo:** dar la ecuación normal y cartesiana del plano $X=(2,1,0)+t(1,1,2)+r(0,2,3)$ $t,r \in \mathbb{R}$

- Definimos $N=(1,1,2)\times(0,2,3) = (3-4, -3, 2) = (-1,-3,2)$

C.A.
$$\begin{bmatrix} (1,1,2) \\ (0,2,3) \end{bmatrix} \quad + \ - \ +$$

Luego, la ec. normal es $\langle (x,y,z)-(2,1,0), (-1,-3,2) \rangle = 0$

$\neq$ Determinante.

Lo de $V \times W$ es una formula única.

# Funciones Vectoriales

**Definición:** dadas $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, llamamos función vectorial a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) \doteq (f_1(t), \dots, f_n(t))$. Los $f_i$ se llaman funciones coordenadas de $f$.

El dominio de $f$ es $\mathrm{Dom}(f) \doteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Dom}(f_i)$

**Ejemplos:**

- Si $f(t) = (\underbrace{t+2}_{f_1(t)}, \underbrace{t^3}_{f_2(t)})$, entonces como $\mathrm{Dom}(f_1) = \mathbb{R} = \mathrm{Dom}(f_2)$ tenemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Si $f(t) = (\sqrt{t}, \frac{1}{t}, \mathrm{sen}(t))$. Tenemos que $\mathrm{Dom}(f_1) = [0, \infty)$, $\mathrm{Dom}(f_2) = \mathbb{R} - \{0\}$ y $\mathrm{Dom}(f_3) = \mathbb{R}$

Luego $\mathrm{Dom}(f) = (0, \infty)$.

**Definición:** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, la imagen de $f$ es el cjto de $\mathbb{R}^n$ definido por $\mathrm{Im}(f) \doteq \{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in \mathrm{Dom}(f) \text{ con } f(t) = (y_1, \dots, y_n) \}$

- Cuando $n=2$, decimos que la imagen de $f$ es una curva en el plano.
- Cuando $n=3$, decimos que la imagen de $f$ es una curva en el espacio.

Con respecto a:

- Límite
- Derivada $\to \dfrac{F(a+h) - F(a)}{h}$

Es simple, distribuís el lim o derivada en x, y, z.

# Función de varias variables

$\bar{x} = X$ borde.

**Definición:** una función $f$ de $n$ variables es una regla que asigna a cada $n$-tupla $\bar{x} \doteq (x_1, \dots, x_n)$ un único número real $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

- el dominio de $f$ es el subconjunto $\mathrm{Dom}(f)$ de $\mathbb{R}^n$ dado por $\mathrm{Dom}(f) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : f(\bar{x}) \text{ está bien definida} \}$
- el rango o imagen de $f$ es el subconjunto $\mathrm{Im}(f)$ de $\mathbb{R}$ dado por $\mathrm{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} : \exists\, \bar{x} \in \mathrm{Dom}(f) \text{ con } y = f(\bar{x}) \}$
- el gráfico de $f$ es el subconjunto $G(f)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por
$$G(f) = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n) \}$$
$$= \{ (\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{x} \in \mathrm{Dom}(f) \}$$

← en gráfico, debo sacar Dom

Notar que sólo podemos dibujar el gráfico de $f$ cuando

- $n = 1$ (en cuyo caso decimos que $G(f)$ es una curva en el plano)
- $n = 2$ (en cuyo caso decimos que $G(f)$ es una superficie en el espacio)

Por cada n, escribo una coordenada más

## Límite y continuidad de funciones de varias variables

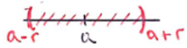
**Definición:** dado $r>0$ y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, llamamos bola (abierta) de centro $\bar{a}$ y radio $r$ al conjunto $B(\bar{a},r) \doteq \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{a}\| < r\}$.

**Observación:** si escribimos $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$ y $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)$, entonces

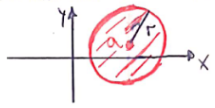
$$B(\bar{a},r) = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2}<r\} = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : (x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2<r^2\}$$

gráfico de bola

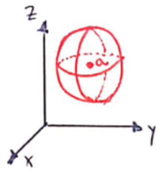
- Si $n=1$, $B(\bar{a},r)$ es un intervalo abierto centrado en $\bar{a}$ y de "radio" $r$ — $R^1$




- Si $n=2$, $B(\bar{a},r)$ es un disco abierto con centro $\bar{a}$ y de radio $r$ — $R^2$




- Si $n=3$, $B(\bar{a},r)$ es una bola centrada en $\bar{a}$ y de radio $r$ (interior de la "cáscara") — $R^3$




**Definición (Límite):** Sea $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$ y $f:\mathrm{Dom}(f)\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida en un dominio $\mathrm{Dom}(f)$ que incluye ptos. arbitrariamente cercanos a $\bar{a}$. Decimos que

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = L \quad \left(\text{ó } \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1,\dots,x_n) = L\right)$$

si $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$ tq $\bar{x}\in \mathrm{Dom}(f)\cap B(\bar{a},\delta) \Rightarrow |f(\bar{x})-L|<\varepsilon$

(si $\bar{x}\in\mathrm{Dom}(f)$ que da $\|\bar{x}-\bar{a}\|<\delta \Rightarrow |f(\bar{x})-L|<\varepsilon$)


Esto significa que si nos acercamos "por cualquier lado" al punto $\bar{a}$, $f$ se acerca a $L$.

toma límites distintos por cada $\lim_{x\to a}$

**Ejemplos:**

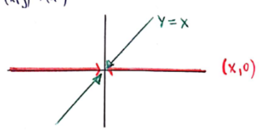
① Sea $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Demuestre que $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(\bar{x})$ NO existe $\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\right)$

Tenemos que $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

- Si nos acercamos al $(0,0)$ por puntos del eje $x$, ó sea si $(x,y)=(x,0)\to(0,0)$
como $f(x,0)=0$ tenemos que $\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{x\to0} f(x,0) = 0$. ①

- Si nos acercamos al $(0,0)$ por la recta $y=x$, ó sea si $(x,y)=(x,x)\to(0,0)$
como $f(x,x)=\dfrac{xx}{x^2+x^2}=\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$ tenemos que $\lim_{(x,y)\to0} f(x,y) = \lim_{x\to0} f(x,x) = \dfrac{1}{2}$. ②

De ① y ② concluimos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ NO existe.



**Ejercicio:** usando la definición de límite demuestre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

**Definición (Continuidad):** Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $f$ es continua en $\bar{a}$ si $\bar{a} \in Dom(f)$ y $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$.

- Decimos que $f$ es continua si $f$ es continua $\forall \bar{x} \in Dom(f)$.

- Se mantienen las mismas propiedades de continuidad

$F \pm g$, $F \cdot g$

## Derivadas Parciales

(91)

**Intro/Motivación:** Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si fijamos $b$, tenemos que $g(x) \doteq f(x,b)$ es una función de una sola variable (la $x$) y entonces tiene sentido considerar su derivada en $x = a$. Esto es

$$g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \doteq \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \doteq f_x(a,b)}_{\text{Derivada parcial de } f \text{ con respecto a } x \text{ en el pto. } (a,b)}$$

- En general, para cualquier punto $(x,y)$ definimos la derivada parcial de $f$ con respecto a $x$ en el punto $(x,y)$ como $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) \doteq \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}}$

- Notar que para calcular $f_x(x,y)$ dejamos la variable $y$ fija (la pensamos como una constante) y derivamos respecto a la variable $x$. Por ejemplo, si $f(x,y) = x^2y + e^y + x$ entonces $f_x(x,y) = 2xy + 1$.

- De manera análoga podemos definir $f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, y más aún también podemos hacer lo mismo para funciones de $n$ variables.

**Definición:** Sean $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y sup. $B(\bar{a}, r) \subset Dom(f)$ para algún $r > 0$. Definimos la derivada parcial de $f$ respecto a $x_j$ en el punto $\bar{a}$ como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_n) = f_{x_j}(a_1,\dots,a_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{j-1}, a_j+h, a_{j+1},\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_n)}{h}$$

siempre que este límite exista.

**Observación:**

- Si $n=2$ escribimos $f_x$ y $f_y$ en lugar de $f_{x_1}$ y $f_{x_2}$
- Si $n=3$ escribimos $f_x, f_y, f_z$ en lugar de $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}$.
- Si $n=1$ tenemos que $f_{x_1}(a) = f'(a)$ (la derivada usual).

**Ejemplo:** Sea $f(x,y,z) = \frac{xz}{y+z}$. Entonces, las derivadas parciales de $f$ son

$$f_x(x,y,z) = \frac{z}{y+z} \; ; \; f_y(x,y,z) = \frac{-xz}{(y+z)^2} \; ; \; f_z(x,y,z) = \frac{x(y+z) - xz \cdot 1}{(y+z)^2} = \frac{xy}{(y+z)^2}.$$

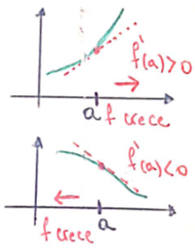
Cuando hago por ejemplo la derivada de $x$, trato $Y$ y $Z$ como constantes

**Observación:** Sabemos que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \Rightarrow f$ es continua en $a$. Sin embargo, si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n \geq 2$ lo anterior no es cierto. Es decir pueden existir todas la derivadas parciales de $f$ en $\bar{a}$ pero $f$ puede ser discontinua en $\bar{a}$

**Teorema:** Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} \in Dom(f)$ y $B(\bar{a}, r) \subset Dom(f)$, para algún $r > 0$. Si $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ existen y son continuas para todo $\bar{x} \in B(\bar{a}, r) \Rightarrow f$ es continua para todo $\bar{x} \in B(\bar{a}, r)$. (En particular para $\bar{x} = \bar{a}$).

# Interpretación geométrica de las derivadas parciales.






- Recordemos que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la derivada $f'(a)$ nos da información sobre la dirección de crecimiento de $f$ en $a$. O sea si $f'(a) > 0$ la función crece yendo a la derecha y si $f'(a) < 0$ la función crece yendo a la izq (o decrece yendo a la derecha). Además cuando más positiva/negativa es $f'(a)$ más **rápido** crece/decrece $f$ en $a$.

Para $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la derivada parcial $f_{x_j}(\bar{a})$ da la tasa de crecimiento de $f$ en $\bar{a}$ cuando nos movemos dejando todas las coordenadas fijas salvo la j-ésima.

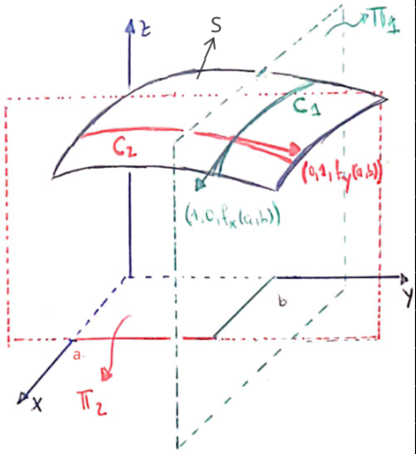
- Supongamos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $S$ el gráfico de $f$, es decir $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \wedge (x,y) \in Dom(f)\}$.

Sea $\Pi_1$ el plano $y = b$ y $C_1 = S \cap \Pi_1$. O sea $C_1$ es la imagen de la función vectorial $\gamma_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ def. por $\gamma_1(x) = (x, b, f(x,b))$.

Sabemos que $\gamma_1'(x)$ es un vector tangente a $\gamma_1(x)$

Entonces $\gamma_1'(a) = (1, 0, f_x(a,b))$ es tangente a la curva $C_1$ en el pto $(a, b, f(a,b))$.

Análogamente si $\Pi_2$ es el plano $x = a$ y $C_2 \doteq S \cap \Pi_2$, el vector $(0, 1, f_y(a,b))$ es tangente a $C_2$ en el pto $(a, b, f(a,b))$.

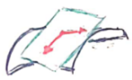



Otra interpretación: $f_x(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente a **la** curva $C_1$.
$f_y(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente a **la** curva $C_2$.

No entendí, consultar.



**Definición:** Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a,b) \in Dom(f)$. El plano que pasa por $(a, b, f(a,b))$ y es generado por los vectores $(1, 0, f_x(a,b))$ y $(0, 1, f_y(a,b))$ se llama plano tangente al gráfico de $f$ en el punto $(a, b, f(a,b))$.



**Observación:** la ecuación vectorial del plano tangente al gráfico de $f$ en $(a,b,f(a,b))$ es

$$(x, y, z) = (a, b, f(a,b)) + t\,(1, 0, f_x(a,b)) + r\,(0, 1, f_y(a,b)), \quad \text{con } t, r \in \mathbb{R}.$$

- Sabemos que el vector $(1, 0, f_x(a,b)) \times (0, 1, f_y(a,b)) = (-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1)$ es perpendicular al plano tangente. Luego, la ecuación normal del plano tangente es

$$\langle (x,y,z) - (a,b,f(a,b)), (-f_x(a,b), -f_y(a,b), +1) \rangle = 0.$$

O equivalentemente

$$z = (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b) + f(a,b)$$

Ecuación del plano tangente al gráfico de $f$ en $(a, b, f(a,b))$.

**Ejemplo:** Obtener la ecuación del plano tangente al gráfico de $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$ en el punto $(\pi, 4, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}))$ y además dar la ec. de la recta normal a dicho plano y que pasa por el mismo punto.

* Deriva Parcialmente en x y luego y. De ahí, evalua y obtiene los Puntos

• Tenemos que: *

• $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) \rightsquigarrow f(\pi,4) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• $f_x(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} \rightsquigarrow f_x(\pi,4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$

• $f_y(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{(-x)}{y^2} \rightsquigarrow f_y(\pi,4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{-\pi}{16} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{32}$

Luego, la ecuación del plano tangente en el punto $(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2})$ es:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{8}(x-\pi) - \frac{\pi\sqrt{2}}{32}(y-4) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

95

Por otra parte, la recta que pasa por el punto $(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y es normal al plano anterior es:

$$(x,y,z) = \left(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}\pi}{32}, 1\right)}_{\text{vector normal al plano}}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

**Teorema (Regla de la Cadena, Caso 1):** Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} \in Dom(f)$ y tal que $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existen y son continuas en $B(\bar{a}, r)$ para algún $r > 0$.

Para $1 \leq i \leq n$ y un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, sean $x_i: I \to \mathbb{R}$ funciones derivables $\forall t \in I$ y tal que $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in B(\bar{a}, r)$ $\forall t \in I$. Entonces, la función $g(t) \doteq f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ es derivable $\forall t \in I$ y además

$$\frac{dg}{dt} = g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_2'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_n'(t)$$

96

**Ejemplo:** Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, con $x(t) = \operatorname{sen}(t)$, $y(t) = e^t$. Hallar $\frac{df}{dt}$

• Tenemos que: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$ ; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x$ ◁ Deriva Parcialmente $(x, y)$

$x'(t) = \cos(t)$ ; $y'(t) = e^t$ ◁ Deriva los Puntos

Luego Evaluo las Parciales en los Puntos Y Multiplico Por su Derivada.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

$2x(t) + y(t)$

$$= (2x(t) + y(t)) \cdot \cos(t) + (2y(t) + x(t))\, e^t$$

$$= (2\operatorname{sen}(t) + e^t)\cos(t) + (2e^t + \operatorname{sen}(t))\, e^t \quad (\Delta)$$

**Observación:** notar que si escribimos $f(t) = x^2(t) + y^2(t) + x(t)y(t) = \operatorname{sen}^2(t) + e^{2t} + \operatorname{sen}(t)e^t$ entonces $\frac{df}{dt} = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t) + 2e^{2t} + \cos(t)e^t + \operatorname{sen}(t)e^t$ que es igual a $(\Delta)$.

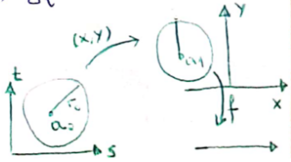
**Teorema (Regla de la Cadena, Caso 2):** Sea $f: Dom(f)\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\bar{a}_1 \in Dom(f)$ y tq $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existen y son continuas en $B(\bar{a}_1, r_1)$ para algún $r_1>0$. Sean $x: Dom(x)\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $y: Dom(y)\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones con sus derivadas parciales continuas en $B(\bar{a}_0, r_0)$ para algún $r_0>0$ y tal que $(x(s,t), y(s,t)) \in B(\bar{a}_1, r_1)$ $\forall (s,t) \in B(\bar{a}_0, r_0)$.

Entonces, la función definida por $g(s,t) \doteq f(x(s,t), y(s,t))$ $\forall (s,t)\in B(\bar{a}_0, r_0)$ tiene derivadas parciales dadas por

- $\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$
- $\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$

$$(s,t) \longmapsto (x(s,t), y(s,t)) \longmapsto f(x(s,t), y(s,t))$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x,y)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$




**Ejemplo:** Sea $f(x,y) = xy + 2y^2 + x^3$, donde $x(s,t) = st$, $y(s,t) = e^{st}$. (97)

Calcular $\frac{\partial f}{\partial s}$ en el punto $(s,t) = (1,1)$.

Mismo, Per
+ ys
Son 2 Puntos
se evalua igual

- Tenemos que:
  - $f_x(x,y) = y + 3x^2$ ; $f_y(x,y) = x + 4y$
  - $x_s(s,t) = t$ ; $y_s(s,t) = t e^{st}$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t)) \cdot x_s(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t)) \cdot y_s(s,t)$$
$$= (e^{st} + 3(st)^2)\, t + (st + 4e^{st})\, t e^{st} \quad (\blacksquare)$$

Finalmente, si evaluamos en $(s,t) = (1,1)$ obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(1,1) = (e+3)\cdot 1 + (1+4e)\, e = 4e^2 + 2e + 3$$

**Observación:** notar que si escribimos $f(s,t) = x(s,t)y(s,t) + 2y^2(s,t) + x^3(s,t)$
$= st\, e^{st} + 2e^{2st} + s^3t^3$
entonces $\frac{\partial f}{\partial s}(s,t) = te^{st} + st^2 e^{st} + 2\cdot 2t\, e^{2st} + 3s^2t^3$ que es igual a $(\blacksquare)$.

## Derivada direccional

(98)

**Definición:** decimos que $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario si $\|u\| = 1$.

**Definición:** Sean $f: Dom(f)\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $B(\bar{a}, r) \subseteq Dom(f)$ para algún $r>0$ y $\bar{u}$ un vector unitario. Definimos la derivada direccional de $f$ en la dirección de $\bar{u}$ en el punto $\bar{a}$ como

$$D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$ si este límite existe.

**Observaciones:**

(1) Si el vector $\bar{u}$ no es unitario, entonces consideramos $\bar{v} = \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}$ (unitario y misma dirección que $\bar{u}$)

(2) Si tomamos $\bar{u} = e_i = (0, \dots, 0, \underset{\text{i-ésima coord.}}{1}, 0, \dots, 0)$, entonces $D_{e_i} f(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$. O sea, las derivadas parciales son un caso particular de derivada direccional.

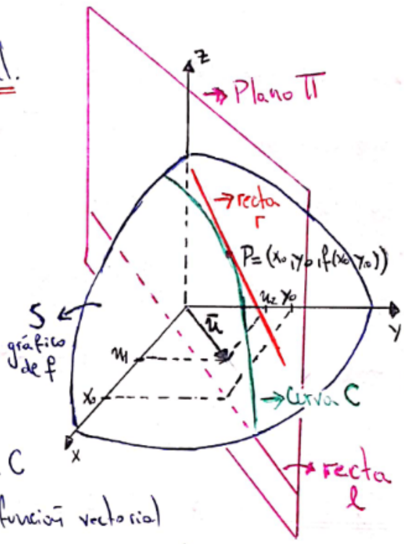
**Definición:** Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ tq existen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$ $\forall i = 1, \dots, n$.
Llamos gradiente de $f$ en $\bar{a}$ al vector $\underbrace{\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right)}_{\text{gradiente}}$.

← gradiente

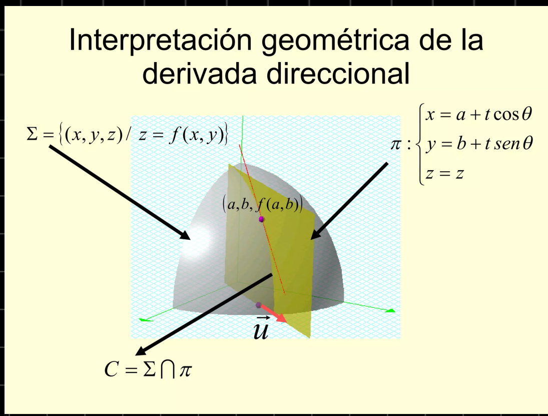
**Teorema:** Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existen y son continuos $\forall x \in B(\bar{a}, r) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ y $\forall i = 1, \dots, n$ y $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ un vector unitorio. Entonces vale que
$$D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a})\, u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\, u_n .$$

← $\langle \nabla F(\bar{a}), \bar{u} \rangle$
gradientes evaluados con $\|\bar{v}\|$ y $\bar{v}$

**Interpretación geométrica de la derivada direccional.**




- Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ y $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathrm{Gra}(f) \doteq S$
- Sea $l$ la recta en el plano x-y dada por $(x, y) = (x_0, y_0) + t\,(u_1, u_2)$.
  Sea $\Pi$ el plano vertical que contiene a la recta $l$.
- Sea $C \doteq \Pi \cap S$ y $r$ la recta tangente a la curva $C$ en el punto $P$. Notemos que $C$ es la imagen de la función vectorial $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(t) = (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2, \underbrace{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)}_{\doteq h(t)})$




Sabemos que $h'(t)$ da la pendiente de la recta al gráfico de $h$ (pues $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
Ahora, $h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}((x_0, y_0) + t\bar{u}) \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}((x_0, y_0) + t\bar{u}) \cdot u_n$ y por lo tanto
$$h'(0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \bar{u} \rangle = D_{\bar{u}} f(x_0, y_0).$$

- Entonces $D_{\bar{u}} f(x_0, y_0)$ da la pendiente de $r$, o sea la tasa de crecimiento de $f$ en $(x_0, y_0)$, cuando nos movemos en la dirección $\bar{u} = (u_1, u_2)$.

Notar que $r$ viene dado por la ecuación $(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t\,(u_1, u_2, D_{\bar{u}} f(x_0, y_0))$ para $t \in \mathbb{R}$.

**Ejemplo:** calcular la derivada direccional de $f(x, y) = x e^y$ en el punto $P = (2, 0)$ en la dirección de $\bar{v} = (1, \sqrt{3})$. (100)

- Notemos que $\bar{v}$ no es unitorio ya que $\|\bar{v}\| = \sqrt{1+3} = 2$. Luego, debemos considerar el vector $\bar{u} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$ que tiene la misma dirección que $\bar{v}$ pero es unitario.

Por otra parte, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x e^y$, ambas son funciones continuas.

Luego, por teorema, $D_{\bar{u}} f(2, 0) = \langle \nabla f(2, 0), \bar{u} \rangle$
$$= \left\langle (e^0, 2e^0), \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \ \blacksquare$$

**Teorema:** Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in Dom(f)$ tq $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existen y son continuas $\forall x \in B(\bar{a}, r)$ y para $1 \leq i \leq n$. Si $\nabla f(\bar{a}) \neq (0, \dots, 0)$, entonces

(i) el vector $\bar{u} = \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la dirección de máximo crecimiento de f en $\bar{a}$

(ii) el vector $\bar{v} = -\frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la dirección de mínimo crecimiento de f en $\bar{a}$.

**Ejemplo:** ¿En qué dirección debemos movernos, partiendo de $(1,2)$, para obtener la mayor tasa de crecimiento y la mayor tasa de decrecimiento de la función $f(x,y) = (x+y-2)^2$? (101)

- Tenemos que $\nabla f(x,y) = (2(x+y-2), 2(x+y-2))$. Luego, $\nabla f(1,2) = (2,2)$.

$\rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ y luego evalua los Puntos

Por lo tanto:

- la tasa de mayor crecimiento es en la dirección $\tilde{u} = \nabla f(1,2) = (2,2)$.
- la tasa de mayor decrecimiento es en la dirección $\tilde{v} = -\nabla f(1,2) = (-2,-2)$.

**Observación:** para poder calcular las derivadas direccionales y obtener los valores de las tasas de máximo crecimiento/decrecimiento debemos considerar los vectores $\bar{u} = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|}$ y $\bar{v} = \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|}$.

$\|a\| = \sqrt{a^2 + a_1^2 + a_n^2}$