(1) Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n^{1/4}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}(4-x)^n$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{\sqrt{n}}}^{a_n}$ , $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} : \frac{x^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^n \cdot x \cdot \sqrt{n}}{x^n \sqrt{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^n}{x^n} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |x| \cdot 1 = |x| < \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}$$

tenemos:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$ Alternante Converge cond.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

Por serie P, $P \leq 1 \Rightarrow$ diverge

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|\sqrt{n} x^n|} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\sqrt{n}|} \cdot \sqrt[n]{|x^n|}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}} \cdot |x|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot |x|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2n}} \cdot |x| = e^{\frac{1}{2n}\ln(n)} \cdot |x|$$

$$\lim_{n\to\infty} e^0 \cdot |x| = |x| = 1 < \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot x^n < \begin{matrix} -1 & \sqrt{n} \cdot (-1)^n \Rightarrow \text{Alternante Diverge} \\ 1 & \sqrt{n} \cdot 1 = \sqrt{n} \quad \text{Diverge} \end{matrix}$$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$a_n = \frac{x^n}{n!}$ $\quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1} \cdot n!}{x^n \cdot (n+1)!}\right| =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left| x \cdot \frac{n!}{(n+1)\cdot n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} x \cdot \frac{1}{(n+1)} = 0$$

$R = \infty$

$R = (-\infty, \infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} \cdot \sqrt[n]{x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} (n^n)^{\frac{1}{n}} \cdot (x^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$n \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} n^{\frac{n}{n}} \cdot x^{\frac{n}{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} n \cdot |x| =$$

Si $x = 0$, Converge en 0

Si $x \neq 0$, diverge.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

$a_n = (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$ $\quad a_{n+1} = (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$ $\quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{n^2 x^n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left| -1 \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot 1 \cdot \frac{x}{2}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{x}{2}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2+2n+1}{n^2} \cdot \frac{x}{2}\right| = \left| 2n+1 \cdot \frac{x}{2}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+x+1}{2}\right| = \infty \text{ Diverge}$$

A'T: $\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$ para n grandes

→ queda 1, y

$\frac{|x|}{2} < 1$, $x < 2$

$R = 2$, $(-2, 2)$

*Raro*

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

$a_n = \frac{(-1)^n x^n}{4^n \ln(n)}$ , $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{4^{n+1} \ln(n+1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{4^{n+1} \cdot \ln(n+1)} \div \frac{(-1)^n x^n}{4^n \cdot \ln(n)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot 4^n \cdot \ln(n)}{4^{n+1} \cdot \ln(n+1) \cdot (-1)^n \cdot x^n} \right|$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n=1} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n_{\text{se va}}} \cdot \frac{4^n}{4^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \right|$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n=1} \left| \frac{1}{4} \cdot x \cdot \frac{\ln(n)}{\ln(n(1+\frac{1}{n}))} \right|$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n=1} \left| \frac{x}{4} \cdot 1 \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty}$  $|x| < 4 \; \left\langle \begin{matrix} 4 \\ -4 \end{matrix} \right.$

Alt.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(4)^n}{4^n \ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} = 0$ Conver.

Alt. Alt.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-4)^n}{+4^n \ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty}$ $\infty$ Diverge, pues no cancelo $-4$ con el $4$

(2) Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es convergente cuando $x = -4$ y diverge cuando $x = 6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de las series siguientes?

Alt. Conv $-3$ ~~$\varepsilon$~~ $-4$

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ $1 \to$ const.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n$ $\to$ Alt no determinado.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$ $\to$ crece $\infty$

$-4$ ——— $6$

(3) Usar la expansión $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, válida en el rango $-1 < x < 1$, para representar las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, en potencias de $x$.

(b) $f(x) = \frac{3}{1-x^4}$, en potencias de $x$.

(c) $f(x) = \ln x$, en potencias de $(x-4)$.

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, en potencias de $(x+2)$.

(e) $f(x) = x \ln(1-x)$, en potencias de $x$.

Paso.

(4) Expresar las siguientes integrales como una serie de potencias en $x$.

(a) $\int \frac{1}{1+x^4} \mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{x}{1+x^5} \mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{x}{1-x^8} \mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{\ln(1-x)}{x} \mathrm{d}x$

1) La $f(x)$ de la integral la pasas a serie

2) integras la serie.

a) se que: $\int \frac{1}{1+x^4} dx = \ln(1+x^4) + c$
en $\int$

y en serie: $\frac{1}{1+x} = x^n$ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} -x^{4n} = (-1)^n x^{4n}$

$\to \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{4n+1}}{4n+1} + c$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^5}\,dx$ $\quad$ $\displaystyle\int \frac{x}{1-(-x^5)}\,dx$ $\quad$ lit me dice, haz $u=-x^5$ y desparece el $x$ de arriba.

Series de taylor.

1) La Formula: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$ $\quad$ $\displaystyle\frac{F^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$

2) Calculo tantas derivadas de $F(x)$ según el grado del Polinomio.

3) Evaluo cada Función derivada en $a$.

4) Escribo en términos de la Función

S. de Maclauren si $a=0$

(5) Encontrar la representación en serie de Taylor, centrada en $a = 0$, de las siguientes funciones. ¿Para qué valores de $x$ vale la representación?

(a) $f(x) = \cos(x)$ $\quad$ (c) $f(x) = \operatorname{sen}(5x^2)$
(b) $f(x) = \ln(1 + x)$ $\quad$ (d) $f(x) = xe^x$

$$F(x) = \cos(x) \qquad F(0) = \cos(0) = 1$$
$$F'(x) = -\operatorname{Sen}(x) \qquad F'(0) = -\operatorname{Sen}(0) = 0$$
$$F''(x) = -\cos(x) \qquad F''(0) = -\cos(0) = -1$$
$$F^{3}(x) = \operatorname{Sen}(x) \qquad F'''(0) = \operatorname{Sen}(0) = 0$$
$$F^{4}(x) = \cos(x) \qquad F^{4}(0) = \cos(0) = 1$$

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$

$$F(0) + F'(0)(x-0) + \frac{F''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{F'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{F^{4}(0)}{4!}(x)^4 \dots$$

$$1 + 0\cdot x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 =$$

Notemos que los grados impares desaparecen, y son pares todos.

$$1 + -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10}$$

Alterna entre + y -

Podemos reescribir la serie como:

$$(-1)^0\cdot\frac{1}{(2\cdot 0)!}x^{2\cdot 0} + (-1)^1\frac{1}{(2\cdot 1)!}x^{2\cdot 1} + (-1)^2\frac{1}{(2\cdot 2)!}x^{2\cdot 2} + (-1)^3\frac{1}{(2\cdot 3)!}x^{2\cdot 3} \dots$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

(b) $f(x) = \ln(1+x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Alterna $(-1)^n$ entre $-$ y $+$, crece en !

$0!$ $f(x) = \ln(1+x)$ $\quad f(0) = \ln(1) = 0$

$1-1=1!$ $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\quad f'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$ $\quad 1!$

$2-1=1!$ $f''(x) = \dfrac{-1}{(x^2+2x+1)}$ $\quad f''(0) = \dfrac{1}{1} = -1 \cdot (1)!$

$3-1=2!$ $f'''(x) = \dfrac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}$ $\quad f(0) = \dfrac{2}{1} = 2(2!)$

$4-1=3!$ $f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{(1+x)^4}$ $\quad f(0) = -6(3!)$

Calc Aux

$\dfrac{f' \cdot g + g' \cdot f}{g^2}$ $\quad f'(x) = 0 \quad f(x) = 1$
$g'(x) = 1, \quad g(x) = x+1$

$\dfrac{0+1 \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x^2+2x+1}$

$\dfrac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$ $\quad f(x) = 1 \quad f'(x) = 0$
$g(x) = x^2+2x+1 \quad g'(x) = 2x+2$

$\dfrac{0-2x+2}{(x^2+2x+1)^2}$

Por cada derivada, cambia el signo

Es de la forma:

$$0 + 1x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4$$

quedando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(n-1)!$$

(c) $f(x) = \text{sen}(5x^2)$

1) Cambio la variable, $5x^2 = u$, quedando

$f(u) = \text{Sen}(u)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

2) hago derivadas y evaluo

$f(u) = \text{Sen}\, u$ $\quad f(0) = \text{Sen}(0) = 0$

$f'(u) = \cos(u)$ $\quad f(0) = \cos(0) = 1$

$f''(u) = -\text{sen}(u)$ $\quad f(0) = -\text{Sen}(0) = 0$

$f'''(u) = -\cos(u)$ $\quad f(0) = -\cos(0) = -1$

$f^{4}(u) = \text{Sen}(u)$ $\quad f(0) = \text{sen}(0) = 0$

Se repite el Patrón.

le cero esta Arrancar al 1.

Alterna entre $+1$ y $-1$, $\rightarrow (-1)^{n+1}$

Debo sustituir.

$$0 + 1x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 \ldots$$

$(-1)^n$

impar impar impar $\rightarrow (2n+1)!$

y se repite en x siempre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$ Ahora sustituyo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (5x^2)\, x^{2n+1}$$

d) $xe^x$ $\rightarrow$ $F(0) = xe^x = 0$

1) Derivo y evalúo. $\rightarrow$ $f\cdot g = f'\cdot g + g'\cdot f$

$F(x) = f\cdot g$ $\rightarrow$ $f(x) = x$, $g(x) = e^x$ $\quad f'(x) = 1$, $g'(x) = e^x$

$= F'(x) = e^x + xe^x \qquad F'(0) = e^0 + 0e^0 = 1$

$e^x$ mismo

$F''(x) = g + h\cdot n$

$F''(x) = e^x + e^x + xe^x \qquad F''(0) = e^0 + e^0 + 0e^0 = 2$

$F'''(x) = m + g + h\cdot n \rightarrow F'''(x) = e^x + e^x + e^x + e^x x \qquad F(0) = 3$

Aumenta de 1+1 la serie. (n+1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = 0 + 1x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{4}{4!}x^4 \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \frac{n+1}{n!}x^n$$

(6) Determinar el orden de los polinomios de Taylor que deberían usarse para aproximar los siguientes valores con un error menor que $5 \cdot 10^{-5}$.

(a) $e^{0.1}$ (b) $\ln 1.4$

**Teorema (Fórmula de Lagrange para el resto).** Sea $f$ una función tq existen $f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ en un intervalo abierto $I$ y sea $a \in I$. Entonces, para cada $x \in I$ existe $t$ entre $x$ y $a$ ($t \in (x,a)$ si $x<a$ y $t \in (a,x)$ si $x>a$) tq

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

1) Saco el Polinomio de taylor de $e^x$

q es: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ la derivada de $e^x$ es $e^x$

Usando el error de taylor, tenemos que: $\quad e^{0.1} \approx 1,1052\ldots$ $\quad e^{0.1} = 1.1$

$$R_n(0,1) = \frac{e^{0.1}}{(n+1)}(0.1)^{n+1} = \frac{1.1(0.1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$5\cdot\frac{1}{10^5} = \frac{5}{100000} = 0{,}0005$$

Veo a donde tiende el error

$\dfrac{1.1(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} < 5\cdot 10^{-5}$ si $n$ es más grande que 3

orden 3

$\dfrac{1.1(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} > 5\cdot 10^{-5}$ si $n$ es menor q 3

$\ln(1.4)$

1) La serie de taylor cerca de 1 (porq evaluo 1.4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

2) el Resto, de la Forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n!}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

3) $R(1.4)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{1.4} \cdot}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0.4)^{n+1}}{n+1}$$

4) Seleccionemos algunos valores de $n$

• Sepamos q, entre mas grande la potencia de un decimal, más chico el número

$n=5$ $\quad \frac{0.4^{5+1}}{5+1} \approx 0.00\text{Algo} > 0{,}0005 \; (5 \cdot 10^{-3})$

$n=7$ $\quad \frac{0.4^{8}}{8} \approx 0{,}00008192 < 0{,}0005 \; (5 \cdot 10^{-3})$ q satisface, es menor