Cálculo multivariable

Definición: una función f de n variables es una regla que asigna a toda n-tupla $\bar{x} \doteq (x_1, \dots, x_n)$ un único número real $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

- el dominio de f es el subconjunto $\mathrm{Dom}(f)$ de $\mathbb{R}^n$ dado por
  $\mathrm{Dom}(f) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : f(\bar{x}) \text{ está bien definida}\}$
- el rango o imagen de f es el subconjunto $\mathrm{Im}(f)$ de $\mathbb{R}$ dado por
  $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, \bar{x} \in \mathrm{Dom}(f) \text{ con } y = f(\bar{x})\}$
- el gráfico de f es el subconjunto $G(f)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por
  $G(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$
  $= \{(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{x} \in \mathrm{Dom}(f)\}$

(1) Determinar el dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones y graficarlo.

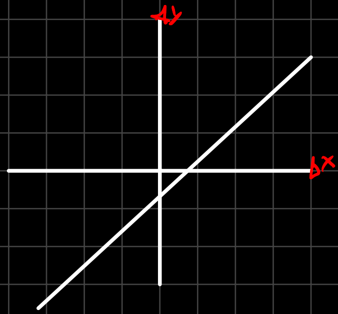
(a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2-y^2}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x\,y}$ (d) $f(x,y) = \sqrt{4\,x^2 + 9\,y^2 - 36}$

$n=2$ variables (todo)

a)

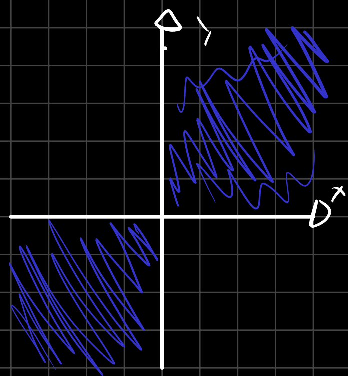
$$\mathrm{Dom}\, F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$$
$$\mathrm{Dom}\, F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$



b)

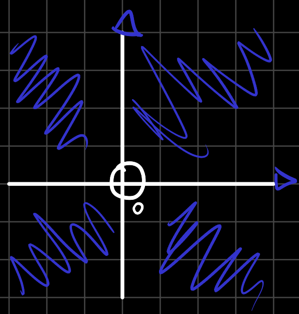
$$F(x,y) = \sqrt{x\,y}$$

$$\mathrm{Dom}\, F = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \geq 0\}$$
$$\mathrm{Dom}\, F = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \wedge y \leq 0 \vee x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$
$$\mathrm{Dom}\, F = \{x \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x, y \leq 0\}$$



(c) $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2-y^2}$

$$\mathrm{Dom}\, F = \{x \in \mathbb{R}^2 : x, y \neq 0\}$$



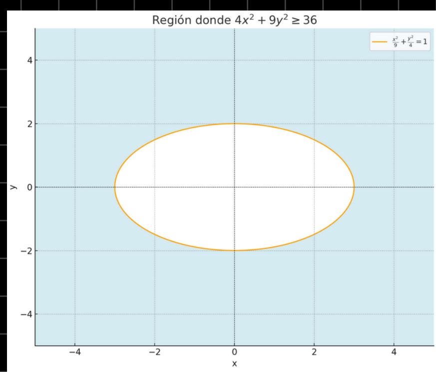
(d) $f(x,y) = \sqrt{4\,x^2 + 9\,y^2 - 36}$

$$\mathrm{Dom}\, F = \{x \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0\}$$

elipse

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \geq 36\}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$



(2) *Bosquejar* la gráfica de las siguientes funciones.

(a) $f(x,y) = y^2$, donde $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ (paraboloide)

(c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (silla de montar)

(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (cono)

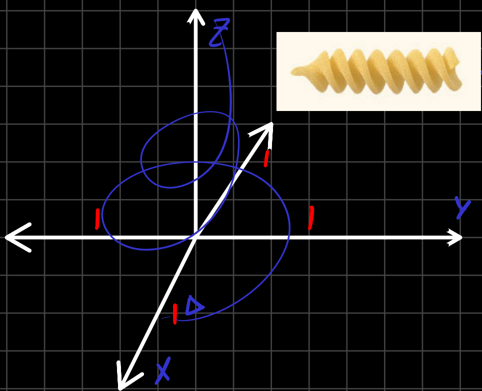
- el gráfico de f es el subconjunto $G(f)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$G(f) = \{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } x_{n+1} = f(x_1,\dots,x_n)\}$$

$$= \{(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{x} \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

a) $\mathrm{Dom}\, F = \mathbb{R}$

$$G(F) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{\overset{3}{2+1}} : (x,y) \in \mathbb{R} \wedge -1 \le x \le 1 \wedge -1 \le y \le 1 \wedge z = y^2\}$$

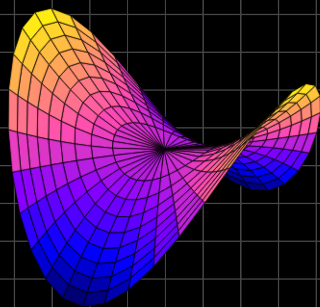


← Perdon No Se graficar

¿Defino bien G?

¿Como Aprendo A graficar bien?

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ (paraboloide)

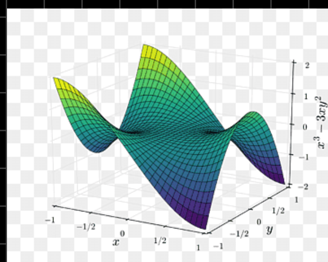


$\mathrm{Dom}\, F = \mathbb{R}$

$$G\,F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R} \wedge z = x^2 + y^2\}$$

(c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (silla de montar)

$\mathrm{Dom}\, F = \mathbb{R}$

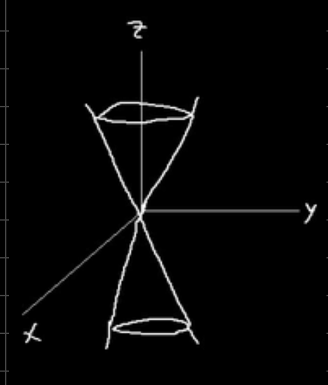


$$G\,F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R} \wedge z = x^2 - y^2\}$$

(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (cono)

$\mathrm{Dom}\, F = x^2 + y^2 \ge 0$

$$G\,F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \ge 0 \wedge z = \sqrt{x^2+y^2}\}$$



Derivadas parciales

(3) Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones y evaluarlas en el punto dado.

(a) $f(x,y) = x - y$, $p = (3,2)$ (d) $w = e^{y \ln z}$, $p = (e, 2, e)$

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{y+z}$, $p = (1,1,1)$ (e) $f(x,y,z) = x^3y^4z^5$, $p = (0,-1,-1)$

(c) $f(x,y) = xy + x^2$, $p = (2,0)$ (f) $w = \ln(1+e^{xyz})$, $p = (2,0,-1)$

Definición: Sean $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y sup. $B(\bar{a}, r) \subset \mathrm{Dom}(f)$ para algún $r > 0$. Definimos la derivada parcial de f respecto a x_j en el punto $\bar{a}$ como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) = f_{x_j}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

siempre que este límite exista.

Observación:

- Si $n=2$ escribimos f_x y f_y en lugar de f_{x_1} y f_{x_2}
- Si $n=3$ escribimos f_x, f_y, f_z en lugar de $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}$.
- Si $n=1$ tenemos que $f_{x_1}(a) = f'(a)$ (la derivada usual).

Deriva Parcial Respecto a x

a)

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(x - y) = 1 - 0 = \boxed{1}$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(x - y) = 0 - 1 = \boxed{-1}$$

Como y es una constante K

$\to F(x) = K \to F'(x) = 0$

Como la derivada e 1 y -1, No puedo evaluar y es lo mismo

b) $F(x,y,z) = \lim_{h \to 0} \dfrac{F(a+h) - F(a)}{h}$

$\dfrac{xz}{y+z}$

1) $F_x = \dfrac{F(x+h, y, z) - F(x, y, z)}{h}$

$$\frac{(x+h)z}{y+z} - \frac{xz}{y+z}$$

$$\frac{\cancel{xz} + zh - \cancel{xz}}{y+z} = \frac{zh}{y+z} = \lim_{h \to 0} \frac{zh}{y+z} : h = \frac{z}{y+z}$$

$(1,1,1)$

$\frac{1}{2}$

2) $F_y = \lim_{h \to 0} \dfrac{F(x, y+h, z) - F(x, y, z)}{h}$

$$\frac{xz}{(y+h)+z} - \frac{xz}{y+z} = \frac{xz(y+z) - xz(y+h+z)}{(y+h+z)(y+z)} = \frac{-xzh}{(y+h+z)(y+z)} : h$$

$$\frac{-xz}{(y+z)^2}$$

$(1,1,1)$

$$= \frac{-1 \cdot 1}{4} = -\frac{1}{4}$$

F_z) $\dfrac{F(x, y, z+h) - F(x, y, z)}{h} = \dfrac{x(z+h)}{y+z+h} - \dfrac{xz}{y+z}$

$(1,1,1)$

$$\frac{1 \cdot 1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{xz + xh}{y+z+h} - \frac{xz}{y+z}$$

$$= \frac{xz + xh(y+z)}{(y+z+h)(y+z)} = \text{No se q ba} = \frac{x^y}{(y+z)^2}$$

(c) $f(x,y) = xy + x^2, \qquad p = (2,0)$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(xy + x^2) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = y + 2x \quad (2,0) \quad = 4$$

es constante
No cambia por y.

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(xy + x^2) = \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) = x + 0 \quad = 2$$

Fijo, derivo
respecto a x

$w = e^{y \ln z}, \qquad p = (e, 2, e)$

Regla de cadena

$$w_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y \ln z}\right) = \frac{\partial}{\partial y} e^{y\ln z} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y \ln z) = e^{y \ln z} \cdot \ln z \quad e^{2\ln e} \cdot \ln e$$

Consultar lo de constantes.
Como se interpreta.

$$w_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{y \ln z}\right) = \frac{\partial}{\partial z} e^{y\ln z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} y \ln z \quad (e, 2, e)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} e^{y \ln z} \cdot y \cdot \frac{1}{z} = e^{y\ln z} \cdot \frac{y}{z} \quad e^{2\ln e} \cdot \frac{2}{e}$$

(e) $f(x,y,z) = x^3y^4z^5, \qquad p = (0,-1,-1)$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 y^4 z^5) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y^4 z^5) = 3x^2 y^4 z^5 \quad \begin{matrix} x & y & z \\ (0, & -1, & -1) \end{matrix}$$

$$0 \quad -1^4 \quad -1^5 = 0$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 y^4 z^5) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 4 y^3 z^5) = x^3 4 y^3 z^5$$

$$= 0^4 \cdot -1^3 \, -1^5 = 0$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(x^3 y^4 z^5) = x^3 y^4 5 z^4 = 0 \quad 1 - 5 \cdot 1 = 0$$

$w = \ln(1 + e^{xyz}), \qquad p = (2, 0, -1)$

$\ln(u) \quad u = 1 + e^{xyz}$

$$w_x = \frac{\partial}{\partial x} \ln(1 + e^{xyz}) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1+e^{xyz}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(1 + e^{xyz})$$

No entiendo la regla de cadena.
¿quizá es por Def?

(4) Obtener las ecuaciones de la recta normal al plano tangente y del plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos dados.

(a) $f(x, y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$, en $p = (\pi, 4)$. (b) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, en $p = (1, 2)$.

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad P(\pi, 4)$$

$$F_x = -\operatorname{Sen}\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} = -\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{y} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{8}$$

$$F_y = \cos\left(\frac{x}{y}\right) = -\operatorname{Sen}\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x \operatorname{Sen}\left(\frac{x}{y}\right.}{y^2}$$

$$= \frac{\pi \frac{\sqrt{2}}{2}}{16}$$

Ejemplo: Obtener la ecuación del plano tangente al gráfico de $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$ en el punto $(\pi, 4, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}))$ y además dar la ec. de la recta normal a dicho plano y que pasa por el mismo punto.

- Tenemos que: • $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) \rightsquigarrow f(\pi,4) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  - $f_x(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} \rightsquigarrow f_x(\pi,4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$
  - $f_y(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{(-x)}{y^2} \rightsquigarrow f_y(\pi,4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{-\pi}{16} = \frac{-\pi\sqrt{2}}{32}$

Luego, la ecuación del plano tangente en el punto $(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2})$ es:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{8}(x-\pi) - \frac{\pi\sqrt{2}}{32}(y-4) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

hago Derivada parcial y evaluo.