

# Sucesiones

Definición: una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio son los naturales  $\mathbb{N}$  y cuya imagen está incluida en  $\mathbb{R}$ . O sea.  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

que  $1 \mapsto a(1) = a_1, 2 \mapsto a(2) = a_2$ , y en general  $n \mapsto a(n) = a_n$ .

Notación:  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{a_n\}$

## Ejemplos

$$\textcircled{1} \quad \{1, 2, 3, \dots\}, \{n\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_n = n$$

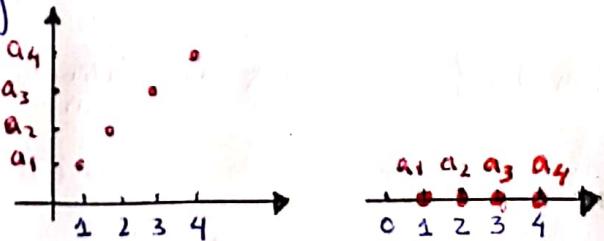
$$\textcircled{2} \quad \{-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots\}, \{(-1)^n\}, \quad a_n = (-1)^n$$

$$\textcircled{3} \quad \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}, \quad \left\{\frac{1}{n}\right\}, \quad a_n = \frac{1}{n}$$

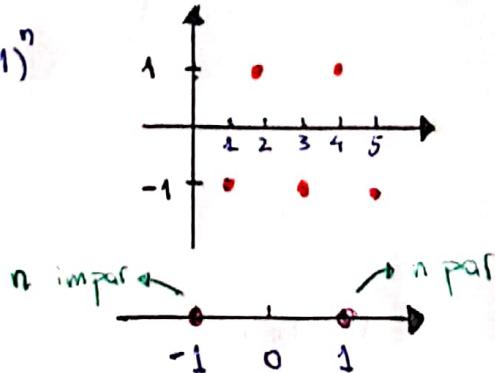
\textcircled{4} Dada  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la restricción de  $f$  a  $\mathbb{N}$  define una sucesión.

Observación: una sucesión  $\{a_n\}$  se puede representar como el gráfico de una función real como un conjunto de números reales.

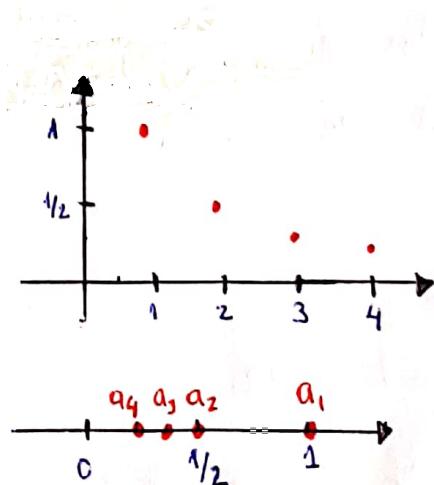
$$\textcircled{1} \quad a_n = n$$



$$\textcircled{2} \quad a_n = (-1)^n$$



$$\textcircled{3} \quad a_n = \frac{1}{n}$$



Definición: una sucesión  $\{a_n\}$  tiene límite  $l \in \mathbb{R}$  y se escribe

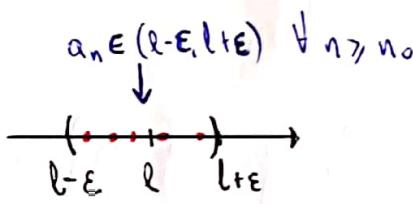
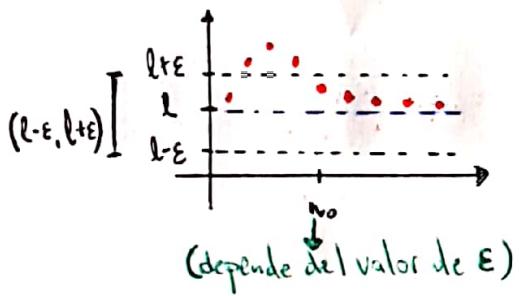
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \quad \text{y} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \quad \text{si los términos } a_n \text{ se acercan a } l$$

tanto como queramos al hacer  $n$  suficientemente grande. Esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Recordemos que  $|a_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ .

Gráficamente  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$



Ejemplo: Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

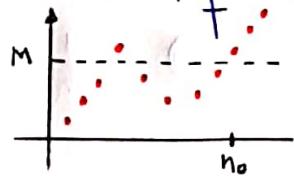
Sea  $\varepsilon > 0$ . Queremos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tq  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

Luego, basta  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  si y sólo si  $\frac{1}{\varepsilon} < n$ . Entonces, basta tomar  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ .

Definición: dado una sucesión  $\{a_n\}$ , decimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  y  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

si los términos se hacen arbitrariamente grande al hacer  $n$  grande.

Esto es,  $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tq  $a_n > M \quad \forall n \geq n_0$ .



Análogamente, decimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  y  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$  si

$\forall K < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tq  $a_n < K \quad \forall n \geq n_0$ .

Definición: si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  y  $l \in \mathbb{R}$  (o sea  $l \neq \pm\infty$ ) decimos que  $\{a_n\}$  converge a  $l$ . En los demás casos decimos que diverge.

Ejemplo: Decida si la sucesión dada converge o diverge.

①  $a_n = \frac{1}{n}$ . Recién vimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$  converge a 0.

②  $a_n = n$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$  (Probab lo usando la definición)  $\Rightarrow \{n\}$  diverge.

③  $a_n = (-1)^n$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  no existe (alternar entre + y -)  $\Rightarrow \{(-1)^n\}$  diverge.

Observación: Se puede demostrar que si el límite existe, entonces es único.

Teatrero: Sea  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  dos sucesiones convergentes y sea  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$(iv) \text{ Si } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Ejemplos:

$$① \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1.$$

$$② \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} \stackrel{\text{no cum}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n(1+1/n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+1/n} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$③ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3 + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3(1 + 7/n^3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2(1 + 7/n^3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + 7/n^3} = 0 \cdot 1 = 0.$$

## Teorema (Relación entre límite de funciones y sucesiones).

Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  y  $a_n = f(n)$   $\forall n > n_0$ , para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l.$$

Ejemplo: calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , con  $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$

Sia  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ , para  $x > 0$ . Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$

y como  $f(n) = a_n$   $\forall n > 1 = n_0 \Rightarrow$  por Teorema  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ .

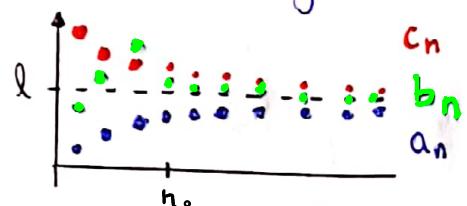
Observación: NO es cierto que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ , entonces para cualquier función  $f$  tal que  $f(n) = a_n$  cumple  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  (este límite puede no existir).

Por ejemplo, si  $a_n = \sin(\pi n)$  ( $= 0$ )  $\forall n \in \mathbb{N}$  y claramente  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  pero

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\pi x)$  no existe

Teorema (del "sandwich" para sucesiones). Si  $a_n \leq b_n \leq c_n$   $\forall n > n_0$ , para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,

y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$ .



Ejemplos:

① Encontrar  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2(n)}{n}$ . Tenemos que  $0 \leq \cos^2(n) \leq 1$   $\forall n \in \mathbb{N}$  y por lo tanto

$0 \leq \frac{\cos^2(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$ . Sean  $a_n = 0$  y  $c_n = \frac{1}{n}$ , como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2(n)}{n} = 0$ .

② Hallar  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n^3}$ . Tenemos que  $-\frac{1}{n^3} \leq \frac{\sin(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$   $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Luego, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$ , por T. Sandwich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n^3} = 0$ .

Torema: Sea  $\{a_n\}$  una sucesión. Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ . (28)

### Ejemplos)

① Probar que la sucesión  $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$  converge a 0.

Tenemos que  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  y con lo cual  $|a_n| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ .

Luego como  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , por el Torema anterior  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ .

② ¿Para qué valores de  $r$  es convergente la sucesión  $\{r^n\}$ ?

• Analicemos primero el caso  $r > 0$ .

Recordemos que  $r^x = e^{\ln(r^x)} = e^{x \ln(r)}$  y además  $\ln(r) \begin{cases} > 0 & \text{si } r < 1 \\ < 0 & \text{si } 0 < r < 1 \\ 0 & \text{si } r > 1 \end{cases}$

Luego, sea  $f(x) = r^x$ . Tenemos que  $r^n = f(n)$  y como  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } r < 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$  entonces por teorema  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } r < 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$  ①

Por otra parte,

• Si  $r = 1$ ,  $r^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  y con lo cual  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ . ④

• Si  $r = 0$ ,  $r^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  y con lo cual  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ . ⑤

• Ahora consideraremos el caso  $r < 0$

• Si  $r \in (-1, 0) \Rightarrow 0 < |r| < 1$  y por ④  $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = 0 \Rightarrow$  por Tew. anterior  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

• Si  $r = -1$ ,  $r^n = (-1)^n$  que ya sabemos que no tiene límite para  $n \rightarrow \infty$ .

• Si  $r < -1$ ,  $r^n$  no tiene límite cuando  $n \rightarrow \infty$

### Conclusión

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in (-1, 1) \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \text{diverge en los otros casos.} & \end{cases}$$

Teorema: Sea  $\{a_n\}$  tq  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  y  $f$  una función continua en  $x=a$ . (29)

Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a) \quad (= f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n))$ .

### Ejemplos

① Calcula el límite de la sucesión  $\{e^{\frac{1}{n}}\}$ .

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  y  $f(x) = e^x$  es continua en  $x=0$ , entonces por teorema

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

② Calcula el límite de la sucesión  $\{n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\}$ .

Primero notemos que  $n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ .

Tomamos  $a_n = \frac{1}{n}$ ; sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . ( $\theta$  sea  $a=0$  en el teorema).

Elegimos  $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ . Tenemos que  $f$  es cont. en  $x=0$  ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 = f(0).$$

$$\text{Luego, } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(0) = f(0) = 1.$$

↓  
Aplico el  
teorema

Definiciones: decimos que la sucesión  $\{a_n\}$  es

- creciente si  $a_n \leq a_{n+1} \forall n$ ;
- estrictamente creciente si  $a_n < a_{n+1} \forall n$ ;
- decreciente si  $a_{n+1} \leq a_n \forall n$ ;
- estrictamente decreciente si  $a_{n+1} < a_n \forall n$ .

Si  $\{a_n\}$  es creciente y decreciente, decimos que es monótona.

Ejemplos:

- ①  $\{n\}$ . Como  $a_n = n < n+1 = a_{n+1} \forall n$ ,  $\{n\}$  es estrictamente creciente.
- ②  $\{\ln(n)\}$ . Sabemos que  $f(x) = \ln(x)$  es estrictamente creciente, por lo tanto  $n < n+1 \Rightarrow a_n = \ln(n) < \ln(n+1) = a_{n+1}$ . Luego  $\{\ln(n)\}$  es estrictamente creciente.
- ③  $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots\}$ . Como  $a_n \leq a_{n+1} \forall n \Rightarrow \{a_n\}$  es creciente.
- ④  $\{\frac{1}{n}\}$ . Tenemos que  $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . O sea,  $a_{n+1} < a_n \forall n$  y entonces  $\{\frac{1}{n}\}$  es estrictamente decreciente.

Definiciones: decimos que la sucesión  $\{a_n\}$  es

- (i) acotada inferiormente, si  $\exists M_1 \in \mathbb{R}$  tq  $M_1 \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- (ii) acotada superiormente, si  $\exists M_2 \in \mathbb{R}$  tq  $a_n \leq M_2 \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- (iii) acotada si existe  $M \in \mathbb{R}$  tq  $|a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ .

Ejemplos:

- ①  $\{\frac{1}{n}\}$ . Como  $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$  es acotada inf. (puedes tomar  $M=1$ ).
- ②  $\{-n\}$ . Como  $-n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{-n\}$  es acotada sup. pero no inf.
- ③  $\{n+3\}$ . Como  $4 \leq n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{n+3\}$  es acotada inf. pero no sup.

Observación: en la definición anterior decimos que  $M_i$  es <sup>una</sup> cota inferior de  $\{a_n\}$  y  $M_S$  es una cota superior de  $\{a_n\}$ .

• Así lógicamente se puede definir cota superior e inferior de cualquier subconjunto de números reales.

• Notar que las cotas sup. e inf. No son únicas.

Por ejemplo si  $a_n = (-1)^n \Rightarrow M_S = 1, M_s = -1$  son todas cotas superiores.

### Axioma de completitud de los números reales.

Todo conjunto no vacío de números reales que es acotado sup. tiene una menor cota sup. en  $\mathbb{R}$  y todo conjunto no vacío de números reales que es acotado inf. tiene una mayor cota inf. en  $\mathbb{R}$ .

Definición: Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ .

• Si  $A$  es acotado sup., la menor cota superior se llama supremo de  $A$  y la denotamos  $\sup(A)$ .

• Si  $A$  es acot. inf., la mayor cota inferior se llama ínfimo de  $A$  y la denotamos  $\inf(A)$ .

Además, si  $\sup(A) \in A$ , decimos que es el máximo de  $A$  y si  $\inf(A) \in A$ , decimos que es el mínimo de  $A$ .

Ejemplo: Pensemos a las siguientes sucesiones como conjuntos de números reales, entonces

①  $\left\{\frac{1}{n}\right\} = A$ .  $\sup(A) = 1$ ,  $\inf(A) = 0$  y  $A$  ~~no~~ tiene máximo, no mínimo.

②  $\{-n\} = B$ .  $\sup(B) = -1$ , y  $-1$  es el máximo.  $B$  no tiene ínfimo  $\therefore$  No tiene mínimo.

③  $\{(-1)^n\} = C$ .  $\sup(C) = 1$ ,  $\inf(C) = -1$ . Además  $1$  es el max. de  $C$  y  $-1$  el mínimo de  $C$ .

④  $\{n+3\} = D$ .  $\inf(D) = 4$ , y  $4$  es el mínimo de  $D$ . Además  $D$  no tiene supremo y por lo tanto no tiene máximo.

Teorema: Si  $\{a_n\}$  es convergente  $\Rightarrow$  es acotada.

Observación: La recíproca es falsa, es decir  $\{a_n\}$  acotada  $\not\Rightarrow$  convergente.

Por ejemplo,  $a_n = (-1)^n$ .

Sin embargo, sí es cierto si la sucesión es creciente o decreciente.

Teorema:

- Si  $\{a_n\}$  es creciente y acotado superiormente  $\Rightarrow \{a_n\}$  converge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_1 = \sup\{\{a_n\}\}$
- Si  $\{a_n\}$  es decreciente y acotada inferiormente  $\Rightarrow \{a_n\}$  converge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_2 = \inf\{\{a_n\}\}$

Observación: se puede demostrar que si  $\{a_n\}$  es creciente entonces converge

o  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

Análogamente, si  $\{a_n\}$  es decreciente, entonces converge o  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

Subsucesiones

Dada una sucesión  $\{a_n\}$  podemos extraer de ésta otras sucesiones descontando algunos términos (quizás una cantidad infinita). Cada una de estas nuevas sucesiones se llama subsucesión de  $\{a_n\}$ .

Ejemplo: Consideremos la sucesión  $\{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, -1, \frac{1}{5}, \dots\}$ . Podemos extraer las siguientes subsucesiones

- $\{-1, -1, -1, \dots\}$  (términos impares)
- $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$  (términos pares)
- $\{-1, -1, -1, \frac{1}{4}, -1, -1, -1, \frac{1}{7}, \dots\}$

Definición: una subsucesión de una sucesión  $\{a_n\}$  es una sucesión de la forma  $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\} = \{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ , donde los  $n_j \in \mathbb{N}$  y cumplen  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Por ejemplo,  $\left\{ \begin{matrix} a_1 & , a_2 & , a_3 & , a_4 & , a_5 & , a_6 & , \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ a_{n_1} & a_{n_2} & a_{n_3} & & & & \\ n_1=1 & n_2=3 & n_3=5 & & & & \end{matrix} \right\}$ .  
 D sea  $n_j = 2j-1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

Notar que  $\{a_{n_j}\}$  es una sucesión, o sea podemos escribir  $\{a_{n_j}\} = \{b_j\}$ .

Teorema: toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y además sus límites son iguales.

Ejemplo: Dada  $\{\frac{1}{n}\}$ , tenemos que  $\{\frac{1}{2j-1}\}$  es una subsucesión. (Otra forma de escribirlo  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $a_{n_j} = \frac{1}{2j-1}$ ). Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = 0$ .

Observación: el teorema anterior es muy útil para demostrar que una sucesión no tiene límite: basta encontrar dos subsuccesiones distintas que converjan a distintos límites.

Ejemplo: Sea  $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ . Luego  $a_{n_j} = (-1)^{2j}$  y  $a_{n_k} = (-1)^{2k+1}$  son dos subsuccesiones de  $\{a_n\}$  que convergen a 1 y -1 respectivamente  $\therefore \{a_n\}$  no tiene límite o sea diverge.

Teorema (Bolzano - Weierstrass): Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

Observación: puede haber más de una subsucesión convergente

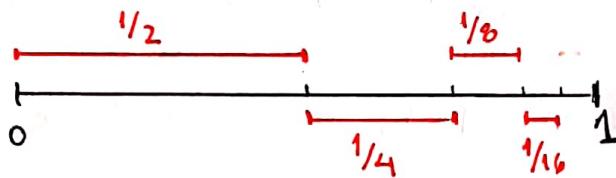
Si  $\{a_n\} = \{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, \dots\} \Rightarrow b_j = a_{2j} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$  y  $c_k = a_{2k+1} = \{-1, -1, -1, \dots\}$  son ambas sucesiones convergentes.

## Series

Dada una sucesión  $\{a_n\}$  queremos sumar sus infinitos términos, esto es  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$ ; lo cual escribiremos como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Por ejemplo si  $a_n = \frac{1}{2^n}$ , tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

Podemos pensar  $a_n$  como longitudes y entonces sumar un término se puede interpretar como agregar la mitad de lo que falta para llegar a 1.



Graficamente, es claro que la suma se aproxima a 1 tanto como se quiera.

Pero, ¿cómo sumar una cantidad infinita de números?

Como sabemos sumar una cantidad finita de números, podemos definir

$s_1 \doteq a_1$ ,  $s_2 \doteq a_1 + a_2$ , ...,  $s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$  y después hacer  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ .

Definición: dada  $\{a_n\}$  sucesión de números reales, llamaremos serie de términos

$a_n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos la  $k$ -ésima suma parcial  $s_k$  de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  como

$s_k \doteq a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n$ . Luego,  $\{s_k\}$  es una sucesión de números reales.

Si el límite de la suc.  $\{s_k\}$  existe y es finito, i.e.  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s < \infty$ , decimos que

la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente y definimos  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \doteq s$ .

Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$  no existe o es  $\pm \infty$ , decimos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es divergente.

Ejemplos: Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes. (35)

①  $\sum_{n=1}^{\infty} n$ . Tenemos que  $a_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  y por lo tanto

$$s_1 = 1; \quad s_2 = 1+2=3; \quad s_3 = 1+2+3=6, \dots, s_k = 1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Luego, como  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k(k+1)}{2} = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n$  es divergente

②  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ . Observemos que esta serie comienza desde  $n=0$ . Entonces

$$s_0 = 1; \quad s_1 = 1 + (-1) = 0; \quad s_2 = 1 + (-1) + 1 = 1; \quad \text{y en general } s_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Luego, NO existe  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$  pues  $\{s_k\}$  admite dos subsucciones con límites distintos:  $\{s_{2j}\}$  tiene límite 1 y  $\{s_{2j+1}\}$  tiene límite 0.

Al no existir  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ , tenemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  es divergente.

③  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$  parece convergente. Veremos que efectivamente, es convergente.

Definición: dado  $r \in \mathbb{R}$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots$  se llama serie geométrica.

Teorema:

(i) Si  $|r| < 1$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  es convergente y además  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

(ii) Si  $|r| \geq 1$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  es divergente.

Demonstración: Fijamos  $r \in \mathbb{R}$ . Luego tenemos que

$$\left. \begin{aligned} s_k &= 1 + r + r^2 + \dots + r^k \\ r s_k &= r + r^2 + r^3 + \dots + r^{k+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s_k - r s_k = 1 - r^{k+1}. \quad \text{O sea, } (1-r)s_k = 1 - r^{k+1}$$

(i) Supongamos  $|r| < 1$ .

Por un lado, como  $r \neq 1$ , tenemos que  $s_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$ .

Por otra parte, como  $|r| < 1$ , tenemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} r^{k+1} = r \lim_{k \rightarrow \infty} r^k = 0$  (recordar cuando analizamos la sucesión  $\{r^n\}$ )

Luego,  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-r^{k+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$  y listo!

(ii) Supongamos  $|r| \geq 1$ .

- Si  $r = -1$ , ya vimos en el ejemplo ② que  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  es divergente.

- Si  $r = 1$ , entonces  $s_k = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k-\text{veces}} = k$ . Luego,  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty$  y con lo cual  $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$  es divergente.

- Si  $|r| > 1$ .

Por un lado tenemos que  $s_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$ .

Por otra parte, ya sabemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} r^{k+1} = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ \not\exists & \text{si } r < 1 \end{cases}$  ∴ en ambos casos no es finito

Luego,  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1-r} - \frac{r^{k+1}}{1-r} \right)$  es divergente y con lo cual

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  es divergente.

Observación: Si  $|r| < 1$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$ .

Ejemplos:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$  (la serie que vimos antes!)

- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$  es divergente pues  $r = \frac{4}{3} > 1$ .

(i) Supongamos  $|r| < 1$ .

Por un lado, como  $r \neq 1$ , tenemos que  $s_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$ .

Por otra parte, como  $|r| < 1$ , tenemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} r^{k+1} = r \lim_{k \rightarrow \infty} r^k = 0$  (recordar cuando analizamos la sucesión  $\{r^n\}$ )

Luego,  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-r^{k+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$  y listo!

(ii) Supongamos  $|r| \geq 1$ .

- Si  $r = -1$ , ya vimos en el ejemplo ② que  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  es divergente.

- Si  $r = 1$ , entonces  $s_k = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k-\text{veces}} = k$ . Luego,  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty$  y con lo cual  $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$  es divergente.

- Si  $|r| > 1$ .

Por un lado tenemos que  $s_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$ .

Por otra parte, ya sabemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} r^{k+1} = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ \not\exists & \text{si } r < 1 \end{cases}$  ∴ en ambos casos no es finito

Luego,  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1-r} - \frac{r^{k+1}}{1-r} \right)$  es divergente y con lo cual

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  es divergente.

Observación: Si  $|r| < 1$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$ .

### Ejemplos:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$  (la serie que vimos antes!)

- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$  es divergente pues  $r = \frac{4}{3} > 1$ .

## Propiedades de series convergentes.

Teorema: Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  son series convergentes y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$  son series convergentes y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Demonstración (Idea): estos propiedades se desprenden de la def. de serie convergente y de las propiedades de los límites. Ejemplo: vemos que  $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

• Sean  $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$  y  $t_k = \sum_{n=1}^k b_n$ . Por hipótesis  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s < \infty$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t < \infty$

• Sea  $u_k = \sum_{n=1}^k (a_n + b_n) \rightarrow k\text{-ésima suma parcial de la serie } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

• Veamos que  $\{u_k\}$  converge.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (a_n + b_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^k a_n + \sum_{n=1}^k b_n \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k + t_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} s_k + \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = s + t \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  es convergente y Además  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Ejercicio: probar que  $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

En general, es difícil determinar la suma exacta de una serie ya que es difícil deducir una fórmula para  $s_k$ . Sin embargo, hay varios criterios que permiten establecer si una serie converge o diverge sin tener que hallar una fórmula explícita para  $s_k$ .

Teorema (Criterio de la divergencia): Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Equivalentemente, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  o  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

Demonstración: tenemos que

$$\left. \begin{array}{l} s_k = a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k \\ s_{k-1} = a_1 + \dots + a_{k-1} \end{array} \right\} \Rightarrow s_k - s_{k-1} = a_k.$$

Ahora, como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente, entonces por definición existe  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$ .

Pero entonces también vale que  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = s$  (pues  $k \rightarrow \infty \Leftrightarrow k-1 \rightarrow \infty$ )

Luego,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = s - s = 0$  ✓.

Ejemplo: Probar que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$  es divergente.

Tenemos que  $a_n = \frac{n^2}{5n^2+4}$ . Luego, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{5}$

⇒ por el Crit. de la div. la serie es divergente.

Observación: no vale el recíproco del teorema. Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Ejemplo:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (serie armónica)

Vale que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , pero veamos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  es divergente.

Vamos a probar que una subsecuencia de la sucesión de sumas parciales  $\{S_k\}$  es divergente (y por lo tanto, por teo. visto anteriormente, la sucesión  $\{S_k\}$  también diverge, o sea que la serie diverge).

Consideremos la subsecuencia  $\{S_{2^j}\}$ . Tenemos que si

$$j=1 \rightarrow S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$j=2 \rightarrow S_{2^2} = S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > S_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$j=3 \rightarrow S_{2^3} = S_8 = S_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > S_4 + 4 \cdot \frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$j=4 \rightarrow S_{2^4} = S_{16} = S_8 + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) > S_8 + 8 \cdot \frac{1}{16} = S_8 + \frac{1}{2} > 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$$

De manera general  $S_{2^j} > 1 + j \frac{1}{2}$ .

Luego,  $\lim_{j \rightarrow \infty} S_{2^j} \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 + j \frac{1}{2}\right) = \infty$ . O sea,  $\{S_{2^j}\}$  es una subsecuencia de sumas parciales que diverge. Luego  $\{S_k\}$  diverge y por def.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

Observación:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge  $\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  converge, pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0-1}}_{\text{Cantidad finita de sumandos}} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$$

## Teatrero (Criterio de comparación para series)

Si  $0 \leq a_n \leq b_n$   $\forall n \geq n_0$ , para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ , entonces  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  converge.

Equivalentemente,  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  diverge  $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  diverge.

### Demonstración:

Para cada  $K \in \mathbb{N}$  con  $K \geq n_0$  definimos  $s_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_K$  y  $t_k = b_{n_0} + b_{n_0+1} + \dots + b_K$

Como  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  converge, entonces existe  $\lim_{K \rightarrow \infty} t_K = t$ . Queremos ver que existe  $\lim_{K \rightarrow \infty} s_K$ .

Por un lado, tanto  $a_n > 0$  y  $b_n > 0$ , las sucesiones  $\{s_K\}$  y  $\{t_K\}$  son crecientes.

Además,  $a_n \leq b_n$  implica que  $s_K \leq t_K \leq \lim_{K \rightarrow \infty} t_K = t < \infty$ , con  $t$  que no depende de  $K$ . O sea que la suc.  $\{s_K\}$  está acotada y además es creciente, por lo tanto existe su límite. Entonces, por definición  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  es convergente.

Ejemplos: Analice la convergencia de los siguientes series.

①  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)^2}{2^n + n}$ . Tenemos que  $0 \leq \frac{\operatorname{sen}(n)^2}{2^n + n} \leq \frac{1}{2^n}$   $\forall n \in \mathbb{N}$ . Luego,

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  es convergente (por ser serie geométrica con  $|r| < 1$ ) por el teorema anterior podemos concluir que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n + n}$  converge.

②  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ . Tenemos que  $0 \leq \frac{n}{n^2 + n^2} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$   $\forall n \in \mathbb{N}$ . Luego,

Como  $\frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  diverge (por ser serie armónica),

entonces por el teorema concluimos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$  diverge.

## Teatrero (Criterio de Comparación en el Límite)

Sean  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  series de términos positivos. Entonces

i) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ , ent.  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  converge  $\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  converge

ii) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ , ent.  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  conv.  $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  conv. (o equiv.  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  div.  $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  div.)

iii) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ , ent.  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  div.  $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  div. (o equiv.  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  conv.  $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  conv.)

### Demonstración:

i) Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ , dado  $\epsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N}$  tq  $c - \epsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \epsilon \forall n > n_1$ .

Tomemos  $\epsilon = \frac{c}{2}$ , entonces  $\exists n_2$  tq  $\frac{c}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}c \forall n > n_2$ . Ahora, como  $b_n > 0$  tenemos que  $\frac{c}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}c b_n \forall n > n_1$ .  
(▲) (\*)

Luego, si  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  conv.  $\Rightarrow \sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$  conv. y como además se cumple (▲) por el Teo. de Comparación de Series tenemos que  $\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{c}{2} b_n$  conv. y  $\therefore \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  es convergente.

De la misma forma pero usando (\*) podemos ver que  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  conv.  $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  conv. con lo cual vemos i).

ii) Dado  $\epsilon = 1$ ,  $\exists n_1 \in \mathbb{N}$  tq  $-1 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \forall n > n_1$ . Más aún, como  $a_n$  y  $b_n$  son positivos tenemos que ①  $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1 \forall n > n_1$ , y sea  $0 < a_n \leq b_n \forall n > n_1$ .  
(●)

Ahora, si  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  conv.  $\Rightarrow \sum_{n=n_1}^{\infty} b_n$  conv. y como además se cumple (●) por el Teo. de Comparación de Series tenemos que  $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$  conv.  $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  conv.

O sea, vale ii).

iii) Dado  $M > 0$ ,  $\exists n_1 \in \mathbb{N}$  tq  $\frac{a_n}{b_n} > M \forall n > n_1$ .

Sea,  $a_n > Mb_n \forall n > n_1$  (□)

Luego, si  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  conv.  $\Rightarrow \sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$  conv y como vale (□), por el Teo. comp. tenemos que  $\sum_{n=n_1}^{\infty} Mb_n$  conv.  $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$  converge.

Ejemplo: determine si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$  converge o diverge.

Notemos que para  $n$  muy grande  $\frac{1}{2^{n-1}}$  se comporta como  $\frac{1}{2^n}$ . Entonces,

sean  $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$  y  $b_n = \frac{1}{2^n}$ .

Luego,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/2^{n-1}}{1/2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1$  y

como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  converge (serie geométrica  $r = \frac{1}{2} < 1$ )  $\Rightarrow$  por Teo.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$  converge.

Teorema (Criterio de la integral para series)

Sea  $f$  una función continua, positiva y decreciente en  $[3, \infty)$ . Si  $a_n = f(n)$ ,

entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge  $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$  converge.

Observaciones:

① No es cierto en general que  $C_1 = C_2$ .

② No es necesario iniciar la serie o la integral en  $n=1$ . Por ejemplo

para la serie  $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-4)^2}$  consideramos la integral  $\int_5^{\infty} \frac{1}{(x-4)^2} dx$ .

Ejemplo: Analice la convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , para  $0 < p < \infty$ . (43)  
(Serie P)

Sea  $f(x) = x^p$ . Tenemos que  $f$  es conti., posit. y decreciente en  $[1, \infty)$ .

Además  $f(n) = \frac{1}{n^p}$ .

Es fácil ver que  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  converge  $\Leftrightarrow p > 1$ . (Ejercicio). Luego, por el teo. del Crit. Int. para series  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge si  $p > 1$  y diverge si  $0 < p \leq 1$ .

Definición: decimos que una serie es alternante si sus términos son positivos y negativos alternadamente.

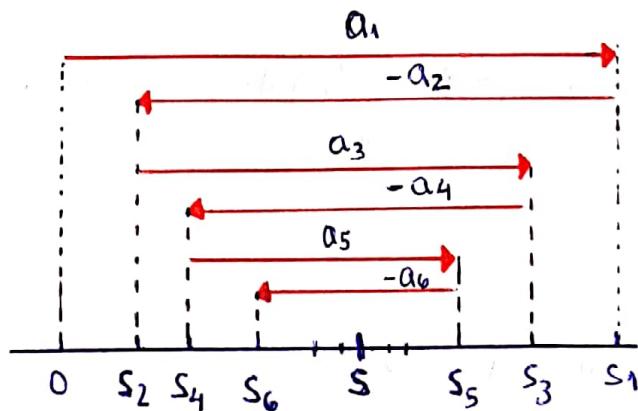
Ejemplos

$$\textcircled{1} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$\textcircled{2} \quad -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Teatrero (Criterio para series alternantes). Si  $a_n > a_{n+1} > 0 \ \forall n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Entonces,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  converge, (y por lo tanto  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  también converge)



Ejemplo: Determine si las siguientes series convergen o divergen.

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} . \quad \text{Tenemos que } a_n = \frac{1}{n} .$$

Sabemos que  $0 < n < n+1 \forall n \in \mathbb{N}$  o equiv.  $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \forall n$ . O sea,

$0 < a_{n+1} < a_n \forall n$ . Además  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Entonces, por el

Crit. para ser. alt. la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  converge.

$$\textcircled{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n-1} . \quad \text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n-1} \text{ NO existe!}$$

y entonces la serie diverge por el crit. de la divergencia.

$$\textcircled{3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} . \quad \text{Tenemos que } a_n = \frac{\ln(n)}{n} \quad \forall \underline{n \geq 1} . \quad (1)$$

Además, como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0 \Rightarrow$  por Teo de Suc.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$  . (2)

$$\text{Por último, como } \left( \frac{\ln(x)}{x} \right)' = \frac{1/x \cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} (1 - \ln(x)) < 0 \quad \forall x > e$$

tenemos que  $a_{n+1} < a_n \quad \forall \underline{n \geq 3} \quad (3)$

Luego, de (1), (2) y (3) y por el crit. de Ser. alt.  $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$  converge y con lo cual  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$  converge.

Definición: decimos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

converge absolutamente si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge y

converge condicionalmente si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge pero  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  no converge.

Ejemplo: La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$  converge absolutamente ya que la serie

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge por ser serie P con } p=2 > 1.$$

Teorema: Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

Demonstración:

Tenemos que  $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , luego  $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Como por hipótesis  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  es convergente, entonces por el Teo. de Comparación de series

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$  es convergente. Luego  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente.

Ejemplo: Decidir si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$  converge o diverge.

Tenemos que  $0 \leq \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Además  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge (serie P=2>1)

Luego, por Teo. Comp.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right|$  converge y en lo cual  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$  converge.

Observación: NO vale la recíproca, es decir  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  conv.  $\not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  conv.

Por ejemplo,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge (por crit. series alternantes) pero  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge (serie aritmética).

En este caso decimos que la serie converge condicionalmente.

Teatrero (Criterio del cociente). Sean  $a_n \neq 0$  y  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ . (46)

- (i) Si  $r < 1$ , entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente (y por lo tanto es convergente).
- (ii) Si  $r > 1$ , entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es divergente (puede ser  $r = \infty$ ).
- (iii) Si  $r = 1$ , entonces no se puede asegurar nada.

### Demonstración

(i) Sup.  $r < 1$ . Elegimos  $s$  tq  $r < s < 1$  y sea  $\varepsilon = s - r > 0$ . Ahora, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$  existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tq  $\left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - r \right| < \varepsilon = s - r \quad \forall n \geq n_1$ . En particular,  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < s \quad \forall n \geq n_1$ .

Luego,  $|a_{n+1}| < s |a_n|$ ,

$$|a_{n+2}| < s |a_{n+1}| < s^2 |a_n| \quad \text{y en general } 0 < |a_{n+k}| < s^k |a_n| \quad \forall k \geq 1.$$

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} s^k |a_n| = |a_n| \sum_{n=1}^{\infty} s^k$  es convergente pues  $s < 1$  (serie geom.), por el Crt. de Compar.

La serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| = \sum_{n=n_1+1}^{\infty} |a_n|$  y también  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , ya que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es abs. conv.

(ii) Sup.  $r > 1$  y sea  $s$  tq  $1 < s < r$  y  $\varepsilon = r - s > 0$ . Por hipótesis existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tq  $\left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - r \right| < r - s \quad \forall n \geq n_1$ . En particular,  $-(r - s) < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - r \quad \forall n \geq n_1$ ,

o sea,  $s < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \forall n \geq n_1$  (notar que esto también vale si  $r = \infty$ , ver def. de límite).

Luego,  $|a_{n+1}| > s |a_n|$ ,  $|a_{n+2}| > s |a_{n+1}| > s^2 |a_n|$  y en gen.  $|a_{n+k}| > s^k |a_n| \quad \forall k \geq 1$ .

Ahora tomo  $s > 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n+k}| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} s^k |a_n| = \infty$ . Entonces, por el criterio de la divergencia  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = \sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n$  no converge y  $\therefore$  tampoco converge  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

(iii) Si  $a_n = \frac{1}{n}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

• Si  $a_n = \frac{1}{n^2}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.

Por lo tanto si  $r=1$  NO podemos asegurar nada.

Ejemplo: analice si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ , con  $c \neq 0$ , converge o diverge.

Tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c|^{n+1}}{|c|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |c| \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} |c| = 0$ .

Luego, por el crit. del cociente la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$  conv. absolutamente (y ∴ converge)

Observación: notar que del ejemplo anterior podemos concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$   $\forall c \in \mathbb{R}$  (solo usando el criterio de la divergencia).

Ejemplo: analice la convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n c^n$ , para  $c \neq 0$ .

Tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)|c|^{n+1}}{n|c|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |c| \frac{n+1}{n} = |c|$ . Por lo tanto,

• Si  $|c| < 1$ , la serie converge absolutamente.

• Si  $|c| > 1$ , la serie diverge.

• Si  $c = 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  diverge por crit. divergencia

• Si  $c = -1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$  diverge por crit. de divergencia.

Teatrero (Criterio de la raíz): Dada la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , sea  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

- (i) Si  $r < 1$ , entonces la serie es absolutamente conv. (y por tanto es convergente).
- (ii) Si  $r > 1$ , entonces la serie diverge.
- (iii) Si  $r = 1$ , no se puede asegurar nada.

Demonstración:

- (i) Sup.  $r < 1$ . Elegimos  $s$  tq  $r < s < 1$  y sea  $\epsilon = s - r > 0$ . Por hipótesis existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tq  $|\sqrt[n]{|a_n|} - r| < \epsilon = s - r \quad \forall n \geq n_0$ . En particular,  $\sqrt[n]{|a_n|} < s \quad \forall n \geq n_0$  y por tanto  $0 \leq |a_n| < s^n \quad \forall n \geq n_0$ . Luego, como  $s < 1$ ,  $\sum_{n=n_0}^{\infty} s^n$  conv. (serie geom.) y entonces por el crit. comparación también converge  $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$  y  $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ . Luego, vale (i).
- (ii) Sup.  $r > 1$ . Elegimos  $s$  tq  $r > s > 1$  y sea  $\epsilon = r - s > 0$ . Por hipótesis existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tq  $|\sqrt[n]{|a_n|} - r| < \epsilon = r - s \quad \forall n \geq n_0$ . En particular  $-(r-s) < \sqrt[n]{|a_n|} - r \quad \forall n \geq n_0$  o equiv.  $s < \sqrt[n]{|a_n|} \quad \forall n \geq n_0$  (notar que esto vale si  $r = \infty$ , ver def. de límite). Luego,  $|a_n| > s^n \quad \forall n \geq n_0$  y con lo cual  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s^n = \infty$ . Entonces, por el criterio de la divergencia la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

(iii)

$$\begin{aligned} \text{Si } a_n = \frac{1}{n}, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln(\sqrt[n]{\frac{1}{n}})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \cdot \ln(\frac{1}{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} (\ln(1) - \ln(n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\ln(n)}{n}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

y sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x} = 0$$

• Si  $a_n = \frac{1}{n^2}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{2 \ln(n)}{n}} = e^0 = 1$  (49)

y sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.

Por lo tanto si  $r=2$ , no podemos asegurar nada.