Práctico 1: Expresiones Cuantificadas

Algoritmos y Estructuras de Datos I
1^{er} cuatrimestre 2025

Un objetivo de esta guía es retomar la práctica del cálculo proposicional y de predicados, e introducirnos al cálculo con cuantificadores generales. Otro objetivo es recuperar la práctica en la definición de funciones recursivas y demostraciones por inducción. Lograr familiaridad con los axiomas y teoremas del cálculo, y habilidad en las demostraciones es necesario para poder abordar la tarea de derivación y demostración de programas que encararemos de aquí en adelante.

El primer ejercicio es de repaso de la materia Introducción a los Algoritmos sobre el tema Cálculo Proposicional. Se recomienda hacerlo en la casa y comenzar en clases por el ejercicio 2.

1. Los siguientes teoremas van a ser de mucha utilidad a lo largo de toda la materia, por lo tanto es útil recordarlos. Demuéstrelos utilizando los axiomas y teoremas del cálculo proposicional listados en el digesto (y cualquier otro teorema que se te ocurra y demuestres, claro). Tenga en cuenta las siguientes ayudas que pueden serle útiles:

   - Si hay que demostrar una equivalencia, puede ser mejor comenzar con el término más *complejo* e intentar llegar al termino más simple.
   - La Regla Dorada siempre es útil cuando el teorema incluye la conjunción, ya que permite obtener una fórmula que incluye la disjunción, para la cual existen mas reglas.
   - Las reglas de distributividad ayudan a eliminar paréntesis.
   - Para resolver un teorema se pueden utilizar los demás teoremas ya demostrados, sobre todo si tienen la misma *pinta*.

   a) *Debilitamiento para* $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$.
   b) *Debilitamiento para* $\vee$: $p \Rightarrow p \vee q$.
   c) *Relación entre* $\Rightarrow$ *y* $\vee$: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
   d) *Contrarrecíproca*: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.
   e) *De Morgan para* $\wedge$: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
   f) *De Morgan para* $\vee$: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
   g) *Distributividad de* $\vee$ *con* $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   h) *Distributividad de* $\wedge$ *con* $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   i) *Intercambio para* $\Rightarrow$: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.
   j) *Implicación de la disyunción*: $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$.
   k) *Distributividad de* $\Rightarrow$ *con respecto a* $\wedge$: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$.

2. Para cada una de las siguientes fórmulas, describa su significado utilizando el lenguaje natural.

   a) $\langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : xs.i > 0 \rangle$
   b) $\langle \exists i : 0 \leq i < \#xs : xs.i = x \rangle$
   c) $\langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : \langle \exists j : 0 \leq j < \#ys : xs.i = ys.j \rangle \rangle$
   d) $\langle \forall i : 0 \leq i < \#xs - 1 : xs.i = xs.(i+1) \rangle$

   Observación: Las desigualdades de la forma $A \leq B < C$ son abuso de notación para $(A \leq B) \wedge (B < C)$.

3. Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior, evalúe la fórmula en las siguientes listas:

   a) $xs = [-5, -3, 4, 8]$
   b) $xs = [11, 2, 5, 8]$

Para el ítem b), considerar $x = 5$. Para el ítem c), considerar $ys = [2, -3, 11]$.

Ejemplo: Fórmula 4.a) aplicada a $xs = [-5, -3, 4, 8]$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle \forall i \ : 0 \leq i < \#xs : \ xs.i > 0 \rangle \\
\equiv & \{ \text{ calculo rango sabiendo que } \#xs = 4 \ \} \\
 & \langle \forall i \ : i \in \{0, 1, 2, 3\} : \ xs.i > 0 \rangle \\
\equiv & \{ \text{ aplico el término a cada elemento del rango } \} \\
 & (xs.0 > 0) \wedge (xs.1 > 0) \wedge (xs.2 > 0) \wedge (xs.3 > 0) \\
\equiv & \{ \text{ evalúo las indexaciones con } xs = [-5, -3, 4, 8] \ \} \\
 & (-5 > 0) \wedge (-3 > 0) \wedge (4 > 0) \wedge (8 > 0) \\
\equiv & \{ \text{ evalúo las desigualdades } \} \\
 & False \wedge False \wedge True \wedge True \\
\equiv & \{ \text{ resuelvo las conjunciones } \} \\
 & False
\end{array}
$$

4. Escriba fórmulas para las siguientes expresiones en lenguaje natural.

   a) Todos los elementos de xs ocurren en ys.

   b) Todos los elementos de xs ocurren en ys en la misma posición.

   c) Todos los elementos de xs e ys son iguales (*¡ojo! ¡sujeta a interpretación!*).

5. Suponiendo que $f : A \to Bool$ es una función fija cualquiera, y $xs : [A]$. Caracterice con una cuantificación la siguiente función recursiva:

$$algunof : [A] \to Bool$$

$$
\begin{aligned}
algunof.[\,] &= False \\
algunof.(x \triangleright xs) &= f.x \vee algunof.xs
\end{aligned}
$$

6. Defina recursivamente una función *todos* : [*Bool*] $\to$ *Bool* que verifica que todos los elementos de una lista son $True$, es decir, que satisface la siguiente especificación:

$$todos.xs \equiv \langle \forall i \ : 0 \leq i < \#xs : \ xs.i \rangle$$

7. Enuncie los axiomas de *rango vacío*, *rango unitario*, *partición de rango* y *término constante* para cada uno de los siguientes cuantificadores:

   a) Cuantificador universal ($\forall$)

   b) Cuantificador existencia ($\exists$)

   c) Sumatoria ($\sum$)

   d) Productoria ($\prod$)

   e) Máximo (Max)

   f) Mínimo (Min)

   g) Intesección ($\bigcap$)

   h) Unión ($\bigcup$)

8. **(Separación de un término)** Demuestre los siguientes teoremas útiles para la materia.

   Suponga que $\bigoplus$ es un cuantificador asociado a un operador genérico $\oplus$, que es conmutativo y asociativo (así como el $\forall$ es el cuantificador asociado a la conjunción $\wedge$) y $n : Nat$.

   a) $\langle \bigoplus i \ : 0 \leq i < n+1 : \ T.i \rangle = \langle \bigoplus i \ : 0 \leq i < n : \ T.i \rangle \oplus T.n$

   b) $\langle \bigoplus i \ : 0 \leq i < n+1 : \ T.i \rangle = T.0 \oplus \langle \bigoplus i \ : 0 \leq i < n : \ T.(i+1) \rangle$

9. Defina recursivamente las siguientes funciones.

   a) La función *paratodo*, que dada una lista de valores $xs : [A]$ y un predicado $T : A \to Bool$, determina si todos los elementos en xs hacen verdadero el predicado T, es decir:

$$paratodo : [A] \to (A \to Bool) \to Bool$$

$$paratodo.xs.T \equiv \langle \forall i \ : 0 \leq i < \#xs : \ T.(xs.i) \rangle$$

   Puede ser de ayuda recordar la función del ejercicio 6.

b) La función *existe*, que dada una lista de valores $xs : [A]$ y un predicado $T : A \to Bool$, determina si algún elemento en xs hace verdadero el predicado T, es decir:

$$existe : [A] \to (A \to Bool) \to Bool$$

$$existe.xs.T \equiv \langle \exists i \ : 0 \leq i < \#xs : \ T.(xs.i) \rangle$$

Puede ser de ayuda recordar la función del ejercicio 5.

c) La función *sumatoria*, que dada una lista de valores $xs : [A]$ y una función $T : A \to Num$ (toma elementos de A y devuelve números), calcula la suma de la aplicación de T a los elementos en xs es decir:

$$sumatoria : [A] \to (A \to Num) \to Num$$

$$sumatoria.xs.T = \langle \sum i \ : 0 \leq i < \#xs : \ T.(xs.i) \rangle$$

d) La función *productoria*, que dada una lista de valores $xs : [A]$ y una función $T : A \to Num$, calcula el producto de la aplicación de T a los elementos de xs, es decir:

$$productoria : [A] \to (A \to Num) \to Num$$

$$productoria.xs.T = \langle \prod i \ : 0 \leq i < \#xs : \ T.(xs.i) \rangle$$

10. Todas las funciones del ejercicio 9 son similares entre sí: cada una aplica la función término T a todos los elementos de una lista, y luego aplica algún operador entre todos ellos, obteniendose así el resultado final. Para el caso de la lista vacía, se devuelve el elemento neutro.

    Guiándose por esta observación, defina de manera recursiva la función *cuantGen* (denota la cuantificación generalizada) que tomando como argumento un operador, su elemento neutro, una lista de elementos y una función término, aplica el operador a los elementos de la lista, transformados por la función término:

$$cuantGen : (B \to B \to B) \to B \to [A] \to (A \to B) \to B$$

$$cuantGen. \oplus .z.xs.T = \langle \bigoplus i \ : 0 \leq i < \#xs : \ T.(xs.i) \rangle$$

11. Programar todas las funciones del ejercicio 9 en una sola linea usando *cuantGen*.

12. Podemos definir un cuantificador de *conteo* N utilizando la sumatoria:

$$\langle \mathrm{N}\, i \ : R.i : \ T.i \rangle \doteq \langle \sum i \ : R.i \wedge T.i : \ 1 \rangle$$

    a) Enuncie y demuestre las reglas de *rango vacío*, *rango unitario* y *partición de rango* para N.
    b) Demuestre que $\langle \sum i \ : \ R.i \wedge T.i \ : \ k \rangle = \langle \mathrm{N} i \ : \ R.i \ : \ T.i \rangle * k$
    c) ¿Que reglas de los cuantificadores generales no valen?
    ¿Por que?

13. Escriba fórmulas para las siguientes expresiones en lenguaje natural. Responder: ¿Qué tipo tiene cada expresión?

    a) n es potencia de 2.
    b) n es el elemento más grande de xs.
    c) El producto de los elementos pares de xs.
    d) La suma de los elementos en posición par de xs.

14. **(Eliminación de una dummy)** Sea $\oplus$ un cuantificador asociado a un operador conmutativo y asociativo. Probar la siguiente regla de eliminación de una *dummy* (Z no depende de i ni de j):

$$\langle \bigoplus i, j \ : i = Z \wedge R.i.j : \ T.i.j \rangle = \langle \bigoplus j \ : R.Z.j : \ T.Z.j \rangle \quad .$$

15. Para cada una de las siguientes fórmulas, describa su significado utilizando el lenguaje natural.

    a) $\langle \prod i \ : 1 \leq i \leq n : \ i \rangle$

b) $\dfrac{\langle \sum i \ : 0 \leq i < \#xs : \ xs.i \,\rangle}{\#xs}$

c) $\langle \text{Max } i \ : 0 \leq i < \#xs : \ xs.i \,\rangle < \langle \text{Min } i \ : 0 \leq i < \#ys : \ ys.i \,\rangle$

d) $\langle \,\exists\, i, j \ : (2 \leq i < n) \wedge (2 \leq j < n) : \ i * j = n \,\rangle$

16. Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior, evalúe respectivamente con los siguientes valores:

    a) $n = 5$.

    b) $xs = [6, 9, 3, 9, 8]$.

    c) $xs = [-3, 9, 8], ys = [6, 7, 8]$.

    d) $n = 5$.

Ejercicios extra

17. Demuestre la siguiente relación entre los cuantificadores de máximo y mínimo cuando R es no vacío:

$$n = \langle \text{Min } i \ : \ R.i \ : \ -T.i \rangle \ \equiv \ n = -\langle \text{Max } i \ : \ R.i \ : \ T.i \rangle$$

18. **(Separación de un término 2D)** Suponga que $\bigoplus$ es un cuantificador asociado a un operador genérico $\oplus$, que es conmutativo y asociativo (así como el $\forall$ es el cuantificador asociado a la conjunción $\wedge$) y $n : Nat$. Demuestre las siguientes reglas:

    a) $\langle \bigoplus i, j \ : 0 \leq i < j < n+1 : \ T.i.j \,\rangle =$
    $\langle \bigoplus i, j \ : 0 \leq i < j < n : \ T.i.j \,\rangle \oplus \langle \bigoplus i \ : 0 \leq i < n : \ T.i.n \,\rangle$

    b) $\langle \bigoplus i, j \ : 0 \leq i < j < n+1 : \ T.i.j \,\rangle =$
    $\langle \bigoplus j \ : 0 \leq j < n : \ T.0.(j+1) \,\rangle \oplus \langle \bigoplus i, j \ : 0 \leq i < j < n : \ T.(i+1).(j+1) \,\rangle$

    Ayuda: Escriba las desigualdades en el rango $0 \leq i < j < n+1$ como $0 \leq i \wedge i < j \wedge j < n+1$, aplicar anidado, partición de rango y rango unitario en una de las variables. Puede ser útil esquematizar el rango en el plano cartesiano para visualizar el resultado.

19. Demuestra el siguiente teorema sobre $\forall$, utilizando los axiomas y teoremas del digesto:

    a) *Intercambio para $\forall$ (generalizada)*: $\langle \forall i \ : \ R.i \wedge S.i \ : \ T.i \rangle \equiv \langle \forall i \ : \ R.i \ : \ S.i \Rightarrow T.i \rangle$

    b) *Instanciación de $\forall$*: $\langle \forall i \ : \ : \ T.i \rangle \Rightarrow T.x$, cuando x no está cuantificada.
    ¿Como sería la regla de instanciación para $\exists$? Enunciala y demostrala.