

Clase 15 - Análisis Matemático 1 - LC: Derivadas

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

8 de Mayo de 2020

Índice

- 1 Repaso
 - Derivadas de funciones trigonométricas, exponencial y logaritmo
- 2 Derivada de función inversa
 - Derivadas de funciones trigonométricas inversas
- 3 Ecuación de la recta tangente
- 4 Derivadas de orden superior
- 5 Diferenciación logarítmica

Resumen

$F(x)$	$F'(x)$
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$c \cdot f$	$c \cdot f'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

	$f(x)$	$f'(x)$
<i>constante</i>	c	0
$r \in \mathbb{R}$	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
	$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
	e^x	e^x
$a > 0$	a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$x > 0$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$a > 0 \wedge x > 0$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

Ejemplos

$$1 \quad f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} e^{x+1}\right)$$

$$F(x) = \cos(x), G(x) = \frac{\pi}{2} e^x \text{ y } H(x) = x + 1$$

$$f(x) = F(G(H(x))) \quad f'(x) = F'(G(H(x))) \cdot G'(H(x)) \cdot H'(x)$$

$$F'(x) = -\operatorname{sen}(x), G'(x) = \frac{\pi}{2} e^x \text{ y } H'(x) = 1x^{(1-1)=1}$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} e^{x+1}\right) \cdot \frac{\pi}{2} e^{x+1} \cdot (1) = \boxed{-\frac{\pi}{2} e^{x+1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} e^{x+1}\right)}$$

$$2 \quad f(x) = \tan(\sqrt{x}) \quad F(x) = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \text{ y } G(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = F(G(x)) \text{ y } f'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x)$$

$$F'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

$$f'(x) = \sec^2(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2} x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sec^2(\sqrt{x})}$$

$$3 \quad f(x) = e^x \operatorname{sen}(3-x) \quad F(x) = e^x, G(x) = \operatorname{sen}(x), H(x) = 3-x$$

$$f(x) = F(x) \cdot G(H(x)) \quad f'(x) = F'(x) \cdot G(H(x)) + F(x) \cdot [G'(H(x)) \cdot H'(x)]$$

$$f'(x) = e^x \operatorname{sen}(3-x) + e^x [\cos(3-x) \cdot (-1)] = \boxed{e^x [\operatorname{sen}(3-x) - \cos(3-x)]}$$

Derivada de la función inversa

$$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) / \boxed{f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))}$$

Ejemplos:

- $f(x) = x^3$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ $f(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x))^3 = (\sqrt[3]{x})^3 = x$
- $f(x) = e^x$ y $f^{-1}(x) = \ln(x)$ $f(f^{-1}(x)) = e^{\ln(x)} = x = \ln(e^x)$
- a^x y $\log_a(x)$
- $\text{sen}(x)$ y $\text{arcsen}(x)$
- $\text{cos}(x)$ y $\text{arccos}(x)$
- $\text{tan}(x)$ y $\text{arctan}(x)$
- ...

$$(f^{-1}(x))' = ??$$

Derivada de la función inversa

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

$$\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)' = (x)'$$

$$f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Ejemplo: $f(x) = e^x$ y $f^{-1}(x) = \ln(x)$
 $f'(x) = e^x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Derivadas de inversas de las trigonométricas

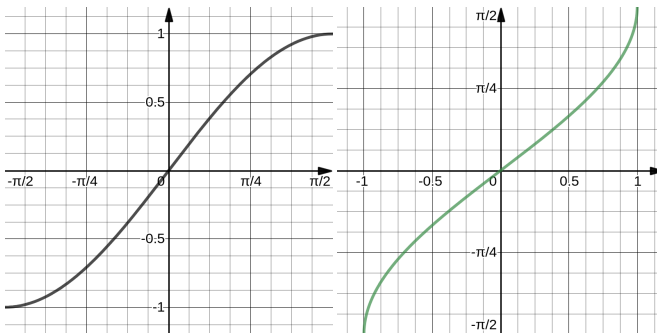
$$g(x) = \arcsen(x)$$

$f(x) = \text{sen}(x)$ es inyectiva si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = g(x)$$



Derivadas de inversas de las trigonométricas

$$g(x) = \arcsen(x)$$

$f(x) = \text{sen}(x)$ es inyectiva si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow f^{-1}(x) = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))}$$

$$\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha) = 1 \rightarrow \cos^2(\arcsen(x)) + \text{sen}^2(\arcsen(x)) = 1$$

$$\cos^2(\arcsen(x)) + x^2 = 1 \Rightarrow \cos^2(\arcsen(x)) = 1 - x^2$$

$$\cos(\arcsen(x)) = \pm \sqrt{1 - x^2} \quad \arcsen(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos(\alpha) \geq 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Derivadas de inversas de las trigonométricas

$$g(x) = \arccos(x)$$

$f(x) = \cos(x)$ es inyectiva si $x \in [0, \pi]$

$$f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \Rightarrow f^{-1}(x) = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(g(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))}$$

$$\cos^2(\arccos(x)) + \operatorname{sen}^2(\arccos(x)) = 1$$

$$\operatorname{sen}^2(\arccos(x)) + x^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$$

$$\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \pm \sqrt{1 - x^2} \quad \arccos(x) \in [0, \pi] \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) \geq 0$$

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

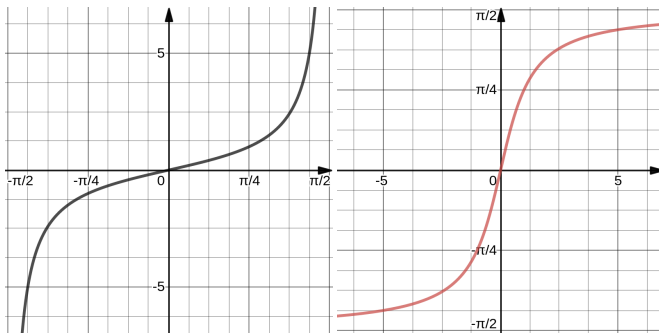
Derivadas de inversas de las trigonométricas

$$g(x) = \arctan(x)$$

$f(x) = \tan(x)$ es inyectiva si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

$$f^{-1} : (-\infty, +\infty) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f^{-1}(x) = g(x)$$



Derivadas de inversas de las trigonométricas

$$g(x) = \arctan(x)$$

$f(x) = \tan(x)$ es inyectiva si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

$$f^{-1} : (-\infty, +\infty) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f^{-1}(x) = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\sec^2(g(x))} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}$$

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \rightarrow \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Rightarrow 1 + \tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$$

$$1 + \tan^2(\arctan(x)) = \sec^2(\arctan(x)) \Rightarrow \sec^2(\arctan(x)) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Reglas de derivación y derivadas de funciones elementales

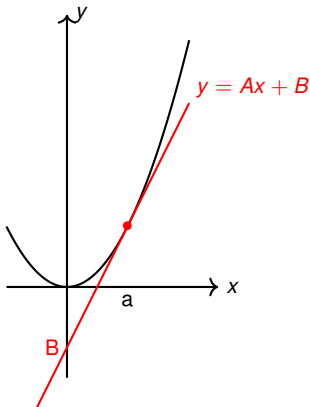
$F(x)$	$F'(x)$
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$c \cdot f$	$c \cdot f'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$



	$f(x)$	$f'(x)$
constante	c	0
$r \in \mathbb{R}$	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
	$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
	e^x	e^x
$a > 0$	a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$x > 0$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$a > 0 \wedge x > 0$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
$-1 \leq x \leq 1$	$\arcsen(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$-1 \leq x \leq 1$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Ecuación de la recta tangente

“La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta que es tangente a la función en ese punto”



$$y = Ax + B$$

A Se consigue evaluando la FCa)

$$A = f'(a)$$

$$B??? \quad x = a \Rightarrow y = f(a) \Rightarrow f(a) = A \cdot a + B$$

es la función evaluada en a

$$B = f(a) - A \cdot a = f(a) - f'(a) \cdot a$$

$$y = \overbrace{f'(a)}^A x + \overbrace{f(a) - af'(a)}^B = \boxed{f'(a)(x - a) + f(a) = y}$$

Ejemplos

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}e^{x+1}\right)$$

Dar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto $(-1, 0)$

$$f(-1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}e^{-1+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y = Ax + B$$

$$A = f'(-1) \quad f'(x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}e^{x+1}\right) \cdot \frac{\pi}{2}e^{x+1} \Rightarrow f'(-1) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = -1 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{A = -\frac{\pi}{2}}$$

$$y = -\frac{\pi}{2}x + B$$

$$(-1, 0) \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} \cdot (-1) + B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = -\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{y = -\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}(x + 1)$$

Ejemplos

$$f(x) = e^x$$

Dar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto $(0, 1)$

$$y = Ax + B$$

$$A = f'(0) \quad f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = \boxed{1 = A}$$

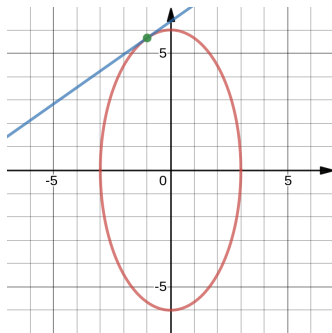
$$x = 0 \rightarrow y = 1 \Rightarrow 1 = A \cdot 0 + B \quad \boxed{B = 1}$$

$$y = \overbrace{1}^A x + \overbrace{1}^B$$

Ejemplos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Dar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la elipse en el punto $(-1, 4\sqrt{2})$



Ejemplos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Dar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la elipse en el punto $(-1, 4\sqrt{2})$

$$y^2 = 36 \left(1 - \frac{x^2}{9} \right) \quad y = \pm \sqrt{36 - \frac{36}{9}x^2}$$

(y toma valores \pm porque NO es una función sino la curva de la elipse)

$$(-1, 4\sqrt{2}) \rightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{36 - 4x^2}} \quad f(-1) = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

$$r = Ax + B \quad A = f'(-1) \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (36 - 4x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-8x)$$

$$f'(-1) = \frac{1}{2\sqrt{36-4}} \cdot (-8) \cdot (-1) = \frac{8}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} = A}$$

$$x = -1 \rightarrow r = f(-1) = 4\sqrt{2} \quad \Rightarrow 4\sqrt{2} = A(-1) + B \rightarrow 4\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + B$$

$$\rightarrow B = 4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(4 + \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{9}{2}\sqrt{2} = B}$$

$$r = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_A x + \underbrace{\frac{9}{2}\sqrt{2}}_B$$

Derivadas de orden superior

La derivada de una función f es una función f' que a su vez puede ser derivable en algunos puntos. La derivada de la derivada se llama **derivada segunda** y se denota f'' o $f^{(2)}$

Si continuamos el proceso podemos definir la n -ésima derivada o derivada de orden

n : $f^{(n)}$. Otra notación: $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}$

Ejemplos:

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f^{(3)} = 24x$$

$$f^{(4)} = 24$$

$$f^{(5)} = 0$$

bueno

Si $n \geq 5$, $f^{(n)} = 0$

Diferenciación logarítmica

$$f(x) = \frac{x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x^2 + 4}}{(4x - 2)^2}$$

1 Tomar logaritmo de ambos lados

$$\ln(f(x)) = \ln\left(\frac{x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x^2 + 4}}{(4x - 2)^2}\right) = \ln\left(x^{\frac{5}{4}}\right) + \ln(\sqrt{x^2 + 4}) - \ln((4x - 2)^2)$$

$$\ln(f(x)) = \frac{5}{4} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - 2 \ln(4x - 2)$$

2 Derivar de ambos lados

$$(\ln(f(x)))' = \left(\frac{5}{4} \ln(x)\right)' + \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4)\right)' - (2 \ln(4x - 2))'$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 4} \cdot 2x - 2 \cdot \frac{1}{4x - 2} \cdot 4$$

3 Despejar $f'(x)$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{5}{4x} + \frac{x}{(x^2 + 4)} - \frac{8}{4x - 2} \right) = \boxed{\frac{x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x^2 + 4}}{(4x - 2)^2} \cdot \left(\frac{5}{4x} + \frac{x}{(x^2 + 4)} - \frac{8}{4x - 2} \right)}$$

FIN