

## Clase 6 - Análisis Matemático 1 - LC: Funciones III

Eugenia Díaz-Giménez<sup>1</sup>

[eugenia.diaz@unc.edu.ar](mailto:eugenia.diaz@unc.edu.ar)

27 de Marzo de 2020

# Índice

## 1 Repaso clase anterior...

- Funciones Pares, impares, composición, inyectivas, sobreyectivas, inversas.

## 2 Parábolas

- Forma polinómica, factorizada y canónica

## 3 Circunferencia y elipse

- Ecuaciones

## 4 Trigonometría

- Ángulos notables
- Gráficos

# Repaso...

## Función Par

Una función se dice par si  $f(-x) = f(x)$

## Función Impar

Una función se dice impar si  $f(-x) = -f(x)$

## Composición de funciones

Dadas dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , definimos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

# Repaso...

## Inyectivas

Una función  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  se dice **inyectiva** si no hay dos elementos del dominio de  $f$  con igual imagen. Es decir, si

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

## Sobreyectiva (o suryectiva)

Una función  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  se dice **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto de llegada es un elemento de la imagen de  $f$ . Es decir, si

$$\mathbb{B} = \text{Im } f$$

## Biyectiva

Una función se dice **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva

## Función Inversa

Si una función  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  es **biyectiva**, entonces tiene inversa y se llama  $f^{-1}$ . Se define de manera que

$$f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x)) \rightarrow \text{Si } f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

# Ejemplo

Hallar dominio e imagen, decidir si tiene inversa y calcularla.

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2x - 1}$$

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / \exists f(x)\} = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 1 \neq 0\}$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dom } f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\text{Im } f = ??? = \text{Dom } f^{-1}$$

## Ejemplo

Hallar dominio e imagen, decidir si tiene inversa y calcularla.

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2x - 1}$$

Es inyectiva?

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{2x_1 + 1}{2x_1 - 1} = \frac{2x_2 + 1}{2x_2 - 1}$$

$$(2x_1 + 1)(2x_2 - 1) = (2x_2 + 1)(2x_1 - 1)$$

$$4x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 - 1 = 4x_1x_2 - 2x_2 + 2x_1 - 1$$

$$4x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 - 1 - 4x_1x_2 + 2x_2 - 2x_1 + 1 = 0$$

$$4x_2 - 4x_1 = 0 \Rightarrow 4x_2 = 4x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$f(x)$  Sí es inyectiva

## Ejemplo

Hallar dominio e imagen, decidir si tiene inversa y calcularla.

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2x - 1}$$

Es sobreyectiva?

Si una función es inyectiva y no conocemos de antemano el conjunto de llegada, podemos decidir que el conjunto de llegada ES IGUAL a la imagen

Tomando que el conjunto de llegada es  $Im f$ ,  $f(x)$  Sí es sobreyectiva.

Por lo tanto,  $f(x)$  es biyectiva y tiene inversa.

## Ejemplo

Hallar dominio e imagen, decidir si tiene inversa y calcularla.

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2x - 1}$$

Cálculo de la inversa:

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2f^{-1}(x) + 1}{2f^{-1}(x) - 1} = x$$

llamo  $f^{-1}(x) = \beta$  (sólo para que no se vea tan feo!)

$$\frac{2\beta + 1}{2\beta - 1} = x$$

$$2\beta + 1 = x(2\beta - 1) \Rightarrow 2\beta + 1 = 2x\beta - x$$

$$2\beta - 2x\beta = -x - 1$$

$$(2 - 2x)\beta = -x - 1$$

$$\beta = \frac{-x - 1}{2 - 2x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x - 1}{2 - 2x}$$



## Ejemplo

Hallar dominio e imagen, decidir si tiene inversa y calcularla.

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2-2x}$$

$$Im f = Dom f^{-1}$$

$$Dom f^{-1} = \{x \in \mathbb{R} / \exists f^{-1}(x)\} = \{x \in \mathbb{R} / 2 - 2x \neq 0\}$$

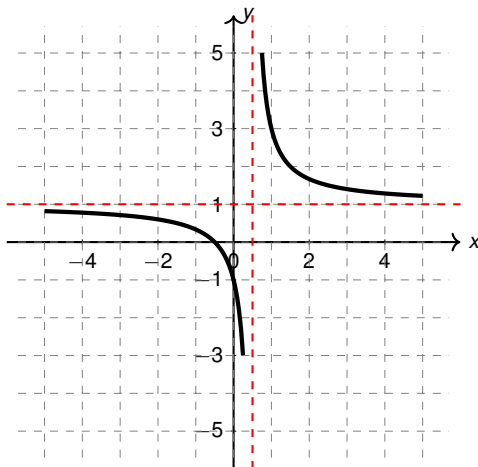
$$2 - 2x = 0 \Rightarrow 2 = 2x \Rightarrow x = 1$$

$$Dom f^{-1} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$Dom f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}, \quad Im f = \mathbb{R} - \{1\}, \quad f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2-2x}$$

Para encontrar la inversa, solamente invierto  $x=y$

$$x = \frac{-y-1}{2-2y}$$



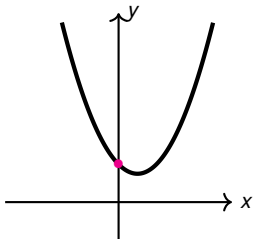
$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2-2x}$$

# Parábola

Forma polinómica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- $c$  es el valor de la función para  $x = 0 \rightarrow$  corte en el eje  $y$
- El signo de  $a$  indica si las ramas son hacia arriba o hacia abajo

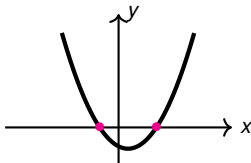


# Parábola

Forma factorizada:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- $x_1$  y  $x_2$  son las raíces, i.e.,  $f(x_1) = 0$  y  $f(x_2) = 0 \rightarrow$  corte en el eje  $x$
- El signo de  $a$  indica si las ramas son hacia arriba o hacia abajo



Para pasar de la forma polinómica a la forma factorizada  $\rightarrow$  Baskhara

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para pasar de la forma factorizada a la forma polinómica  $\rightarrow$  Propiedad distributiva

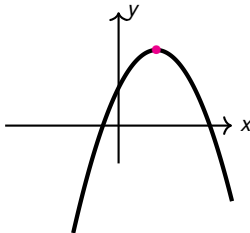
$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \rightarrow (x_1 + x_2) = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

# Parábola

## Forma canónica

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

- $x_v$  e  $y_v$  son las coordenadas del vértice de la curva
- El signo de  $a$  indica si las ramas son hacia arriba o hacia abajo



Para pasar de la forma canónica a la forma polinómica → Cuadrado del binomio

$$a(x - x_v)^2 + y_v = a(x^2 - 2x_v x + x_v^2) + y_v = ax^2 - 2ax_v x + ax_v^2 + y_v \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = c - \frac{b^2}{4a}$$

Para pasar de la forma polinómica a la forma canónica → Completar cuadrados\* o usar la definición de  $x_v = -\frac{b}{2a}$ , y una vez calculado, evaluar  $f(x_v) = y_v$

# Competar cuadrados

Queremos pasar de la forma polinómica a la forma canónica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_v)^2 + y_v$$

1 Calculamos  $x_v = -\frac{b}{2a}$  Dónde vimos esa expresión?

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las raíces están equidistantes respecto del vértice!  $x = x_v$  es el eje de simetría de la parábola

Ejemplo:  $f(x) = 2x^2 - x + 3$

$$x_v = -\frac{(-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$y_v = f(x_v) = 2 \left( \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{4} + 3 = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{23}{8}$$

$$f(x) = 2x^2 - x + 3 = 2 \left( x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{23}{8}$$

Queremos pasar de la forma polinómica a la forma canónica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_v)^2 + y_v$$

Completar cuadrados es igual a Forma Canónica, misma Rta

2 Completando cuadrados (va a servirnos para otros temas)

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Queremos que aparezca el cuadrado de un binomio:  $(x + B)^2 = x^2 + 2Bx + B^2$   
Queremos:

- que el término lineal sea "el doble producto del primero por el segundo"
- que aparezca el término "el segundo al cuadrado"
- construir el binomio al cuadrado

Cómo hacemos?

- Saco factor común  $a$  y trabajo adentro del otro factor
- Multiplico el término lineal por el número 1 escrito como  $\frac{2}{2}$
- Identifico cuál es el valor del término del binomio (el otro que no es  $x$ !)
- Sumo y resto ese término al cuadrado
- Reordeno los términos para identificar el binomio

## Ejemplo

Queremos pasar de la forma polinómica a la forma canónica

$$f(x) = 2x^2 - x + 3$$

Cómo hacemos? (quiero que aparezca un término del tipo  $(x + B)^2 = x^2 + 2Bx + B^2$ )

- saco factor común  $a$  y trabajo adentro del otro factor
- Multiplico el término lineal por el número 1 escrito como  $\frac{2}{2}$  o trato de que quede escrito como 2. (*algo*)
- Identifico cuál es el valor del término del binomio (el otro que no es  $x!$ ) (me concentro en el término lineal)
- Sumo y resto ese término al cuadrado
- Reordeno los términos para identificar el binomio

$$\begin{aligned}
 2x^2 - x + 3 &= 2 \left( x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) = 2 \left( x^2 - \frac{2}{2} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) = 2 \left( x^2 - 2 \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \right) \\
 &= 2 \left( x^2 - 2 \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} + \left( \frac{1}{4} \right)^2 - \left( \frac{1}{4} \right)^2 \right) = 2 \left( x^2 - 2 \frac{1}{4}x + \left( \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{2} - \left( \frac{1}{4} \right)^2 \right) \\
 &= 2 \left( \left( x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{16} \right) = 2 \left( \left( x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{23}{16} \right) = 2 \left( x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{23}{8}
 \end{aligned}$$



# Ejemplo

Escribir de la forma canónica completando cuadrados ( $y = a(x - x_v)^2 + y_v$ )

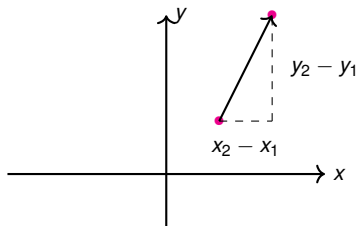
$$y = x^2 + 6x + 5$$

$$y = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 5 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 5 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 5 + 3^2 - 3^2$$

$$y = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 + 5 - 3^2 = (x + 3)^2 + 5 - 9 = (x + 3)^2 - 4$$

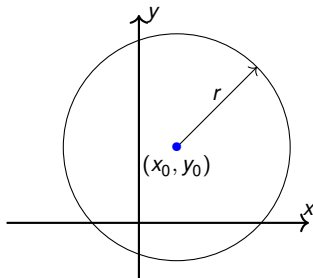
$$x_v = -3, y_v = -4$$

# Circunferencia y Elipse



$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$



# Ejemplo

Dar la ecuación de la circunferencia con centro en  $(1, 2)$  y radio 3

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

Encontrar el centro y radio de la siguiente circunferencia:

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = -9$$

$$x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot 3x = x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2 = (x - 3)^2 - 9$$

$$y^2 - 4y = y^2 - 2 \cdot 2y = y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2 = (y - 2)^2 - 4$$

$$-9 = x^2 - 6x + y^2 - 4y = (x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4$$

$$-9 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 13$$

$$-9 + 13 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \Rightarrow 4 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2$$

Centro:  $(3, 2)$ , radio:  $r = 2$

## Circunferencia

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

## Elipse

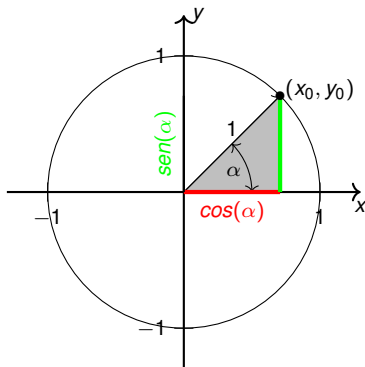
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

*obligatorio*

# Trigonometría

A partir de la circunferencia con radio  $r=1$  y centro en  $(0, 0)$  se definen las **funciones trigonométricas**:

Los puntos sobre la circunferencia tienen coordenadas  $(x, y)$  y llamamos  $x = \cos(\alpha)$  e  $y = \sin(\alpha)$  donde  $\alpha$  es el ángulo desde el eje de las  $x$  hasta el radio que une el punto con el origen.



# Trigonometría

Otras funciones trigonométricas:

Las Propiedades/identidad es manipulable

(tangente)  $\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

(secante)  $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$

(cosecante)  $\text{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)}$

(cotangente)  $\cotan(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

Puntos sobre circunferencia unidad (radio 1, centro en (0,0) → Eq. de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = 1$$

ya que  $x = \cos(\alpha)$  e  $y = \text{sen}(\alpha)$ , se define la **identidad trigonométrica**:

$$\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha) = 1$$

# Ángulos notables

(Ver apunte del curso de nivelación - nociones geométricas - relación grados/radianes:

$$180^\circ = \pi$$

grados	0	30	45	60	90
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow \frac{180^\circ}{\pi} \quad n \in \{2, 4, 6, 8\}$

Construcción de tabla con valores de la función seno(x) para los ángulos notables

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$					

Escribir en cada casilla la secuencia de numeros del 0 al 4

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$	0	1	2	3	4

Tomar la raíz cuadrada a cada uno

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$

Dividir cada uno por 2

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

# Ángulos notables

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{cos}(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Fórmula para suma de ángulos:



$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\text{sen}(y)$$

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\text{sen}(y)$$



$\cos(x)$  es una función par:  $\cos(-x) = \cos(x)$

$\text{sen}(x)$  es una función impar:  $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$

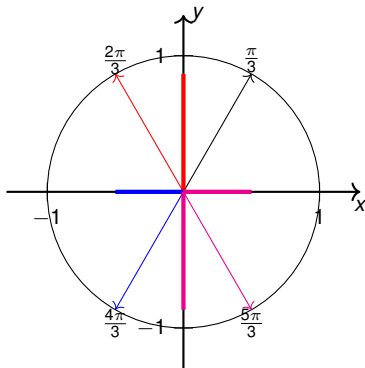


# Ejemplo

Calcular:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

## 1 Forma gráfica



$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

# Ejemplo

Calcular:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

2 Forma analítica

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

# Ejemplo

Calcular:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

2 Forma analítica

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

# Ejemplo

Calcular:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

2 Forma analítica

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## Ejemplo

Calcular:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

2 Forma analítica

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$$

Debo partir valores q ya conozco para llegar a las suma  
Fina del Ángulo

# Ejemplo

Calcular:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

2 Forma analítica

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

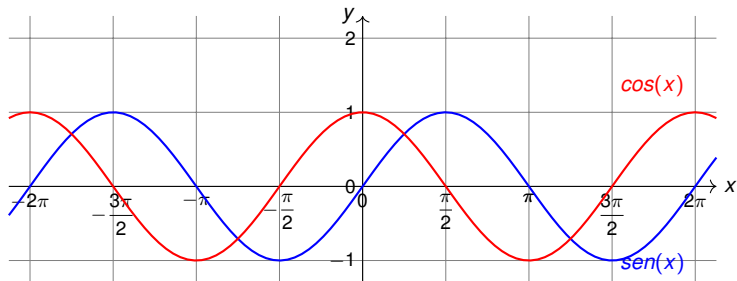
$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Formula del coseno de la suma...

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ y } \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$$

# Gráficos



$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

# Gráficos

Dibujar

*Esto es Horrible*

$$f(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$F(x) = \cos(x) \quad F\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad 3F\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$$

