Clase 17 - Análisis Matemático 1 - LC: Análisis de funciones II

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

15 de Mayo de 2020

Índice

Repaso definiciones

Extremos Absolutos

- Una función f tiene un máximo absoluto en un punto c de su dominio si $f(c) \geq f(x)$ **para todo x en el dominio de f**. El punto c se llama **punto de máximo** de f, y $f(c)$ se llama **valor máximo** de f
- Una función f tiene un mínimo absoluto en un punto c de su dominio si $f(c) \leq f(x)$ **para todo x en el dominio de f**. El punto c se llama **punto de mínimo** de f, y $f(c)$ se llama **valor mínimo** de f

es el c más grande del Dom y el otro menor

Extremos Locales

- Una función f tiene un máximo local en un punto c de su dominio si hay un intervalo Abierto $\mathbb{I}$ que continene a c tal que $f(c) \geq f(x)$ **para todo** $x \in \mathbb{I}$. El punto c se llama **punto de máximo local** de f.
- Una función f tiene un mínimo local en un punto d de su dominio si hay un intervalo abierto $\mathbb{J}$ que contiene a d tal que $f(d) \leq f(x)$ **para todo** $x \in \mathbb{J}$. El punto d se llama **punto de mínimo local** de f

Mismo pero en intervalo

Teorema de Fermat

Si f tiene un extremo (máximo o mínimo) local en $x = c$ y si f es derivable en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$

$f(c) = 0 \to$ Pto crítico

$$si\ x = c \text{ es extremo y } \exists f'(c) \Rightarrow f'(c) = 0$$

Importante: NO es válido el recíproco: que $f'(c) = 0$ NO implica que sea extremo

Puntos críticos

Un punto crítico de una función es un número c del dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe

$$P.C. = \{x \in Dom\, f \ / \ f'(x) = 0 \vee \nexists f'(x)\}$$

No es cierto q Extremo $\to$ Pto crítico. Puede significar otra cosa

Extremos en Intervalos CERRADOS

1. Verificar continuidad en el intervalo cerrado (Weierstrass)
2. Buscar puntos críticos
3. Evaluar la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos que caen en el intervalo
4. Comparar los valores encontrados y elegir cuál es el máximo y cuál es el mínimo

Teoremas

Teorema de Rolle

Sea f una función tal que

1. f es continua en $[a, b]$
2. f es derivable en (a, b) $f'(a), f'(b)$
3. $f(a) = f(b)$

Entonces, existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

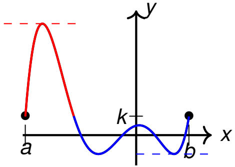
Demostración: llamemos k al valor en los extremos: $k = f(a) = f(b)$

• Si $f(x) = k \; \forall \; x \in [a, b]$, $f'(x) = 0$ y se cumple la conclusión del teorema

• Si f no es constante, existe $x \in [a, b] \;/\; f(x) > k$ o $f(x) < k$. Por Teo.de Weierstrass: $\exists$ max y min.

• Sup. $f(x) > k$: entonces f tendrá un máximo en $c \in (a, b)$. Por Teo. de Fermat: $f'(c) = 0$ ✔

• Sup $f(x) < k$: entonces tendrá un mínimo en $c \in (a, b)$ y por T. de Fermat: $f'(c) = 0$ ✔



Ejemplos que no son ejemplos

Teorema de Rolle

Sea f una función tal que

1. f es continua en $[a, b]$
2. f es derivable en (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Entonces, existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

$[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

$f(0) = 0 = f(1)$
Calculemos la derivada:

$$f'(x) = 1 \text{ } si \text{ } 0 < x < 1$$

$\nexists c \in (0, 1) \, / f'(c) = 0!$
POR QUÉ NO SE CUMPLE EL TEOREMA???
f NO es continua en $[0, 1]$

$[-1, 1]$

$$f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & si \quad x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$f(-1) = 1 = f(1)$ Cuál es $c \in (-1, 1) \, / f'(c) = 0$?

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} & si \quad x > 0 \\ \frac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$f'(c) \neq 0$ si $c \neq 0$, y $\nexists f'(0)$,
POR QUÉ NO SE CUMPLE EL TEOREMA?
f no es derivable en $(-1, 1)$

$[-1, 1]$

$f(x) = x$

$f'(x) = 1 \; \forall x \in (-1, 1)$

POR QUÉ NO SE CUMPLE EL TEOREMA?

$f(-1) \neq f(1)$

Teorema del Valor Medio

Teorema del Valor Medio

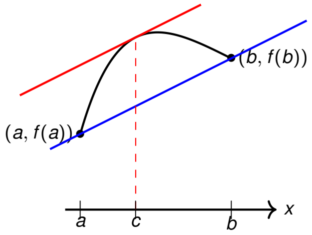
Sea f una función tal que

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que la derivada de la función en c es igual a la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (secante):

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Y Debe ser Continua



(ver `https://www.geogebra.org/m/MhWDzkgD`)

Teorema del Valor Medio

Teorema del Valor Medio

Sea f una función tal que

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que la derivada de la función en c es igual a la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (secante):

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración: La recta secante es

$$y = m \cdot (x - a) + f(a) \;\; con \;\; m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sea $F(x) = f(x) - y(x)$ Distancia entre un punto en la curva y un punto en la recta secante

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

$F(a) = 0$ y $F(b) = 0$ (evaluar o pensar en el gráfico que ambas coinciden en las puntas!)
$F(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) porque $f(x)$ e $y(x)$ lo son.
Por el Teo. de Rolle: $\exists c \in (a, b) \, / F'(c) = 0$
derivando $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
en $x = c$ $(T.Rolle)$ $\Rightarrow 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\qquad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Creciente y Decreciente

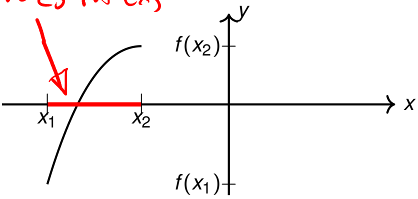
Función Creciente

Una función f definida en un intervalo $\mathbb{I}$ se dice creciente sobre $\mathbb{I}$ si y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$, con $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$

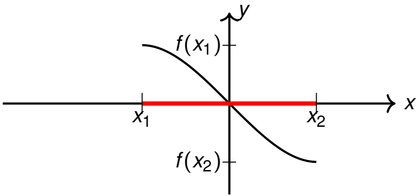
Función Decreciente

Una función f definida en un intervalo $\mathbb{I}$ se dice creciente sobre $\mathbb{I}$ si y sólo si $f(x_1) > f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$, con $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$

es solo en x, No es la f(x)



f creciente sobre $\mathbb{I}$

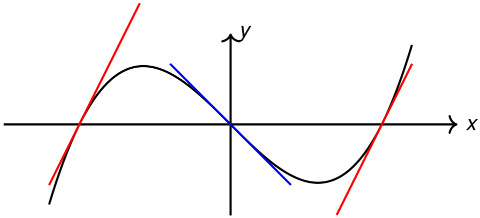


f decreciente sobre $\mathbb{I}$

Si en un intervalo $\mathbb{I}$ una función es toda creciente, o toda decreciente, decimos que

f es monótona en $\mathbb{I}$

Crecimiento y Decrecimiento



Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y derivable en el intervalo abierto (a, b)

- Si $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (a, b) \Rightarrow f$ es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in (a, b) \Rightarrow f$ es decreciente en $[a, b]$

Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y derivable en el intervalo abierto (a, b)

- Si $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (a, b) \Rightarrow f$ es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in (a, b) \Rightarrow f$ es decreciente en $[a, b]$

Demostración:
Supongamos $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a, b)$. Tomemos x_1 y x_2 en $[a, b]$ con $x_1 < x_2$ Entonces, f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2).
Del Teo. del V.M.: $\exists c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{x_2 > x_1 \rightarrow x_2 - x_1 > 0} \cdot \underbrace{f'(c)}_{<0}$$

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

f es decreciente en $[a, b]$

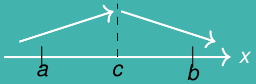
Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y derivable en el intervalo abierto (a, b)

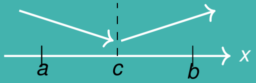
- Si $f'(x) > 0 \; \forall \; x \in (a, b) \Rightarrow f$ es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0 \; \forall \; x \in (a, b) \Rightarrow f$ es decreciente en $[a, b]$

Corolario

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(x) > 0$ a la izquierda de c y $f'(x) < 0$ a la derecha de c, entonces f crece a la izquierda de c, y decrece a la derecha de c, por lo tanto c en un máximo local.



Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(x) < 0$ a la izquierda de c y $f'(x) > 0$ a la derecha de c, entonces f decrece a la izquierda de c, y crece a la derecha de c, por lo tanto c en un mínimo local.



Ejemplos

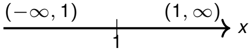
Determinar en qué intervalos la función es creciente y decreciente. Determinar mínimos y máximos locales y absolutos: $f(x) = x^2 - 2x + 1$ $\qquad f'(x) = 2x - 2$

- Determinar puntos críticos ($f' = 0$ o $\nexists f'$) y puntos que no pertenecen al dominio de f

$$Dom\, f = \mathbb{R} \qquad Dom\, f' = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 2 = 2.(x-1) \rightarrow \boxed{x = 1} \text{ es P.C.}$$

- ubicar sobre la recta real todos los puntos encontrados y definir intervalos



- Construir tabla y analizar signos de la f'

	$(-\infty, 1)$	$x = 1$	$(1, \infty)$
2	$+$	$+$	$+$
(x-1)	$-$	0	$+$
f'	$-$	0	$+$
f	decrece $\searrow$		crece $\nearrow$

- Definir crecimiento y decrecimiento de la f: f decrece $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, \infty)$
- Seleccionar mínimos y máximos locales: $x = 1$ es mínimo local
- Analizar los límites en el infinito para saber si hay max/min absolutos: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

  x=1 es mínimo absoluto, $f(1) = 0$. No hay máximos.

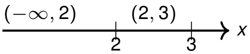
Ejemplos

Determinar en qué intervalos la función es creciente y decreciente. Determinar mínimos y máximos locales y absolutos: $f(x) = 2x\sqrt{3-x}$ $\quad f'(x) = 2 \cdot \sqrt{3-x} + 2x \cdot \frac{1}{2}(3-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)$
$= 2\sqrt{3-x} - \frac{x}{\sqrt{3-x}} = \frac{6-3x}{\sqrt{3-x}}$

- Determinar puntos críticos ($f' = 0$ o $\nexists\, f'$) y puntos que no pertenecen al dominio de f:
  $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 3 - x \geq 0\} = (-\infty, 3]$ $\quad Dom\, f' = (-\infty, 3)$ $\boxed{x = 3}$ es P.C.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{6-3x}{\sqrt{3-x}} \rightarrow 6 - 3x = 0 \rightarrow 3(2-x) = 0' \rightarrow \boxed{x = 2} \text{ es P.C.}$$

- ubicar sobre la recta real todos los puntos encontrados y definir intervalos



- Construir tabla y analizar signos de la f'

	$(-\infty, 2)$	$x = 2$	$(2, 3)$
$3 \cdot (2-x)$	$+$	0	$-$
$\sqrt{3-x}$	$+$	1	$+$
f'	$+$	0	$-$
f	crece $\nearrow$		decrece $\searrow$

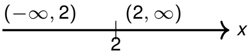
- Definir crecimiento y decrecimiento de la f: f crece $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, 3)$
- Seleccionar mínimos y máximos locales: $x = 2$ es máximo local, $f(2) = 4$
- Analizar los límites en el infinito para saber si hay max/min absolutos: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

Ejemplos

Determinar en qué intervalos la función es creciente y decreciente. Determinar mínimos y máximos locales y absolutos: $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$

- Determinar puntos críticos ($f' = 0$ o $\nexists f'$) y puntos que no pertenecen al dominio de f:
  $Dom\, f = \mathbb{R} - \{2\}$ $\quad Dom\, f' = Dom\, f$
  $f'(x) = 0$ No hay P.C.
- ubicar sobre la recta real todos los puntos encontrados y definir intervalos



- Construir tabla y analizar signos de la f'

	$(-\infty, 2)$	$x = 2$	$(2, +\infty)$
f'	$-$		$-$
f	decrece $\searrow$		decrece $\searrow$

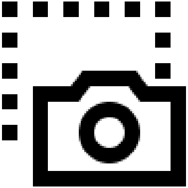
- Definir crecimiento y decrecimiento de la f: f decrece $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
- Seleccionar mínimos y máximos locales: No tiene
- Analizar los límites en el infinito y las asíntotas verticales para saber si hay max/min absolutos: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

  No hay máximos ni mínimos absolutos

Resumen

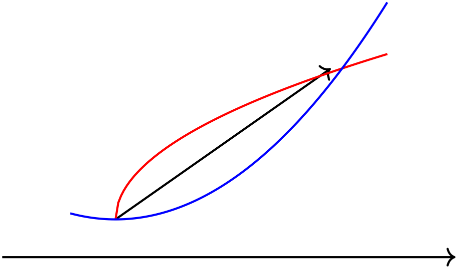
¿Cómo determinar en qué intervalos la función es creciente y decreciente? ¿Cómo determinar mínimos y máximos locales y absolutos?

1. Determinar puntos críticos ($f' = 0$ o $\nexists\, f'$) y puntos que no pertenecen al dominio de f
2. ubicar sobre la recta real todos los puntos encontrados y definir intervalos
3. Construir tabla y analizar signos de la f' evaluando los factores en números dentro de cada intervalo
4. Definir crecimiento y decrecimiento de la f ($f' > 0 \rightarrow$ f crece, $f' < 0 \rightarrow$ f decrece)
5. Seleccionar mínimos y máximos locales (corolario del teorema) $\searrow\nearrow$ o $\nearrow\searrow$
6. Analizar los límites en el infinito (y las asíntotas verticales si hubiera) para saber si hay max/min absolutos



Funciones Cóncavas y Convexas

Si *f* es creciente:



Funciones conVexas o cóncavas hacia arriba: $\bigcup$

Si f es derivable en un intervalo $\mathbb{I}$ y la curva de f queda arriba de todas las rectas tangentes a la función en los puntos de ese intervalo, f se dice cóncava hacia arriba

Funciones cónCavas o cóncavas hacia abajo: $\bigcap$

Si f es derivable en un intervalo $\mathbb{I}$ y la curva de f queda por debajo de todas las rectas tangentes a la función en los puntos de ese intervalo, f se dice cóncava hacia abajo

Concavidad en intervalos

Prueba de concavidad

Si f tiene derivadas segundas en un intervalo $\mathbb{I}$

- Si $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{I}$, entonces f es cóncava hacia arriba en $\mathbb{I}$
- Si $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in \mathbb{I}$, entonces f es cóncava hacia abajo en $\mathbb{I}$

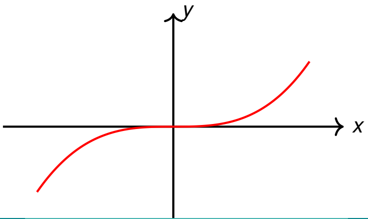
$$f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2 \qquad f''(x) = 6x$$

$$\underline{f''}(x) > 0 \Rightarrow 6x > 0 \rightarrow \boxed{x > 0 \qquad f \text{ es } \bigcup}$$

Concava hacia Arriba

$$\underline{f''}(x) < 0 \Rightarrow 6x < 0 \rightarrow \boxed{x < 0 \qquad f \text{ es } \bigcap}$$

Concava hacia Abajo



Concavidad en intervalos

Prueba de concavidad

Si f tiene derivadas segundas en un intervalo $\mathbb{I}$

- Si $f''(x) > 0 \; \forall \; x \in \mathbb{I}$, entonces f es cóncava hacia arriba en $\mathbb{I}$
- Si $f''(x) < 0 \; \forall \; x \in \mathbb{I}$, entonces f es cóncava hacia abajo en $\mathbb{I}$

Punto de inflexión

Sea f continua en $\mathbb{I}$; y derivable en $\mathbb{I}$ salvo quizás en un punto x_0 de $\mathbb{I}$. Si la curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o viceversa) en el punto $(x_0, f(x_0))$, entonces x_0 se llama **punto de inflexión**

ATENCIÓN: los puntos de inflexión NO son los puntos que hacen cero la $f''(x)$.(Tarea: pensa en $f(x) = x^4$)

Ejemplos

Determinar intervalos donde f es cóncava hacia arriba y hacia abajo, y dar los puntos de inflexión.

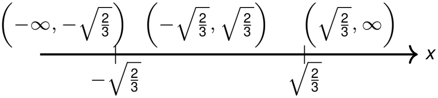
$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 1 \qquad f'(x) = 4x^3 - 8x \qquad f''(x) = 12x^2 - 8$$

1. Buscar los puntos que anulan a la f'' y los que no pertenecen al dominio

   $Dom\, f = \mathbb{R} \quad f''(x) = 0 \to 12x^2 - 8 = 0 \to 12\left(x^2 - \frac{8}{12}\right) = 0 \to 12\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = 0$

   $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad f''(x) = 12\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

2. ubicar sobre la recta real todos los puntos encontrados y definir intervalos



3. Construir tabla y analizar signos de la f'' tomando valores en los intervalos, y decidir sobre la concavidad de f, y los P.I.

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$
$\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$

4. Determinar puntos de inflexión (cambios de concavidad) $x_1 = \ldots 2$ y $x_2 = \ldots 2$

Máximo y mínimo local - El regreso!

Prueba de la derivada segunda

Si f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a c:

- Si $f'(c) = 0$ (c es P.C.) y $f''(c) > 0$ entonces c es mínimo local de f
- Si $f'(c) = 0$ (c es P.C.) y $f''(c) < 0$ entonces c es máximo local de f

Atención: si $f''(c) = 0$ no podemos decir nada, hay que hacer otro análisis.
Ejemplo: Encontrar máximos y mínimos locales

$$f(x) = x(x-1)^3 \qquad f'(x) = (x-1)^3 + x \cdot 3(x-1)^2 = (x-1)^2(x-1+3x) = \boxed{(x-1)^2(4x-1)}$$

$$f''(x) = 2(x-1)(4x-1) + (x-1)^2.4 = 2(x-1)[4x-1+2(x-1)] = \boxed{2(x-1)(6x-3)}$$

Puntos críticos: $f'(x) = 0 = (x-1)^2(4x-1) \Rightarrow x_c = 1$ y $x_c = \frac{1}{4}$
Prueba derivada 2da:
$f''(1) = 0$ Entonces no podemos decir nada de $x_c = 1$
$f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4} > 0 \qquad x_c = \frac{1}{4}$ es mínimo local.

FIN