# Clase 13 - Análisis Matemático 1 - LC: Derivadas I

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

29 de Abril de 2020

# Índice

$$f(x)$$

- Dominio: $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; \exists\, f(x)\}$
- Continuidad en $\mathbb{I}$: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ \forall\, a \in \mathbb{I}$
- Discontinuidades evitable y de salto
- Discontinuidad esencial: asíntota vertical en $x = a$

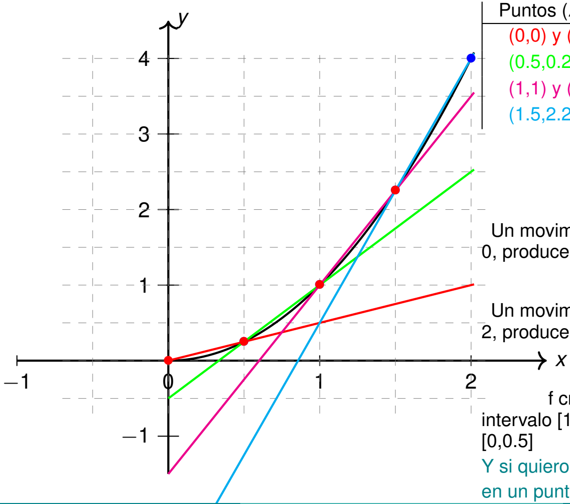
$$\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

- Comportamiento en x grandes (en valor absoluto): Asíntotas horizontales en $y = L$ y/o en $y = M$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \quad \text{y/o} \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = M$$

¿Cómo podemos obtener más información del gráfico de f?

# Recta secante




$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

| Puntos ($\Delta x = 0.5$) | pendiente |
|---|---|
| (0,0) y (0.5,0.25) | $\frac{0.25-0}{0.5-0} = 0.5$ |
| (0.5,0.25) y (1,1) | $\frac{1-0.25}{1-0.5} = 1.5$ |
| (1,1) y (1.5,2.25) | $\frac{2.25-1}{1.5-1} = 2.5$ |
| (1.5,2.25) y (2,4) | $\frac{4-2.25}{2-1.5} = 3.5$ |

Un movimiento de $\Delta x = 0.5$ cerca del 0, produce $\Delta y \sim \frac{1}{2}\Delta x$

Un movimiento de $\Delta x = 0.5$ cerca del 2, produce $\Delta y \sim 3\Delta x$

f crece con más velocidad en el intervalo [1.5,2] que en el intervalo [0,0.5]

Y si quiero saber la tasa de crecimiento en un punto específico?

Variación de la pendiente de la recta secante que pasa por un punto fijo cuando achicamos el $\Delta x$ (recta secante entre los puntos (a,f(a)) y (a+h, f(a+h)):

`https://www.geogebra.org/m/vcnwk5yp`

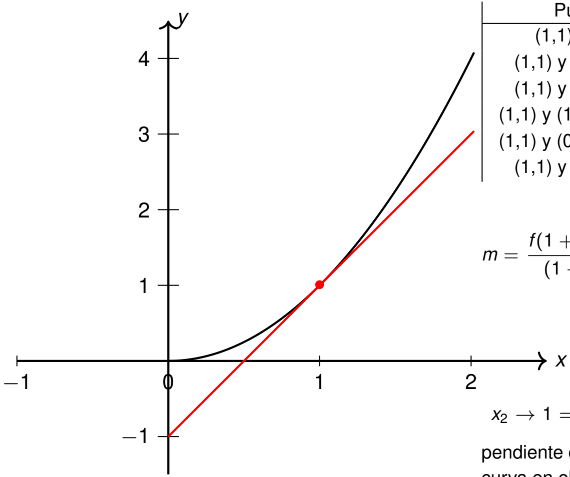



Figure: $f(x) = x^2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

| Puntos | pendiente |
|---|---|
| (1,1) y (2,4) | $\frac{4-1}{2-1} = 3$ |
| (1,1) y (1.5,2.25) | $\frac{2.25-1}{1.5-1} = 2.5$ |
| (1,1) y (1.2,1.44) | $\frac{1.44-1}{1.2-1} = 2.2$ |
| (1,1) y (1.01,1.0201) | $\frac{1.0201-1}{1.01-1} = 2.01$ |
| (1,1) y (0.99,0.9801) | $\frac{0.9801-1}{0.99-1} = 1.99$ |
| (1,1) y (0.5,0.25) | $\frac{0.25-1}{0.5-1} = 1.5$ |

$$x_2 = 1 + h \rightarrow$$

$$m = \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$x_2 \rightarrow 1 \Rightarrow h \rightarrow 0 \Rightarrow pendiente \rightarrow 2$$

pendiente de la recta tangente a la curva en el punto x=1!

# Derivada

Las pendientes de las secantes que pasan por el punto $a$

$$m = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\textit{Cociente incremental}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

La pendiente de la recta tangente a la función en el punto $a$ se define como

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underbrace{=}_{x = a + h} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y le llamaremos la derivada de $f$ en $a$.

### Derivada de $f$ en $a$

Sea $a$ un número en el dominio de $f$, la derivada de la función $f$ en $a$ es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto:

$$\frac{df}{dx} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si existe la derivada en un punto $a$, se dice que f es derivable o diferenciable en $a$
El dominio de la $f'(x)$ son todos aquellos $x$ en el dominio de $f$ en los que la función es derivable.

# Ejemplo 1

Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en $a = 1$

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

$$f(1+h) - f(1) = 1 + 2h + h^2 - 1^2 = 2h + h^2 = h(2+h)$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 2 + h = 2$$

# Ejemplo 2

Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{3-x}$ en $x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\sqrt{3-(x+h)} - \sqrt{3-x}}^{\to 0}}{\underbrace{h}_{\to 0}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3-(x+h)} - \sqrt{3-x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\sqrt{3-(x+h)}\right]^2 - \left[\sqrt{3-x}\right]^2}{h\left[\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{3-(x+h)-(3-x)}{h\left[\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3} - \cancel{x} - h - \cancel{3} + \cancel{x}}{h\left[\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\left[\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\underbrace{\underbrace{\sqrt{3-\underbrace{(x+h)}_{\to x}}}_{\to\sqrt{3-x}} + \sqrt{3-x}}_{\to 2\sqrt{3-x}}} = \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{3-x}} = f'(x)}$$

# Teorema

Si existe la derivada en un punto $a$, se dice que $f$ es derivable o diferenciable en $a$

**Teorema**

Si $f$ es diferenciable en $a$ entonces $f$ es continua en $a$

$$\exists\, f'(a) \Rightarrow f \text{ es continua en } a$$

ATENCIÓN:
$p \Rightarrow q$ no es lo mismo que el recíproco $q \Rightarrow p$: si f es continua en $a$, no podemos decir nada a priori sobre si $f$ es diferenciable en $a$!!!
PERO:
$p \Rightarrow q$ sí es lo mismo que el contrarrecíproco $\neg q \Rightarrow \neg p$: si f No es continua en $a$ entonces $f$ NO es diferenciable en $a$

# Definiciones

## Derivadas laterales

Se define la derivada a izquierda de $f$ en $a$ si nos acercamos al punto $a$ con valores negativos de $h$ ($a+h<a$!!!):

$$f'^{-}(a)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Se define la derivada a derecha de $f$ en $a$ si nos acercamos al punto $a$ con valores positivos de $h$ ($a+h>a$!!!):

$$f'^{+}(a)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$f'(a)$ existe si y sólo si las derivadas laterales existen y son iguales.

# Ejercicio

Determinar si $f(x) = |x-1|$ es derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & si \quad x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & si \quad x < 1 \end{cases}$$

1. $f'^{-}(1) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

   Ya que $1 \in [1, \infty) \Rightarrow f(1) = 1 - 1 = 0$

   Si $h \to 0^- \Rightarrow 1 + h < 1 \Rightarrow f(x) = -(x-1) \Rightarrow f(1+h) = -((1+h) - 1)$

   $f'^{-}(1) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{-((1+h)-1) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{-(1+h-1) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{-h}{h} =$

   $\lim_{h \to 0^-} -1 = \boxed{-1}$

2. $f'^{+}(1) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

   $f(1) = 0$

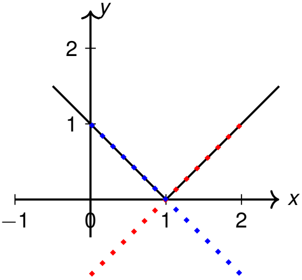
   Si $h \to 0^+ \Rightarrow 1 + h > 1 \Rightarrow f(x) = x - 1 \Rightarrow f(1+h) = ((1+h) - 1)$

$$f'^{+}(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{((1+h)-1) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h-1) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = \boxed{1}$$

Dado que $f'^{-}(1) \neq f'^{+}(1) \Rightarrow \nexists\, f'(1)$

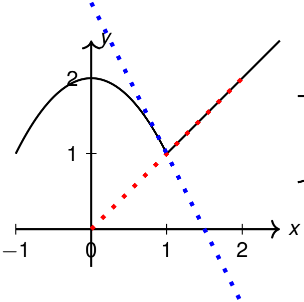
# Y gráficamente...

$$f(x) = |x-1|$$



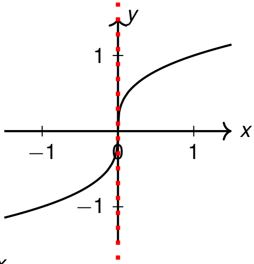

$f'^{+}(1) = 1$
$f'^{-}(1) = -1$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & si \quad x \leq 1 \\ x & si \quad x > 1 \end{cases}$$




$f'^{+}(1) = 1$
$f'^{-}(1) = -2$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$




$f'(0) \nexists$

Y por supuesto, si la f tiene una discontinuidad en un punto, entonces NO es derivable en ese punto.

# Reglas para derivar

Si f y g son derivables en $x$, y $c$ una constante, entonces:

1. $(c)' = 0$
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3. $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
4. $(c.f)'(x) = c.f'(x)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$ (si $g(x) \neq 0$)
6. Si $f(x) = x^r$, $f'(x) = r.x^{r-1}$
7. Regla de la cadena: $(f\,o\,g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$

# Derivar con reglas

| $F(x)$ | $F'(x)$ |
|---|---|
| $c$ | $0$ |
| $x^r$ | $r.x^{r-1}$ |
| $f+g$ | $f'+g'$ |
| $f.g$ | $f'.g+f.g'$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$ |
| $f(g(x))$ | $f'(g(x)).g'(x)$ |

1. $F(x) = x^2 \Rightarrow F'(x) = 2.x^{(2-1)} = 2.x$
2. $F(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$
   $F'(x) = \frac{1}{2}.x^{(\frac{1}{2}-1)} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
3. $F(x) = x^3 + 3x^4 \Rightarrow F' = f' + g'$
   $F'(x) = 3.x^{(3-1)} + 3.4.x^{(4-1)} =$
   $3x^2 + 12x^3$
4. $F(x) = (x-2).\sqrt{x} \rightarrow F = f.g$
   $f = x-2,\ g = \sqrt{x} \Rightarrow F' = f'.g + f.g'$
   $f' = 1.x^{(1-1)} - 0 = 1 \qquad g' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow$
   $F'(x) = 1.\sqrt{x} + (x-2).\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $F(x) = \frac{x^2+1}{2x^5+7x} \rightarrow F = \frac{f}{g}$
   $f = x^2 + 1$ y $g = 2x^5 + 7x$
   $\rightarrow F' = \frac{f'.g-f.g'}{g^2}$
   $f' = 2x$ y $g' = 10x^4 + 7 \Rightarrow$
   $F'(x) = \frac{2x.(2x^5+7x)-(x^2+1).(10x^4+7)}{(2x^5+7x)^2}$
6. $F(x) = (x^2+2x)^3 \rightarrow F = f(g(x))$
   $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2 + 2x$
   $F'(x) = f'(g(x)).g'(x)$
   $f' = 3x^2$ y $g' = 2x + 2$
   $f'(g(x)) = 3.(g(x))^2 = 3.(x^2+2x)^2$
   $F'(x) = 3.(x^2+2x)^2.(2x+2)$

# Derivar con reglas

| $F(x)$ | $F'(x)$ |
|---|---|
| $c$ | $0$ |
| $x^r$ | $r.x^{r-1}$ |
| $f+g$ | $f'+g'$ |
| $f.g$ | $f'.g+f.g'$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$ |
| $f(g(x))$ | $f'(g(x)).g'(x)$ |

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

- $F = \frac{f}{g}$ con $f = 1$ y $g = x$

$$\bullet F' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

$f' = 0$ y $g' = 1$

$$F'(x) = \frac{0.x - 1.1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

- $F = x^{-1}$

$$\bullet F'(x) = (-1).x^{(-1-1)} = -1.x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

# Derivar con reglas

| $F(x)$ | $F'(x)$ |
|---|---|
| $c$ | $0$ |
| $x^r$ | $r.x^{r-1}$ |
| $f+g$ | $f'+g'$ |
| $f.g$ | $f'.g+f.g'$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$ |
| $f(g(x))$ | $f'(g(x)).g'(x)$ |

$$F(x)=\frac{\sqrt{x^3+x}}{(2x+9)^3}$$

$$F(x)=\sqrt{x^3+x}.(2x+9)^{-3}$$

$F=f.g$ con $f(x)=\sqrt{x^3+x}$ y $g(x)=(2x+9)^{-3} \Rightarrow F'=f'.g+f.g'$
$f(x)=H(J(x))$ con $H(x)=\sqrt{x}$ y $J(x)=x^3+x$

$$f'(x)=H'(J(x)).J'(x)=\frac{1}{2\sqrt{J(x)}}.(3x^2+1)=\frac{1}{2\sqrt{x^3+x}}.(3x^2+1)$$

$g(x)=M(N(x))$ con $M(x)=x^{-3}$ y $N(x)=2x+9$

$$g'(x)=M'(N(x)).N'(x)=(-3).(N(x))^{(-3-1)}.2=-6.(2x+9)^{-4}$$

$$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^3+x}}.(3x^2+1).(2x+9)^{-3}+\sqrt{x^3+x}.(-6.(2x+9)^{-4})$$

FIN