Clase 4 - Análisis Matemático 1 - LC: Funciones

Eugenia Díaz-Giménez[1]

eugenia.diaz@unc.edu.ar

23 de Marzo de 2020

Índice

1 Funciones
- Definición
- Notación

2 Dominio e imagen
- Definición
- Ejemplos

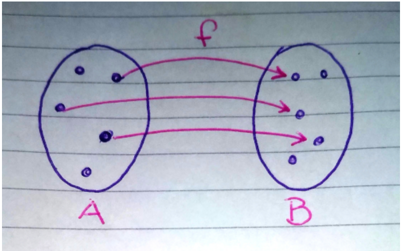
3 Función lineal
- Ecuación de la recta
- Rectas paralelas y perpendiculares

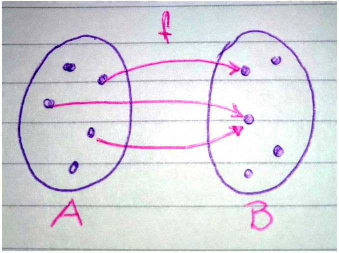
4 Funciones elementales
- Gráficos
- Transformación de funciones

5 Funciones por partes
- Gráficos

Definición

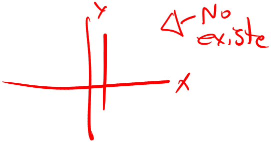
Una función *f* es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A un **ÚNICO** elemento de un conjunto B

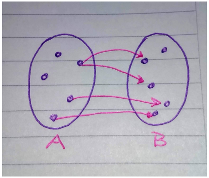




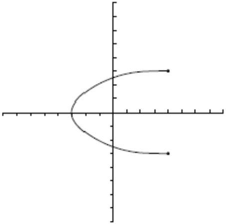
A : conjunto de salida   B : conjunto de llegada

NO ES FUNCIÓN:

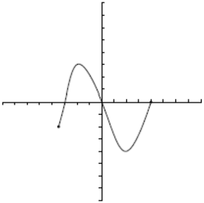




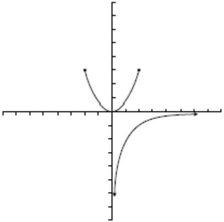
¿Cuál de las curvas es función? (trazar infinitas líneas verticales imaginarias)



NO



SÍ



NO

Notación

$$f : A \to B$$

- En general, salvo que se especifique algo distinto, tomaremos $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R} \Rightarrow f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Llamaremos x a los números que pertenecen al conjunto de salida, es la variable independiente
- Llamaremos y a los números que pertenecen al conjunto de llegada, es la variable dependiente
- Aplicaremos la función sobre los elementos del conjunto de salida para encontrar elementos del conjunto de llegada: $f(x) = y$
- Para denotar las funciones, en general utilizamos las letras minúsculas f, g, h, etc
- Para denotar la variables dependiente e independiente utilizamos las letras del final del alfabeto: x, y, z

Ejemplos de funciones:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$$

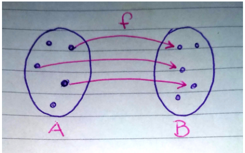
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(z) = |z|$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad h(x) = x + 3$$

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad f(w) = \sqrt{w}$$

Dominio e imagen

No necesariamente TODOS los elementos de A y de B son "tocados" por la función



Dominio

Es el subconjunto de todos los valores x del conjunto de salida en los cuales la función está definida

$$Dom\, f = \{x \in A \,/\, \exists\, f(x)\}$$

(valores válidos para una función)

Imagen

Es el subconjunto de todos los valores y del conjunto de llegada que puede llegar a tomar la función

$$Im\, f = \{y \in B \,/\, \exists\, x \in A, f(x) = y\}$$

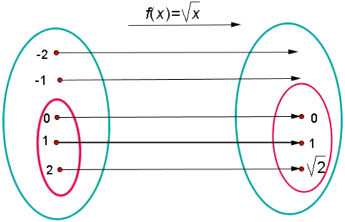
Ejemplo

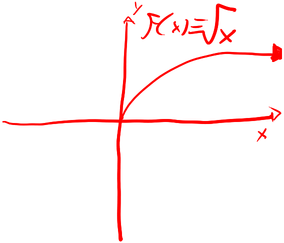
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

(Pues $\sqrt{-x} \in \mathbb{C}$)

$$Dom\, f(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists \sqrt{x}\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

$$Im\, f(x) = \{y \in \mathbb{R} \,/ \exists\, x \in \mathbb{R}, f(x) = y\} = \{y \in \mathbb{R}/y \geq 0\} = [0, +\infty)$$





Conjunto de Salida
Dominio

Conjunto de Llegada
Imagen

Ejemplo: dar el dominio de

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$Dom\, f(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x)\, \mathrm{existe}\} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \,/\, \mathrm{x} + 1 \geq 0\}$$

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$Dom\, g(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -1\} = [-1, +\infty)$$

Ej1a: dar el dominio de

$$g(x) = \frac{2}{3x-5}$$

$$Dom\, g(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x)\, \text{existe}\} = \{\text{x} \in \mathbb{R} \,/\, 3\text{x} - 5 \neq 0\}$$

$$3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

Despeje de x

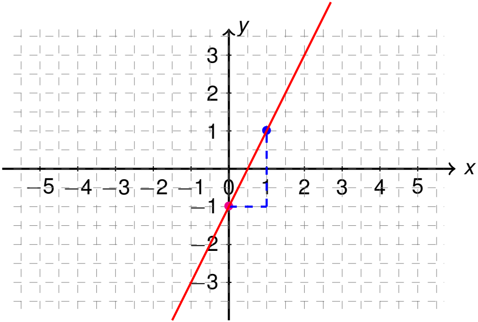
$$Dom\, g(x) = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{5}{3}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

Ecuación de una recta

$$y = ax + b$$

a: pendiente
b: ordenada al origen

$$y = 2x - 1$$



Ecuación de una recta

$$y = ax + b$$

Qué significa que pase por un punto? Por ej.: pasa por el punto (x_0, y_0)

$$f(x_0) = y_0$$

Dar la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)
2 datos, 2 incógnitas: sistema de ecuaciones (repasar del curso de nivelación)

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Despejamos a y b

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Paralelas y perpendiculares

Paralelas

Dadas la recta $y = a_1 x + b_1$ y la recta $y = a_2 x + b_2$, son paralelas si $a_1 = a_2$

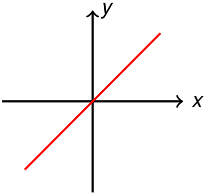
Perpendiculares

Dadas la recta $y = a_1 x + b_1$ y la recta $y = a_2 x + b_2$, son perpendiculares si $a_1 = -\frac{1}{a_2}$

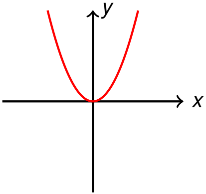
(ATENCIÓN: no decimos nada de b_1 ni b_2!)

Funciones Elementales

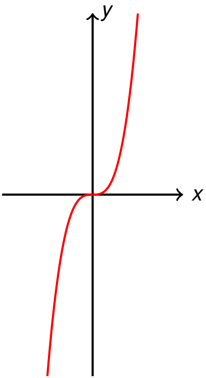
$f(x) = x$



$f(x) = x^2$

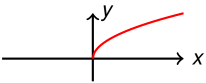


$f(x) = x^3$

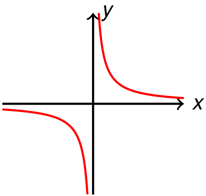


Funciones Elementales

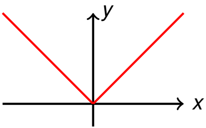
$$f(x) = \sqrt{x}$$



$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = |x|$$

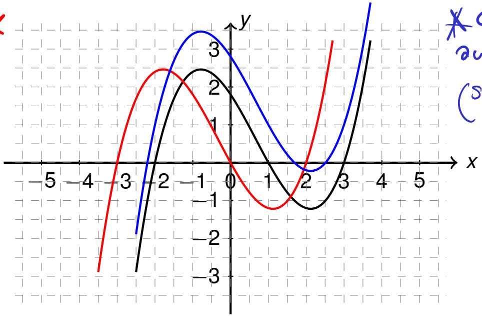


Transformaciones

- desplazamientos
- rotaciones
- reflexiones
- compresión y estiramiento

$f(x)$, $f(x+1)$ y $f(x)+1$:

* Los valores en x aumentan en 1, Desplaza a la izq. (si Fuera −1, es derecha)



* Como f(x)=y, aumenta la Altura en 1, (si fuera −, disminuye

Sea $a > 0$:

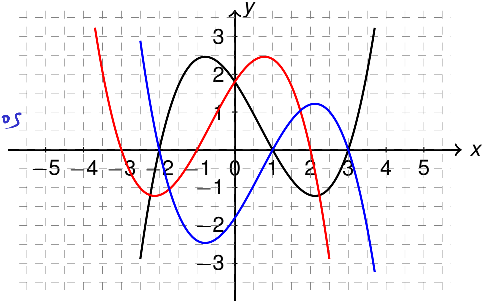
- $f(x+a)$ es un desplazamiento horizontal en a unidades hacia la izquierda $\longleftarrow$
- $f(x-a)$ es un desplazamiento horizontal en a unidades hacia la derecha $\longrightarrow$
- $f(x)+a$ es un desplazamiento vertical en a unidades hacia arriba $\uparrow$
- $f(x)-a$ es un desplazamiento vertical en a unidades hacia abajo $\downarrow$

$f(-x) = -1(x^2+6)$ ← Distribuyo el valor

$f(x)$, $f(-x)$ y $-f(x)$:

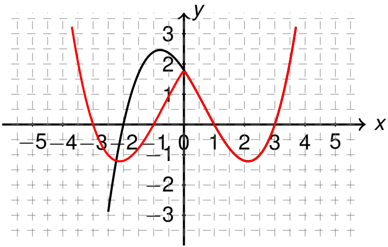
* invierte los puntos en x.

* invierte los puntos en y.

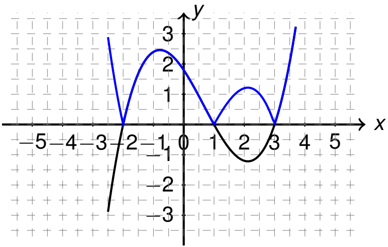


- $f(-x)$ es una rotación respecto del eje y (dejar fijo $f(0)$)
- $-f(x)$ es una rotación respecto del eje x (dejar fijas las raíces $f(x) = 0$)

$f(x)$ y $f(|x|)$

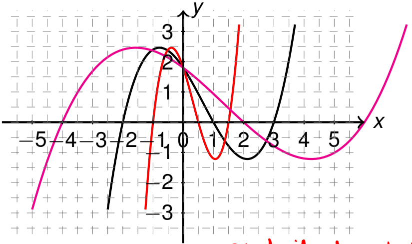


$f(x)$ y $|f(x)|$

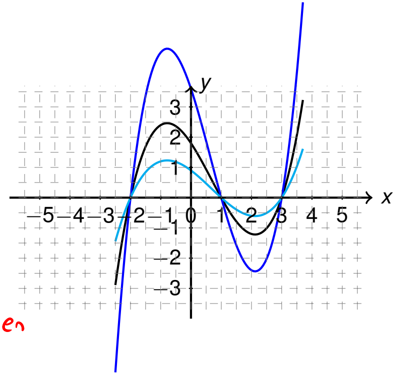


- $f(|x|)$ la función no cambia para los $x > 0$ y para los $x < 0$ es un reflejo respecto del eje y de la parte de la función definida para $x > 0$
- $|f(x)|$ la función no cambia en las regiones en las que $f(x) > 0$ y en los intervalos en los que $f(x) < 0$ se le hace rotar con respecto al eje x para convertirla en positiva

$f(x)$, $f(2x)$ y $f\left(\frac{1}{2}x\right)$



$f(x)$, $2f(x)$ y $\frac{1}{2}f(x)$



se Distribuye el valor en
la Funcion

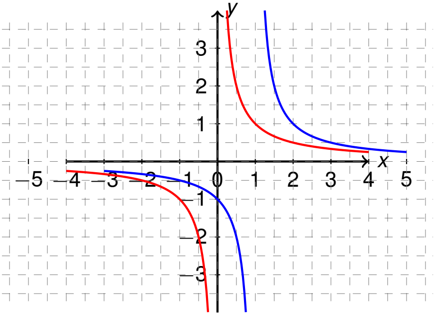
Sea $a > 1$

- $f(ax)$ se comprime el gráfico sobre el eje x en un factor $\frac{1}{a}$ (Ej: si a=2 se comprime a la mitad, si a=3 se comprime a un tercio). Queda fijo $f(0)$
- $f\left(\frac{1}{a}x\right)$ se estira el gráfico sobre el eje x en un factor a (al doble, triple, etc). Queda fijo f(0) $\longleftrightarrow$
- $af(x)$ se estira el gráfico sobre el eje y un factor a. Quedan fijas las raíces ($f(x) = 0$) $\updownarrow$
- $\frac{1}{a}f(x)$ se comprime el gráfico en el eje y en un factor $\frac{1}{a}$. Quedan fijas las raíces ($f(x) = 0$)

Ejemplo

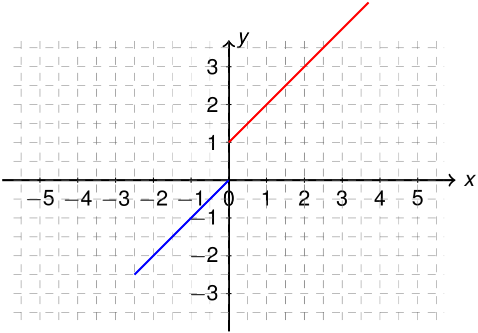
Se Distribuye
el Valor en la Función

Dibujar $g(x) = \frac{1}{x-1}$
Función elemental: $f(x) = \frac{1}{x}$
$g(x) = f(x-1)$:



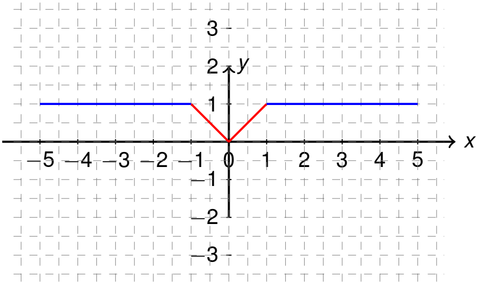
Funciones por partes

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq 0 \\ x+1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$



Funciones por partes

$$f(x) = \begin{cases} |x| & si \quad |x| \leq 1 \\ 1 & si \quad |x| > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} |x| & si \quad -1 < x < 1 \\ 1 & si \quad x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$



FIN