

Clase 18 - Análisis Matemático 1 - LC: Análisis de funciones

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

20 de Mayo de 2020

Índice

1 Repaso

- Información a partir de $f(x)$
- Información a partir de $f'(x)$
- Información a partir de $f''(x)$

2 Análisis completo de $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$

- Análisis
- Gráfico

3 Análisis completo de $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

- Análisis
- Gráfico

Función $f(x)$

- 1 Dominio de f : el conjunto de valores x en los que la función está bien definida

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / \exists f\}$$

- 2 Simetrías - Paridad de f :

$$\text{si } f(-x) = f(x) \Rightarrow f \text{ par}$$

$$\text{si } f(-x) = -f(x) \Rightarrow f \text{ impar}$$

- 3 Cruce del gráfico con los ejes coordenados
(0, $f(0)$) cruce con el eje de las y ; (x_0 , 0) cruce con el eje de las x (raíces)

- 4 Asíntotas Verticales (en un punto $x = a$ que NO pertenece al Dom f)

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$$

o

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty$$

- 5 Asíntotas horizontales (comportamiento lejos) en $y = L$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

o

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Derivada primera de la función: $f'(x)$

- 1 Puntos críticos: Puntos del dominio de f en los que $f'(x) = 0$ o que la función no es derivable

$$P.C. = \{x \in \text{Dom } f / f'(x) = 0 \vee \nexists f'(x)\}$$

- 2 Crecimiento/Decrecimiento de la función

$$\text{si } f'(x) > 0 \text{ en } \mathbb{I} \Rightarrow f \text{ crece en } \mathbb{I}$$

$$\text{si } f'(x) < 0 \text{ en } \mathbb{I} \Rightarrow f \text{ decrece en } \mathbb{I}$$

- 3 Máximos y mínimos locales

Si f crece a la izquierda de un punto crítico, y f decrece a la derecha del punto crítico, entonces es un punto de máximo local ↗↘

Si f decrece a la izquierda de un punto crítico, y f crece a la derecha del punto crítico, entonces es un punto de mínimo local ↘↗

Derivada segunda de la función: $f''(x)$

1 Concavidad hacia arriba y hacia abajo

si $f''(x) > 0$ en $\mathbb{I} \Rightarrow f$ concava hacia arriba en \mathbb{I} \cup

si $f''(x) < 0$ en $\mathbb{I} \Rightarrow f$ concava hacia abajo en \mathbb{I} \cap

2 Puntos de inflexión: son puntos en el dominio de f en los que cambia la concavidad de la función, pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

$$P.I. = \{x_i \in \text{Dom } f / f \text{ es } \cup x_i \cap \vee f \text{ es } \cap x_i \cup\}$$

3 Máximo y mínimo local con $f''(x_c)$

Si x_c es un P.C. y $f''(x_c) > 0 \Rightarrow x_c$ es mínimo local

Si x_c es un P.C. y $f''(x_c) < 0 \Rightarrow x_c$ es máximo local

Resumen

$$\begin{aligned}
 f(x) & \left\{ \begin{array}{l} \text{Dom } f \\ \text{simetria} \rightarrow \text{opcional (Par, impar)} \\ \text{cruce con los ejes } (0, f(0)) \ (x_0, 0) \rightarrow \text{opcional} \\ A.V. (\lim_{x \rightarrow a^\pm} = \pm\infty) \\ A.H. (\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = L) \end{array} \right. \\
 f'(x) & \left\{ \begin{array}{l} P.C. (x_c \in \text{Dom } f / f'(x_c) = 0 \vee f'(x_c) \neq 0) \\ f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow, f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \\ \text{max/min local} \end{array} \right. \\
 f''(x) & \left\{ \begin{array}{l} f''(x) > 0 \rightarrow f \cup, f''(x) < 0 \rightarrow f \cap \\ P.I. (x_i \in \text{Dom } f / \cup \cap \vee \cap \cup) \\ x_c : \text{min local si } f''(x_c) > 0, \text{max local si } f''(x_c) < 0 \rightarrow \text{opcional} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

extremos del
 ΔDom
 $f'(x) = 0$



Concavo
 hacia Arriba

Concavo
 hacia
 abajo

Punto inflexión

Análisis completo de una función. Graficar.

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$$

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$$

$$f''(x) = -12x^2 + 4$$

Info a partir de f

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 \quad f'(x) = -4x^3 + 4x \quad f''(x) = -12x^2 + 4$$

1 Dominio: El dominio son todos los reales porque es un polinomio

2 Paridad: $f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 3 = -x^4 + 2x^2 + 3 = f(x)$ f es par
(simétrica con respecto al eje y)

3 Cruce con los ejes coordenados

cruce con eje y: $f(0) = 3 \rightarrow (0, 3)$

cruce con eje x (raíces): $0 = -x^4 + 2x^2 + 3 \quad x^2 = z \rightarrow 0 = -z^2 + 2z + 3$

Baskhara: $z_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \quad z_1 = -1 \quad z_2 = 3 \quad x^2 = 3 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$

$(-\sqrt{3}, 0)y(\sqrt{3}, 0)$

4 A.V.: No posee porque tiene dominio \mathbb{R}

5 A.H:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 + 2x^2 + 12 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^4}_{\rightarrow \infty} \underbrace{\left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{12}{x^4}\right)}_{\rightarrow -1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 + 2x^2 + 12 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^4}_{\rightarrow \infty} \underbrace{\left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{12}{x^4}\right)}_{\rightarrow -1} = -\infty$$

No posee

Gráfico

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 \quad f'(x) = -4x^3 + 4x \quad f''(x) = -12x^2 + 4$$

$Dom f \mathbb{R}$
f es par
cruce con eje x $A = (-\sqrt{3}, 0)$ y $B = (\sqrt{3}, 0)$
cruce con eje y $C = (0, 3)$
No tiene A.V
No tiene A.H
$\lim(x \rightarrow \infty) = -\infty = \lim(x \rightarrow -\infty)$

Info a partir de f'

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 \quad f'(x) = -4x^3 + 4x \quad f''(x) = -12x^2 + 4$$

- 1 P.C.: $x_c \in \text{Dom } f / f'(x_c) = 0$ o $f'(x_c) \nexists$

$\text{Dom } f' = \mathbb{R}$ f es derivable en todo su dominio

$$f'(x) = 0 = -4x(x^2 - 1) = -4x(x - 1)(x + 1) \Rightarrow x_c = 0, x_c = 1, x_c = -1$$

- 2 Crecimiento/decrecimiento: signos de la derivada 1ra

$$-4x(x - 1)(x + 1) > 0 \vee -4x(x - 1)(x + 1) < 0$$

$x_c; x \notin \text{Dom}$	$(-\infty, -1)$ x=-1000	$(-1, 0)$ x=-0.5	$(0, 1)$ x=0.5	$(1, +\infty)$ x=1000
$-4x$	+	+	-	-
$(x - 1)$	-	-	-	+
$(x + 1)$	-	+	+	+
$f'(x)$	+	-	+	-
$f(x)$	↗	↘	↗	↘

- 3 Máximos y mínimos locales (veo comportamiento de f a derecha e izq de P.C.)

Máximos locales en $x_c = -1, f(x_c) = 4$ y en $x_c = 1, f(x_c) = 4$ (es una función par!)

Mínimo local en $x_c = 0, f(x_c) = 3$

Gráfico

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 \quad f'(x) = -4x^3 + 4x \quad f''(x) = -12x^2 + 4$$

$Dom f \mathbb{R}$
f es par
No tiene A.V
No tiene A.H
$\lim(x \rightarrow \infty) = -\infty = \lim(x \rightarrow -\infty)$
cruce con eje x: $A = (-\sqrt{3}, 0)$ y $B = (\sqrt{3}, 0)$
cruce con eje y: $C = (0, 3)$

f crece $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
f decrece $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
máx local: $P = (-1, 4)$ y $Q = (1, 4)$
mín local: $R = (0, 3)$

Info a partir de f''

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 \quad f'(x) = -4x^3 + 4x \quad f''(x) = -12x^2 + 4$$

- 1 Buscamos las raíces de f'' para definir intervalos

$$f''(x) = 0 = -12x^2 + 4 = -12 \left(x^2 - \frac{4}{12} \right) = -12 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) =$$

$$-12 \left(x - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \cdot \left(x + \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

- 2 Concavidad hacia arriba/abajo: signos de la derivada 2da

$$-12 \left(x - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \cdot \left(x + \sqrt{\frac{1}{3}} \right) > 0 \vee -12 \left(x - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \cdot \left(x + \sqrt{\frac{1}{3}} \right) < 0$$

$x_r; x \notin Dom$	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ x=-1000	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ x=0	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right)$ x=1000
$-12 \cdot \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$	+	-	-
$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$	-	-	+
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	∩	∪	∩

- 3 Puntos de inflexión (puntos del dominio en que cambia la concavidad)

$$x_i = -\frac{\sqrt{3}}{3}, f(x_i) = - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^4 + 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 3 = \frac{5}{9} + 3 = \frac{32}{9}$$

$$x_i = \frac{\sqrt{3}}{3}, f(x_i) = - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^4 + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 3 = \frac{5}{9} + 3 = \frac{32}{9}$$

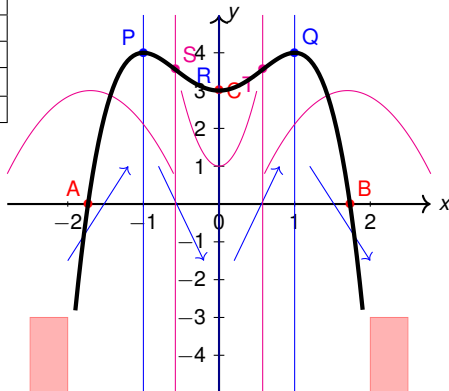
Gráfico

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 \quad f'(x) = -4x^3 + 4x \quad f''(x) = -12x^2 + 4$$

$Dom f \mathbb{R}$
f es par
No tiene A.V
No tiene A.H
$\lim(x \rightarrow \infty) = -\infty = \lim(x \rightarrow -\infty)$
cruce con eje x: $A = (-\sqrt{3}, 0)$ y $B = (\sqrt{3}, 0)$
cruce con eje y: $C = (0, 3)$

f crece $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
f decrece $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
máx local: $P = (-1, 4)$ y $Q = (1, 4)$
mín local: $R = (0, 3)$

f cóncava abajo $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
f cóncava arriba $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$
P.I.: $S = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{32}{9})$ y $T = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{32}{9})$



Análisis completo de una función. Graficar.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4 \cdot (x^2 - 1)^2 - (-4x) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{-4(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{-4(-3x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^3} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Info a partir de f

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \quad f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

- 1 Dominio: $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

- 2 Paridad: $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$ f es par (simétrica con respecto al eje y)

- 3 Cruce con los ejes coordenados: cruce con eje y: $f(0) = -1 \rightarrow$ (0, -1)

$$\text{cruce con eje x (raíces): } 0 = x^2 + 1 \quad \text{No tiene raíces reales}$$

4 A.V.: $\lim_{\substack{x \rightarrow -1^- \\ x < -1 \rightarrow x+1 < 0}} \frac{x^2+1}{\underbrace{(x-1)}_{\rightarrow -2} \underbrace{(x+1)}_{\rightarrow 0(-)}} = +\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow -1^+ \\ x > -1 \rightarrow x+1 > 0}} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1^- \\ x < 1 \rightarrow x-1 < 0}} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ x > 1 \rightarrow x-1 > 0}} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = +\infty$

$$x = -1 \text{ es A.V. y } x = 1 \text{ es A.V.}$$

5 A.H: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = 1$

$$x = 1 \text{ es A.H.}$$

Gráfico

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \quad f''(x) = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

$Dom f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
f es par
No tiene cruce con eje x
cruce con eje y $A = (0, -1)$
A.V en $x=-1$ y en $x=1$
$\lim(-1^-) = +\infty$ y $\lim(-1^+) = -\infty$
$\lim(1^-) = -\infty$ y $\lim(1^+) = +\infty$
A.H en $y=1$ (en $+\infty$ y $-\infty$)

Info a partir de f'

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \quad f''(x) = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

- 1 P.C.: $x_c \in \text{Dom } f / f'(x_c) = 0$ o $f'(x_c) \nexists$
 $\text{Dom } f' = \text{Dom } f$; f es derivable en el dominio de f
 $f'(x) = 0 = -4x \Rightarrow \boxed{x_c = 0}$

- 2 Crecimiento/decrecimiento: signos de la derivada 1ra

$$\frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} > 0 \vee \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} < 0$$

$x_c; x \notin \text{Dom}$	$(-\infty, -1)$ $x=-1000$	$(-1, 0)$ $x=-0.5$	$(0, 1)$ $x=0.5$	$(1, +\infty)$ $x=1000$
$\frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$	+	+	-	-
$f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	\nearrow	\nearrow	\searrow	\searrow

- 3 Máximos y mínimos locales (veo comportamiento de f a derecha e izq de P.C.)
Máximo local en $\boxed{x_c = 0}$

Gráfico

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \quad f''(x) = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

$Dom f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
f es par
No tiene cruce con eje x
cruce con eje y $A = (0, -1)$
A.V en $x=-1$ y en $x=1$ $\lim(-1^-) = +\infty$ y $\lim(-1^+) = -\infty$ $\lim(1^-) = -\infty$ y $\lim(1^+) = +\infty$
A.H en $y=1$ (en $+\infty$ y $-\infty$)

f crece $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
f decrece $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
máx local: $P = (0, -1)$

Info a partir de f''

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \quad f''(x) = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

- 1 Buscamos las raíces de f'' para definir intervalos
 $f''(x) = 0 = 12x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = -\frac{4}{12} \Rightarrow$ NO tiene raíces

- 2 Concavidad hacia arriba/abajo: signos de la derivada 2da

$$\frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3} > 0 \vee \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3} < 0$$

$$\frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^2} \cdot \frac{1}{(x^2 - 1)} = \boxed{\frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^2}} \cdot \frac{1}{(x - 1)(x + 1)}$$

$x_i: x \notin Dom$	$(-\infty, -1)$ $x=-1000$	$(-1, 1)$ $x=0$	$(1, +\infty)$ $x=1000$
$\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^2}$	+	+	+
$x + 1$	-	+	+
$x - 1$	-	-	+
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	U	∩	U

- 3 Puntos de inflexión (puntos del dominio en que cambia la concavidad)
 NO existen

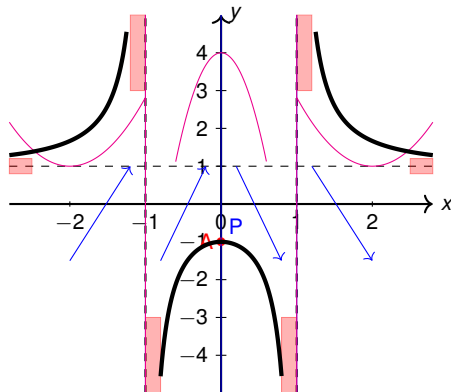
Gráfico

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \quad f''(x) = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

$Dom f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
f es par
No tiene cruce con eje x
cruce con eje y $A = (0, -1)$
A.V en $x=-1$ y en $x=1$
$\lim(-1^-) = +\infty$ y $\lim(-1^+) = -\infty$
$\lim(1^-) = -\infty$ y $\lim(1^+) = +\infty$
A.H en $y=1$ (en $+\infty$ y $-\infty$)

f crece $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
f decrece $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
máx local: $P = (0, -1)$

f cóncava abajo $(-1, 1)$
f cóncava arriba $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
P.I.: No hay



FIN