Clase 16 - Análisis Matemático 1 - LC: Análisis de funciones I

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

13 de Mayo de 2020

Índice

1 Análisis de gráficos de funciones y sus derivadas

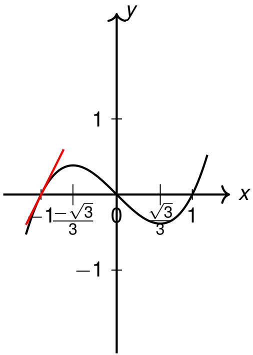
2 Máximos y mínimos
- Absolutos
- Locales
- Extremos y puntos críticos
- Máximos y mínimos en intervalos cerrados

Análisis de gráficos

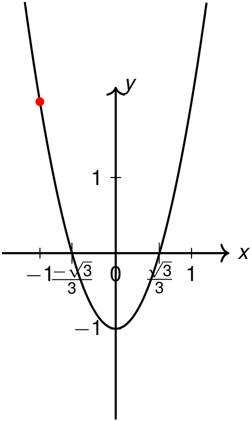
Recta tangente a la función en cada punto:
`https://www.geogebra.org/m/vapgwryu`

Análisis de gráficos

$f(x) = x^3 - x$



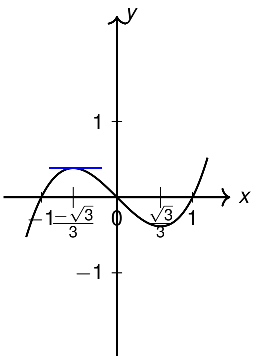
$f'(x) = 3x^2 - 1$



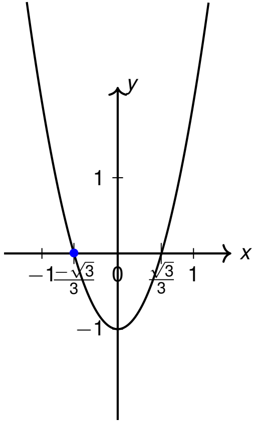
$f'(-1) > 0$, $f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $f'(0) < 0$,
$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $f'(0) < 0$ $f'(1) > 0$

Análisis de gráficos

$f(x) = x^3 - x$



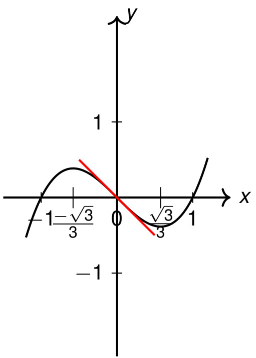
$f'(x) = 3x^2 - 1$



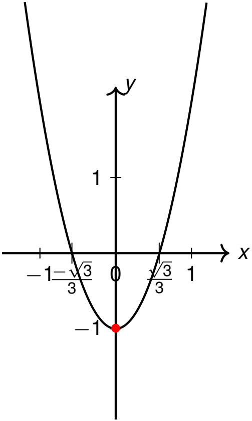
$f'(-1) > 0$, $f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $f'(0) < 0$,
$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $f'(0) < 0$ $f'(1) > 0$

Análisis de gráficos

$f(x) = x^3 - x$



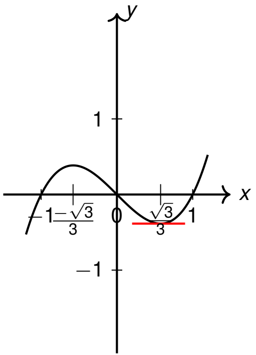
$f'(x) = 3x^2 - 1$



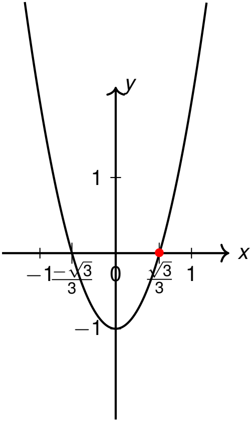
$f'(-1) > 0$, $f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $f'(0) < 0$,
$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $f'(0) < 0$ $f'(1) > 0$

Análisis de gráficos

$f(x) = x^3 - x$



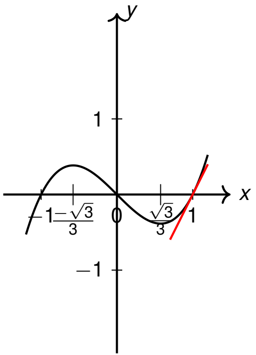
$f'(x) = 3x^2 - 1$



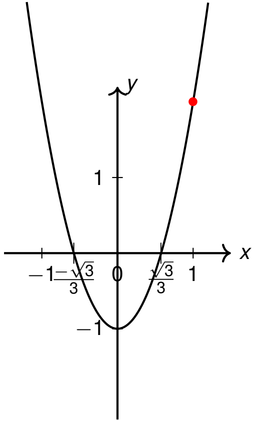
$f'(-1) > 0$, $f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $f'(0) < 0$,
$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $f'(0) < 0$ $f'(1) > 0$

Análisis de gráficos

$f(x) = x^3 - x$



$f'(x) = 3x^2 - 1$



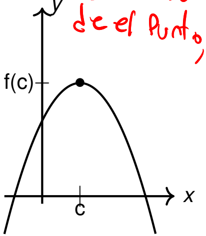
$f'(-1) > 0$, $f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $f'(0) < 0$,
$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, $f'(0) < 0$ $f'(1) > 0$

Máximos y mínimos Absolutos

Extremos Absolutos

- Una función f tiene un máximo absoluto en un punto c de su dominio si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en el dominio de f. El punto c se llama punto de máximo de f, y $f(c)$ se llama valor máximo de f
- Una función f tiene un mínimo absoluto en un punto c de su dominio si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en el dominio de f. El punto c se llama punto de mínimo de f, y $f(c)$ se llama valor mínimo de f

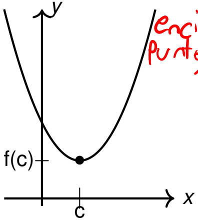
todo valor debajo de el punto, es <



$f(c) \geq f(x)\ \forall x \in Dom\, f$

Máximo absoluto en $x = c$, valor máximo $f(c)$

todo valor encima de el punto, es >



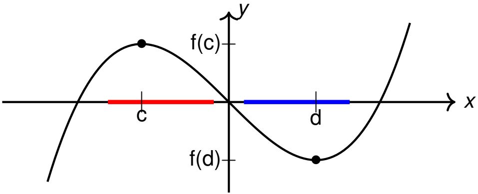
$f(c) \leq f(x)\ \forall x \in Dom\, f$

Mínimo absoluto en $x = c$, valor mínimo $f(c)$

Máximos y mínimos Locales

Extremos Locales

- Una función f tiene un máximo local en un punto c de su dominio si hay un intervalo Abierto $\mathbb{I}$ que contiene a c tal que $f(c) \geq f(x)$ **para todo** $x \in \mathbb{I}$. El punto c se llama **punto de máximo local** de f.
- Una función f tiene un mínimo local en un punto d de su dominio si hay un intervalo abierto $\mathbb{J}$ que contiene a d tal que $f(d) \leq f(x)$ **para todo** $x \in \mathbb{J}$. El punto d se llama **punto de mínimo local** de f



$$f(c) \geq f(x)\ \forall x \in \mathbb{I}$$
$$f(d) \leq f(x)\ \forall x \in \mathbb{J}$$

Máximo local en $x = c$, Mínimo local en $x = d$

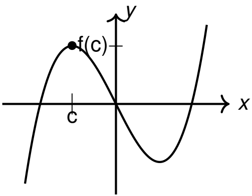
Extremos y puntos críticos

Teorema de Fermat

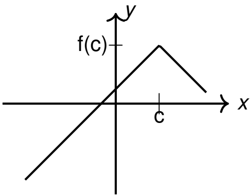
Si f tiene un extremo (máximo o mínimo) local en $x = c$ y si f es derivable en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$

$$si\ x = c \text{ es extremo y } \exists f'(c) \;\Rightarrow f'(c) = 0$$

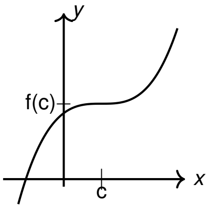
La derivada e F(c) = 0



$x = c$ es extremo (máximo local) y $\exists\ f'(c) \Rightarrow f'(c) = 0$



$x = c$ es extremo (máximo local) y $\nexists\ f'(c) \Rightarrow$ NO aplica el T. de F.



$f'(c) = 0$ pero $x = c$ NO es extremo! NO es válido el recíproco

Extremos y puntos críticos

Si es Máximo/mínimo ⟶ Pto crítico y extremo Local

Teorema de Fermat

Si f tiene un extremo (máximo o mínimo) local en $x = c$ y si f es derivable en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$

$$si\ x = c \text{ es extremo y } \exists f'(c) \ \Rightarrow f'(c) = 0$$

No es cierto q todo Pto crítico es extremo local

Demostración por definición
Hipótesis: $x = c$ es extremo y $f'(c)$ existe:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

si c es extremo (supongamos máximo local) $\Rightarrow f(c) \geq f(x)\ \forall x \in \mathbb{I}$
$h \to 0 \Rightarrow (c+h) \in \mathbb{I} \Rightarrow f(c) \geq f(c+h) \to f(c+h) - f(c) \leq 0$

Si $h > 0$: $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$

Si $h < 0$: $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$

Ya que sabemos por hipótesis que $f'(c)$ existe, ambos laterales deben ser iguales!

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0 = f'(c)$$

Extremos y puntos críticos

Teorema de Fermat

Si f tiene un extremo (máximo o mínimo) local en $x = c$ y si f es derivable en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$

$$si\ x = c \text{ es extremo y } \exists f'(c) \ \Rightarrow f'(c) = 0$$

Importante: NO es válido el recíproco. Ejemplo: $f(x) = x^3$, en $x = 0$ vale $f'(0) = 0$ pero $x = 0$ NO es es extremo!

Puntos críticos

Un punto crítico de una función es un número c del dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe

$$P.C. = \{x \in Dom\, f \ / \ f'(x) = 0 \vee \nexists f'(x)\}$$

Ejemplos:

- $f(x) = x^3$ $Dom\, f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 3x^2$ $\quad f'(x_c) = 0 \Leftrightarrow x_c = 0$ es punto crítico
- $f(x) = |x|$ $Dom\, f = \mathbb{R}$ $\quad f'(0)$ no existe $\Rightarrow x_c = 0$ es punto crítico
- $f(x) = (x-1)^2$ $Dom\, f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 2 \cdot (x-1)$ $\quad f'(x_c) = 0 \Leftrightarrow x_c = 1$ es P.C.
- $f(x) = \sqrt{x}$ $Dom\, f = [0, +\infty)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad f'(0)$ no existe $\Rightarrow x_c = 0$ es P.C.

Máximos y mínimos en intervalos cerrados

Recordemos de la clase 12 (Continuidad II):

Teo de Weierstrass

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces hay al menos dos puntos x_1 y x_2 en el $[a, b]$, tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todos los $x \in [a, b]$

En otras palabras, f alcanza su valor máximo y su valor mínimo (absolutos) en el $[a, b]$

¿Podemos encontrar dónde están el máximo y el mínimo en un intervalo cerrado? (el Teo de W. asegura que existen!)

1. Verificar continuidad en el intervalo cerrado
2. Buscar puntos críticos
3. Evaluar la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos que caen en el intervalo
4. Comparar los valores encontrados y elegir cuál es el máximo y cuál es el mínimo

Ejemplos

1. Verificar continuidad en el intervalo cerrado $\lim_{x \to a}$ ✓
2. Buscar puntos críticos $f'(x) \to f'(c) = 0$
3. Evaluar la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos que caen en el intervalo Weirstrass
4. Comparar los valores encontrados y elegir cuál es el máximo y cuál es el mínimo

- $f(x) = x^2 + 2$ en $[-1, 3]$
  1. Es un polinomio que es continua en $\mathbb{R}$ entonces es continua en $[-1, 3]$
  2. $f'(x) = 2x$ Existe para todos los $\mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = 0 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ es } P.C.}$
  3. $f(-1) = 3$, $f(3) = 11$ y $f(0) = 2$
  4. Tiene máximo absoluto en x=3 y tiene mínimo absoluto en x=0

Ejemplos

1. Verificar continuidad en el intervalo cerrado
2. Buscar puntos críticos
3. Evaluar la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos que caen en el intervalo
4. Comparar los valores encontrados y elegir cuál es el máximo y cuál es el mínimo

- $f(x) = x^2 + 2$ en $[1, 3]$
  1. es continua en $[1, 3]$
  2. $f'(x) = 2x$ Existe para todos los $\mathbb{R}$ $f'(x) = 0 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 0\ es\ P.C.}$
  3. $f(1) = 3$, $f(3) = 11$ (el P.C. no pertenece al intervalo)
  4. Tiene máximo absoluto en x=3 y tiene mínimo absoluto en x=1

Ejemplos

1. Verificar continuidad en el intervalo cerrado
2. Buscar puntos críticos
3. Evaluar la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos que caen en el intervalo
4. Comparar los valores encontrados y elegir cuál es el máximo y cuál es el mínimo

- $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ en $[-1, 2]$
  1. f es continua $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ por ser cociente de continuas cuyo denominador no se anula en este intervalo $\Rightarrow$ es continua en $[-1, 2]$
  2. $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x+2) - x^2 \cdot 1}{(x+2)^2}$

     $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$ existe para todos los $x \in Dom\, f$

     $f'(x) = 0 = x^2 + 4x \to 0 = x(x+4) \Rightarrow \boxed{x_c = 0 \ y \ x_c = -4 \ son \ P.C.}$
  3. $f(-1) = 1$, $f(2) = 1$ y $f(0) = 0$ $\qquad (-4 \notin [-1, 2])$
  4. Tiene máximos absolutos en $x = -1$ y en $x = 2$, y tiene mínimo absoluto en $x = 0$

Ejemplos

1. Verificar continuidad en el intervalo cerrado
2. Buscar puntos críticos
3. Evaluar la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos que caen en el intervalo
4. Comparar los valores encontrados y elegir cuál es el máximo y cuál es el mínimo

- $f(x) = x - x^{\frac{2}{3}}$ en $[-1, 1]$
  1. f es continua en $\mathbb{R}$, en particular en un intervalo más chico también: $\Rightarrow$ es continua en $[-1, 1]$
  2. $f'(x) = 1 - \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$

     $f'(x) = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ existe si $x \neq 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ es P.C.}}$

     $f'(x) = 0 = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}} \to 0 = 3\sqrt[3]{x} - 2$

     $\Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{x_c = \frac{8}{27} \text{ es P.C.}}$
  3. $f(-1) = -2$, $f(1) = 0$, $f(0) = 0$ y $f\left(\frac{8}{27}\right) = -\frac{4}{27}$
  4. Tiene máximos absolutos en $x = 0$ y en $x = 1$, y tiene mínimo absoluto en $x = -1$

Extremos absolutos y locales en $\mathbb{R}$

No podemos aplicar el teorema de Weierstrass!
• Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, entonces $f(x)$ NO tiene máximo absoluto (puede tener máximos locales!)
• Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, entonces $f(x)$ NO tiene mínimo absoluto (puede tener mínimos locales!)
• Si la función tiene asíntotas verticales tampoco tendrá máximo o mínimo absolutos (dependiendo del valor de los límites alrededor de las asíntotas V).

¿Y cómo encontramos los extremos locales?

1. Buscar puntos críticos
2. Analizar crecimiento y decrecimiento de la función

CONTINUARÁ...