Resumen de Álgebra

Un Cuerpo $(K, +, \cdot)$ donde K es No Vacío y $+, \cdot$ son leyes de composición interna en K. (o sea, operaciones)

Dado un conjunto K con dos operaciones, tales.

$+: K \times K \to K$

$\cdot: K \times K \to K$

(Nos dice que si operamos dos números de k, nos devuelve otro número K)

(suma de vectores y producto por escalares)

Los siguientes axiomas se usan para demostrar que algo es un cuerpo.

1) La suma es Asociativa.

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

2) Existe un elemento neutro, $0 \in K$, tal que:

$$0+x=x=x+0$$

3) $\forall x \in K$, existe un único elemento opuesto $(-x \in K)$, tal que:

$$-x+x=0=+x+(-x)$$

4) La adición es Conmutativa

$$x+y=y+x$$

5) La multiplicación es Asociativa.

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)z$$

6) Existe un elemento neutro para la multiplicación, $1 \in K$, tq:

$$1\cdot x=x=x\cdot 1$$

7) Para todo $x \in F$, y $x \neq 0$, existe un único elemento de F, denotado x^{-1} tal que

$$x\cdot x^{-1}=1=x^{-1}\cdot x$$

$\left(x\cdot x^{-1}=x\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x}=1\right)$

8) La multiplicación es Conmutativa

$$x\cdot y=y\cdot x$$

9) La q conecta la $+$ con $\cdot$ es la distributividad.

$$x\cdot(y+x=x\cdot y+x\cdot z$$

Se le dice Cuerpo a todo conjunto que cumple todos esos Axiomas.
Se le dice Anillo a todo conjunto que cumple (1-6 y 9)
Conmutativo " " " " y es Conmutable
Unidad " " " " y $a \cdot 1 = a$

Definición

Un subconjunto de un Cuerpo F es un subconjunto F' que a la vez es un Cuerpo con las operaciones + ∧ •, verificandose

1) $0, 1 \in F'$
2) Si $x, y \in F' \Rightarrow x+y \in F' \wedge x \cdot y \in F'$
3) Si $x \in F' \Rightarrow -x \in F'$
4) Si $x \in F'$, $x \neq 0$

Números Complejos (lo hago rapido, creo que es irrelevante)

$+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Dado Por: $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

$\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ " " : $(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

Parte imaginaria

$i^{4m} = 1$, $i^{4m+1} = 1$, $i^{4m+e} = i$, $i^{4m+3} = -i$

$$\boxed{\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \end{aligned}}$$

Definiciones

Dado $z = a+bi$, entonces.

La Parte $\mathbb{R}$ de z es $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$

La Parte i de z, es $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$

Entonces, denotamos:

El Conjugado de z como $\bar{z} = a - bi$

El módulo de z, como $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Se cumple:

$\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$, $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

(a) $\bar{\bar{z}} = z$, (b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, (c) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, (d) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$,
(e) $z\bar{z} = |z|^2$, (f) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$, (g) $|\bar{z}| = |z|$.

$|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $|z+w| = |z|+|w|$

$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$|z+w| \leq |z| + |w|$

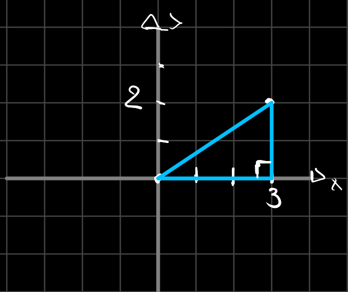
Representación en un Plano.

Dado, $3+2i$

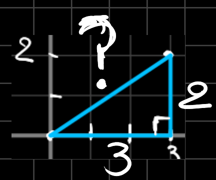
1) Dibujo:

$y = 2$, $x = 3$.

2) llego al punto Partiendo de 0



→



$\sqrt{a^2+b^2}$

Espacios Vectoriales

Definición

Sea K un Cuerpo, V un Conjunto No vacio, y:

$+ : V \times V \to V$

$\cdot : K \times V \to V$

Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un K espacio vectorial si y solo si, cumple los siguientes "Axiomas":

(Notación: un grupo abeliano es aquel q solo cumple i)

(i) La suma cumple:

1) La suma es asociativa:

$(v+u)+w = v+(u+w)$

2) Existe $0 \in V$, vector nulo, tal que

$0+w = w = w+0$

3) Para cada $n \in V$, $\exists n \in V$ tq

$n+(-n) = 0 = -n+n$

4) La suma es Conmutativa

$v+w = w+v$

$\forall w, v, u \in V$

(ii) La multiplicación.

1) Elemento neutro multiplicación

$1 \cdot n = n = n \cdot 1$

2) Dados a, entonces

$a(n+w) = an + aw$

3) Dado a, b entonces

$n(a+b) = an + bn$

4) Dado a, b, entonces

$a(b \cdot n) = (a \cdot b) \cdot n$

Los elementos de V son Vectores
Los elementos de K son escalares

Subespacios Vectoriales

Se verifican de manera tal:

1) Cierre bajo la suma: Dado $u, v \in W$, $\to$ la suma $u+v \in W$.

(Sumar dos vectores en W, produce otro en W)

2) Cierre bajo la multiplicación escalar.

Para Cualq $v \in W$ y un escalar c (Pert Cuerpo Vectorial)

Entonces, $c \cdot v \in w$.
(mult un vector por escalar, da un vector en w)

3) Contiene el vector 0, elemento neutro aditivo,
vector 0 de v, debe $\in$ w.

Sistemas de ecuaciones.

Los sistemas q se usarán son lineales, Tiene m ecuaciones lineales tiene n incognitas del tipo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_n = b_n \end{cases}$$

Donde $a_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$
$b_1, b_n \in K$

Las soluciones se determinan de manera tal: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$
Si los $b = 0$, se dice hogoneo.

En los sistemas de ecuaciones, se puede $\pm$, $\cdot$, $/$. Para hacer equivalentes

- La mejor manera de solucionar es con sustitución.
- Se van despejando incognitas por sustitución.
- Lo ideal es hacer sol. con sistemas $\Leftrightarrow$ hay 3 ecuaciones y 3 incognitas
- Si quedan mismas sol. Entonces es incosistente (Nts):

Reescribo

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 7y - 11z = 5 \\ 7y - 11z = 10 \end{cases}$$

5) Despejo

incosistente

Así se soluciona un sistema (Rojo: notaciones)

(c) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x-2y+3z=0 \\ x+4y+9z=0 \end{cases}$

El sistema es Homogeneo $b=0$

Si $b\neq 0$ No es Homogeneo $\Rightarrow$ tmb se opera el b (ya sea +; /)

1) igualo 1 ~~pa~~ Para eliminar 1 incognita, y despejar poco a poco.

$x+y+z+(-x)-2y+3z=0$

$+y+z-2y+3z=0$

$-y+4z=0$

2) Reescribo!

$\begin{cases} -y+4z=0 \\ -x-2y+3z=0 \\ x+4y+9z=0 \end{cases}$

3) igualo 2 y 3 Para quedarme con Y, Z para tener más fácil los valores

$(\cancel{-x}-2y+3z)+(\cancel{x}+4y+9z)=0$

$2y+12z=0$

4) Reescribir!

$\begin{cases} -y+4z=0 \\ -x-2y+3z=0 \\ 2y+12z=0 \end{cases}$

5)

$\rightarrow$ $y=-4z$ $\quad -4z=-6$

$y=-6z$ $\quad 0=-2$

$0=z$

$z=0 \quad y=0 \quad x=0$

$\Rightarrow$

$x \Rightarrow -x-2(0)+3(0)=0$

$-x=0$

$x=0$

Matrices.

Sea $m,n\in\mathbb{N}$, una matriz $M_{x n}$ sobre un cuerpo K es una función A del conjunto de pares enteros (i,j), $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$, en el cuerpo K, se representa mediante un arreglo triangular:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nK} \end{bmatrix}$$

Cada elemento es una entrada de matriz. (coeficiente)

El conjunto de todas las matrices M_{xn} sobre K, denotado $M_{m\times n}(K)$

Ej:

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{C})$$

El objetivo de una matriz a algo más equivalente y fácil

¿Que puedo hacer en una matriz + Como denoto cada movimiento?

- Las operaciones se deben mencionar si o sí, de manera:

$F_2 \to F_2 - F_3$ (Por decir una)

- Multiplicación por un escalar c. (No Nulo).
- Intercambiar Filas, Denotado ($F_2 \leftrightarrow F_3$) cambio F_2 por F_3
- Podemos restar y sumar Filas con Filas, incluyendo una duplicación de Fila.

Definición.

Una mátriz $A \in M_{m\times n}(K)$ se dice reducida por filas (MRF) si:

1) El primer elemento no nulo de cada fila no nula es 1. (1 Principal)

2) Cada columna de A q contiene un 1 principal tiene todos sus otros elementos iguales a 0.

Definición

Una mátriz $A \in M_{m\times n}(K)$ se dice escalón reducida por fila (MerF) si.

A) Si es Reducida por Filas

b) Las Filas nulas (aquellas con entradas nulas) están por debajo de toda fila no nula.

c) ES MerF si los 1 están "escalonados"

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Teorema.

toda matriz $A \in M_{m\times n}(K)$ es equivalente por filas a una MerF

Demo ni ahí

Un sistema de ecuaciones es una matriz, y las soluciones y verificación son iguales.