Clase 2 - Análisis Matemático 1 - LC: Desigualdades e Inecuaciones

Eugenia Díaz-Giménez[1]

eugenia.diaz@unc.edu.ar

18 de Marzo de 2020

Índice

Repasando...

Propiedades de los números reales

P1. Propiedad asociativa de la suma $a + (b + c) = (a + b) + c$
P2. Elemento neutro para la suma: $a + 0 = 0 + a = a$
P3. Existencia del opuesto para la suma: $a + (-a) = (-a) + a = 0$
P4. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a$
P5. Propiedad asociativa del producto: $a.(b.c) = (a.b).c$
P6. Elemento neutro para el producto: $a.1 = 1.a = a$
P7. Existencia del inverso multiplicativo: $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$
P8. Propiedad conmutativa del producto: $a.b = b.a$
P9. Multiplicación por 0 : $a.0 = 0.a = 0$
P10. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $a.(b + c) = a.b + a.c$
P11. Propiedad distributiva de la potencia con respecto al producto: $(a.b)^n = a^n.b^n$
P12. Producto de potencias de igual base: $a^n.a^m = a^{n+m}$
P13. Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$
P14. Cuadrado de un binomio: $(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

Repasando...

Propiedad Uniforme:

si efectuamos la misma operación de ambos lados de una **ecuación**, la igualdad se mantiene

- Sumar (restar) el mismo número de ambos miembros
- Multiplicar (dividir) el mismo número de ambos miembros ($\neq 0$)
- Elevar a una potencia a ambos miembros

Más propiedades...

Tomando el conjunto de **números positivos**, llamado P:

1. Ley de tricotomía: Todo número a cumple una y sólo una de las siguientes condiciones
   - i. $a = 0$
   - ii. a pertenece a P (a es positivo)
   - iii. $-a$ pertenece a P (el opuesto de a es positivo)
2. La suma es cerrada en P: Si a y b pertenecen a P, entonces (a+b) pertenece a P (Si $a \in P$ y $b \in P \Rightarrow (a+b) \in P$ ó Si $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b > 0$)
3. La multiplicación es cerrada en P: Si $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a.b > 0$

ATENCIÓN:
$a > b$ Se lee "a es mayor que b", que es lo mismo que $b < a$ ("b es menor que a")
$a \geq b$ Se lee "a es mayor ó igual que b", y significa que o bien a es mayor que b, ó bien (excluyente) a es igual a b: $a > b \veebar a = b$.

Definimos:

Si $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$

Si $b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$

1. Si $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$
   Demostración:
   Por la definición: $a > b \rightarrow a - b > 0$, y $b > c \rightarrow b - c > 0$
   Por la propiedad (suma cerrada en P):
   $(a - b) + (b - c) > 0 \Rightarrow a - b + b - c > 0$
   (suma del opuesto =0): $a - c > 0$ por la definición: $a > c$

Definimos:

Si $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$

Si $b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$

1. Si $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$
2. Si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (ó $a < b < c$)
3. Si $a > b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c > b.c$
   Demostración:
   $a - b > 0$ y $c > 0$
   Producto cerrado en P: $(a - b).c > 0$
   Prop. Distrib.: $a.c - b.c > 0$
   Por definición: $a.c > b.c$

Definimos:

Si $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$

Si $b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$

1. Si $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$
2. Si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (ó $a < b < c$)
3. Si $a > b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c > b.c$
4. Si $a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc$
   Demostración:
   $a - b > 0$ y $-c > 0$
   Producto cerrado: $(a - b).(-c) > 0$
   Prop. Dist. $-ac + bc > 0 \rightarrow bc - ac > 0$
   Por definición: $ac < bc$

   Ejemplo: $3 > 2$ y $-1 < 0$
   Multiplico de ambos lados por (-1) y doy vuelta la desigualdad:
   $3.(-1) < 2.(-1)$
   $-3 < -2$ Verdadero!!!

Definimos:

Si $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$

Si $b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$

1. Si $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$
2. Si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (ó $a < b < c$)
3. Si $a > b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c > b.c$
4. Si $a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc$

Inecuaciones

Una inecuación involucra una incógnita y una desigualdad
Ejemplos:

$$x < 7$$

$$x + 3 \geq 2$$

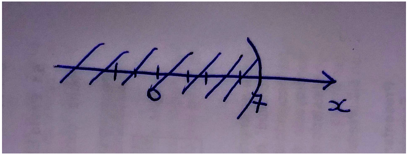
$$(x - 1).(x + 2) > 0$$

La solución de una inecuación será un rango o conjunto de valores
Usaremos notación de conjuntos para dar la solución (ver curso de nivelación), ya sea por comprensión o como intervalos.

Ejercicios

Expresar el conjunto solución como intervalos:

$$x < 7$$

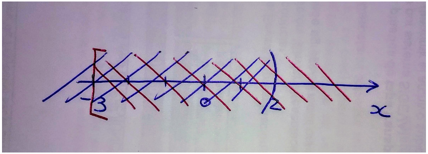


Solución: $(-\infty, 7)$

Ejercicios

Expresar el conjunto solución como intervalos:

$$x < 2 \wedge x \geq -3$$



Solución: $[-3, 2)$

Ejercicios

Expresar el conjunto solución como intervalos:

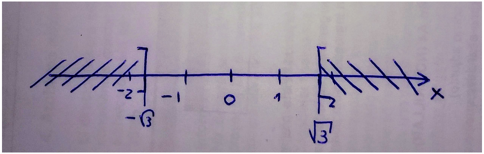
$$x^2 \geq 3$$

Y o q $\pm\sqrt{3}$

$$x^2 - 3 \geq 0$$
$$(x - \sqrt{3}).(x + \sqrt{3}) \geq 0$$

Ambos positivos $(+).(+) > 0$ o Ambos negativos $(-).(-) > 0$

$$\left(x - \sqrt{3} \geq 0 \wedge x + \sqrt{3} \geq 0\right) \vee \left(x - \sqrt{3} \leq 0 \wedge x + \sqrt{3} \leq 0\right)$$



Solución: $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$