Clase 7 - Análisis Matemático 1 - LC: Funciones IV

Eugenia Díaz-Giménez[1]

eugenia.diaz@unc.edu.ar

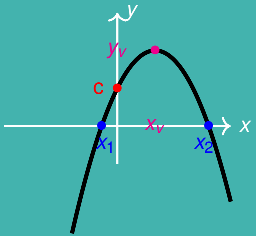
1 de Abril de 2020

Índice

Repaso...

Parábolas

- Forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Forma factorizada $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$
- Forma canónica $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$
  $x_v = -\frac{b}{2a}$



Repaso...

Circunferencia y Elipse

- Ecuación de la circunferencia: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$
  Centro en (x_0, y_0) y radio r
- Ecuación de la elipse: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
  Centro en (x_0, y_0) con semieje a lo largo del eje x $= a$, y semieje a lo largo del eje y $= b$

Ejemplo: Encontrar el centro y semiejes de la siguiente elipse

$x^2+4y^2-8x=-16y-28 \quad \Rightarrow \quad (x^2-8x)+(4y^2+16y)=-28$

$x^2-8x=x^2-2.4x=$

$x^2-2.4.x+4^2-4^2=(x-4)^2-16$

$4y^2+16y=4(y^2+4y)=4(y^2+2.2.y)$

$4(y^2+2.2.y+2^2-2^2)=4(\,(y+2)^2-4)$

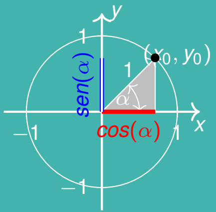
$(x-4)^2-16+4(y+2)^2-16=-28 \Rightarrow (x-4)^2+4(y+2)^2=-28+32=4$

$\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{4(y+2)^2}{4}=1 \qquad \frac{(x-4)^2}{2^2}+\frac{(y+2)^2}{1}=1 \qquad x_0=4, y_0=-2, a=2, b=1$

Repaso...

Funciones trigonométricas

- Partiendo de la circunferencia unitaria, se definen $x = cos(\alpha)$ y $y = sen(\alpha)$



- Identidad trigonométrica: $cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) = 1$
- Otras funciones trigonométricas:
  - $tan(\alpha) = \dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$
  - $sec(\alpha) = \dfrac{1}{cos(\alpha)}$
  - $cosec(\alpha) = \dfrac{1}{sen(\alpha)}$
  - $cotan(\alpha) = \dfrac{1}{tan(\alpha)}$

Repaso...

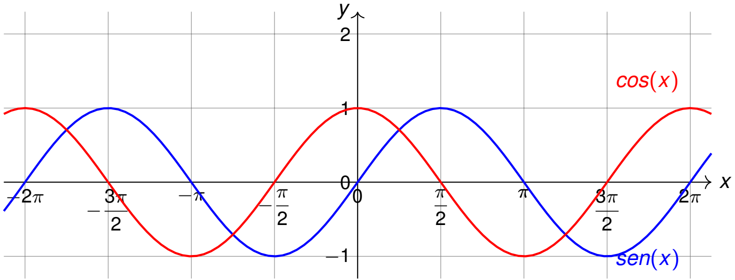
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Fórmulas para suma de ángulos:

$$cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y)$$

$$sen(x+y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y)$$

$cos(x)$ es una función par: $cos(-x) = cos(x)$
$sen(x)$ es una función impar: $sen(-x) = -sen(x)$



Ecuaciones trigonométricas

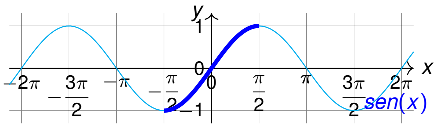
Función inversa:

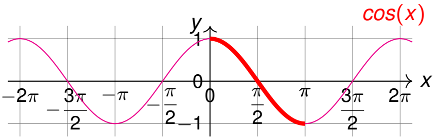
$$f(x) = y$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$$

$$x = f^{-1}(y)$$

Las funciones trigonométricas tienen inversa si restringimos su dominio/imagen





$sen(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

$cos(x) : [0, \pi] \to [-1, 1]$

Los nombres de las funciones inversas de las trigonométricas son: “arco[nombre]” y se denotan:

$$arcsen(x) \quad arccos(x) \quad arctan(x) \quad \text{etc}$$

$arcsen(x) : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$arccos(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$

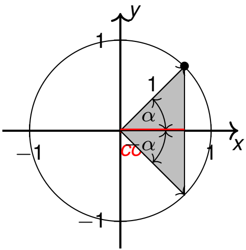
Ecuaciones trigonométricas

$$cos(\alpha) = p$$

Cuál es el valor de α?

$$arccos(cos(\alpha)) = arccos(p) \quad \Rightarrow \alpha = arccos(p)$$

Es la única solución?



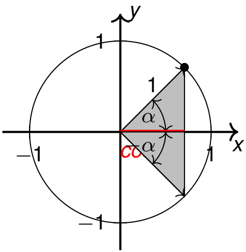
Ecuaciones trigonométricas

$$cos(\alpha) = p$$

Cuál es el valor de α?

$$arccos(cos(\alpha)) = arccos(p) \quad \Rightarrow \alpha = arccos(p)$$

Es la única solución?



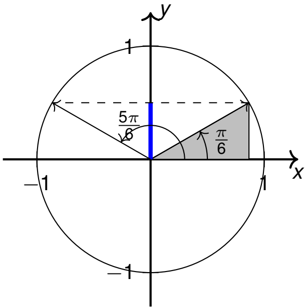
α es solución, y en este caso $-\alpha$ también es solución (la función coseno es par!!!).
Son las únicas soluciones? Función periódica con período $2\pi \Rightarrow$

$$\alpha + n.2\pi \quad n \in \mathbb{Z} \qquad \vee \qquad -\alpha + n.2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo1

$$sen(\alpha) = \frac{1}{2}$$

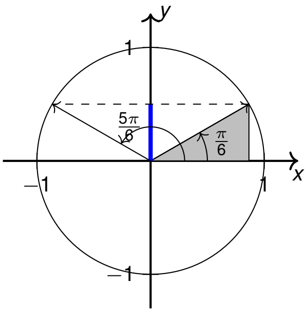
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Ejemplo1

$$sen(\alpha) = \frac{1}{2}$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



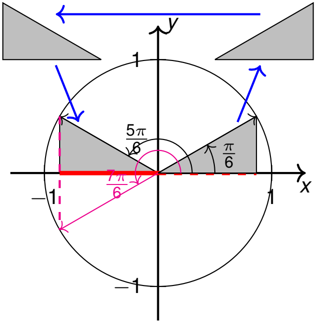
$$\alpha_0 = \frac{\pi}{6} \qquad \alpha_1 = 5\frac{\pi}{6}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + n.2\pi \qquad \vee \qquad \alpha = 5\frac{\pi}{6} + n.2\pi$$

Ejemplo2

$$cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

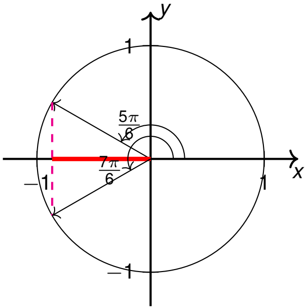
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Ejemplo2

$$cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



$$\alpha_0 = 5\frac{\pi}{6} \qquad \alpha_1 = 7\frac{\pi}{6}$$

$$\alpha = 5\frac{\pi}{6} + n.2\pi \qquad \vee \qquad \alpha = 7\frac{\pi}{6} + n.2\pi$$

Ejemplo3 (forma analítica - la forma gráfica en la próxima clase)

$$sen(x) = cos(2x)$$

$$cos(2x) = cos(x+x) = cos^2(x) - sen^2(x)$$

Id. trigo.:

$$cos^2(x) + sen^2(x) = 1 \Rightarrow cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$$

$$cos(2x) = 1 - sen^2(x) - sen^2(x) = 1 - 2sen^2(x)$$

$$sen(x) = 1 - 2sen^2(x)$$

$$sen(x) + 2sen^2(x) - 1 = 0$$

$$z = sen(x) \rightarrow 2z^2 + z - 1 = 0$$

$$\rightarrow \text{Bsk} : z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.2.(-1)}}{2.2} \rightarrow z_1 = \frac{1}{2} \;\; z_2 = -1$$

Ejemplo3

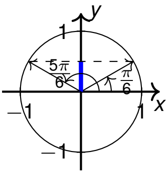
$$sen(x) = cos(2x)$$

$z = sen(x)$

$$z = \frac{1}{2}$$

$$sen(x) = \frac{1}{2}$$

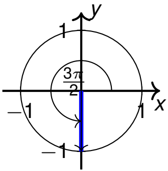
(ver ejemplo1)



$$x = \frac{\pi}{6} + n.2\pi \ \vee \ x = 5\frac{\pi}{6} + n.2\pi$$

$$z = -1$$

$$sen(x) = -1$$



$$x = 3\frac{\pi}{2} + n.2\pi$$

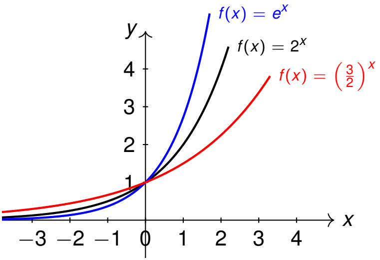
Solución= $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{\pi}{6} + n.2\pi \ \vee \ x = 5\frac{\pi}{6} + n.2\pi \ \vee \ x = 3\frac{\pi}{2} + n.2\pi\}$

Función exponencial

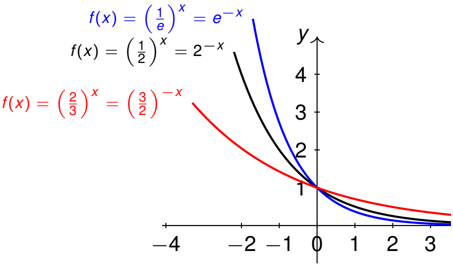
Sea $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a^x$$

$a > 1$



$a < 1$



$$a^0 = 1$$

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R}$$

$$Im\, f(x) = (0, +\infty)$$

Función Exponencial

Propiedades: Sean $a > 0$, $b > 0$, x e y $\in \mathbb{R}$

1. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ 1) lógica
2. $a^{x+y} = a^x.a^y$ 2) ''
3. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ 3) $a^x \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{a^x}{a^y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$ 4) lógica
5. $(ab)^x = a^x b^x$ 5) Lógica

La base más usada es la base $a = e$, y a la función $f(x) = e^x$ se le llama función exponencial[1], mientras que si la base $a \neq e$ a la función $f(x) = a^x$ se le llama función exponencial de base a.

e = Num de euler

[1] $\boxed{e = 2.7182818284\ldots}$

Función inversa de la Exponencial: Logaritmo

$$f(x) = a^x$$

$$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

Es biyectiva $\Rightarrow$ tiene inversa

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

A la función inversa de la función exponencial de base a le llamaremos *logaritmo en base a*

$$f(x) = a^x \Rightarrow f^{-1}(x) = log_a(x)$$

$$f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x)) \to log_a(a^x) = x = a^{log_a(x)}$$

A la función inversa de la función exponencial (de base e) le llamaremos *logaritmo natural*

es el q siempre usaremos.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = ln(x)$$

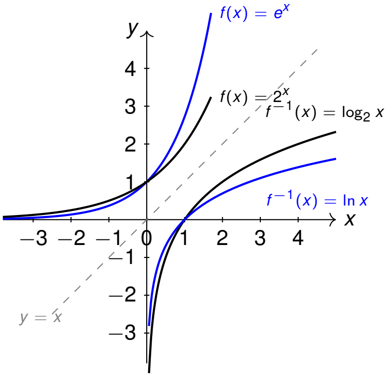
$$f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x)) \to ln(e^x) = x = e^{ln(x)}$$

De esta manera, podemos bajar exponentes

Gráficos

$$a > 1$$

$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ $\quad$ $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$



Notemos que

$f(x) = e^x$

$f^{-1}(x) = \ln(x)$

$\wedge$

$g(x) = 2^x$

$g^{-1}(x) = \log_2(x)$

$$log_a(1) = 0$$

Propiedades del logaritmo

Sea $a > 1$

Ln tmb

1. $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$
2. $log_a\,(x^y) = y\, log_a(x)$
3. $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y) = log_a(x) + log_a(y^{-1})$

Podemos escribir las funciones exponenciales y los logaritmos en cualquier base utilizando sólo la base e:

$$a^x = e^{x\, ln(a)}$$

$$log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$$

(En general, trabajaremos con el logaritmo natural y la función exponencial)

Ecuaciones - Ej.24a

$$\sqrt{e^x} = e^{\sqrt{x}} \quad \rightarrow e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \geq 0$$

$$\left(e^x\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\sqrt{x}} \quad \text{Pot de pot :}$$

$$e^{\frac{1}{2}x} = e^{\sqrt{x}} \quad \text{aplico inversa :}$$

$$ln\left(e^{\frac{1}{2}x}\right) = ln\left(e^{\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x} \quad \text{elevo cuadrado :}$$

$$\frac{1}{4}x^2 = x \ \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x = 0 \ \Rightarrow x\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0$$

$$x = 0 \qquad \vee \qquad \frac{1}{4}x - 1 = 0 \ \rightarrow \frac{1}{4}x = 1$$

$$x = 0 \qquad \vee \qquad x = 4$$

Ejemplo

Resolver

$$\sqrt[3]{ln(x)} = ln\left(\sqrt[3]{x}\right) \qquad x > 0$$

$ln\left(\sqrt[3]{x}\right) = ln\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} ln(x)$ Reemplazando

$$\Rightarrow \sqrt[3]{ln(x)} = \frac{1}{3} ln(x)$$

Elevo al cubo

$$ln(x) = \left(\frac{1}{3} ln(x)\right)^3 = \frac{1}{27} ln^3(x)$$

$$ln(x) - \frac{1}{27} ln^3(x) = 0 \Rightarrow ln(x)\left(1 - \frac{1}{27} ln^2(x)\right) = 0$$

$$ln(x) = 0 \qquad \vee \qquad 1 - \frac{1}{27} ln^2(x) = 0$$

$$x = 1 \qquad \vee \qquad 27 = ln^2(x) \to \sqrt{27} = |ln(x)| \to ln(x) = \sqrt{27} \vee ln(x) = -\sqrt{27}$$

$$x = 1 \qquad \vee \qquad ln(x) = \pm\sqrt{27} \to e^{ln(x)} = e^{\pm\sqrt{27}}$$

$$x = 1 \qquad \vee \qquad x = e^{\pm\sqrt{27}}$$

Solución= $x = 1 \ \vee \ x = e^{\sqrt{27}} \ \vee x = e^{-\sqrt{27}}$

Ej 24d

$$ln(x+2) + ln(x+4) = ln(2x+5) \ \rightarrow (x+2>0) \wedge (x+4>0) \wedge (2x+5>0)$$

$$(x>-2) \wedge (x>-4) \wedge (x>-\frac{5}{2}) \Rightarrow x>-2$$

$$ln\left((x+2)(x+4)\right) = ln(2x+5)$$

$$e^{ln((x+2)(x+4))} = e^{ln(2x+5)}$$

$$(x+2)(x+4) = 2x+5 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+2x+8 = 2x+5$$

$$x^2+6x+8-2x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+3=0$$

$$\text{Bsk} \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = -1 \qquad \vee \qquad x_2 = -3$$

Ver intervalo de definición:
Solución: $x_1 = -1$

FIN