Clase 8 - Análisis Matemático 1 - LC: Límites I

Eugenia Díaz-Giménez[1]

eugenia.diaz@unc.edu.ar

8 de Abril de 2020

Índice

Definición de límites

Cómo se comporta una función cuando nos acercamos a un valor de x?

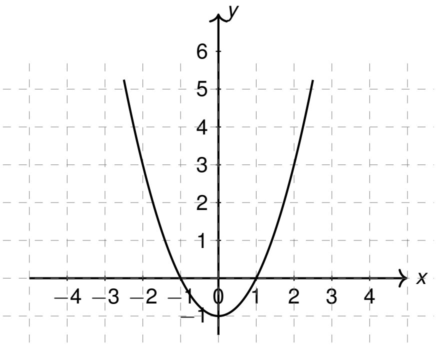


Figure: $f(x) = x^2 - 1$

Analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 2$

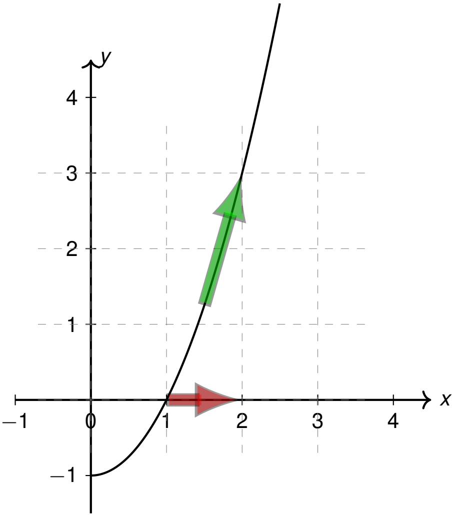


Figure: $f(x) = x^2 - 1$

$f(x) = x^2 - 1$

x	y
1	0
1.5	1.25
1.9	2.61
1.95	2.80
1.98	2.92
1.99	2.96
1.999	2.996
1.9999	2.9996

Analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 2$

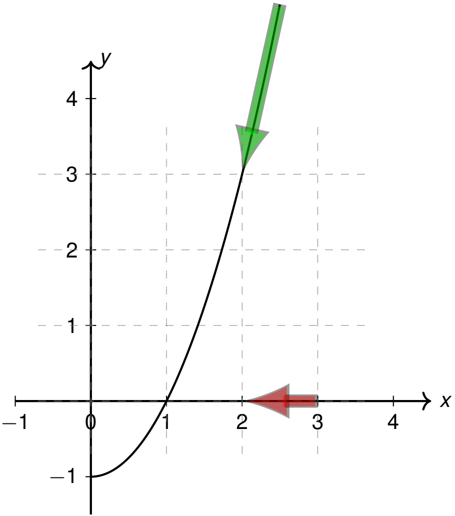


Figure: $f(x) = x^2 - 1$

$f(x) = x^2 - 1$

x	y
3	8
2.5	5.25
2.1	3.41
2.05	3.20
2.02	3.08
2.01	3.04
2.001	3.004
2.0001	3.0004

Analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 2$

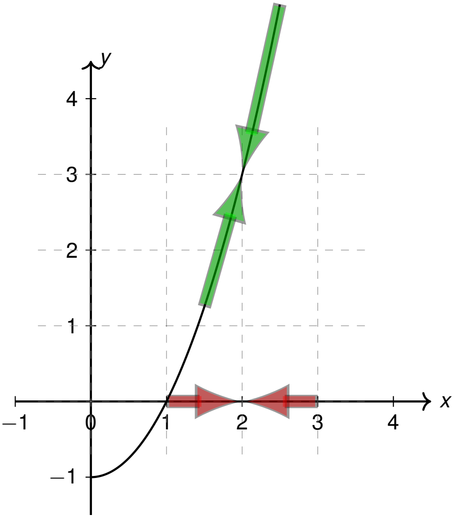


Figure: $f(x) = x^2 - 1$

$$f(x) = x^2 - 1$$

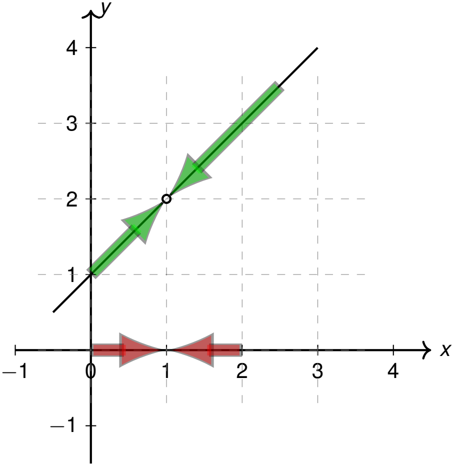
x	y
1.98	2.92
1.99	2.96
1.999	2.996
1.9999	2.9996
2	
2.0001	3.0004
2.001	3.004
2.01	3.04
2.02	3.08

$$x \to 2 \Rightarrow f \to 3$$

En este caso, además:

$$f(2) = 3$$

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 1$



$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$Dom\, f = \mathbb{R} - \{1\}$$

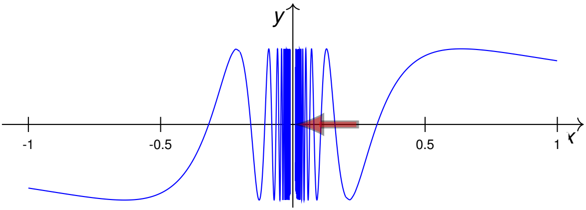
x	y
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999
1	$\nexists$
1.001	2.001
1.01	2.01
1.1	2.1
1.5	2.5

$$x \to 1 \Rightarrow f \to 2$$

En este caso, además:

$$\nexists\, f(1)$$

Sea $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 0$



$$f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$$

x	y
$\frac{1}{10\pi}$	0
$\frac{2}{23\pi}$	-1
$\frac{1}{30\pi}$	0
$\frac{2}{41\pi}$	1
$\frac{1}{100\pi}$	0

$$x \to 0 \Rightarrow f \to ???$$

En este caso, además:

$$\nexists\, f(0)$$

Definición

Si al **acercarnos** a un valor de $x = a$, la función **se acerca** a un valor L, diremos que **el límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a a**

q es un Punto <u>No</u> Definido.

Notación: $f(x) \to L$ cuando $x \to a$, o

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Siempre hay q Poner $\lim_{x \to a}$ cuando opero

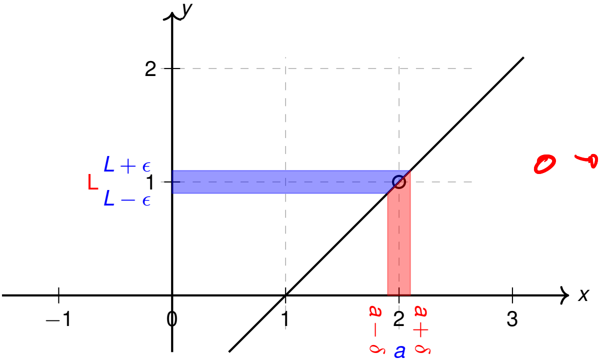
Pero... cuán cerca es "cerca"?

Sea $f(x) = x - 1$, y tomemos $a = 2$.

Si queremos que $f(x)$ esté a menos de 0.1 de $L = 1$, llamando $0.1 = \epsilon$, podemos escribirlos en términos de distancia:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Cuáles son los valores de x para que eso se cumpla?



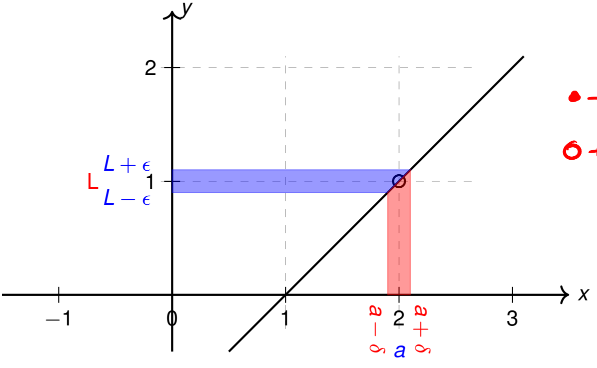
o → No lo toma

Sea $f(x) = x - 1$, y tomemos $a = 2$.

Si queremos que $f(x)$ esté a menos de 0.1 de $L = 1$, llamando $0.1 = \epsilon$, podemos escribirlos en términos de distancia:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Cuáles son los valores de x para que eso se cumpla?



● → Punto tomado

○ → Punto No tomado

$$0 < |x - a| < \delta$$

Sea $f(x) = x - 1$, y tomemos $a = 2$.

Si queremos que $f(x)$ esté a menos de 0.1 de $L = 1$, llamando $0.1 = \epsilon$, podemos escribirlos en términos de distancia:

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad (1)$$

Cuáles son los valores de x para que eso se cumpla?

$$0 < |x - a| < \delta$$

Cuánto es delta?

$$|f(x) - L| = |(x - 1) - 1| = |x - 2|(1) \quad < \epsilon$$

Tomando $\delta = \epsilon = 0.1$ me aseguro que la función esté a menos de 0.1 de $L = 1$, es decir: cuando $0 < |x - 2| < 0.1$ se cumple que $|f(x) - 1| < 0.1$

$0 < |x - 2|$ nos dice que $x \neq 2$

$$|x - 2| < 0.1 \quad \Rightarrow \quad -0.1 < x - 2 < 0.1 \quad \Rightarrow -0.1 + 2 < x < 0.1 + 2$$

$$\Rightarrow 1.9 < x < 2.1 \quad \Rightarrow x \in (1.9, 2.1) - \{2\}$$

Definición

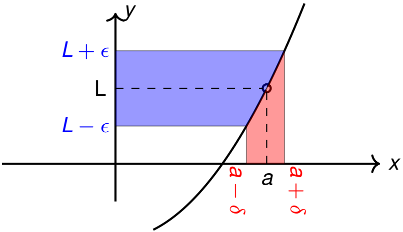
Def. de

Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene al punto a, excepto quizás en $x = a$, Decimos que: el límite para x que tiende a a de $f(x)$ es el número L si para todo número $\epsilon > 0$, existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que si la distancia entre x y a es menor que δ, entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ϵ

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \text{si } 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon$$



Propiedades

Proposiciones y teoremas

1. Si $f(x) = c$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = c$
2. Si $f(x) = cx$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = ca$
3. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces:
   a. $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$
   b. $\lim_{x \to a} (f.g)(x) = L.M$
   c. Si $M \neq 0$, $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{L}{M}$
   d. Si $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (si n es par, L debe ser positivo)
4. Si $f(x) \leq g(x)$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$
5. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (quizás excepto en a), y además $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$ (Teorema del sandwich)

Aplicaciones y Ejemplos

- Si $p(x)$ es un polinomio, usando (2) y (3.b): $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$
  Ejemplo: $\lim_{x\to 1} x^3 - 4x + 1 = -2$
- Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p y q polinomios, y si $q(a) \neq 0$, usando (2), (3.b) y (3.c):
  $\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{p(a)}{q(a)}$
  Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 1}{x - 3} = \dfrac{1}{3}$
- Si $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, usando (2), (3.b) y (3.d): $\lim_{x\to a} f(x) = \sqrt[n]{p(a)}$
  Ejemplo: $\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x^3 - 4x + 1} = \sqrt[3]{-2}$

Otros ejemplos

- Calcular

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$$

ATENCIÓN: No puedo aplicar directamente la propiedad del cociente (3.c) ya que el denominador se anula $\lim_{x\to 3}(x-3)=0$

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

- Calcular

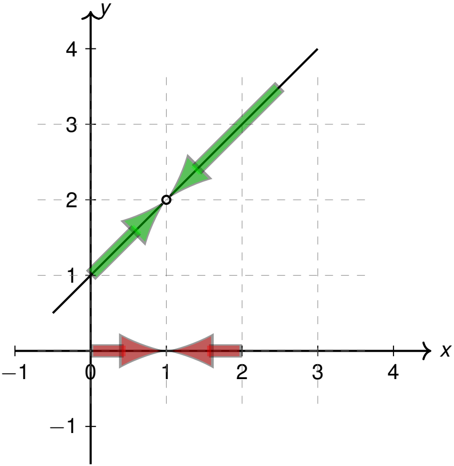
$$\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$$

$$\frac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \frac{(2-\sqrt{4-x})}{x}\frac{(2+\sqrt{4-x})}{(2+\sqrt{4-x})} = \frac{4-(4-x)}{x(2+\sqrt{4-x})} = \frac{x}{x(2+\sqrt{4-x})}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(2+\sqrt{4-x})} = \frac{1}{4}$$

Volvamos a tomar $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, y analicemos qué pasa **alrededor** de $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$



x	y	
0.5	1.5	$x < 1$
0.9	1.9	
0.99	1.99	$x \to 1^-$
0.999	1.999	
1	$\nexists$	
1.5	2.5	$x > 1$
1.1	2.1	
1.01	2.01	$x \to 1^+$
1.001	2.001	

Límites laterales:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

Límites laterales

Límite por derecha

Decimos que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha si los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando nos acercamos a $x = a$ por valores más grandes (pero cercanos) que a: $L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Siempre sacar

Límite por izquierda

Decimos que M es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda si los valores de $f(x)$ se aproximan a M cuando nos acercamos a $x = a$ por valores más chicos (pero cercanos) que a: $M = \lim_{x \to a^-} f(x)$

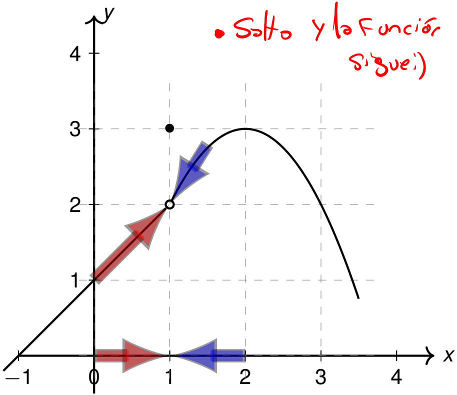
Siempre sacar

Teorema

Sea una función definida en un intervalo abierto que contiene a a (excepto quizás en $x = a$), entonces: el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y vale L, sí y sólo sí existen ambos límites laterales y son iguales:

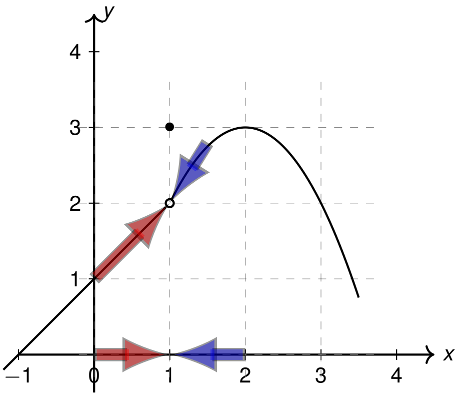
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Ejemplo1



• Salto y la función sigue :)

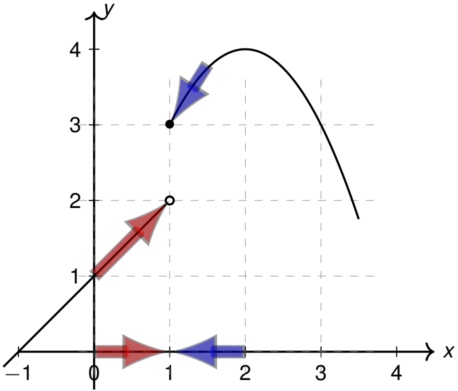
Ejemplo1



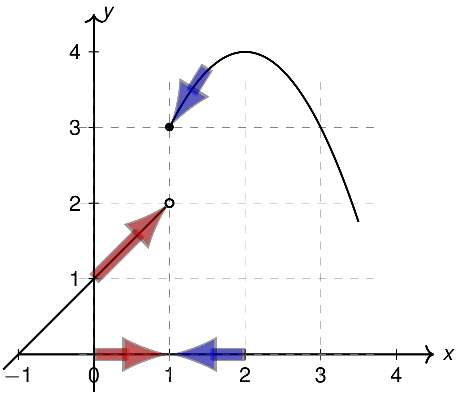
$$\color{red}{\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2} \qquad \color{blue}{\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Ejemplo2



Ejemplo2



$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \nexists$$

Ejemplo3

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x<1 \\ 3 & si \quad x=1 \\ -(x-2)^2+3 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Calcular: $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\lim_{x\to 1} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$x \to 1^- \;\Rightarrow x < 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$x \to 1^+ \;\Rightarrow x > 1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -(x-2)^2+3 = 2$$

ya que los límites laterales existen y son iguales:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Ejemplo4

$$f(x) = \begin{cases} |x| & si \quad x \leq 0 \\ 9-(x-3)^2 & si \quad 0 < x < 4 \\ -1 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Calcular: $\lim_{x\to 4^-} f(x)$, $\lim_{x\to 4^+} f(x)$, $\lim_{x\to 4} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)$$

$x \to 4^- \Rightarrow x < 4$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} 9-(x-3)^2 = 8$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)$$

$x \to 4^+ \Rightarrow x > 4$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} -1 = -1$$

ya que los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \nexists$$

FIN