Clase 14 - Análisis Matemático 1 - LC: Derivadas II

Eugenia Díaz-Giménez

eugenia.diaz@unc.edu.ar

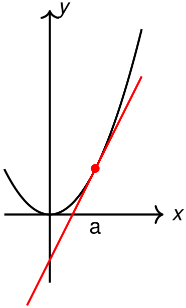
6 de Mayo de 2020

Índice

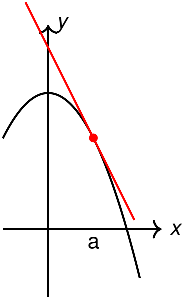
Derivada de f en a

Sea a un número **en el dominio de** f, la derivada de la función f en a es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto (i.e, el límite del cociente incremental):

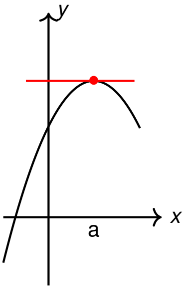
$$\frac{df}{dx} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



$f'(a) > 0$



$f'(a) < 0$



$f'(a) = 0$

Derivada de f en a

Sea a un número **en el dominio de** f, la derivada de la función f en a es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto (i.e, el límite del cociente incremental):

$$\frac{df}{dx} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si existe la derivada en un punto a, se dice que f es derivable o diferenciable en a

Teorema

Si f es diferenciable en a entonces f es continua en a

$$\exists\, f'(a) \Rightarrow f \text{ es continua en } a$$

Teorema (contrarrecíproco)

Si f NO es continua en a entonces f NO es diferenciable en a

$$f \text{ NO es continua en } a \Rightarrow \nexists\, f'(a)$$

Derivadas laterales

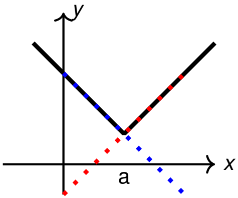
Se define la derivada a izquierda de f en a si nos acercamos al punto a con valores negativos de h ($a+h<a$!!!):

$$f'^{-}(a) = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

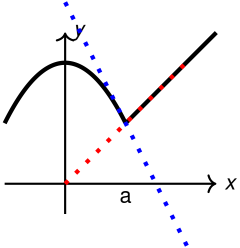
Se define la derivada a derecha de f en a si nos acercamos al punto a con valores positivos de h ($a+h>a$!!!):

$$f'^{+}(a) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$f'(a)$ existe si y sólo si las derivadas laterales existen y son iguales.



$f'^{+}(a) > 0$ $f'^{-}(a) < 0$



$f'^{+}(a) > 0$ $f'^{-}(a) < 0$

$F(x)$	$F'(x)$
c	0
x^r	$r.x^{r-1}$
$f+g$	$f'+g'$
$f.g$	$f'.g+f.g'$
$c.f$	$c.f'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)).g'(x)$

El dominio de $f'(x)$ son todos los x en el dominio de f en los que la función es derivable.

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & si \quad x \leq 0 \\ 5 - x & si \quad 0 < x < 4 \\ \frac{1}{5-x} & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de f(x). Trace un gráfico aproximado de f(x)

1. Determinar Dominio de f
2. Determinar Intervalos de continuidad (propiedades)
3. Estudiar continuidad en puntos sospechosos (cortes de la función!) (definición)
4. Calcular derivada en intervalos (reglas)
5. Estudiar derivabilidad en puntos sospechosos (definición)

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2+3 & si \quad x \leq 0 \\ 5-x & si \quad 0 < x < 4 \\ \frac{1}{5-x} & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de f(x). Trace un gráfico aproximado de f(x)

1. Determinar Dominio de f

- $x \leq 0$: f es una parábola $\rightarrow \mathbb{R}$

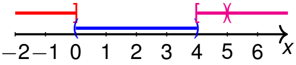
$$\Rightarrow (-\infty, 0]$$

- $0 < x < 4$: f es una recta $\rightarrow \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (0, 4)$$

- $x \geq 4$: f es racional $\rightarrow 5 - x \neq 0 \rightarrow x \neq 5$

$$\Rightarrow [4, 5) \cup (5, \infty)$$



$Dom\ f = \mathbb{R} - \{5\}$

Ya que $5 \notin Dom\ f$:
f NO es continua en x=5
f NO es derivable en x=5

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2+3 & si \quad x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5-x & si \quad 0 < x < 4 \rightarrow (0,4) \\ \frac{1}{5-x} & si \quad x \geq 4 \rightarrow [4,5) \cup (5,+\infty) \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de f(x). Trace un gráfico aproximado de f(x)

1. Determinar Dominio de f = $\mathbb{R} - 5$
2. Determinar Intervalos de continuidad (propiedades)

- $(-\infty, 0)$: la función es una parábola que es continua para todos los reales
- $(0,4)$: la función es una recta, es continua en todos los reales
- $(4,5)$: la función es cociente de continuas que no se anulan, entonces es continua
- $(5,+\infty)$: la función es cociente de continuas que no se anulan, entonces es continua

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2+3 & si \quad x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5-x & si \quad 0 < x < 4 \rightarrow (0,4) \\ \frac{1}{5-x} & si \quad x \geq 4 \rightarrow [4,5) \cup (5,+\infty) \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de f(x). Trace un gráfico aproximado de f(x)

1. Determinar Dominio de f = $\mathbb{R} - 5$
2. Determinar Intervalos de continuidad: f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0,4) \cup (4,5) \cup (5,+\infty)$
3. Estudiar continuidad en puntos sospechosos: ¿Qué pasa en $x = 0$, $x = 4$ y $x = 5$?

$x = 0$

1. $0 \in Domf$
   ✔ $f(0) = -(0+1)^2 + 3 = 2$
2. $\exists \lim_{x \to 0} f(x)$??
   $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$
   $\lim_{x \to 0^-} -(x+1)^2 + 3 = 2$
   $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 5 - x = 5$
   $\lim_{x \to 0} f(x) \nexists$ ✗

f NO es continua en x=0

$x = 4$

1. $4 \in Dom\, f$ ✔ $f(4) = \frac{1}{5-4} = 1$
2. $\lim_{x \to 4} f(x)$?
   $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} 5 - x = 1$
   $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{5-x} = 1$
   $\lim_{x \to 4} f(x) = 1$ ✔
3. $f(4) = 1 = \lim_{x \to 4} f(x)$ ✔

f SÍ es continua en x=4

$x = 5$

1. $5 \notin Dom\, f$ ✗

f NO es continua en x=5

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2+3 & si \quad x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5-x & si \quad 0 < x < 4 \rightarrow (0,4) \\ \frac{1}{5-x} & si \quad x \geq 4 \rightarrow [4,5) \cup (5,+\infty) \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de f(x). Trace un gráfico aproximado de f(x)

1. Determinar Dominio de f = $\mathbb{R} - 5$
2. Determinar Intervalos de continuidad: f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0,4) \cup (4,5) \cup (5,+\infty)$
3. Estudiar continuidad en puntos sospechosos: f NO es continua en x=0 ni en x=5. f SÍ es continua en x=4
4. Calcular derivada en intervalos (reglas)

$F = -(x+1)^2 + 3 \Rightarrow F'(x) =$
$-2.(x+1)^{(2-1)}.(1+0)+0 = -2(x+1)$

$F = 5 - x \Rightarrow F'(x) = 0 - 1.x^{(1-1)} = -1$

$F = \frac{1}{5-x} = (5-x)^{-1} \Rightarrow F'(x) =$
$(-1).(5-x)^{(-1-1)}.(0-1) = +(5-x)^{-2}$

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & si \quad x \in (-\infty, 0) \\ -1 & si \quad x \in (0,4) \\ \frac{1}{(5-x)^2} & si \quad x \in (4,5) \cup (5,\infty) \end{cases}$$

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2+3 & si \quad x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5-x & si \quad 0 < x < 4 \rightarrow (0,4) \\ \frac{1}{5-x} & si \quad x \geq 4 \rightarrow [4,5) \cup (5,+\infty) \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de f(x). Trace un gráfico aproximado de f(x)

1. Determinar Dominio de f = $\mathbb{R} - 5$
2. Determinar Intervalos de continuidad: f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0,4) \cup (4,5) \cup (5,+\infty)$
3. Estudiar continuidad en puntos sospechosos: f NO es continua en x=0 ni en x=5. f SÍ es continua en x=4
4. Calcular derivada en intervalos (reglas):

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & si \quad x \in (-\infty, 0) \\ -1 & si \quad x \in (0,4) \\ \frac{1}{(5-x)^2} & si \quad x \in (4,5) \cup (5,\infty) \end{cases}$$

5. Estudiar derivabilidad en puntos sospechosos (definición): ¿qué pasa en x=0, x=4 y x=5?
   En x=0 la función NO es continua, entonces por el teorema: f NO es derivable en x=0
   En x=5 la función NO es continua, entonces por el teorema: f NO es derivable en x=5

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & si \quad x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5 - x & si \quad 0 < x < 4 \rightarrow (0, 4) \\ \frac{1}{5-x} & si \quad x \geq 4 \rightarrow [4, 5) \cup (5, +\infty) \end{cases}$$

Derivabilidad en x=4?

1. $f(4) = \frac{1}{5-4} = 1$
2. $f'^{-}(4) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

   $(h \to 0^- \to 4 + h < 4 \to f(x) = 5 - x)$

   $f'^{-}(4) = \lim_{h\to 0-} \frac{5-(4+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{5-4-h-1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0-} -1 = \boxed{-1}$
3. $f'^{+}(4) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

   $(h \to 0^+ \to 4 + h > 4 \to f(x) = \frac{1}{5-x})$

   $f'^{+}(4) = \lim_{h\to 0-} \frac{\frac{1}{5-(4+h)} - 1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\frac{1-(1-h)}{1-h}}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\frac{h}{1-h}}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h}{h(1-h)} = \lim_{h\to 0-} \frac{1}{(1-h)} = \boxed{1}$

$\nexists f'(4) \Rightarrow$f NO es derivable en $x = 4$

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2+3 & si \quad x \leq 0 \to (-\infty, 0] \\ 5-x & si \quad 0 < x < 4 \to (0,4) \\ \frac{1}{5-x} & si \quad x \geq 4 \to [4,5) \cup (5,+\infty) \end{cases}$$

Analizar la continuidad y la derivabilidad de f(x). Trace un gráfico aproximado de f(x)

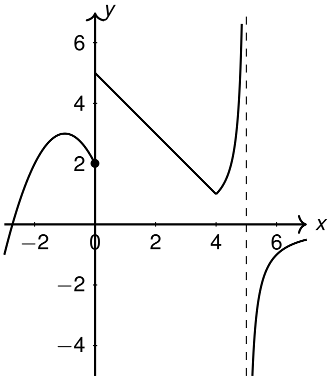
1. Determinar Dominio de f = $\mathbb{R} - 5$
2. Determinar Intervalos de continuidad: f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0,4) \cup (4,5) \cup (5,+\infty)$
3. Estudiar continuidad en puntos sospechosos: f NO es continua en x=0 ni en x=5. f SÍ es continua en x=4
4. Calcular derivada en intervalos (reglas):

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & si \quad x \in (-\infty, 0) \\ -1 & si \quad x \in (0,4) \\ \frac{1}{(5-x)^2} & si \quad x \in (4,5) \cup (5,\infty) \end{cases}$$

5. Estudiar derivabilidad en puntos sospechosos (definición): ¿qué pasa en x=0, x=4 y x=5?
   En x=0 la función NO es continua, entonces por el teorema: f NO es derivable en x=0
   En x=5 la función NO es continua, entonces por el teorema: f NO es derivable en x=5
   En x=4 la función SÍ es continua pero la derivada por derecha no es igual a la derivada por izquierda, entonces f NO es derivable en x=4

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2+3 & si \quad x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \\ 5-x & si \quad 0 < x < 4 \rightarrow (0,4) \\ \frac{1}{5-x} & si \quad x \geq 4 \rightarrow [4,5) \cup (5,+\infty) \end{cases}$$



Derivadas de funciones trigonométricas

$$f(x) = sen(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{sen(x).cos(h) + cos(x)sen(h)}^{sen(x+h)} - sen(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)[cos(h) - 1] + cos(x)sen(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{sen(x)[cos(h) - 1]}{h} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{cos(x)sen(h)}{h} \right)$$

$$= sen(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{cos(h) - 1}{h}}_{L.N. \to 0} + cos(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h}}_{L.N. \to 1}$$

$$\boxed{f'(x) = cos(x)}$$

Derivadas de funciones trigonométricas

$$f(x) = sen(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$$

$$f(x) = cos(x) \Rightarrow f'(x) = -sen(x)$$

$$f(x) = tan(x)$$

$$f(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{(sen(x))'.cos(x) - sen(x).(cos(x))'}{(cos(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{cos(x)cos(x) - sen(x)(-sen(x))}{cos^2(x)} = \frac{\overbrace{cos^2(x) + sen^2(x)}^{=1}}{cos^2(x)}$$

$$f'(x) = sec^2(x)$$

Calcular $(cosec(x))'$, $(sec(x))'$ y $(cotan(x))'$

Ejemplos

- $f(x) = 2x\, cos(x) + sen(x^2+1)$
  $(F.G)' = F'.G + F.G'$ y $(F(G(x))' = F'(G(x)).G'(x)$

$$f'(x) = 2[cos(x) + x(-sen(x))] + cos(x^2+1).(2x)$$

$$\boxed{f'(x) = 2\, cos(x) - 2x\, sen(x) + 2x\, cos(x^2+1)}$$

- $f(x) = sen^2\left(\frac{1}{x}\right) = \left[sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2$
  $F(x) = x^2$, $G(x) = sen(x)$ y $H(x) = \frac{1}{x}$
  $\Rightarrow f(x) = F(G(H(x))) \rightarrow f'(x) = F'(G(H(x))) \cdot G'(H(x)) \cdot H'(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2}{x^2} \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Derivada de exponenciales

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \ = e^{x \cdot ln(a)}$$

$$F(x) = e^x \text{ y } G(x) = ln(a) \cdot x \to \ f(x) = F(G(x))$$

$$f'(x) = e^{x \cdot ln(a)} \cdot ln(a) = ln(a) \cdot a^x$$

Derivadas de Logaritmos

$$f(x) = ln(x) \;\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)} = \frac{1}{ln(a)} \cdot ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{ln(a)} . \frac{1}{x} = \frac{1}{ln(a) \cdot x}$$

Ejemplos

- $f(x) = ln(cos(x))$

$$f'(x) = \frac{1}{cos(x)} \cdot (-sen(x)) = -\frac{sen(x)}{cos(x)} = -tan(x)$$

- $f(x) = x^x = e^{x \cdot ln(x)}$

$$f'(x) = e^{x \cdot ln(x)} \cdot \left[ln(x) + x.\frac{1}{x} \right] = x^x \cdot [ln(x) + 1]$$

- $f(x) = x^{tan(x)} = e^{tan(x) \cdot ln(x)}$

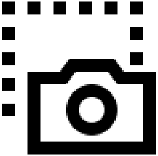
$$f'(x) = e^{tan(x) \cdot ln(x)} \cdot \left[sec^2(x) \cdot ln(x) + tan(x) \cdot \frac{1}{x} \right]$$

- $f(x) = log_x(e) = \frac{ln(e)}{ln(x)} = \frac{1}{ln(x)} = [ln(x)]^{-1}$

$$f'(x)... \;\; TAREA!$$

Resumen

$F(x)$	$F'(x)$
$f+g$	$f'+g'$
$f.g$	$f'.g+f.g'$
$c.f$	$c.f'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)).g'(x)$



	$f(x)$	$f'(x)$
constante	c	0
$r \in \mathbb{R}$	x^r	$r.x^{r-1}$
	$sen(x)$	$cos(x)$
	$cos(x)$	$-sen(x)$
	e^x	e^x
$a>0$	a^x	$ln(a)\cdot a^x$
$x>0$	$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$a>0 \wedge x>0$	$log_a(x)$	$\frac{1}{ln(a)\cdot x}$