Ejercicio 2. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$, hallar su módulo y su conjugado.

(a) $(-1+i)(3-2i)$, $\quad$ (b) $i^{131} - i^{9} + 1$, $\quad$ (c) $1 - \dfrac{1}{1+\frac{1}{i}}$,

(d) $\dfrac{1+i}{1+2i} + \dfrac{1-i}{1-2i}$, $\quad$ (e) $\dfrac{4+2i}{6} - \dfrac{4+2i}{6i}$, $\quad$ (f) $\dfrac{3i}{1-2i} - \dfrac{1}{1+\frac{1}{i}}$.

1)

A) $(\overset{a}{-1} + \overset{b}{i}) \cdot (\overset{c}{3} - \overset{d}{2i})$

$(-1 \cdot 3 - 2i \cdot i) + (-1 \cdot (-2i) + i \cdot 3)$

$(-3 - 2i^2) + (+2i + 3i)$

$(-3 + 2) + (5i) = -1 + 5i \quad \bar{A} = -1 - 5i$

Módulo $|A|$ $a + bi$

$|A| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = -1,\ b = 5$

$|A| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

Conjugado: $(a - bi)$

b) $i^{131} - i^{9} + 1$

$i^{4 \cdot 32 + 3} - i^{4 \cdot 2 + 1} + 1$

$-i - 1i + 1 = 1 - 2i$

$i^1 = i,$
$i^2 = -1,$
$i^3 = -i,$
$i^4 = 1.$

$131 \,\underline{|\,4}$
$\quad 32$
3

(c) $1 - \dfrac{1}{1+\frac{1}{i}}$,

$1 - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i}} = 1 - \dfrac{1}{1 + \frac{i}{i^2}} = 1 - \dfrac{1}{1-i} = 1 - \dfrac{1}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} = 1 \cdot \dfrac{1+i}{(1+i)(1-i)}$

$(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2$

$1 - \dfrac{1+i}{2} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2} = \dfrac{2}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$

$|b| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|b| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\bar{b} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

(d) $\dfrac{1+i}{1+2i} + \dfrac{1-i}{1-2i}$,

$\dfrac{\overset{a}{1} + \overset{b}{i}}{1+2i} \cdot \dfrac{(\overset{c}{1} + \overset{d}{2i})}{1+2i} + \dfrac{\overset{a}{1} - \overset{b}{i}}{1-2i} \cdot \dfrac{\overset{c}{1} + \overset{d}{2i}}{1+2i}$

$\dfrac{(1 \cdot 1 - i \cdot 2i) + (1 \cdot 2i + i \cdot 1)}{(1 \cdot 1 - 2i \cdot 2i) + (1 \cdot 2i + 2i \cdot 1)} + \dfrac{(1 \cdot 1 + i \cdot 2i) + (1 \cdot 2i - i \cdot 1)}{(1 \cdot 1 + 2i \cdot 2i) + (1 \cdot 2i - 2i \cdot 1)}$

$\dfrac{1 - i + 3i}{(1 - 4i^2) + (4i)} + \dfrac{(1 + 2i^2) + (i)}{1 + 4i^2 + 0}$

$\dfrac{1 + 2i}{4i + 5} + \dfrac{-1 + i}{-3}$

Lo Hice bien

Pero olvide

un Signo

Dios.

(e) $\dfrac{4+2i}{6} - \dfrac{4+2i}{6i}$, (f) $\dfrac{3i}{1-2i} - \dfrac{1}{1+\frac{1}{i}}$.

e) $\dfrac{4+2i}{6} - \dfrac{4+2i}{6i} \cdot \dfrac{-6i}{-6i}$

$\dfrac{4+2i}{6} - \dfrac{-20i+12i^2}{-32i^2}$

$\dfrac{4+2i}{6} + \dfrac{20i-12}{+32}$

$\dfrac{4}{6} + \dfrac{2i}{6} + \dfrac{20i}{32} - \dfrac{12}{32}$

$\dfrac{2}{3} + \dfrac{1i}{3} + \dfrac{5i}{8} - \dfrac{1}{3}$

$\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{5i}{8} + \dfrac{1i}{3}\right)$

$-\dfrac{1}{3} + \dfrac{15i+8i}{24} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{23i}{24}$

mod

$|e| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|e| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{23}{24}\right)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{529}{576}}$

(Creo q era $\cdot i$ y no $\times 6i$)

Ejercicio 3. Sea $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo. Probar los siguientes:

(a) para todo $a \in \Bbbk$ se cumple $a \cdot 0 = 0$ (donde $0 \in \Bbbk$ denota el neutro de la suma).

(b) si a y b son elementos de $\Bbbk$ tales que $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

A) Todo número "a" $\in K \Rightarrow a \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 \in K$ (hay un 0 en K)

Notemos lo siguiente del neutro 0 en los Axiomas: $\boxed{a = b \in K}$ CPQ me confundo xd

1) $b + 0 = b^{=0+b}$ 2) $b \cdot 0 = 0^{=0\cdot b}$ 3) $b - 0 = b^{=-0+b}$ 4) $b \cdot (0+0) = 0 = (0+0) \cdot b$

5) $b \cdot 0 - b \cdot 0 = b \cdot 0 + b \cdot 0 - b \cdot 0$

simplifico:

$0 = b \cdot 0 \Rightarrow a \in K$

Paseo todos los Axiomas basicamente

(b) si a y b son elementos de $\Bbbk$ tales que $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

2 casos 1) $a = 0$ 2) $a \neq 0$

Si $a = 0 \Rightarrow$
$0 \cdot b = 0$ ✓

Si $a \neq 0 \Rightarrow$
$a \neq 0 \Rightarrow b = 0$
Demuestro $b = 0$

Si $a \neq 0$ entonces cumple

$a^{-1} \cdot a = 1 \longrightarrow 1 \cdot b = 0$

$a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \ (b=0) \Rightarrow b = 0$

$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$

Ejercicio 4. Sea n un número natural, $n \neq 1$. Denotamos por $\mathbb{Z}/n$ al conjunto de clases de números enteros módulo n. Utilizando los resultados de aritmética modular vistos en Álgebra I/Matemática discreta, sabemos que existen operaciones

$$+ : \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/n, \qquad \bullet : \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/n.$$

Probar que $(\mathbb{Z}/n, +, \cdot)$ es un cuerpo si y sólo si n es primo.

$x_1 \equiv x_2 \ (m)$
$y_1 \equiv y_2 \ (m)$
$\Downarrow$
$x_1 \underset{+}{\bullet} y_1 \equiv x_2 \underset{+}{\bullet} y_2 \ (m)$

4) $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$. $\mathbb{Z}/n = \{ \mathbb{Z} (\bmod n) \}$

$+ : \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n$, $\quad \cdot : \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n$

$(\mathbb{Z}/n, +, \cdot)$ es Cuerpo $\Leftrightarrow$ n es Primo.

n es Primo $\Leftrightarrow$ $n | n \wedge n | 1$ ✓ $\wedge$ 2 no es Primo

Cambiemos la Variable de $\mathbb{Z}/n = b$ (Por no decir $\mathbb{Z}/n$ a cada rato)

$\Rightarrow$ Por Propiedades de módulo/congruencia, (escrito en el caso arriba)

Cumple Axiomas Asociativo, conmutativo, adición y elemento único

$\Rightarrow$ Cumple los neutros $(1 \neq 0)$

: $b \cdot 1 = b$ y $b + 0 = b$ ✓

$\Rightarrow$ $b \cdot b^{-1} = 1 = b^{-1} \cdot b$

$(a+b) \equiv x \ (n)$
$(a \cdot b) \equiv x \ (n)$
$(b+a) \equiv x \ (n)$
$(b \cdot a) \equiv x \ (n)$
Resto de P.P se heredan

$\Rightarrow$ Por transitividad de mód se cumple la conmutatividad

tmb: $b + (-b) \equiv 0 \ (n)$ Elemento inverso

No tengo seguridad en q este bien, pero bue

No voy a enunciar las P.P de $\equiv$

Ejercicio 5. Sean $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo y a, b y c elementos de $\Bbbk$. Probar los siguientes:

(a) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.

(b) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

(c) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$ (*propiedad cancelativa*).

(d) Si $a \neq 0$ entonces para todo $y \in \Bbbk$ existe un único $x \in \Bbbk$ tal que $a \cdot x = y$.

(e) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$, entonces $a = 0$ (notación: $a^n := a \cdots a$ n-veces).

a) $-(a\cdot b) = (-a)\cdot b = a\cdot(-b)$

Sabemos que: $-(a\cdot b) = -1\cdot a\cdot b = -a\cdot b$

(tmb se puede por opues)

Por asociatividad se da.

Si conmutamos, obtenemos: $-1\cdot a\cdot b = -1\cdot b\cdot a = -b\cdot a$ ✓

b) $a\neq 0,\ b\neq 0 \Rightarrow (a\cdot b)^{-1} = a^{-1}\cdot b^{-1}$

Reglas/P.D

$a\cdot a^{-1} = 1 = a^{-1}\cdot a$

$b\cdot b^{-1} = 1 = b^{-1}\cdot b$

Además:

$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$

De las P.P podemos concluir que:

Entonces:

$(a\cdot b)^{-1} = a^{-1}\cdot b^{-1}$

$(a\cdot b)^{-1} = a^{-1}\cdot a\cdot b\cdot b^{-1}$

$(a\cdot b)^{-1} = 1\cdot 1$

Ya q es el inverso multiplicativo.

(c) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$ (*propiedad cancelativa*).

Por opuesto: $a\neq 0$

$a\cdot b = a\cdot c$

$(-a)\cdot a\cdot b = a\cdot c\cdot(-a)$ {Cancelo por opuesto}

$b = c$

(d) Si $a \neq 0$ entonces para todo $y \in \Bbbk$ existe un único $x \in \Bbbk$ tal que $a \cdot x = y$.

$a\neq 0 \Rightarrow y\in k\ \exists$ (único) $x\in k$ tq $a\cdot x = y$

$a\cdot a^{-1} = 1$

¿ $x = y$, $a = 1$?

$a\cdot x = y$

$(a^{-1}\cdot a)\cdot x = a^{-1}\cdot y$

$1\, x = a^{-1}\cdot y \Rightarrow x = a^{-1}\cdot y$

★ **Ejercicio 6.** Decidir si la siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Sean $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo y $a \in \Bbbk$. Si existe un natural n tal que $n\,a = 0$, entonces $a = 0$ (notación: $n\,a := a + \cdots + a$ n-veces). Comparar esto con el **Ejercicio 5 (e)** . `Sugerencia`: probar que si $a \neq 0$ entonces $n\,a = 0 \iff n\,1 = 0$.

(b) Sean $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo. Si existen $a \in \Bbbk$ no nulo y un natural n tales que $n\,a = 0$, entonces $n\,x = 0$ para todo $x \in \Bbbk$.

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

el 5e no lo entendi bien, hago un intento para este:

Como $n \in \mathbb{N}$ y los $\mathbb{N}$ son $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$

No toma 0.

Por propiedad de potencia, sabemos que cualq num x elevado a $0 = 1$ $\Rightarrow$ tenemos:

$x^1 = x \quad \wedge \quad x^0 = 1$ (No pudiendo llegar a 0)

entonces, $a^n = 0 \iff a = 0 \wedge n = 1$ Seguro esta mal xd

(a) Sean $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo y $a \in \Bbbk$. Si existe un natural n tal que $n\,a = 0$, entonces $a = 0$ (notación: $n\,a := a + \cdots + a$ n-veces). Comparar esto con el **Ejercicio 5 (e)** . `Sugerencia`: probar que si $a \neq 0$ entonces $n\,a = 0 \iff n\,1 = 0$.

$n a = 0 \iff a = 0$, Si $a \neq 0$ $\; n a = 0 \iff n \cdot 1 = 0$ V.

Y $n \cdot a := a + a + a \cdots + a = 0$ (n veces sum)

El elemento neutro de $\cdot$ es el 1.

?

(b) Sean $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo. Si existen $a \in \Bbbk$ no nulo y un natural n tales que $n\,a = 0$, entonces $n\,x = 0$ para todo $x \in \Bbbk$.

Ejercicio 7. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\Bbbk$. Sean $a, a_1, a_2 \in \Bbbk$ y $v, v_1, v_2 \in V$. Probar los siguientes:

(a) Si $a \cdot v = 0$ entonces $a = 0$ ó $v = 0$.

(b) Si $a \neq 0$ y $a \cdot v_1 = a \cdot v_2$, entonces $v_1 = v_2$.

(c) Si $v \neq 0$ y $a_1 \cdot v = a_2 \cdot v$, entonces $a_1 = a_2$.

a) tenemos dos casos $a=0$ ó $V=0$

Supongamos que $a=0 \quad \wedge \quad V=0$

$\Rightarrow \quad a \cdot V = 0 \Rightarrow 0 \cdot V = 0$ ✓ $\Rightarrow a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

Entonces $V \neq 0$

Veamos si cumple los Req. para ser un espacio vectorial

$a \cdot V = V \cdot a$ (Asociatividad y Conmutatividad)

El 0 es único, y tenemos que $a = 0$ ✓

V tiene opuesto, pues $V + (-V) = 0 = -V + V$ ✓

Además:

Si $a \neq 0 \wedge V \neq 0$

$a \cdot a^{-1} = 1$

$\Rightarrow \quad a \cdot V = 0 \Rightarrow a^{-1} \cdot a \cdot V = 0 \cdot a^{-1} = 1 \cdot V = 0 \Rightarrow V = 0$

(b) Si $a \neq 0$ y $a \cdot v_1 = a \cdot v_2$, entonces $v_1 = v_2$.

$a \neq 0 \Rightarrow V_1 = V_2$

Por $a \cdot a^{-1} = 1$

$\Rightarrow \quad a \cdot V_1 = a \cdot V_2 \quad = \quad a^{-1} \cdot a \cdot V_1 = a \cdot a^{-1} \cdot V_2$

$V_1 = V_2$ ✓

Notemos además que por Aritmética se puede:

$a \cdot V_1 = a \cdot V_2 \Rightarrow a \cdot V_1 - V_2 \cdot a = 0$

$a(V_1 - V_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 0$

el c es igual, dejo de Joder.

Ejercicio 8. Sean $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo y n un número natural. Consideramos el conjunto

$$\Bbbk^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Bbbk\}.$$

Usando las operaciones de $\Bbbk$, definimos:

P.t

4

$$+ : \Bbbk^n \times \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^n \qquad (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\bullet : \Bbbk \times \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^n \qquad a \bullet (x_1, \ldots, x_n) = (a \cdot x_1 \ldots, a \cdot x_n).$$

$K \times K^n$

Verificar que $(\Bbbk^n, +, \bullet)$ es un espacio vectorial.

tenemos que K es un cuerpo $\Rightarrow K^n$ es el espacio vectorial

Debo verificar que los axiomas de

$+ : K^n \times K^n \to K^n \quad \wedge \quad \cdot : K \times K^n \to K^n$ Se cumplan.

1) $+ : K^n \times K^n \to K^n$

1) $x_1 + y_1 = y_1 + x_1$ Cumple conmutatividad

2) $x_1 + y_1 (+ x_2 + y_2) = x_1 + (y_1 + x_2) + y_2 = (x_1 + y_1) + x_2 + y_2$ Asociat

3) $x_1 + y_1 + 0 = 0 + x_1 + y_1 = x_1 + 0 + y_1$ Elemento neutro

4) $x_1 + (-x_1) + y_1 + (-y_1) = 0$ Elemento opuesto inverso

2) $\cdot : K \times K^n \to K^n$ $\quad K = a$

$\Rightarrow$ 1) $a \cdot (x_1 \cdot x_2) = (a \cdot x_1) \cdot x_2$ Asociatividad

2) $a \cdot x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot a \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2 \cdot a$ Conmutatividad

3) $1 \cdot a \cdot x_1 = a \cdot x_1 = a \cdot 1 \cdot x_1$ elemento neutro

4) $a(x_1 + x_2) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2$ Distrib. para vectores

Siendo $(K^n, +, \cdot)$ un espacio vectorial

Ejercicio 9. Sea $(V, +, \bullet)$ un $\mathbb{k}$-espacio vectorial. Demostrar los siguientes:

(a) Sea -1 el opuesto aditivo de 1 en $\mathbb{k}$. Para todo $v \in V$, vale que $-v$ (el opuesto aditivo de v en V) es igual a $(-1) \bullet v$.

(b) Dados $v_1, v_2 \in V$, se cumple $-(v_1 + v_2) = -v_1 - v_2$.

(c) Si $a \in \mathbb{k}$ y $v \in V$, entonces $-(a \bullet v) = (-a) \bullet v = a \bullet (-v)$.

(d) Si $v \neq 0$ y $a_1 \bullet v = a_2 \bullet v$, entonces $a_1 = a_2$.

APunte xd

2. Vemos que

$$v + (-1) \cdot v = (-1) \cdot v + v = (-1) \cdot v + 1 \cdot v = (-1 + 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0.$$

Luego, $(-1) \cdot v$ es el inverso aditivo de v, es decir $(-1) \cdot v = -v$.

b) Se Cumple por P.P 7 que dice:

$a(n+w) = a \cdot n + a \cdot w \Rightarrow -(V_1 + V_2) = -1(V_1 + V_2)$

$= -V_1 - V_2$ (Regla de Signo)

c) EXPlicado en otro ej (5a)

d) " " " (TC)

Ejercicio 10. Decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones abajo definidas.

(a) $\mathbb{R}^n$, con $v_1 \oplus v_2 = v_1 - v_2$, y el producto usual.

(b) $\mathbb{R}^n$ con la suma usual y $a \odot v = -av$.

(c) $\mathbb{R}^2$, con la suma usual y $a \odot (x, y) = (ax, y)$.

(d) $\mathbb{R}^2$ con $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$, $\quad a \odot (x, y) = (ax, 0)$.

(e) El conjunto de polinomios con coeficientes reales, con el producto por reales usual, y con suma $p(x) \oplus q(x) = p'(x) + q'(x)$ (suma de derivadas).

10) $\oplus \Rightarrow$ Cualq operación

$\odot$

a) Veamos sus Propiedades Para ver si se cumple el espacio Vectorial.

Nótese que la Conmutatividad en la resta No da los mismos Resultados. $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow V_1 - V_2 \in \mathbb{R}^n$

$$V_1 - V_2 \neq V_2 - V_1$$

El elemento neutro no Cumple su Función, Pues:

$-V_1 + 0 = V_1 - 0 = V_1$ Siendo un No espacio Vectorial

(b) $\mathbb{R}^n$ con la suma usual y $a \odot v = -av$.

v = Vector

a = Escalar.

Notemos que

$-av = a \cdot (-v)$

Asumamos que $a = 1$

$\rightarrow a \cdot v = 1 \cdot v = v \quad \wedge$ Se supone que $a \odot v = -av$

$1 \odot v = -1v$

$v \neq -v$

Siendo No espacio vectorial

(c) $\mathbb{R}^2$, con la suma usual y $a \odot (x, y) = (ax, y)$.

Notemos que es una multiplicación

Por escalares (x, y)

tributivo

usual)

$\rightarrow$ Por Propiedad asociativa, Se cumple que

$a \odot (x, y) = (ax, y) = (x, ay)$

(d) $\mathbb{R}^2$ con $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$, $\quad a \odot (x, y) = (ax, 0)$.

muere acá, Ni idea.

tampoco el é.

Ejemplos 2.

1. El conjunto $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ con respecto de la operaciones

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \qquad \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$$

?

Esta es mi letra Pero estoy en digital

Obvio es distinta.

Definición 2.3 *Un espacio vectorial V es suma directa de dos subespacios vectoriales U y W suyo, y se denota por $V = U \oplus W$, si $V = U + W$ y $U \cap W = \{0\}$.*

Con el concepto de subespacio vectorial podemos definir una estructura de espacio vectorial en un conjunto cociente.

?

Ejercicio 11. Probar que $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.
`Nota`: Lo importante en este ejercicio es identificar las operaciones de suma y producto.

Demostración:
axiomas... De nuevo.

deNotemos que $x, y \in \mathbb{R}$

1) Cierre en la suma. pues, $x+y \in \mathbb{R}$.

2) Conmutatividad, pues $x+y=y+x \in \mathbb{R}$

3) Asociatividad, pues, $(x+y)+z=x+(y+z) \in \mathbb{R}$

4) Neutro en $+$, pues $x+0=x=0+x \in \mathbb{R}$

5) inverso aditivo, $x+(-x)=0=-x+x$

Ahora con el Producto

$\forall$

Denotemos Ahora que $q \in \mathbb{Q} \wedge x \in \mathbb{R}$

1) Cierrebajo la mult de escalar

$q \cdot x \in \mathbb{R}$ Po

2) Distributividad de mult. ~~en~~ escalar

$q(x+y) = q \cdot x + q \cdot y$ de escalar

3) Distributividad de la multiplicación escalar repecto a adición

$(q_1+q_2) \cdot x = x \cdot q_1 + x \cdot q_2$

4) Distribución de mult escalar.

$q_1(q_2+x) = q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot x$

5) Elemento neutro

$1 \cdot x = x = x \cdot 1$.

Ejercicio 12. Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Consideramos el conjunto

$$V^X = \{\text{ funciones } : X \longrightarrow V\}.$$

Usando las operaciones de V, definimos:

$$\oplus \colon V^X \times V^X \longrightarrow V^X, \qquad (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \qquad \text{para todo } x \in X.$$
$$\odot \colon \Bbbk \times V^X \longrightarrow V^X, \qquad (a \odot f)(x) = a \cdot f(x), \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Verificar que $(V^X, \oplus, \odot)$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial.

$X = \{\emptyset\}$ Vacío. $\to$ $(V, +, \cdot)$ Espacio Vectorial

Se considera

$V^X = \{\text{Funciones} : X \to V\}$

$\oplus : V^X \times V^X \to V^X,$ $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$ $\forall x \in X$

$\odot : K \times V^X \to V^X,$ $(a \odot f)(x) = a \cdot f(x)$ $\forall x \in X$

$(V^X, \oplus, \odot) \to K$ espacio Vectorial ✓

Como las funciones "se hacen/se crean" de manera tal

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\Leftrightarrow$ operamos de dos en dos.

Entonces, la verificación de espacio vectorial sería "igual que el resto de verificaciones, se diferencia de tener más pasos".

1) Cierre bajo la suma

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2) Conmutatividad en la suma

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$

3) Asociatividad de funciones en la suma

$$\begin{aligned}(h+(f+g))(x) &= h(x) + (f+g)(x)\\ &= h(x) + (f(x) + g(x))\\ &= (h+f)(x) + g(x)\\ &= ((h+f)+g)(x)\end{aligned}$$

4) Elemento neutro de las funciones.

Dado un $n(x) = 0$, (No pondré "$O(x)$" se confuso

Entonces

$(n+f)(x) = n(x) + f(x) \overset{(n(x)=0)}{=} 0 + f(x) = f(x)$

5) Elemento de la función opuesta

Sabemos que:

$-1 \cdot f(x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ Se tiene que

$((-f)+f)(x) = (-f(x)) + f(x) = 0$

Ahora con elementos del producto.

1) Dado $f(x)$ y c un escalar, entonces:

$c \cdot f(x) =$ Es una función también en el espacio vectorial

2) Distributividad del producto en respecto al escalar respecto a la adición de funciones;

Dado

$((f+g)(x))\cdot c = (f(x)+g(x))\cdot c =$

$c\cdot f(x) + c\cdot g(x)$

3) Distributividad de la multiplicación escalar respecto a la adición de escalares,

$(f(x))\cdot(c+d) = f(x)\cdot(c+d) = f(x)\cdot c + f(x)\cdot d$

4) Compatibilidad de la multiplicación de escalares.

$f(x)\cdot(c\cdot d) = (f(x)\cdot c)\cdot d$.

5) Elemento neutro para la multiplicación

Dado $1(x) = 1$

$\Rightarrow (1\cdot f)(x) = 1(x)\cdot f(x) = 1\cdot f(x) = f(x)$

Dead Space

Ejercicio 13. Sea $n \geq 3$. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales.

(a) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$. $\Rightarrow$ no es par, pues $(-)\cdot(-)=+$.

(b) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 = 0\}$ $\Rightarrow$ x_1 es el opuesto de x_2 y viceversa

(c) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 x_2 = 0\}$. "$x_1=0$ ó $x_2=0$"

(d) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 = 1\}$. Apa aea no sé

(e) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \pi^{-21}x_1 + \sqrt{17}x_2 + 41x_3 = 0\}$. q pasó aca

(f) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$ existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 = 0\}$. no sé

Para determinar, debo ver si:

1) Cierre bajo la suma ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$)

2) Si n es subconjunto y c un escalar, $\rightarrow$

$c \cdot n$ está en el espacio

3) tiene vector 0.

Rtas

1)

a) Si x_1 es positivo, sin importar el exponente, será ≥ 0.

Si x_1 es negativo, entonces su exponente debe ser par, si es impar, será negativo.

b) Si c es un escalar negativo   No cumple

$\rightarrow$ $x_1 \cdot (-c) < 0$ No cumple

No espacio

Cambio un poco el orden a propósito

2)

a) El 0 está en el conjunto $\rightarrow \vee\ 0\ \exists$

b) La multiplicación por escalar, si asumimos q, $c = 0$ ó $x_1, x_2 = 0$

$\rightarrow$ $c(x_1 + x_2) = c(0) = 0$.   Y así,

c) Podemos decir q $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$, o q son opuestos y concluimos en el 0.

3)

a) el vector 0 está en el subconjunto

b) Si $x_1 x_2 = 0$ $\rightarrow$ $0\ x_1 = 0 \vee x_2 = 0$

c) multiplicación por escalar ✓

$c(x_1 x_2) = 0$

Es subespacio

4)

a) el vecto cero no existe, no cumple

$x_1 + x_2 = 1$

b) Si $x_1 + x_2 = 1, \to$ $\mathbb{C} =$ escalar

$c(x_1 + x_2) = c(1) = c$

No es subespacio

5)