Clase 12 - Análisis Matemático 1 - LC: Continuidad II

Eugenia Díaz-Giménez[1]

eugenia.diaz@unc.edu.ar

24 de Abril de 2020

Índice

Repaso: Continuidad en un punto

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

1. $a \in Dom\, f, \Rightarrow \exists\, f(a)$
2. $\exists \lim_{x\to a} f(x)$
3. $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

Si alguno de los 3 items NO se cumple, decimos que **f es discontinua en a**. Tipos de discontinuidad:

- $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ pero $\neq f(a)$ o $\nexists f(a)$: discontinuidad EVITABLE
- $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ porque $\lim_{x\to a^-} f(x) = L \neq M = \lim_{x\to a^+} f(x)$: discontinuidad DE SALTO
- $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ porque $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$: discontinuidad ESENCIAL

Repaso: Continuidad en un intervalo y propiedades

f es continua en un intervalo abierto (b, c) si es continua en todo número del intervalo
f es continua en un intervalo cerrado $[b, c]$ si :

- es continua en todo número del intervalo abierto (b, c),
- es continua por derecha en b, y
- es continua por izquierda en c

Sean f y g continuas en a, entonces también son continuas en a las siguientes funciones:

1. $(f + g)(x)$
2. $(f.g)(x)$
3. $c.f(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, si $g(a) \neq 0$
5. $(f\, o\, g)(x)$, si f es continua en $g(a)$

Con esas propiedades:

- Los polinomios son continuos en $\mathbb{R}$
- Toda función racional es continua en cualquier punto **de su dominio**
- La radicación es continua en los puntos de su dominio
- Las funciones trigonométricas $sen(x)$ y $cos(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - k}{x - 1} & si \quad x \geq 0 \\ \sqrt{2 - x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1. ¿Para qué valor de k la función será continua en $x = 0$?
2. ¿Para qué valor de k la función tendrá una discontinuidad evitable? Indicar en qué valor de x se presenta la discontinuidad.

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-k}{x-1} & si \quad x \geq 0 \\ \sqrt{2-x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1. ¿Para qué valor de k la función será continua en $x = 0$?

Continuidad en $x = 0$

1. $0 \in Dom\, f$ ✔ $\qquad f(0) = \frac{0-k}{0-1} = k$
2. $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{\underbrace{x \to 0^-}_{x<0}} \sqrt{2-x} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\underbrace{x \to 0^+}_{x>0}} \frac{x^3-k}{x-1} = \frac{-k}{-1} = k$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = \boxed{\sqrt{2} = k}$$ ✔

3. **(1)** $f(0) = \sqrt{2}$ y **(2)** $\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt{2}$ $\quad \Rightarrow f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ ✔

Tomando $k = \sqrt{2}$ la función es continua en $x = 0$

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-k}{x-1} & si \quad x \geq 0 \\ \sqrt{2-x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

2. ¿Para qué valor de k la función tendrá una discontinuidad evitable? Indicar en qué valor de x se presenta la discontinuidad.

- Dominio de f?
  - $x \geq 0 \wedge \{x \in \mathbb{R} \ / x - 1 \neq 0\} \quad \Rightarrow x \geq 0 \wedge \mathbb{R} - \{1\} \quad \Rightarrow [0, 1) \cup (1, +\infty)$
  - $x < 0 \wedge \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 - x \geq 0\} \quad \Rightarrow x < 0 \wedge x \leq 2 \quad \Rightarrow (-\infty, 0)$

  $Dom\ f = \mathbb{R} - \{1\}$
- Continuidad en intervalos abiertos
  - $x \in (-\infty, 0)$ esta parte de la función es una raíz cuadrada de un polinomio y está bien definida en todo este intervalo, por lo tanto **f es continua en este intervalo**
  - $x \in (0, 1)$ la función es cociente de polinomios (continuos) y el denominador no se anula en este intervalo, por la propiedad de cociente de continuas: **f es continua en este intervalo**
  - $x \in (1, +\infty)$ misma descripción que el item anterior, por lo tanto **f es continua en este intervalo**
- Continuidad en los puntos que no pertenecen al domino y/o que son corte de los tramos de la función: ¿Qué pasa en x=1 y x=0?

Ejercicio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-k}{x-1} & si \quad x \geq 0 \\ \sqrt{2-x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

2. ¿Para qué valor de k la función tendrá una discontinuidad evitable? Indicar en qué valor de x se presenta la discontinuidad.

¿Qué pasa en x=1?

1. $1 \notin Dom\, f, \ \nexists f(1)$ ✗ **f es discontinua en $x = 1$** qué tipo de discontinuidad?
2. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-k}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^3-k}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} \Rightarrow 1^3 - k = 0 \to \boxed{k=1}$

$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^3-1}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} \to \frac{0}{0}\ IND \qquad x^3 - 1 = (x-1).p(x)$

(cuenta auxiliar)

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & -1 & x-1 \\ \cline{3-3} -x^3+x^2 & & x^2+x+1 \\ \hline x^2 & & \\ -x^2+x & & \\ \hline x & -1 & \\ -x & +1 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3$ ✔

Tomando $k = 1$ la discontinuidad en $x = 1$ es del tipo EVITABLE.

Tarea: ¿qué pasa ahora en $x = 0$?...

Teorema del valor intermedio

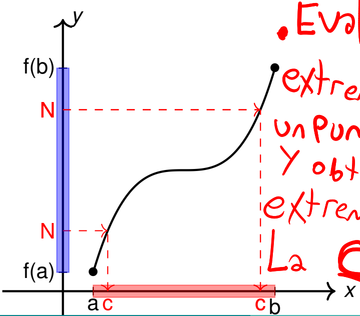
Teorema del V.I.

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y N es un número estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$

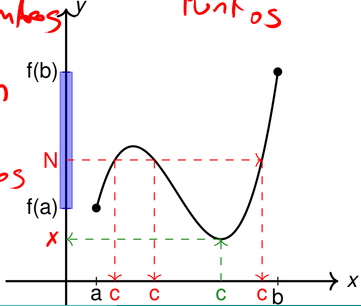
$$f \text{ continua en } [a, b], \text{ si } f(a) < N < f(b) \text{ o } f(b) < N < f(a)$$

$$\Rightarrow \exists c : a < c < b \;/\; f(c) = N$$

(en otras palabras: f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$) ∃ un Num entre dos Puntos



• Evaluo Ambos extremos en un Punto, y obtengo los extremos y La c



Ejercicios de aplicación (1)

Demostrar que la ecuación $x^5 + 3x^3 - 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$

En otras palabras: queremos ver que la función $f(x) = x^5 + 3x^3 - 1$ tiene una raíz (i.e, alguna vez toma el valor $y = 0$) para algún $-1 < x < 1$

Tomemos el intervalo cerrado $[-1, 1]$:

- La función $f(x)$ es continua en $[-1, 1]$ (los polinomios son continuos en $\mathbb{R}$, entonces es continua en un intervalo cerrado contenido allí dentro)
- Evaluemos la función en los extremos

$$f(-1) = (-1)^5 + 3(-1)^3 - 1 = -1 - 3 - 1 = -5$$

$$f(1) = 1 + 3 - 1 = 3$$

Por el Teo V.I: si f es continua en [-1,1] ✔
para cualquier N que cumpla que $-5 < N < 3$ vamos a poder encontrar un valor $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = N$
Elijamos $N = 0$, ya que $f(-1) < 0$ y $f(1) > 0$. i.e. $f(-1) < 0 < f(1)$, el teo V.I. nos asegura que existe al menos un $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, que es una raíz del polinomio.

Ejercicios de aplicación (2)

Dada la ecuación: $cos(x) = 2x$ ¿ tiene solución en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$?

$$cos(x) = 2x \Rightarrow cos(x) - 2x = 0$$

Tomemos la función $f(x) = cos(x) - 2x$ y tomemos el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

- $f(x)$ es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ya que se trata de suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$, entonces es continua en un intervalo cerrado contenido allí dentro
- En los extremos:

$$f(0) = cos(0) - 0 = 1 > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2.\frac{\pi}{2} = 0 - \pi = -\pi < 0$$

Por el teorema del V.I.: si f es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puedo elegir $N = 0$ ya que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < f(0)$, entonces puedo asegurar que existe al menos un $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$

Ya que $f(c) = 0 \Rightarrow cos(c) - 2c = 0 \Rightarrow$
se satisface la ecuación $cos(c) = 2.c$ con $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

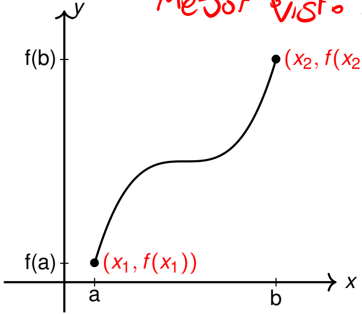
Teorema de Weierstrass

Teo de Weierstrass

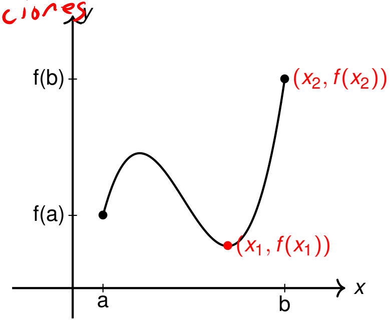
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces hay al menos dos puntos x_1 y x_2 en el $[a, b]$, tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todos los $x \in [a, b]$

En otras palabras, f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en el $[a, b]$

Mejor visto en Funciones

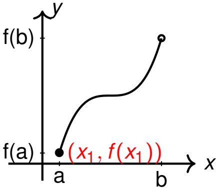


$f(x_1) = f(a) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(b)\ \forall\ x \in [a, b]$

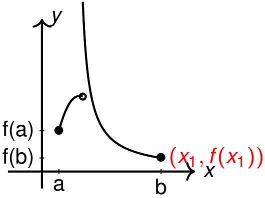


$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(b)\ \forall\ x \in [a, b]$

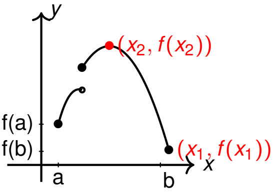
La importancia de las hipótesis



No tiene máximo! No aplica el teorema porque el intervalo NO es cerrado!



NO tiene máximo! No cumple con la continuidad en el intervalo, no se puede aplicar el teorema



NO podía asegurar a priori ya que no cumple con la continuidad en el intervalo, no se puede aplicar el teorema

FIN