Ejercicio 1. Calcular $A+3B-C$, $-A+B+2C$, AB, BA, AC, CA, BC, CB, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA, donde A, B y C son las siguientes matrices en $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&-2&1\\1&-2&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&-1\\1&3&5\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\3&0&1\end{pmatrix}.$$

A)

$$3B=\begin{bmatrix}3&3&6\\-6&0&-3\\3&9&15\end{bmatrix}\quad A-C=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-1&-2&0\\-2&-2&-2\end{bmatrix}\to A+3B-C=\begin{bmatrix}3&2&5\\-7&-2&-3\\1&7&13\end{bmatrix}\ ✓$$

$-A+b+2c$

$b-A+2c$

b)

$$B-A=\begin{bmatrix}0&+3&+2\\3&+2&-2\\0&+5&+6\end{bmatrix}\quad 2c=\begin{bmatrix}2&-2&2\\4&0&2\\6&0&2\end{bmatrix}\to B-A+2C=\begin{bmatrix}2&1&4\\1&2&0\\6&5&8\end{bmatrix}\ ✓$$

1 = Fila
2 = Columna

c)

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&-2&1\\1&-2&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&-1\\1&3&5\end{pmatrix}$$

AB: (Ambos son 3x3)

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\cdot B_{kJ}\ +$$

Entre cada elemento sumo

$$AB=\begin{bmatrix}5&1&1\\6&4&9\\4&-2&-1\end{bmatrix}\ ✓$$

$(AB)_{21}=1+4+1$

$(AB)_{22}=1+0+3$

$(AB)_{23}=2+2+5=9$

$(Ab)_{31}=1+4-1=4$

$(Ab)_{32}=1+0-3$

$(Ab)_{33}=2+2-5=-1$

$(A\,b)_{23}\to$ Columna

$\downarrow$ Fila

(me olvido el +) xd

$$B=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&-1\\1&3&5\end{pmatrix}\ A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&-2&1\\1&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$bA=\begin{bmatrix}4&-8&-1\\-3&+6&1\\9&-18&-2\end{bmatrix}\ ✓$$

$(ba)_{11}=1+1+2$

$(ba)_{12}=-2\ -2-4$

$(ba)_{13}=0\ 1\ -2$

$(ba)_{21}=-2\ 0\ -1$

$(ba)_{22}=+4\ 0\ 2$

$(ba)_{23}=0\ 0\ 1$

$(ba)_{31}=1\ 3\ 5$

$(ba)_{32}=-2\ -6\ -10$

$(ba)_{33}=0\ 3\ -5$

$A = \begin{pmatrix}1&-2&0\\1&-2&1\\1&-2&-1\end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\3&0&1\end{pmatrix}$

AC

$$AC = \begin{bmatrix}3&-1&-1\\4&-1&0\\-6&-1&-2\end{bmatrix} \checkmark$$

$(AC)_{11} = 1\ -4\ 0$ $(AC)_{21} = 1\ 2\ 1$

$(AC)_{12} = -1\ 0\ 0$ $(AC)_{22} = -1\ 0\ 0$

$(AC)_{13} = 1\ -2\ 0$ $(AC)_{23} = 1\ -2\ 1$

$(AC)_{31} = 1\ -4\ -3$

$(AC)_{32} = -1\ 0\ 0$

$(AC)_{33} = 1\ -2\ -1$

CA

$C = \begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\3&0&1\end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix}1&-2&0\\1&-2&1\\1&-2&-1\end{pmatrix}$

$$CA = \begin{bmatrix}1&-2&-2\\3&-6&-1\\4&-8&-1\end{bmatrix} \checkmark$$

$(CA)_{11} = 1\ -1\ 1$ $(CA)_{21} = 2\ 0\ 1$

$(CA)_{12} = -2\ 2\ -2$ $(ca)_{22} = -4\ 0\ -2$

$(ca)_{13} = 0\ -1\ -1$ $(ca)_{23} = 6\ 0\ -1$

$(ca)_{31} = 3\ 0\ 1$

$(ca)_{32} = -6\ 0\ -2$

$(ca)_{33} = 0\ 0\ -1$

$B = \begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&-1\\1&3&5\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\3&0&1\end{pmatrix}$

Bc

$$Bc = \begin{bmatrix}9&-1&4\\-5&2&-3\\22&-1&9\end{bmatrix} \checkmark$$

$(bc)_{11} = 1\ +2\ 6$ $bc_{21}\ -2\ 0\ -3$

$bc_{12} = -1\ 0\ 0$ $bc_{22}\ 2\ 0\ 0$

$bc_{13} = 1\ 1\ 2$ $bc_{23}\ -2\ 0\ -1$

$bc_{31}\ 1\ 6\ 15$

$bc_{32}\ -1$

$b_{33}\ 1\ 3\ 5$

El resto de esos
las hago en otro
momento

Ejercicio 2. Repetir el ejercicio anterior con aquellos productos que tengan sentido para las matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}_{11}$:

$$A = \begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}.$$

Productos:

AB, BA, AC, CA, BC, CB, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA

$A_{2\times3}, B_{3\times1} = Ab_{2\times1}$

queda. queda

$$Ab_{2\times1} = \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$$

$(Ab)_{11} = 6\ -1\ -1$

$(Ab)_{21} = 3\ 2\ -1$

¿es válido usar $\mathbb{Z}_{11}$ en negativos? O sea, es lo único.

$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$

bC

$-3 \cdot 8 \; (1\;1)$

$b_{3\times1} \; C_{1\times2} = 3_{\times2}$

$bC \begin{bmatrix} 3 & -3 \; 8 \\ 1 & -1 \; 10 \\ -1 \; 10 & 1 \end{bmatrix}$

$(bc)_{11} = 3$ $\quad bc_{31} = -1$

$(bc)_{12} = -3$ $\quad bc_{32} = 1$

$(bc)_{21} = 1$

$(bc)_{22} = -1$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$

Abc

$A_{2\times3}, \; b_{3\times1} = Ab = {}_{2\times1}, \; C_{1\times2} = Abc_{2\times2}$

$Ab_{2\times1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad AbC = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ ✓

$(Abc)_{11} = 4$ $\quad (Abc)_{21} = 4$

$(Abc)_{12} = -4$ $\quad (Abc)_{22} = -4$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Ac

$A_{2\times3}, \; C_{1\times2} = Ac_{2\times2}$

$AC \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

$(AC)_{11} = 2 - 1 \; 1$

$(AC)_{12} = -2 \; 1 \; -1$

$(AC)_{21} = 1 \; 2 \; 1$

$(AC)_{22} = -1 - 2 - 1$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$

AcB

$Ac_{2\times2}, \; B_{3\times1}, \; AcB_{2\times1}$

$ACb = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

$AC \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(ACb)_{11} = 6 \; -2$

$(ACb)_{21} = 12 \; -4 = 8$

Hare el Resto en tiempos de Parciales

Ejercicio 3.

(a) Hallar una matriz $A \in \Bbbk^{2\times2}$ no nula tal que $A^2 = 0$. Repetir para tamaño 3×3.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (mismo con 3×3)

Una matriz nula es aquella que tiene una fila de 0

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

AA_{11} 0
AA_{12} 0
AA_{21} 0
AA_{22} 0.

No tengo seguridad ya q 00 es nulo

(b) Decidir si existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 = -\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si A fuera $-A$, y pidies $-\mathrm{Id}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se sería posible, pero para q pase lo q pide el anunciado, debería haber un A tq para q se cumple, sea opuesto, pero no sería posible ya que:

$A^2 = A \cdot A$

y "Se pide q pase" $A^2 \neq A \cdot (-A)$

Cosa no posible, visto en MD

¿Cuál razonamiento es más correcto?

Propiedades y Cálculos

1. **Forma General de la Matriz A**

   Supongamos que A tiene la forma general:

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2. **Cálculo de A^2**

   Calculamos A^2 para esta matriz general:

   $$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

3. **Igualación a $-\mathrm{Id}_2$**

   Para que $A^2 = -\mathrm{Id}_2$, necesitamos que:

   $$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Esto da lugar a un sistema de ecuaciones:

   - $a^2 + bc = -1$
   - $ab + bd = 0$
   - $ac + cd = 0$
   - $bc + d^2 = -1$

(c) Hallar dos matrices cuadradas A y B tales que $AB \neq BA$ (sin repetir del **Ejercicio** 1).

(d) Hallar una matriz $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$ tal que $A \neq 0$, $A \neq \mathrm{Id}_n$ y $A^2 = A$ (probar primero a mano para $n = 2$, luego generalizar).

(e) Sean $A, B \in \mathbb{k}^{n\times n}$. Dar condiciones necesarias y suficientes para que valgan las igualdades:
   (I) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
   (II) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.