

2025-08-20

任务特点：线网图中的某些节点具有很高的度；某些区域的节点密度很高。

任务期望：可以将手工制成的线网示意图看作依照，我们期望得到一个**站点排列均匀**（e.g. 不同的线路距离满足 1:2 或 1:1 这样的常用比例；或站点密度较为均匀，改善原图中某些区域站点扎堆的情况）、**分布整齐**（e.g. 数个站点分布在同一条水平或垂直的线上）且**线路分隔明晰**（真实线网图中的线路之间距离或夹角过小，难以分辨）的线网示意图。

Trade-off: 暂时只考虑直接连线形成的边。这在某些情况下会导致边顺序的混乱，但这种乱序发生频率并不高，暂时可以接受（人工制图中就是这样做的）。



逐步引入不同的位置约束关系，并尝试不同的约束引入顺序，通过实验结果决定使用何种约束顺序。

Gurobi: 强大的闭源优化工具。

4. 可供优化的位置关系有哪些？

(1) 保持同一站点优化前后的位置，防止过大的 displacement

$$\min \sum_i \|(X_i - X_i^0, Y_i - Y_i^0)\|$$

(2) 保持不同站点的相对位置（至少不完全违反）

至少要保持 x 或 y 其中一个的相对位置。可以使用**整数线性规划方法 (ILP)**:

Variables:

$$s_{ij}^x = \begin{cases} +1, & \text{if } X_i^0 \leq X_j^0, \\ -1, & \text{if } X_i^0 > X_j^0, \end{cases} \quad s_{ij}^y = \begin{cases} +1, & \text{if } Y_i^0 \leq Y_j^0, \\ -1, & \text{if } Y_i^0 > Y_j^0. \end{cases}$$
$$z_{ij}^x = \begin{cases} 1, & \text{if } X_i \leq X_j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad z_{ij}^y = \begin{cases} 1, & \text{if } Y_i \leq Y_j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Constraints:

$$s_{ij}^x (X_j - X_i) \geq s - M (1 - z_{ij}^x),$$
$$s_{ij}^y (Y_j - Y_i) \geq s - M (1 - z_{ij}^y),$$
$$z_{ij}^x + z_{ij}^y \geq 1.$$

Objective:

$$\lambda_x \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} (1 - z_{ij}^x) + \lambda_y \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} (1 - z_{ij}^y)$$

\mathcal{P} 的约束:

取一定范围内的近邻集合，防止优化算法的时间复杂度过高。

(3) 有连接关系的顶点之间的关系（边朝着水平或竖直方向调整）

可以规定，在一定的角度范围内的边（比如 $[-15^\circ, 15^\circ]$ ）可以被调整到水平或竖直方向，若不在范围内或者水平/竖直方向已经被占据，则暂时保持边的方向不变。可以用与 (2) 类似的方式 (**ILP**) 形式化地写出：

Preprocessing:

$$t = \tan \delta, \quad b_e^H = \mathbf{1}\{|y_i^0 - y_j^0| \leq t |x_i^0 - x_j^0|\}, \quad b_e^V = \mathbf{1}\{|x_i^0 - x_j^0| \leq t |y_i^0 - y_j^0|\}.$$

Variables:

$$X_i, Y_i \in \mathbb{Z} \text{ (or } \mathbb{R}), \quad d_e^x, d_e^y \geq 0, \quad h_e, v_e \in \{0, 1\}.$$

Constraints:

$$d_e^x \geq X_i - X_j, \quad d_e^x \geq X_j - X_i,$$
$$d_e^y \geq Y_i - Y_j, \quad d_e^y \geq Y_j - Y_i,$$
$$h_e \leq b_e^H, \quad v_e \leq b_e^V.$$

$$d_e^y \leq \varepsilon + M(1 - h_e), \quad d_e^x \leq \varepsilon + M(1 - v_e).$$

$$h_e + v_e \leq 1.$$

Objective:

$$\min \sum_e (\lambda_e^H(1 - h_e) + \lambda_e^V(1 - v_e)).$$

当然还有另外一种设置约束的思路：将当前边向量与目标方向的方向向量做 cross product，并将该结果作为目标函数。对目标函数做最小优化的过程就是将当前边拉向水平或竖直方向的过程。

(4) 无连接关系的顶点之间的关系（站点朝着同一x或同一y调整）

这种方法本质上是一个 **K-median** 算法。下面以水平方向为例：

Variables:

$y_g \in \mathbb{R}$: position of line g .

$o_g \in \{0, 1\}$: whether line g is used.

$a_{i,g} \in \{0, 1\}$: whether point i is assigned to line g .

$\delta_{i,g} \geq 0$: absolute deviation of point i from line g .

Constraints:

$$\sum_{g=1}^K a_{i,g} = 1, \quad \forall i$$

$$a_{i,g} \leq o_g, \quad \forall i, g$$

$$\delta_{i,g} \geq Y_i - y_g - M(1 - a_{i,g}), \quad \forall i, g$$

$$\delta_{i,g} \geq y_g - Y_i - M(1 - a_{i,g}), \quad \forall i, g$$

Objective:

$$\min \sum_{i,g} \delta_{i,g} + \lambda \sum_g o_g$$

K 的选择：

(5) 共线站点（特别是彼此有连接关系的）之间满足常用的比例关系

人似乎对于水平或竖直方向上的线段长度比例更敏感。

可以承接关系 (4) 的优化结果，对一条直线上的站点位置进行调整，从而形成某种成比例的间距分布。

(6) 平行边之间的距离的比例关系

(7) 最小站点距离约束（站点密度约束）

防止所有站点“坍缩”成一团甚至一点。

(8) 可以考虑将某个扇区内的、未被水平或竖直化的多条边汇聚起来（不优先考虑）

汇聚边在需要的时候再分支，这样可以一定程度上增强线网图的视觉友好度。

5. 这些关系之间的优先级/顺序如何？

Intuitively，可以优先考虑关系 (3) 和 (4)，e.g. 关系 (5) 一定程度上依赖于对关系 (3) 和 (4) 进行约束的结果；关系 (8) 也应该在对关系 (3) 和 (4) 进行约束、布局已相对稳定后再引入。

完整的结果亟待后续实验。

6. 需要考虑的 Conflicts

(1) Vertex Overlapping

(2) Edge Overlapping

7. 定量分析和评价指标