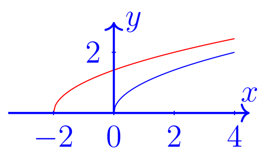
CAPÍTULO 3

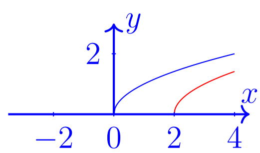
Funciones II

S1. Grafique la función $f(x) = 1 - (x-1)^2$ en el intervalo $[0,2]$. Identifique la función $g(x)$ de la cual proviene y las modificaciones realizadas para obtener $f(x)$.
Para poder resolver este ejercicio hace falta tener en claro cuales son las transformaciones que se le pueden hacer a una función y cuales son sus efectos en la misma. Por lo tanto, a continuación enumero el conjunto básico de transformaciones que necesitamos saber y su efecto sobre una $f(x)$ (en azul) cualquiera:

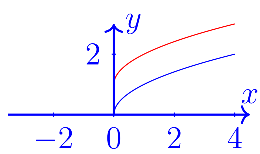
- $f(x+a)$ con $a > 0$: es un corrimiento de la $f(x)$ una cantidad a sobre el eje de las $x's$ hacia la izquierda.



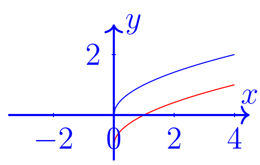
- $f(x-a)$ con $a > 0$: es un corrimiento de la $f(x)$ una cantidad a sobre el eje de las $x's$ hacia la derecha.



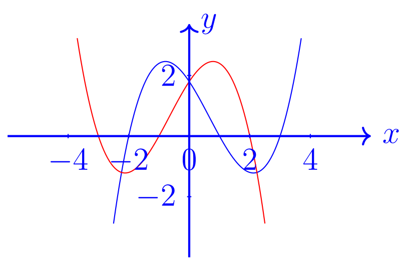
- $f(x)+a$ con $a > 0$: es un corrimiento de la $f(x)$ una cantidad a sobre el eje de las $y's$ hacia arriba.



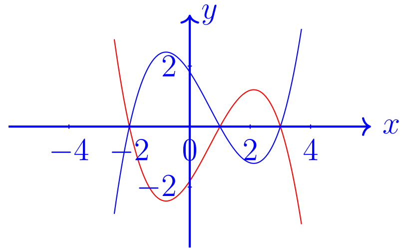
- $f(x)-a$ con $a > 0$: es un corrimiento de la $f(x)$ una cantidad a sobre el eje de las $y's$ hacia abajo.



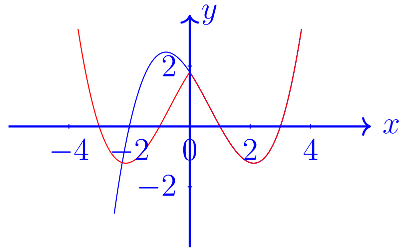
- $f(-x)$: (reflexión) se rota 180° $f(x)$ respecto al eje y (cuando hay varias transformaciones, hacer las reflexiones primero).



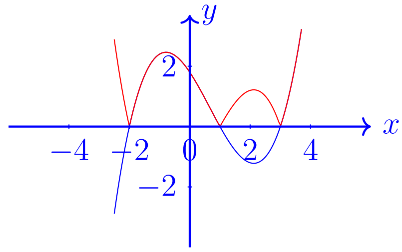
- $-f(x)$: (reflexión)
  es una rotación 180° de la $f(x)$ respecto del eje x (cuando hay varias transformaciones, hacer las reflexiones primero).



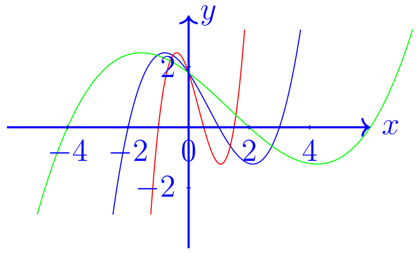
- $f(|x|)$:
  es una rotación 180° sólo de la parte de $x > 0$ de la $f(x)$ respecto del eje y. La parte de $f(x)$ para los $x < 0$ se pierde.



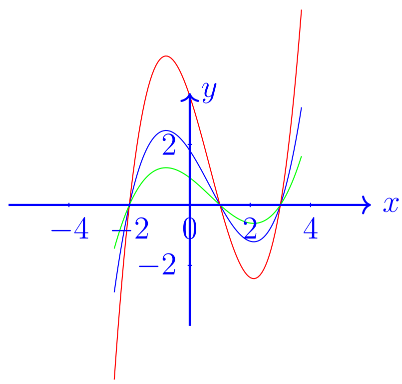
- $|f(x)|$:
  es una rotación 180° sólo de la parte de $y < 0$ de la $f(x)$ respecto del eje x.



- $f(ax)$ con $a > 1$:
  compresión de $f(x)$ un factor a sobre el eje x.
  $f(ax)$ con $0 < a < 1$:
  estiramiento de $f(x)$ un factor a sobre el eje x.
  El punto $(0, f(0))$ permanece fijo.



- $af(x)$ con $a > 1$:
  es una estiramiento de la $f(x)$ en la dirección del eje y.
  $af(x)$ con $0 < a < 1$:
  es un compresión de la $f(x)$ en la dirección del eje y.



Las primeras 6 transformaciones suelen denominarse transformaciones ”rígidas” porque mueven o giran la función original sin modificarle su forma.

Finalmente, cuando tenemos que graficar algo como $f(ax+b)$ (digamos $a > 1$ y $b > 0$), conviene escribir el argumento en su forma estandar, es decir

$$f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)$$

y realizar las transformaciones de afuera hacia adentro, es decir, comprimir un factor a (porque $a > 1$) y luego correr hacia la izquierda una cantidad b/a (porque el cociente es positivo). Esto es así, porque sigue el orden de como si estuviesemos "despejando x".

Veamos un ejemplo: supongamos que sé que $f(7) = 12$ y quiero dibujar $f(2x+3)$. Para la nueva función yo sé que tomará el valor 12, pero tengo que averiguar para qué valor de x. Cómo sé que en la función original cuando ponía 7 en el argumento me daba 12, entonces ahora como el argumento es $2x+3$ tengo que averiguar cuando esto tomará el valor del argumento que conozco, 7, es decir cuando $2x+3 = 7$. Si despejo tendremos primero que $2x = 7-3 = 4$, y luego $x = 4/2 = 2$, es decir primero un corrimiento hacia la izquierda de 3 y luego una compresión de 2 (ven las tranformaciones?). Sin embargo, hacer "primero" el corrimiento y "segundo" la compresión puede resultar dificil de hacer para todo un gráfico ya que no es fácil darse cuenta respecto de qué eje o hacia que lugar es la compresión. Por lo tanto, conviene usar la manera estandar para el argumento, es decir,

$$f(2x+3) = f\left(2\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)$$

el resultado numérico para este ejemplo será el mismo, sin embargo ahora al despejar tendríamos que primero comprimir (dividir) un factor 2 y segundo correr hacia la izquierda (restar) una cantidad 3/2. En este caso, al comprimir primero, la compresión es sobre las "x" hacia el eje "y", porque el punto $(0, f(0))$ permanece fijo en una compresión del tipo $f(ax)$.