AM 2 - INTENTO DE RESUMEN SEGUNDA PARTE

A.D.O.M.

2024

Serie de potencias

Una **serie de potencias** es una suma infinita de términos en la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

donde:

- a_n son los **coeficientes** de la serie.
- x es la **variable**.
- c es el **centro** de la serie.

Por ejemplo, una serie de potencias centrada en $c = 0$ sería:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

Esta serie es la expansión de la función exponencial e^x.

Radio e Intervalo de Convergencia

Radio de Convergencia (R)

El **radio de convergencia** R de una serie de potencias es un número que indica para qué valores de x la serie converge. Es decir, la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

converge si $|x-c| < R$ y diverge si $|x-c| > R$.
Para hallar R, usamos la **fórmula del radio de convergencia**:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

o más comúnmente el **criterio del cociente** (siempre que el límite exista):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Intervalo de Convergencia

El **intervalo de convergencia** es el conjunto de todos los valores de x para los cuales la serie converge. Se expresa como:

$$(c-R, c+R)$$

En los extremos $x = c \pm R$, la serie puede converger o divergir, y esto debe verificarse de forma individual.

Ejemplo: Consideremos la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$$

Aplicando el criterio del cociente:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = 1$$

Entonces, el radio de convergencia es $R = 1$. El **intervalo de convergencia** es:

$$(2-1, 2+1) = (1, 3)$$

Debemos verificar la convergencia en $x = 1$ y $x = 3$ por separado.

Criterio de Convergencia

Existen varios métodos para determinar si una serie de potencias converge:

a) Criterio del Cociente

Este criterio establece que la serie converge si:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n} \right| < 1$$

Este criterio es especialmente útil para calcular el radio de convergencia R.

b) Criterio de la Raíz

La serie converge si:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} < 1$$

Ejemplo: Para la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La serie converge para $|x| < 2$, por lo tanto, el **radio de convergencia** es $R = 2$.

Representación de Funciones como Series de Potencias

Algunas funciones pueden representarse como una serie de potencias. Por ejemplo, la función exponencial, la función seno y la función coseno se pueden expresar mediante series de potencias.

Ejemplos Clásicos:

- **Función Exponencial:**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

  Con $R = \infty$, lo que significa que converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

- **Seno y Coseno:**

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

  Ambas funciones tienen un radio de convergencia $R = \infty$.

- **Serie de Taylor y Maclaurin:**
  Si una función $f(x)$ es infinitamente diferenciable en un punto c, se puede expresar como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

  Cuando $c = 0$, esta es la **Serie de Maclaurin**.

Ejemplo de Serie de Taylor: Sea $f(x) = \ln(1+x)$, queremos su serie de Taylor en $x = 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \ldots$$

Obtenemos:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Esta serie tiene $R = 1$, es decir, converge para $|x| < 1$.

Series, Polinomios y Potencias de Taylor

Serie de Taylor

Dada una función $f(x)$ infinitamente diferenciable en un punto a, su **serie de Taylor** centrada en a es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

donde: - $f^{(n)}(a)$ es la n-ésima derivada de f evaluada en a. - $n!$ es el factorial de n.

Polinomio de Taylor

El **polinomio de Taylor** de grado n de la función $f(x)$ en torno al punto a se define como:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Este polinomio aproxima $f(x)$ cerca del punto a.

Potencia de Taylor

La **potencia de Taylor** es otra manera de referirse a la serie de Taylor, ya que la función se representa como una suma infinita de potencias de $(x - a)$.

Resto de Lagrange

La **fórmula del resto de Lagrange** nos da una expresión para el error al aproximar una función mediante su polinomio de Taylor de grado n:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

donde ξ es algún número en el intervalo (a, x).

Esto significa que el error al usar el polinomio de Taylor de grado n es proporcional a la derivada $(n+1)$-ésima de la función en algún punto intermedio ξ.

Series de Potencias más Conocidas y sus Funciones Equivalentes

Las series de potencias más conocidas son expansiones que representan funciones comunes como polinomios infinitos. A continuación, presentamos algunas de las series más importantes, incluyendo la serie geométrica, exponencial, logarítmica, trigonométricas y la serie de Taylor de orden general.

1. Serie geométrica

Para $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

2. Serie exponencial (e^x)

Para todo x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

3. Serie de la función seno ($\sin(x)$)

Para todo x:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

4. Serie de la función coseno ($\cos(x)$)

Para todo x:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

5. Serie logarítmica ($\ln(1+x)$)

Para $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

6. Serie del arctangente ($\tan^{-1}(x)$)

Para $|x| \leq 1$:

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

7. Serie del binomio $((1+x)^r)$

Para $|x| < 1$:

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{6}x^3 + \dots$$

donde $\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}$ es el *coeficiente binomial generalizado.*

8. Serie de Taylor (expansión general)

Para una función $f(x)$ derivable infinitamente en un punto a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

En particular, si $a = 0$, tenemos la *serie de Maclaurin*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

9. Serie de Taylor para algunas funciones comunes

- $\frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- $\frac{1}{1+x}$ para $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

- $\ln(1-x)$ para $|x| < 1$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

- $\sinh(x)$ (seno hiperbólico):

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- $\cosh(x)$ (coseno hiperbólico):

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Vectores y Operaciones Básicas

Suma de Vectores

Dados dos vectores en $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

La **suma de vectores** se define como:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

Propiedades de la Suma de Vectores:

- Conmutativa: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- Asociativa: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- Elemento Neutro: $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
- Elemento Opuesto: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Producto por un Escalar

Si k es un escalar y $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ es un vector, el **producto por un escalar** es:

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

Propiedades del Producto por un Escalar:

- Distributiva: $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
- Asociativa: $(kl)\mathbf{u} = k(l\mathbf{u})$
- Elemento Neutro: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Producto Interno y Norma

Producto Interno (Dot Product)

El **producto interno** entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

Propiedades del Producto Interno:

- Conmutativa: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- Distributiva: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- Asociativa con un escalar: $(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

Norma de un Vector

La **norma** o **magnitud** de un vector $\mathbf{u}$ se define como:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

Propiedades de la Norma:

- $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ (siempre no negativa)
- $\|\mathbf{u}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ (homogeneidad)
- Desigualdad triangular: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Rectas en el Espacio

Ecuación Vectorial de una Recta

La **ecuación vectorial** de una recta que pasa por un punto $\mathbf{P_0} = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene una dirección dada por un vector $\mathbf{d} = (a, b, c)$ es:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{P_0} + t\mathbf{d} = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

Ecuaciones Paramétricas de una Recta

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc$$

Planos en el Espacio

Ecuación Normal de un Plano

La ecuación general de un plano en $\mathbb{R}^3$ es:

$$Ax + By + Cz = D$$

donde $\mathbf{n} = (A, B, C)$ es el vector normal al plano.

Producto Vectorial

Definición:

El **producto vectorial** de $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es un vector ortogonal a ambos:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Definición de Funciones Vectoriales

Una **función vectorial** en $\mathbb{R}^3$ tiene la forma:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

Dominio de Funciones Vectoriales

El **dominio** de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es el conjunto de todos los valores de t para los cuales todas sus componentes están definidas.

Límite de una Función Vectorial

El **límite** de una función vectorial es:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \langle \lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} g(t), \lim_{t \to t_0} h(t) \rangle$$

1. Vectores y Operaciones Básicas

1.1. Suma de Vectores

Dados dos vectores en $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

La **suma de vectores** se define como:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

Propiedades de la Suma de Vectores:

- Conmutativa: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- Asociativa: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- Elemento Neutro: $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
- Elemento Opuesto: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

1.2. Producto por un Escalar

Si k es un escalar y $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ es un vector, el **producto por un escalar** es:

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

Propiedades del Producto por un Escalar:

- Distributiva: $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
- Asociativa: $(kl)\mathbf{u} = k(l\mathbf{u})$
- Elemento Neutro: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

2. Producto Interno y Norma

2.1. Producto Interno (Dot Product)

El **producto interno** entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

Propiedades del Producto Interno:

- Conmutativa: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- Distributiva: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- Asociativa con un escalar: $(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

2.2. Norma de un Vector

La **norma** o **magnitud** de un vector $\mathbf{u}$ se define como:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

Propiedades de la Norma:

- $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ (siempre no negativa)
- $\|\mathbf{u}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ (homogeneidad)
- Desigualdad triangular: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Rectas en el Espacio

Ecuación Vectorial de una Recta

La **ecuación vectorial** de una recta que pasa por un punto $\mathbf{P_0} = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene una dirección dada por un vector $\mathbf{d} = (a, b, c)$ es:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{P_0} + t\mathbf{d} = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

Ecuaciones Paramétricas de una Recta

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc$$

Planos en el Espacio

Ecuación Normal de un Plano

La ecuación general de un plano en $\mathbb{R}^3$ es:

$$Ax + By + Cz = D$$

donde $\mathbf{n} = (A, B, C)$ es el vector normal al plano.

Producto Vectorial

Definición:

El **producto vectorial** de $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es un vector ortogonal a ambos:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Definición de Funciones Vectoriales

Una **función vectorial** en $\mathbb{R}^3$ tiene la forma:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

Dominio de Funciones Vectoriales

El **dominio** de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es el conjunto de todos los valores de t para los cuales todas sus componentes están definidas.

Límite de una Función Vectorial

El **límite** de una función vectorial es:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \langle \lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} g(t), \lim_{t \to t_0} h(t) \rangle$$

Derivada de una Función Vectorial

La **derivada** de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ respecto a t se define como:

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{d}{dt}f(t), \frac{d}{dt}g(t), \frac{d}{dt}h(t) \right\rangle$$

Esto representa la **velocidad** o **tasa de cambio** del vector $\mathbf{r}(t)$ con respecto al parámetro t.

Ejemplo:

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \cos(t), e^t \rangle$$
$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle 3t^2, -\sin(t), e^t \right\rangle$$

Integral de una Función Vectorial

La **integral** de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left\langle \int f(t)\,dt, \int g(t)\,dt, \int h(t)\,dt \right\rangle + \mathbf{C}$$

donde $\mathbf{C}$ es el vector constante de integración.

Ejemplo:

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, e^t, \cos(t) \rangle$$

$$\int \mathbf{r}(t)\, dt = \left\langle \frac{t^2}{2}, e^t, \sin(t) \right\rangle + \mathbf{C}$$

Ortogonalidad y Paralelismo de Funciones Vectoriales

Ortogonalidad

Dos vectores $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ son **ortogonales** si:

$$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$$

Paralelismo

Dos vectores son **paralelos** si uno es un múltiplo escalar del otro:

$$\mathbf{u}(t) = k\mathbf{v}(t)$$

Ejemplo:

Sean $\mathbf{u}(t) = \langle 2t, -t, 3 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle 4, -2, 6 \rangle$.

$$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = (2t)(4) + (-t)(-2) + (3)(6) = 8t + 2t + 18 = 10t + 18$$

No siempre es igual a cero, por lo tanto, no son ortogonales.

Ejemplo de Análisis Completo de una Función Vectorial

Función Vectorial:

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3, \sin(t) \rangle$$

Dominio:

$t \in \mathbb{R}$ (todas las funciones están definidas para todos los reales).

Límite cuando $t \to 0$:

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) = \langle 0^2, 0^3, \sin(0) \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

Derivada:

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle \frac{d}{dt}(t^2), \frac{d}{dt}(t^3), \frac{d}{dt}(\sin(t)) \right\rangle = \langle 2t, 3t^2, \cos(t) \rangle$$

Resumen: Superficies Cuadráticas

Introducción a las Superficies Cuadráticas

Una **superficie cuadrática** es una ecuación de segundo grado en tres variables x, y, y z, que tiene la forma general:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Estas superficies pueden clasificarse en diferentes tipos según sus coeficientes. Los casos más comunes son los siguientes:

Integral:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left\langle \int t^2\,dt, \int t^3\,dt, \int \sin(t)\,dt \right\rangle = \left\langle \frac{t^3}{3}, \frac{t^4}{4}, -\cos(t) \right\rangle + \mathbf{C}$$

Funciones de Varias Variables

Una **función de varias variables** toma varios números reales como entrada y produce un único número real como salida. En general, una función f de dos variables x y y tiene la forma:

$$f(x, y) = z$$

Para funciones de tres variables:

$$f(x, y, z) = w$$

Ejemplo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Dominio de una Función de Varias Variables

El **dominio** de una función de varias variables es el conjunto de todos los puntos donde la función está definida.

Ejemplo 1:

$$f(x, y) = \frac{x}{y - 1}$$

Dominio: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y \neq 1$.

Ejemplo 2:

$$g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Dominio: Disco cerrado con radio 2, centrado en el origen: $x^2 + y^2 \leq 4$.

Imagen de una Función de Varias Variables

Ejemplo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Imagen: $[0, \infty)$.

Límites de Funciones de Varias Variables

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

Ejemplo:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Continuidad de Funciones de Varias Variables

Una función $f(x, y)$ es continua en un punto (a, b) si: 1. $f(a, b)$ está definida. 2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe. 3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Derivadas parciales

La derivada parcial mide cómo cambia una función multivariable respecto a una de sus variables, manteniendo las otras constantes.

Ejemplo

Si tienes una función $f(x, y) = x^2y + 3xy^2$, las derivadas parciales con respecto a x y y son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy$$

Continuidad

Una función $f(x, y)$ es continua en un punto (x_0, y_0) si:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Esto significa que la función no tiene "saltos" ni discontinuidades en ese punto.

Ejemplo

Si $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, debemos verificar si la función es continua en el origen. Evaluamos el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$$

Si el límite depende de cómo nos acercamos a $(0, 0)$, entonces no es continua allí.

Plano Tangente

El plano tangente a una superficie $z = f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0, z_0) se encuentra usando la ecuación:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ejemplo

Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, el plano tangente en el punto $(1, 1)$ es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Evaluando en $(1, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2$$

La ecuación del plano tangente es:

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

Regla de la cadena

La regla de la cadena en varias variables describe cómo derivar una función compuesta.

Caso 1: $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$

La derivada de z con respecto a t es:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ejemplo

Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x = t$, $y = t^2$, entonces:

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot 1 + 2y \cdot 2t = 2t + 4t^3$$

Caso 2: Funciones compuestas en varias variables

Si $z = f(x, y)$, $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Derivadas direccionales

La derivada direccional de una función $f(x, y)$ en la dirección de un vector unitario $\mathbf{v} = (a, b)$ es:

$$D_{\mathbf{v}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{v}$$

Donde $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ es el gradiente de f.

Ejemplo

Para $f(x, y) = x^2 + y^2$, el gradiente es $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$. La derivada direccional en la dirección $\mathbf{v} = (1, 1)$ es:

$$D_{\mathbf{v}} f(x, y) = (2x, 2y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \frac{2x + 2y}{\sqrt{2}}$$

Gradiente

El gradiente de una función $f(x, y)$ es el vector de sus derivadas parciales:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ejemplo

Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, entonces:

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

Derivadas de orden 2

Las derivadas de orden 2 son derivadas parciales de las derivadas parciales de $f(x, y)$.

Ejemplo

Para $f(x, y) = x^2 + y^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Máximos y mínimos

Para encontrar los puntos máximos y mínimos de una función multivariable, primero calculas las derivadas parciales y resuelves el sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Luego, debes verificar la segunda derivada.

Ejemplo

Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Resolviendo $2x = 0$ y $2y = 0$, obtenemos $(0, 0)$. Evaluamos la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Dado que ambas son positivas, $(0, 0)$ es un **mínimo local**.