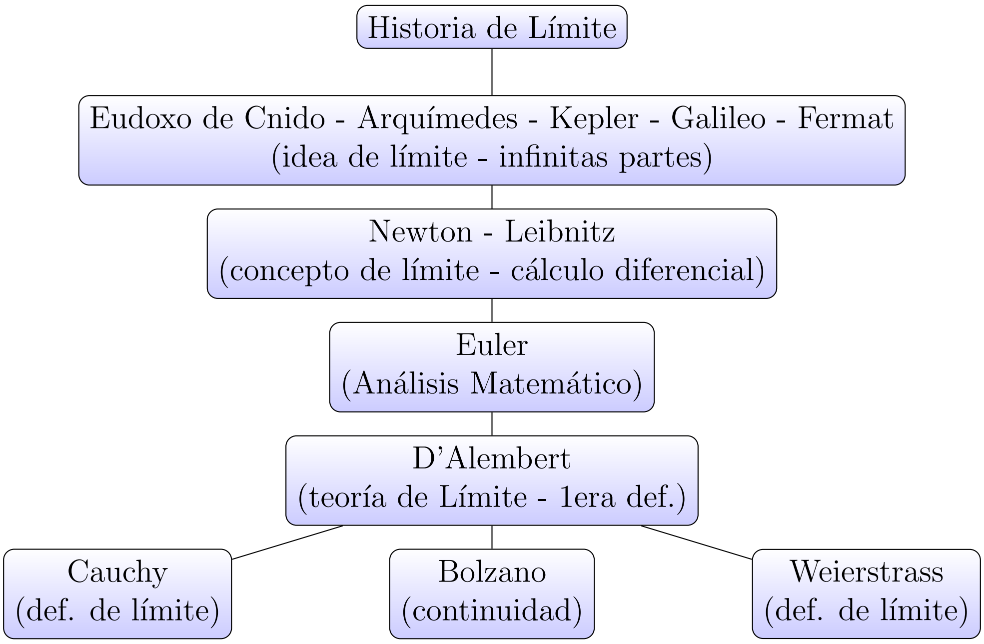
# *CAPÍTULO 5*

## *Límites*

Antes de empezar con los ejercicios conviene hablar un poco del tema del capítulo: Límites. En el siguiente cuadro se puede hacer un resumen de la historia detrás del concepto de límite:




Este gráfico es una mera linea temporal para mencionar algunas de las personas destacadas que contribuyeron a la formulación actual de límite. Ahí estan comprimidos 2000 años de historia, por lo tanto, asimilar todos esos años de historia en una sola clase puede ser una tarea muy dificil de lograr. Finalmente, durante el siglo XX se llegó a la definición actual del límite de una función: la expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

implica que

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ /\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Al avanzar en esta clase iremos explicando esta expresión tratando de entender porque esto implica la existencia del límite. Pero empezaremos con ejercicios más simples que nos permitan entender primero la noción más intuitiva de límite.

**S1.** Dada la siguiente función $f(x)$, determine los siguientes límites observando el gráfico a continuación:

(a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

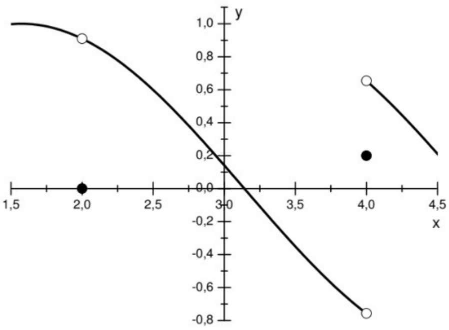
(c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$

(e) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

(f) $\lim_{x\to 4} f(x)$

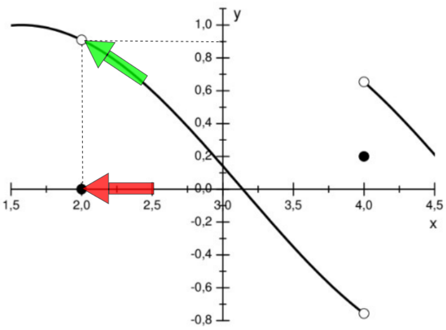
(g) $\lim_{x\to 3} f(x)$




Este ejercicio pretende introducir la noción básica de límite de una función. La idea es tratar de ver como se comporta la función $f(x)$ cuando estoy tomando valores particulares de $x$.

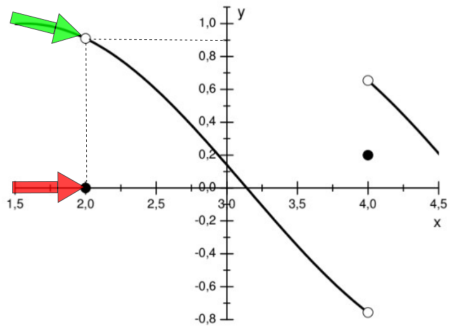
(a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$. Esto nos pide decir qué valores toma $f(x)$ cuando uso valores de $x$ que están a la DERECHA del 2. En la figura, la flecha roja indica que me estoy moviendo desde valores a la derecha del 2 y voy hacia el 2. Por otro lado, la flecha verde indica los valores que va tomando $f(x)$ a medida que tomo los $x$ mostrados por la flecha roja. Puede verse que cuando estoy cerca de $x = 2$ los valores de $f(x)$ tienden a 0.9, por lo tanto

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0.9$$



(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$. Esto nos pide decir qué valores toma $f(x)$ cuando uso valores de $x$ que están a la IZQUIERDA del 2. La flecha roja indica que me estoy moviendo desde valores a la izquierda del 2 y voy hacia el 2. La flecha verde indica los valores que va tomando $f(x)$ a medida que tomo los $x$ mostrados por la flecha roja. Puede verse que cuando estoy cerca de $x = 2$ los valores de $f(x)$ tienden nuevamente a 0.9, por lo tanto

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0.9$$




Ahora es cuando introducimos algo importante acerca de los límites. Existe un teorema que dice que

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \ y \ \lim_{x\to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$$

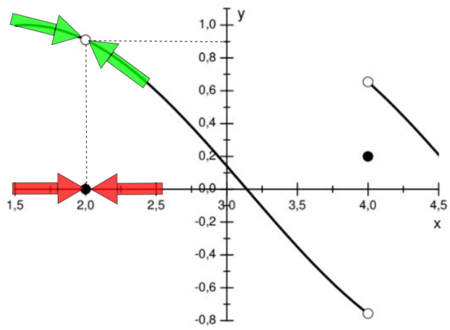
Por lo tanto esto usaremos pare resolver el siguiente inciso.

(c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Como sabemos que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0.9 = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

por lo obtenido en los incisos anteriores, entonces usando el teorema enunciado anteriormente nos queda

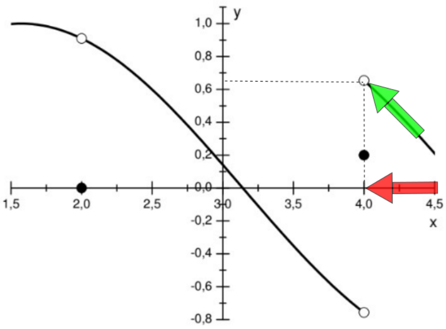
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0.9$$




Ahora hay algo que vale la pena resaltar. Como puede verse el límite da 0.9. Pero el valor de la función en el punto $x = 2$ es $f(2) = 0$. ¿Y que pasó acá? ¿Eso importa? La respueta es NO. Aquí esta lo interesante:
"El concepto de límite de una función en un punto dado es independiente de si existe o no el valor de la función en dicho punto."
Dicho esto, en los incisos siguientes realizamos un análisis similar al realizado hasta aquí.

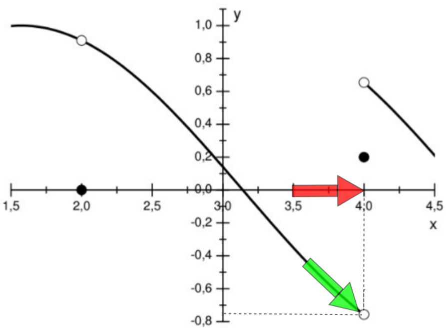
(d) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$. Esto nos pide decir qué valores toma $f(x)$ cuando uso valores de $x$ que están a la DERECHA del 4. Mirando la figura, puede verse que cuando estoy cerca de $x = 4$ (a su derecha) los valores de $f(x)$ tienden a 0.65, por lo tanto

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0.65$$




(e) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$. Esto nos pide decir qué valores toma $f(x)$ cuando uso valores de $x$ que están a la IZQUIERDA del 4. Mirando la figura, puede verse que cuando estoy cerca de $x = 4$ (a su izquierda) los valores de $f(x)$ tienden a -0.75, por lo tanto

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = -0.75$$

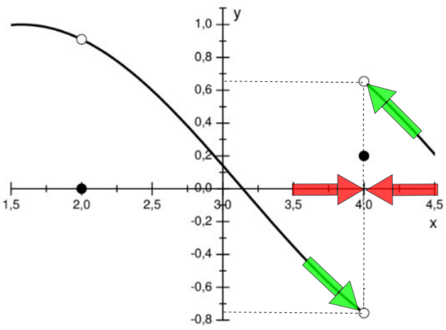



(f) $\lim_{x\to 4} f(x)$. Como sabemos que

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = -0.75 \neq 0.65 = \lim_{x\to 4^+} f(x)$$

por lo obtenido en los incisos anteriores, entonces el teorema enunciado anteriormente nos dice que

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \nexists$$




Nuevamente podemos notar que en este caso el límite NO EXISTE, sin embargo la función esta definida en $x = 4$ y es $f(4) = 0.2$, resaltando una vez más que este hecho es irrelevante para el cálculo del límite.

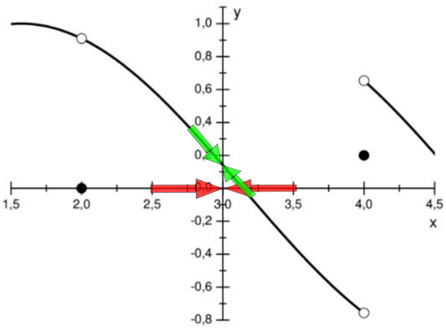
(f) $\lim_{x\to 3} f(x)$. Finalemente, en este punto podemos ver que

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0.15 = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

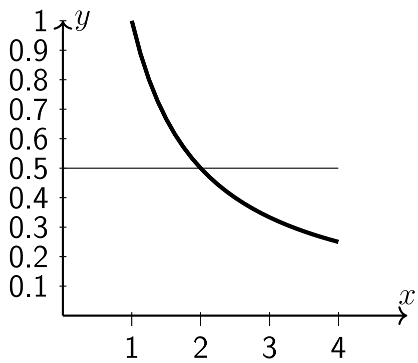
entonces el teorema no dice que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 0.15$$

En este caso en particular, el valor del límite en $x = 3$ coincide con el $f(3) = 0.15$, pero este dato no es relevante para averiguar el límite.



**S2.** (a) Guiándose con el siguiente gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, encuentre un valor de $\delta$ que cumpla: $|\frac{1}{x} - 0,5| < 0,2$ siempre que $|x - 2| < \delta$.
Este ejercicio no figura en la guia 2021. Sin embargo, me parece útil que lo vean como una manera de ejemplificar lo que significa la definición de límite.



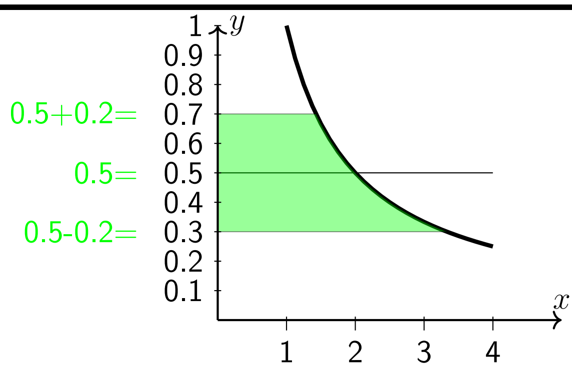
En este ejercicio intentaremos acercarnos a la definición formal de límite. Para lograrlo analisemos lo que nos pide: encontrar un valor llamado $\delta$ que se mide sobre el eje $x$ tal que cumpla con $|x - 2| < \delta$ y hay que obtenerlo a partir de saber que la función $f(x) = 1/x$ cumple con $|1/x - 0.5| < 0.2$.
En primer lugar, recordemos que

$$|X - A| < B$$

puede interpretarse como los puntos $X$ que estan separados de $A$ una distancia no mayor a $B$. Si analizamos de esta manera lo que parece ser nuestra información de partida

$$|1/x - 0.5| < 0.2$$

esto nos estaría diciendo los valores de la función $1/x$ que estan separados de 0.5 una distancia menor a 0.2. Como los valores que toma la función se miden sobre el eje $y$, podemos marcar los puntos $y$ que están alrededor del valor 0.5 a no más de 0.2 unidades de separación.

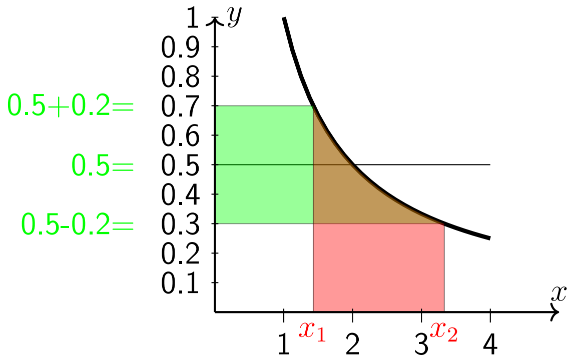



Los extremos de ese intervalo en el eje $y$ pueden definir dos valores de $x$ que formaran un intervalo en las abscisas:

$$0.7 = \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{0.7} = \frac{10}{7} \sim 1.43$$

$$0.3 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3} \sim 3.33$$

que podemos vizualizarlo así

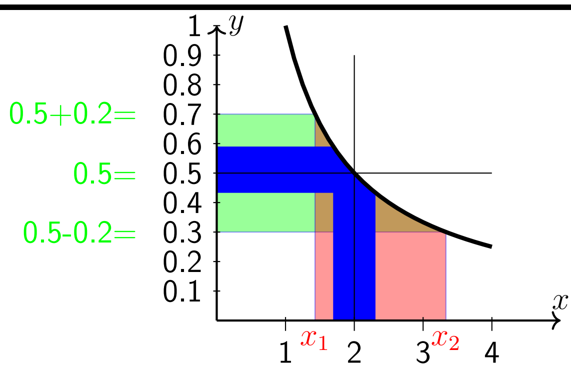



Por lo tanto los $x$ que cumplen con $|1/x - 0.5| < 0.2$ son los que están en el intervalo $(x_1, x_2)$. Por otro lado, el ejercicio pide encontrar un número $\delta$ tal que $|x - 2| < \delta$. Estos son los $x$ que distan de 2 en no más de una distancia $\delta$. Si recordamos esto lo podríamos resolver como

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow -\delta < x - 2 < \delta$$

$$2 - \delta < x < 2 + \delta$$

es decir, es un intervalo simétrico centrado en 2 que se mueve una distancia $\delta$ hacia la izquierda y hacia la derecha. Ese $\delta$ tiene que ser tal (dice el ejercicio) que los $x's$ que quedan en ese intervalo, deben cumplir con $|1/x - 0.5| < 0.2$, es decir, que pertenezcan al $(x_1, x_2)$. Por lo tanto la pregunta es, ¿qué tanto me puedo apartar de 2 de manera tal que el intervalo simétrico resultante esté dentro de $(x_1, x_2)$? En realidad hay infinitos valores de $\delta$ que se pueden elegir que cumplan con esta condición. Por ejemplo si tomo $\delta = 0.3$ tenemos el intervalo $(1.7, 2.3)$ alrededor de 2 que se vería así

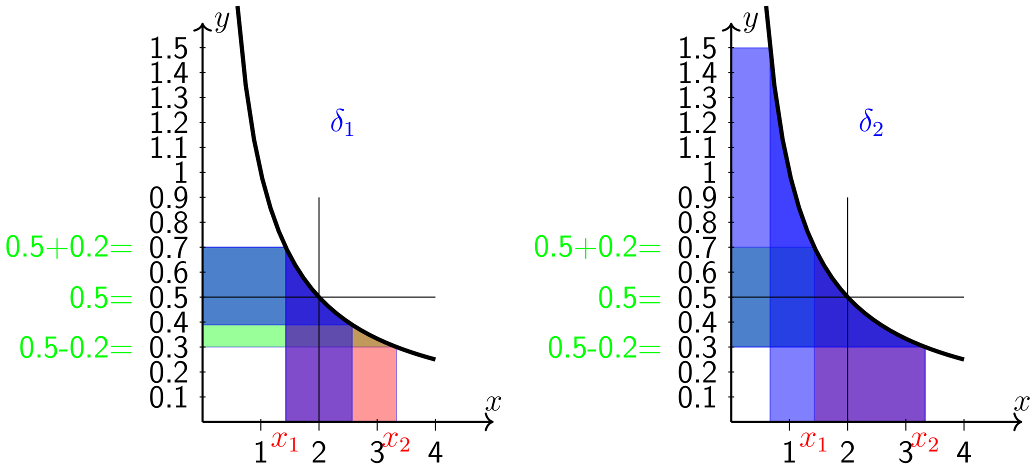



Evidentemente ese intervalo esta dentro del $(x_1, x_2)$. Ahora uno podría buscar el $\delta$ más grande posible que se pueda definir de manera tal que el intervalo no exceda el $(x_1, x_2)$. Para eso podemos hacer dos cálculos usando $x_1$ y $x_2$. Busquemos cuán alejado están esos valores del valor 2

$$\delta_1 = |x_1 - 2| = |\sim 1.43 - 2| \sim 0.57$$

$$\delta_2 = |x_2 - 2| = |\sim 3.33 - 2| \sim 1.33$$

Entonces, ¿cuál de estos $\delta$ cumple que sea el más grande posible y que cumpla con las condiciones? En la siguiente figura dibujamos el intervalo simétrico en el eje $x$ para cada $\delta$ y los intervalos generados con los valores de la función para dichos valores de $x$.




Como puede verse, cuando se usa $\delta_1$ los valores de $1/x$ caen dentro del intervalo (0.4,0.7), todavía dentro del (0.3,0.7) (del cuál no nos podemos salir). Pero cuando se usa $\delta_2$, los valores $1/x$ caen en el intervalo (0.3,1.5), muy por fuera de lo permitido en el eje $y$. Por lo tanto, lo correcto es tomar como $\delta = \delta_1$. Una manera general de encontrar el valor correcto para $\delta$ es definirlo como

$$\delta = min(\delta_1, \delta_2)$$

es decir, el más chico entre los dos. Observar que si tomo un $\delta$ que sea más grande que $\delta_1$, los intervalos resultantes van a tener el mismo problema que al usar $\delta_2$. Por lo tanto, $\delta_1$ es el máximo valor que puedo tomar para que se siga cumpliendo que $|1/x - 0.5| < 0.2$.

(b) Encuentre de manera analítica la forma general que debe cumplir $\delta$ para que $|x-2|<\delta$ entonces $|\frac{1}{x}-0,5|<\epsilon$

Este ejercicio lo que nos está pidiendo es demostrar que

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$

usando la definición de límite, que dice

$$\forall\ \epsilon>0, \exists\ \delta>0\ /\ 0<|x-2|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|<\epsilon$$

en donde el objetivo es encontrar el valor de $\delta$. Observar que en el inciso anterior el objetivo fue el mismo, y el valor encontrado dependió muy fuertemente del valor 0.2 dado originalmente. En este caso, ese valor 0.2 se traduce en $\epsilon$, qué es un número que puede valer cualquier cosa (pero generalmente se lo piensa chico). Por lo tanto, lo que debemos obtener es un $\delta=\delta(\epsilon)$, es decir, en función del número $\epsilon$.

Para lograr esto empezaremos igual que en el inciso anterior, usando lo que el $\delta$ tiene que satisfacer, que

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|<\epsilon$$

Escribiremos la parte izquierda de la desigualdad, y operaremos algebraicamente usando las propiedades de modulo para simplicar la expresión. Primero se hace denominador común y luego se dividen los módulos (módulo de un cociente es el cociente de los módulos del numerador y el denominador)

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-x}{2x}\right|=\frac{|2-x|}{|2x|}$$

por otro lado usando que $|-x|=|(-1).x|=|-1|.|x|=1.|x|=|x|$ tenemos

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-x}{2x}\right|=\frac{|2-x|}{|2x|}=\frac{|-(x-2)|}{|2|.|x|}=\frac{|x-2|}{2|x|}$$

ahora, si prestamos atención al numerador, nos damos cuenta que es justamente lo que queremos que sea menor que $\delta$ en la definición, por lo tanto usando eso nos queda

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-x}{2x}\right|=\frac{|2-x|}{|2x|}=\frac{|-(x-2)|}{|2|.|x|}=\frac{|x-2|}{2|x|}<\frac{\delta}{2|x|}$$

esto es asi porqué si $A<B$, y $C>0$ entonces $A/C<B/C$. Fijarse que hemos obtenido casi lo mismo que por donde empezamos

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|<\epsilon \longrightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|<\frac{\delta}{2|x|}$$

Para obtener lo que tengo a la izquierda (que es lo que quiero respetar), uno estaría muy tentado en hacer que

$$\epsilon=\frac{\delta}{2|x|}$$

y despejar el $\delta$ que es lo que ando buscando

$$\delta = 2.|x|.\epsilon$$

PEEERO... esto está muy MAL, porqué $\delta$ SÓLO puede ser función de $\epsilon$, es decir, no puede aparecer ningun $x$. Por lo tanto, para llegar a la verdadera solución hay que deshacerse del $|x|$.
Cómo tenemos que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \frac{\delta}{2|x|} = \frac{\delta}{2}.\frac{1}{|x|}$$

lo que necesitamos es encontrar una cota o valor límite superior para $1/|x|$. Para lograr esto, vamos a tener que partir de lo que sabemos que cumple $\delta$

$$|x-2| < \delta$$

y SUPONER por un momento que $\delta$ es igual a un valor arbitrario (relativamente grande) que, en este caso, será 1. Este procedimiento puede parecer confuso porque le estoy poniendo un valor justamente al parámetro que quiero obtener. Sin embargo, como veremos en un rato, mi suposición aparecerá en la solución final y por lo tanto, si cambio mi suposición también se ajustará la solución que proponga. Por lo tanto, tenemos

$$|x-2| < 1$$

Ahora, haciendo un poco de algebra y usando las propiedades de módulo tengo (en el miembro izquierdo, voy de derecha a izquierda)

$$|2-x| = |-(2-x)| = |x-2| < 1$$

Por otro lado, a partir de la desigualdad triangular puede verse que $|A| - |B| \leq |A-B|$, entonces

$$2 - |x| \leq |2-x| = |-(2-x)| = |x-2| < 1$$

uniendo los extremos, esto nos dice que

$$2 - |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad 2 - 1 < |x| \quad \Rightarrow \quad 1 < |x| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x|} < 1$$

y esta es la cota que necesitabamos. Volviendo a la desigualdad con $\delta$ podemos usar esto y nos queda que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \frac{\delta}{2|x|} = \frac{\delta}{2}.\frac{1}{|x|} < \frac{\delta}{2}.1 = \frac{\delta}{2} = \epsilon$$

por lo tanto, de la igualdad final de la derecha nos quedaría que $\delta = 2.\epsilon$ como una solución que hace que la definición se cumpla. Sin embargo, esta solución la obtuvimos suponiendo que $\delta = 1$. En consecuencia, la solución final la encontraremos haciendo que

$$\boxed{\delta = min(1, 2\epsilon)}$$

(c) Demuestre, haciendo uso de la definición de límite, que $\lim_{x\to 2} 4x - 3 = 5$

La definición de límite que nos están pidiendo quedaría como

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \ / \ 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |4x-3-5| < \epsilon$$

Siguiendo el procedimiento introducido en el inciso anterior, empezamos por

$$|4x-3-5| < \epsilon$$

y trabajamos algebraicamente con el miembro izquierdo

$$|4x-3-5| = |4x-8| = |4.(x-2)| = 4\,|x-2|$$

ahora, el módulo que nos quedó es exactamente lo que queremos que sea menor que $\delta$ en la definición, por lo tanto usando eso nos queda

$$|4x-3-5| = |4x-8| = |4.(x-2)| = 4\,|x-2| < 4\delta$$

Por lo tanto, haciendo la analogía con lo que empezamos

$$|4x-3-5| < \epsilon \longrightarrow |4x-3-5| < 4\delta$$

entonces, si hacemos $\epsilon = 4\delta$ y despejamos, obtenemos la solución

$$\boxed{\delta = \frac{\epsilon}{4}}$$

Observar que en esta oportunidad, pudimos igualar directamente sin ningún problema ya que al despejar el $\delta$ me quedó sólo en función del $\epsilon$, que es lo único que está permitido.

**S3.** Calcule los siguientes límites:

Antes de empezar este ejercicio aprovecharemos para recordar unas cuantas propiedades de límites que pueden ser útil tenerlas en mente a la hora de calcularlos.

1. Si $f(x) = c$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = c$
2. Si $f(x) = cx$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = ca$
3. Si $p(x)$ es un polinomio, $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$
4. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces:
   (a) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$
   (b) $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = L.M$
   (c) Si $M \neq 0$, $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$
   (d) Si $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (si $n$ es par, $L$ debe ser positivo)

(e) Si $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} c^{f(x)} = c^{\lim_{x\to a} f(x)} = c^L$

(f) $\lim_{x\to a} g(x)^{f(x)} = \lim_{x\to a} g(x)^{\lim_{x\to a} f(x)} = M^L$

(g) Si $L > 0$, $\lim_{x\to a} \log_k(f(x)) = \log_k\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \log_k(L)$

5. Si $f(x) \leq g(x)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$

6. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (quizás excepto en $a$), y además $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = L$ (Teorema del Sandwich)

Por último, hay un aspecto importante a destacar en el cálculo de límites. Este se dá cuando, intentando valuar un límite particular, obtenemos como resultado

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty \qquad 0.\infty$$

En cualquiera de estos casos diremos que el límite esta dando una

INDETERMINACIÓN

eso significa que en principio no podemos decir nada sobre el límite. Para resolverlo habrá que hacer operaciones algebraicas que nos permitan levantar la indeterminación.

Ahora sí, vamos con los ejercicios

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{4x^2-4}$

En este ejercicio, si intentamos predecir el comportamiento de cada miembro del cociente veremos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{x^2-2x}^{\infty}}{\underbrace{4x^2-4}_{\infty}} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

porque cuando intentamos valuar un polinomio cuadrático en un número extremadamente grande, me da un valor aún más grande (recordar el gráfico de un polinomio cuadrático con las ramas hacia arriba). Por lo tanto, en este límite tenemos una INDETERMINACIÓN, es decir, no sabemos lo que pasa. Para resolverlo, tendremos que simplificar la expresión o reescribirla de alguna manera que la indeterminación desaparezca. En este caso, podemos plantear una especie de reglita a obedecer

Límite indeterminado de cociente de polinomios cuando $x$ tiende a $\infty$: sacar factor común tanto en el numerador como en el denominador el $x$ con el exponente más grande.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{4x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2.\left(1-\frac{2x}{x^2}\right)}{x^2.\left(4-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}.\left(1-\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\right)}{\cancel{x^2}.\left(4-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{4-\frac{4}{x^2}}$$

Luego de haber seguido el consejo y de simplificar todo lo que se puede obtuvimos una expresión más simple. Cuando nos fijamos nuevamente a que tiende la nueva expresión cuando $x$ tiende a $\infty$ observamos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{4x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\overbrace{\dfrac{2}{x}}^{0}}{4-\underbrace{\dfrac{4}{x^2}}_{0}}=\frac{1}{4}$$

ya que cualquier función de la forma $1/x^n$ tiende a 0 cuando se toman valores de $x$ extremadamente grandes. Por lo tanto, el límite que inicialmente era indeterminado terminó dando $1/4$.

(b) $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

En este caso, al intentar valuar el cociente en $x=0$ obtenemos que

$$\lim_{t\to0}\frac{\overbrace{\sqrt{t^2+9}-3}^{0}}{\underbrace{t^2}_{0}}\longrightarrow\frac{0}{0}$$

es decir, nuevamente una INDETERMINACIÓN. Aquí el truco del inciso anterior no funcionará. Para acercarnos a resolver el problema es importante darse cuenta que

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\left(\sqrt{t^2+9}-3\right)}{t^2}\cdot\frac{1}{1}$$

y pensar una manera inteligente de escribir 1. La regla es la siguiente

> Límite indeterminado de cociente de funciones en la cual uno de los miembros tiene una raíz cuadrada: multiplicar y dividir por el conjugado del miembro que tiene la raíz.

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\left(\sqrt{t^2+9}-3\right)}{t^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}{\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

Si nos fijamos en los numeradores, esto es como tener $(A-B).(A+B)$ lo cual es una diferencia de cuadrados $A^2-B^2$. Entonces multiplicando los factores tenemos

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\left(\sqrt{t^2+9}\right)^2-3^2}{t^2.\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}=\lim_{t\to0}\frac{t^2+\cancel{9}-\cancel{9}}{t^2.\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

Por último

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}.\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{t^2+9}}_{3}+3}=\frac{1}{6}$$

Con este nuevo truco pudimos levantar la indeterminación y obtener que el límite es 1/6.

**S4.** Sea $f(x)=\frac{2}{x-3}$,

(a) determine su dominio.

Para calcular el dominio de esta función debemos preguntarnos en que valores de $x$ puede valuarse esta función y que tenga sentido matemático. Evidentemente, ya que es un cociente de una constante con una función lineal, el único inconveniente puede venir de que el denominador sea haga cero. Por lo tanto, el número $x=3$ debe ser excluído del dominio, entonces

$$Dom(f)=\mathbb{R}-3$$

(b) determine, si existen, asíntotas verticales y horizontales.

Antes de empezar hay que dar los conceptos de asíntotas de una función.
<u>ASÍNTOTA VERTICAL:</u> los $x$ candidatos son aquellos que

- no pertenecen al dominio por hacer que la función divida por cero;
- son empalmes de una función definida por partes;
- son extremos de los intervalos de definición del dominio.

Para cada uno de estos candidatos ($a$), hay que calcular los límites por derecha e izquierda del punto y corroborar que al menos uno de ellos tiende a $\pm\infty$ (cuando el candidato provenga del último item sólo se podrá calcular uno de estos límites)

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty \quad o \quad \lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$$

en caso que alguno dé estos resultados, diremos que hay una asíntota vertical en $x=a$.
<u>ASÍNTOTA HORIZONTAL:</u> para saber si existen hay que calcular los siguientes límites y ver si tienen como resultado un número

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=L \quad o \quad \lim_{x\to +\infty}f(x)=M$$

de acuerdo al resultado de estos límites pueden haber una, dos o ninguna asíntota horizontal. En caso de que existan, se escriben como $y=L$ o $y=M$ o ambas.

Con estas definiciones, volvamos al ejercicio.
En el caso de las asíntotas verticales (AV) el único candidato que tenemos es $x = 3$. Por lo tanto, calculemos los límites laterales para verificar si es AV o no

$$\underbrace{\lim_{x \to 3^-}}_{x<3 \ \Rightarrow x-3<0} \frac{2}{\underbrace{x-3}_{0^-}} = \frac{2}{0^-} \longrightarrow -\infty$$

En primer lugar esta resolución muestra que el denominador se hace cero cuando estoy muy cerca de 3, por lo tanto el cociente tiende hacia números extremadamente grandes ($\infty$). Por otro lado, el hecho que el límite es a 3 por izquierda significa que los valores de $x$ son menores a 3, por lo tanto $x - 3 < 0$, eso hace que el denominador se acerque a cero pero por los negativos. Por lo tanto, el cociente es entre un número positivo (2) y un denominador que tiende a cero por los negativos. Por lo tanto, el signo del límite es $(+) \times (-) = (-)$. Como el límite dió $-\infty$, entonces hay una asíntota vertical en $x = 3$. Calculamos el límite por derecha

$$\underbrace{\lim_{x \to 3^+}}_{x>3 \ \Rightarrow x-3>0} \frac{2}{\underbrace{x-3}_{0^+}} = \frac{2}{0^+} \longrightarrow +\infty$$

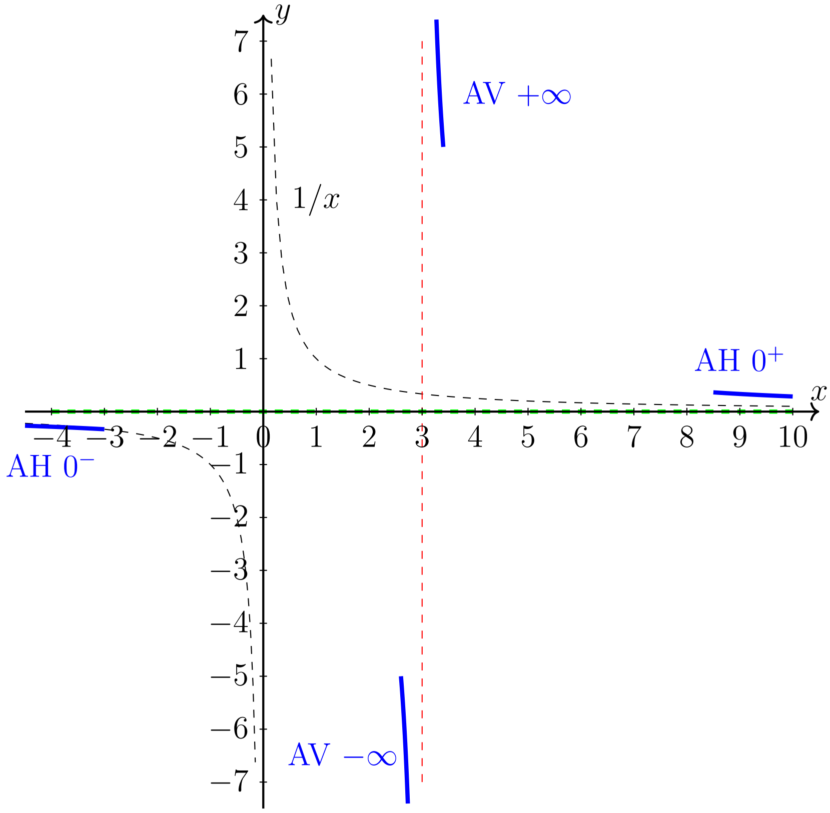
En este caso, también dió como resultado $+\infty$, lo cual refuerza el comportamiento asintótico de la función alrededor del $x = 3$.
En el caso de las asíntotas horizontales hacemos los cálculos correspondientes

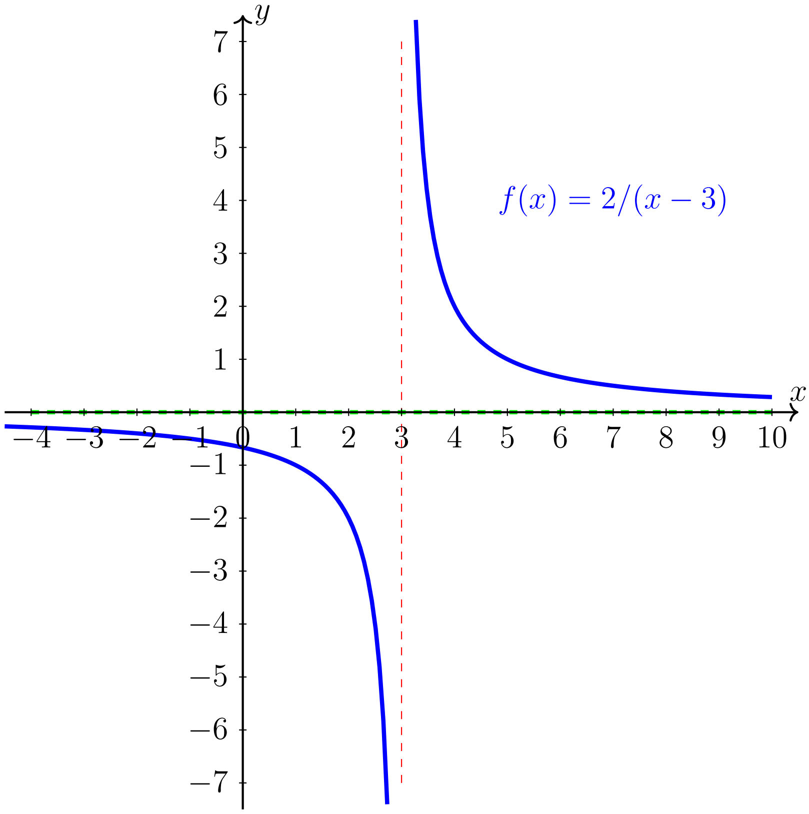
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\underbrace{x-3}_{-\infty}} \longrightarrow \frac{2}{-\infty} \longrightarrow 0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\underbrace{x-3}_{+\infty}} \longrightarrow \frac{2}{+\infty} \longrightarrow 0^+$$

Por lo tanto, podemos confirmar que $y = 0$ es una asíntota horizontal (AH) tanto para $x$ en $+\infty$ como en $-\infty$. Además, sabiendo los signos del cociente podemos saber desde que valores de $y$ se tiende a cero en cada caso.

(c) utilice la información obtenida para graficar $f(x)$.
Por último, utilizaremos la información obtenida hasta aquí para esbozar el gráfico de la $f(x)$. En el 1er gráfico pondremos todos los datos obtenidos: el dominio, la AV $x = 3$ (rojo), la AH en $y = 0$ (verde) y los valores de hacia donde van cada uno de los límites (azul). En negro dibujo una función similar a la $f(x)$: la $1/x$.
En el 2do gráfico ya completamos el dibujo de la función $f(x) = 2/(x - 3)$.


AV $+\infty$
$1/x$
AH $0^+$
AH $0^-$
AV $-\infty$


$f(x) = 2/(x-3)$