

## 枚举

- 基于已有知识进行答案猜测的一种问题求解策略
- 例如：求小于N的最大素数
- 找不到数学公式，使得根据N就可以计算出这个素数
- N-1是素数？ N-2是素数？ ...
- N-K是素数的必要充分条件：

N-K不能被任何一个大于1，小于N-K的素数整除->判断N-K是否是素数->转化为求小于N-K的全部素数

- 解决办法
  - 2是素数，记为 $PRIM_0$
  - 根据 $PRIM_0, PRIM_1, \dots, PRIM_k$ ，寻找比 $PRIM_k$ 更大的最小素数 $PRIM_{k+1}$
  - 如果 $PRIM_{k+1}$ 大于N，则 $PRIM_k$ 是我们要找的素数，否则继续寻找

## 枚举的思想：猜测

- 从可能的集合中——列举元素
  - 根据所知道的**知识**，给一个猜测的答案
  - 2是素数
- 枚举算法
  - 对问题可能解集合的每一项
  - 根据问题给定的检验条件判断哪些是成立的
  - 是条件成立的即是问题的解
- 枚举过程
  - 判断猜测的结果是否正确->2是小于N的最大素数吗？
  - 进行**新的**猜测：有**两个**关键因素需要注意
    - 猜测结果必须是前面的猜测中没有出现过的。每次猜测是素数一定比已经找到的素数大
    - 猜测的过程中要及早**排除错误的答案**。除2以外，只有奇数才有可能素数

## 枚举中的三个关键问题

- 问题一
  - 给出合适的**解空间**，建立简洁的数学模型
  - 可能的情况是什么->**模型中变量数尽量少，它们之间相互独立**
    - “求小于N的最大素数”中的条件是“不能被 $[2, n)$ 中任意一个**素数**整除”
    - 而不是“n不能被 $[2, n)$ 中任意一个**整数**整除”
- 问题二
  - **减少搜索的空间**
  - 利用知识缩小模型中个变量的取值范围，避免不必要的计算->减少代码中循环体执行次数
    - 除2之外，只有**奇数**才有可能素数
- 问题三

- 采用合适的搜索顺序
- 搜索空间的遍历顺序要与模型中条件表达式一致
  - 对 $\{2, 2*i + 1 | 1 \leq i, 2*i + 1 < n\}$ 按照从小到大的顺序排列

## 一些枚举问题

### • 百鸡百钱问题

- 鸡翁一值钱五，鸡母一值钱三，鸡雏三值钱一。百钱买百鸡，问鸡翁，鸡母，鸡雏各几何 -- 张邱建《算经》
- 求解方法：
  - 先构造可能的解集合  $S = \{(X, Y, Z) | 0 \leq X, Y, Z \leq 100\}$ ,  $X, Y, Z$  分别代表买公鸡，母鸡和小鸡的只数
  - 然后验证条件  $X + Y + Z = 100, 5X + 3Y + Z/3 = 100$
  - 复杂度:  $O(100^2)$
- 程序实现

```

1  /* 伪代码 */
2  for(int x = 0; x <= 100; ++x)
3      for(int y = 0; y <= 100 - x; ++y){
4          z = 100 - x - y;
5          if(z % 3 == 0) then
6              if(5*x + 3*y + z/3 == 100)
7                  then(x,y,z) is solution
8      }

```

### • 熄灯问题

- 问题描述
  - 有一个由按钮组成的矩阵，其中每行有6个按钮，共5行
  - 每个按钮的位置上有一盏灯
  - 当按下一个按钮后，该按钮以及周围位置（上下左右）的灯都会翻转一次状态
    - 在矩阵角上只改变三盏灯的状态
    - 在矩阵边缘的按钮改变四盏灯的状态
    - 其他位置的按钮改变5盏灯的状态
  - 与一盏灯毗邻的多个按钮被按下时，一个操作会抵消另一次操作的结果
  - 对矩阵中的每盏灯设置一个初始状态
  - 请你写一个程序确定需要按下那些按钮，恰好使得所有灯都熄灭
- 程序输入：
  - 第一行是一个正整数N，表示需要解决的案例数
  - 每个案例由5行组成，每一行包括6个数字
  - 这些数字一空格隔开，可以是0或1
  - 0表示灯的初始状态是熄灭的
  - 1表示灯的初始状态是点亮的
- 程序输出
  - 对每个案例，首先输出一行，输出字符串“PUZZLE #m”，之中m是该案例的序号

- 接着按照该案例的输入格式输出5行

- 1表示需要把对应的按钮按下
- 0表示不需要按相应的按钮
- 每个数字以一个空格隔开

○ 解题分析

- 第二次按下同一个按钮时，将抵消第一次按下时所产生的结果->每个按钮最多只需要按下一次
- 各个按钮被按下的顺序对最终结果无影响
- 对第一行中美展点亮的灯按下第二行对应的按钮，就可以熄灭第一行的全部灯
- 如此重复下去可以熄灭第1, 2, 3, 4行的全部灯

○ 解题分析 (2)

- 第一想法：枚举所有可能的按钮状态，对每个状态计算一下最后灯的情况，看是否都熄灭
  - 每个按钮由两种状态
  - 一共有30个开关，那么状态书是 $2^{30}$ ，太多，会超时
- 如何减少枚举的状态数目呢？

**基本思路：**如果存在某个局部，一旦这个局部的状态被确定，那么剩余其他部分的状态只能是确定的一种，或者是不多的n种，那么只需枚举这个局部的状态即可

○ 解题分析 (3)

- 本题是否存在这样的“局部”呢？
- 经过观察，发现**第一行**就是这样的一个**局部**
  - 因为第一行的各开关状态确定的情况下，这些开关作用过后，将导致第一行的某些灯是亮的，某些灯是灭的->按下第2行对应的按钮可以改变第一行的状态，按下第三行及以后的开关不会影响到第一行
  - 为了使第一行的灯全部熄灭，**第2行的合理开关状态就是唯一的**
  - 第二行的开关起作用后，为了熄灭第二行的灯，第三行的合理开关状态也就是唯一的，以此类推最后一行的开关状态也是唯一的

**只要第一行的状态定下来，记作A，那么剩余行的情况就是确定唯一的了**

**推算出最后一行的状态，然后观察最后一行的开关起作用后，最后一行的所有灯是否都熄灭：**

- 如果都熄灭，那么A就是一个解的状态
- 如果没有都熄灭，那么A就不是解的状态，第一行换个状态重新试试

所以只需枚举第一行的状态状态数是 $2^6 = 64$

**也就是说，枚举第一行的操作，检验操作完最后一行后，最后一行的灯是否能够全部灭掉**

- 有没有状态数更少的做法？
  - 枚举第一列，状态数是 $2^5 = 32$
  - 执行次数 $64 * 5 * 6$  vs.  $32 * 6 * 5$

○ 具体实现

- 用一个矩阵`puzzle[5][6]`表示灯的初始状态
  - `puzzle[i][j] = 1`：表示灯 $(i, j)$ 初始时是被点亮的
  - `puzzle[i][j] = 0`：表示灯 $(i, j)$ 初始时是熄灭的

- 用一个矩阵 $press[5][6]$ 表示要计算的结果
  - $press[i][j] = 1$ : 表示需要按下按钮 $(i, j)$
  - $press[i][j] = 0$ : 表示不需要按下按钮 $(i, j)$
- $press[0]$ 里放着第一行开关的状态, 如何进行枚举呢?
  - 可以使用六重for循环

```

1  for(int a0=0; a0<2; ++a0)
2      for(int a1=0; a1<2; ++a1)
3          for(int a2=0; a2<2; ++a2)
4              for(int a3=0; a3<2; ++a3)
5                  for(int a4=0; a4<2; ++a4)
6                      for(int a5=0; a5<2; ++a5){
7                          press[0][0] = a0;
8                          press[0][1] = a1;
9                          .....
10                         .....
11                     }

```

- 也可以将矩阵的第一行看作一个固定位数二进制数, 这样就可以通过自增操作++进行枚举了
- 实现时使用小技巧简化程序, 如下图:

## 实现方案

- 用一个6×8的数组来表示按钮矩阵:

简化计算数组下一行的值的计算公式

- 第0行, 第0列和第7列不属于PRESS矩阵范围, 可全置0

(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)	(0,7)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)
(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)
(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)

- 给定PRESS的第1行取值, 计算出PRESS的其他行的值

- $press[r+1][c] = (puzzle[r][c] + press[r][c-1] + press[r][c] + press[r][c+1] + press[r-1][c]) \% 2$
- $0 < r < 5, 0 < c < 7$

- 程序实现:

```

1  #include <stdio.h>
2  int puzzle[6][8], press[6][8];
3  bool guess(){
4      int c, r;
5      for(r=1; r<5; r++)
6          for(c=1; c<7; c++)
7              press[r+1][c] = (
8                  puzzle[r][c] + press[r][c] + press[r-1][c] + press[r][c-1] + press[r][c+1]

```

```

9         ) % 2; /* 根据press第一行和puzzle数组推算press其他行 */
10     for(c=1; c<7; ++c)
11         if((press[5][c-1] + press[5][c] + press[5][c+1] + press[4][c]) % 2
12             != puzzle[5][c]) /* 检查第五行是否完全熄灭 */
13             /* 第5行原来是1, 就应该输出1; 原来是0, 就应该输出0 */
14             return false;
15     return true;
16 }
17 void enumerate(){
18     int c;
19     bool res;
20     for(c=1; c<7; c++){
21         press[1][c]=0;
22         while(guess()==false){
23             /*-----*/
24             press[1][1]++; /* 加1进行下一个枚举 */
25             c=1;
26             while(press[1][c]>1){ /* 进位处理 */
27                 press[1][c] = 0;
28                 c++;
29                 press[1][c]++;
30             } /*-----*/
31             /* 两段注释之间, 对press第一行的元素press[1][1]~press[1][6]的
32                各种取值情况进行枚举, 依次考虑:
33                0 0 0 0 0 0
34                1 0 0 0 0 0
35                0 1 0 0 0 0
36                1 1 0 0 0 0
37                0 0 1 0 0 0
38                .
39                .
40                .
41                1 1 1 1 1 1
42             */
43         }
44     }
45     return;
46 }
47 int main()
48 {
49     int cases, i, r, c;
50     scanf("%d", &cases);
51     for(r=0; r<6; ++r)
52         press[r][0] = press[r][7] = 0; /* 第0列第7列置零 */
53     for(c=1; c<7; ++c)
54         press[0][c] = 0; /* 第一行置零 */
55     for(i=0; i<cases; i++){
56         for(r=1; r<6; r++){
57             for(c=1; c<7; c++){
58                 scanf("%d", &puzzle[r][c]);
59             }
60             enumerate();
61             printf("PUZZLE #%d\n", i+1);
62             for(r=1; r<6; ++r){

```

```
62         for(c=1; c<7; c++)
63             printf("%d", press[r][c]);
64         printf("\n");
65     }
66 }
67 return 0;
68 }
```

## 。 总结

- 枚举过程`enumerate()`
  - `press[1][.]`中每一个元素表示一个二进制数0/1，通过模拟二进制加法方式进行枚举
  - 需要处理进位
- 推测验证过程`guess()`
  - 用 $6 * 8$ 的矩阵来简化下一行按钮值的计算公式
  - 根据`press[1][.]`和`puzzle`数组，用公式计算能使得1~4行所有灯熄灭的`press`的其它行的值，再判断所计算的`press`数组能否熄灭矩阵第五行的所有灯