

# Probabilidade

## Métodos de Contagem

**Prof. Dr. Tetsu Sakamoto**  
Instituto Metr pole Digital - UFRN  
Sala A224, ramal 182  
Email: [tetsu@imd.ufrn.br](mailto:tetsu@imd.ufrn.br)





**Slides e notebook em:**

[github.com/tetsufmbio/IMD0033/](https://github.com/tetsufmbio/IMD0033/)





# Métodos de contagem



# Tamanho do conjunto

Número de elementos dentro de um conjunto (cardinalidade);

Notação:  $|S|$  ou  $\#S$ ;

Moeda:  $|\{\text{cara, coroa}\}| = 2$       Dado:  $|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}| = 6$

Conjunto vazio:  $|\emptyset| = 0$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{P}| = \infty \quad \rightarrow$  Infinito contável

$|\mathbb{R}| = \infty \quad \rightarrow$  Infinito não contável



# Tamanho do conjunto em Python

Usar a função `len()`.

```
print(len({ -1, 1 })) # 2
```

**Quantos elementos tem  
no conjunto  $\{1024 \dots$   
 $49151\}$  ?**



# Tamanho do conjunto em intervalos de inteiros

$$\{m, \dots, n\} = \{\text{inteiros entre } m \text{ e } n \text{ inclusivo}\}$$

$$|\{m, \dots, n\}| = n - m + 1$$

$$\{3, \dots, 5\} = \{3, 4, 5\}$$

$$|\{3, \dots, 5\}| = 5 - 3 + 1 = 3$$

**Quantos números de 1 a  
100 são múltiplos de 3?**





# Conjunto de múltiplos

$$D_3 = \{ 3, 6, 9, \dots, 99 \}$$

$$D = \{ 1 \leq i \leq n : d \mid i \}$$

$$D_3 = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \} = \{ 3, 6, 9, \dots, 99 \}$$

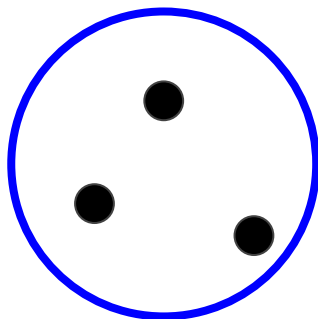
$$|D| = |\{ 1 \leq i \leq n : d \mid i \}| = \lfloor n / d \rfloor$$

$$|D_3| = |\{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \}| = \lfloor 100 / 3 \rfloor = 33$$

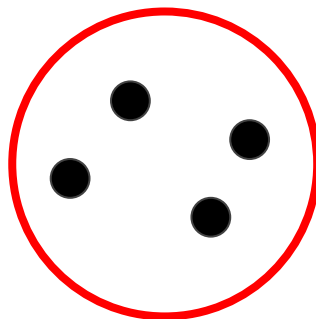


# União disjunta

$$|A| = 3$$



$$|B| = 4$$



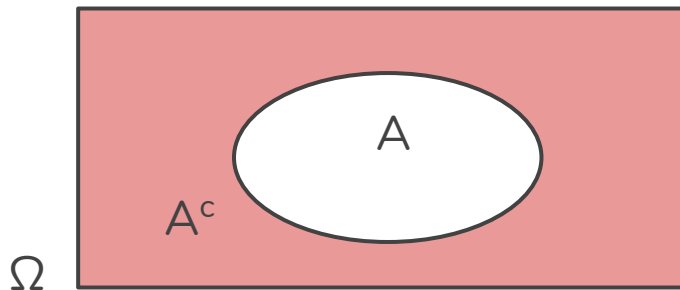
$$|A \cup B| = |A| + |B| = 7$$

Para conjuntos disjuntos, o tamanho da união é a soma dos tamanhos dos conjuntos.

**Regra da soma**



# Complementos



$A$  e  $A^c$  são disjuntos, então:

$$|\Omega| = |A| + |A^c|$$

$$|A^c| = |\Omega| - |A| \quad \text{Regra da subtração}$$

# Como pesar o seu cachorro?





## Complemento

Existem situações onde a regra da subtração é mais conveniente para o cálculo do tamanho do conjunto:

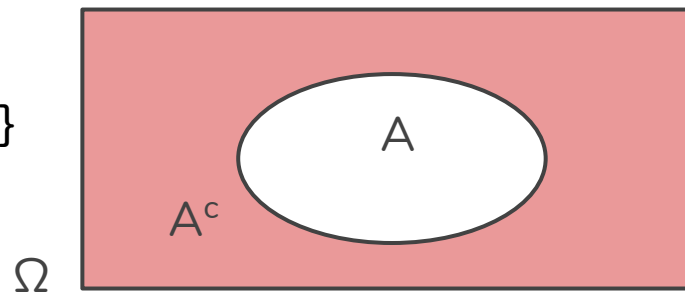
$$A = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \nmid i \} \rightarrow \{ 1, 2, 4, 5, 7, \dots, 100 \}$$

$$\Omega = \{ 1, \dots, 100 \}$$

$$A^c = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \} \rightarrow \{ 3, 6, 9, \dots, 99 \}$$

$$|A^c| = \lfloor 100 / 3 \rfloor = 33$$

$$|A| = |\Omega| - |A^c| = 100 - 33 = 67$$



$$A = \{ 2, 4, 6, 8, \dots, 100 \}$$

$$B = \{ 3, 6, 9, 12, \dots, 99 \}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B|?$$

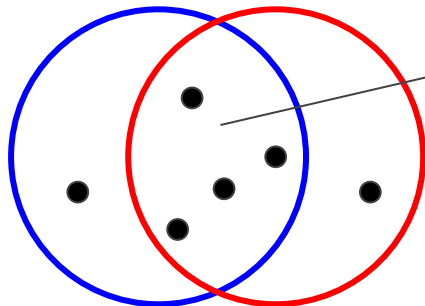


# União no geral

Se A e B são disjuntos,  $|A \cup B| = |A| + |B|$

Em geral:  $|A \cup B| \neq |A| + |B|$

$$|\{1\} \cup \{1\}| = |\{1\}| = 1 \neq |\{1\}| + |\{1\}| = 2$$



Elementos nesta área  
( $A \cap B$ ) são  
contados 2X

A     $|A| + |B|$     B

Princípio da Inclusão e Exclusão:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



## Múltiplos de 2 números

$$D = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \vee 2 \mid i \} = \{ 2, 3, 4, 6, 8, \dots 100 \}$$

$$|D| = ?$$

$$A = \{ 1 \leq i \leq 100 : 2 \mid i \}$$

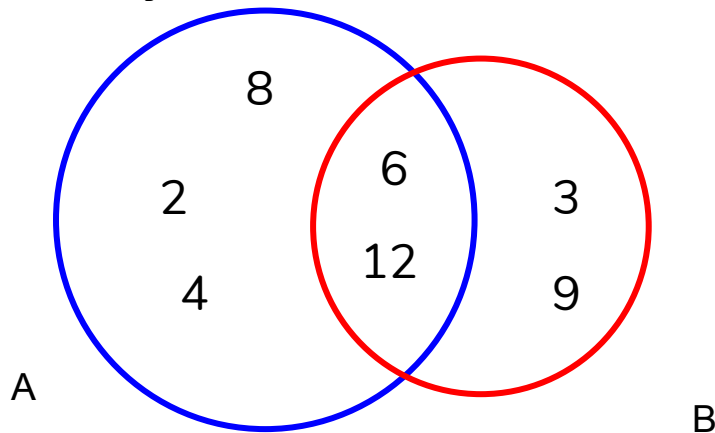
$$B = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \}$$

$$|A| = \lfloor 100 / 2 \rfloor = 50$$

$$|B| = \lfloor 100 / 3 \rfloor = 33$$

$$|A \cap B| = \{ 1 \leq i \leq 100 : 2 \mid i \wedge 3 \mid i \} = \{ 1 \leq i \leq 100 : 6 \mid i \}$$

$$|A \cap B| = \lfloor 100 / 6 \rfloor = 16$$



$$|D| = |A| + |B| - |A \cap B| = 67$$





# Múltiplos conjuntos

Dois conjuntos:

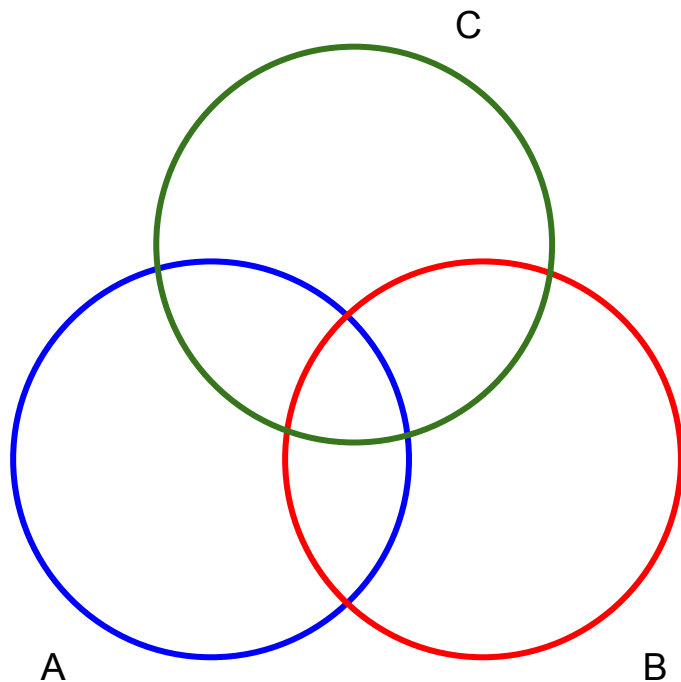
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Três conjuntos:

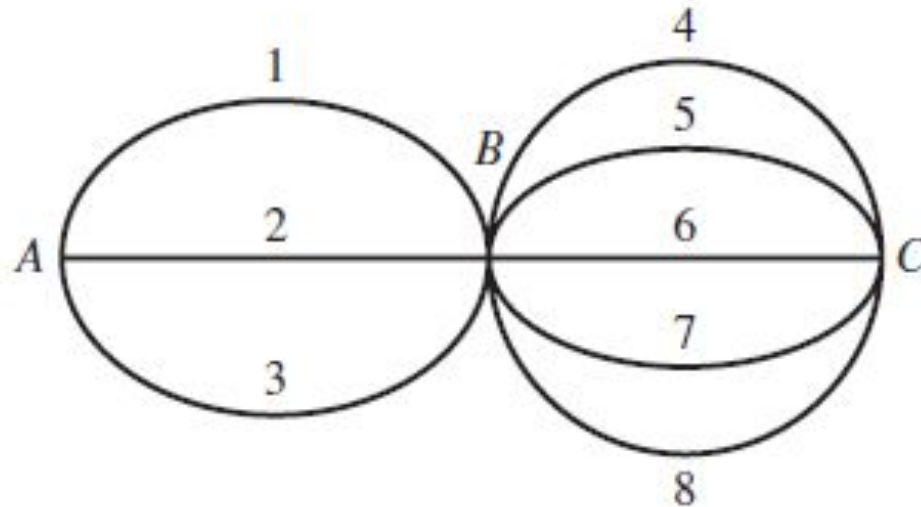
$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = & |A| + |B| + |C| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ & + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t| = \sum_{i=1}^t (-1)^{i-1} N_t$$

$N_t$  denota a soma de todas as interseções de tamanho  $t$



**Quantas rotas possíveis de A para C?**





# Regra da multiplicação

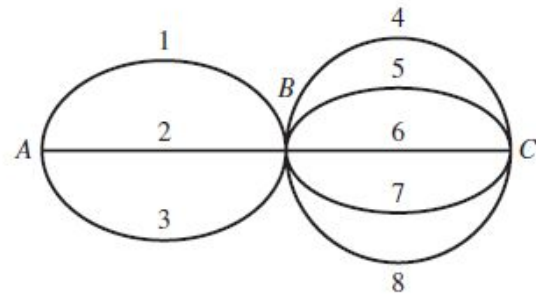
Possíveis rotas: (1,4), (1,5), (1,6), ..., (3,8)

## Produto cartesiano

$$r_{AB} = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$r_{BC} = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

$$r_{AB} \times r_{BC} = \{ (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8) \\ (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8) \\ (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8) \}$$



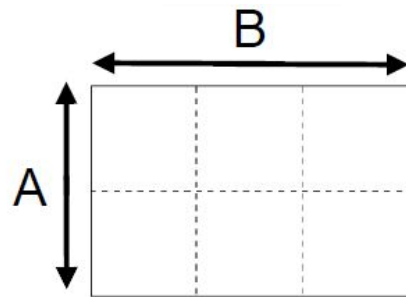
$$| r_{AB} \times r_{BC} | = |A| \times |B|$$



## Regra de multiplicação para três conjuntos

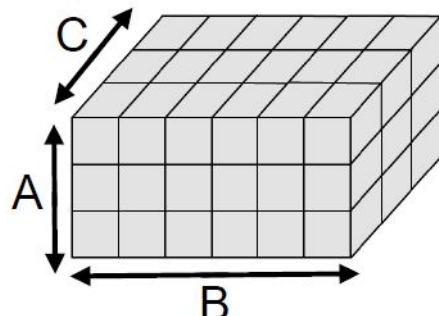
$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$



$$A \times B \times C = \{ (a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C \}$$

$$|A \times B \times C| = |A| \times |B| \times |C|$$





# Revisão

Tamanho dos conjuntos

Número de elementos em um intervalo de inteiros

Regra da soma

Regra da subtração

Regra da multiplicação



**Slides e notebook em:**

[github.com/tetsufmbio/IMD0033/](https://github.com/tetsufmbio/IMD0033/)

