Linguagens Formais e Autômatos

LR's: Lema do Bombeamento

Felipe Cunha

Material extraído do livro e slides do Prof. Newton Vieira (http://dcc.ufmg.br/~nvieira)

Introdução

- O que é uma linguagem regular?

Definição: uma linguagem é dita ser uma linguagem regular se existe um autômato finito que a reconhece

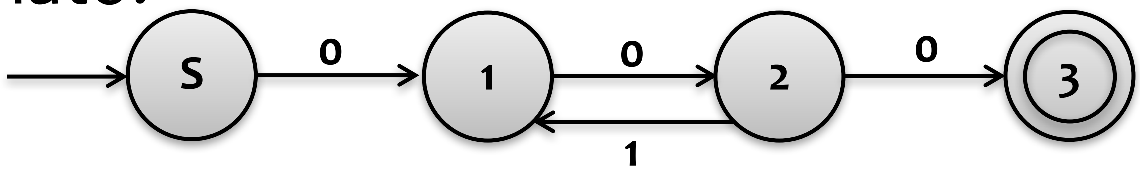
- Dada uma linguagem L:
  - É possível determinar se ela pertence ou não à classe das linguagens regulares?
  - É possível facilitar a obtenção de um AF para L?

Lema do Bombeamento

- Considere a linguagem
- $L_1 = 01^* = \{0, 01, 011, 0111, \ldots \}$
- O string 011 é dito **bombeável** em L_1 porque podemos tomar a porção sublinhada e **bombeá-la** (repeti-la) tantas vezes quanto se queira, obtendo sempre strings em L_1.

Lema do Bombeamento

- Considere a linguagem representada pelo autômato:



- 01010 é bombeável?
- Bombeável: 0010100, 00100. Os substrings sublinhados correspondem a ciclos no AF! Ciclos do AF podem ser repetidos um número arbitrário de vezes: **bombeamento**.

Lema do Bombeamento

- **Lema:** Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$ tal que, para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$, existem *u*, *v* e *w* que satisfazem as condições

  - $z = uvw$
  - $|uv| \leq k$
  - $v \neq \lambda$
  - $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$

Lema do Bombeamento

- A linguagem pode ser bombeada se qualquer cadeia suficientemente longa na linguagem pode ser quebrada em pedaços, alguns dos quais podem ser repetidos um número arbitrário de vezes para produzir uma cadeia mais longa na linguagem. O ato de repetir a subcadeia não faz com que a palavra resultante saia da linguagem.

Lema do Bombeamento

- O lema do bombeamento (LB) pode ser usado para provar que uma linguagem infinita L **não é regular**:

  1. supõe-se que L seja linguagem regular
  2. supõe-se $k > 0$, a *constante do LB*
  3. escolhe-se uma palavra z, tal que $|z| > k$
  4. Mostra-se que, para toda decomposição de z em *uvw*, tal que, $|uv| \leq k$ e $v \neq \lambda$, existe *i* tal que $uv^iw \notin L$

Cuidado: O LB não pode ser usado para mostrar que uma linguagem é regular!

Exemplo LB

- Demonstrar que $L = \{a^n b^n \mid n \in N\}$ não é regular

Suponha que *L* seja uma linguagem regular. Seja *k* a constante do LB e $z = a^k b^k$. Como $|z| > k$, o lema diz que existem *u*, *v* e *w* tais que:

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$

Nesse caso, *v* só tem *a*'s, pois $uvw = a^k b^k$ e $|uv| \leq k$, e *v* tem pelo menos um *a* porque $v \neq \lambda$. Isso implica que $uv^2 w = a^{k+|v|} b^k \notin L$, o que contradiz o LB. Portanto, *L* não é linguagem regular.

Exemplo LB

- Demonstrar que $L = \{0^m 1^n \mid m > n\}$ não é regular

Suponha que *L* seja uma linguagem regular. Seja *k* a constante do LB e $z = 0^{k+1}1^k$. Como $|z| > k$, o lema diz que existem *u*, *v* e *w* tais que:

- $z = uvw$
- $|uv| \leq k$
- $v \neq \lambda$
- $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$

Como $uvw = 0^{k+1}1^k$ e $0 < |v| \leq k$, *v* só tem 0's e possui no mínimo um 0. Logo $uv^0 w = 0^{k+1-|v|}1^k \notin L$, o que contradiz o LB. Portanto, *L* não é linguagem regular.

Lema do Bombeamento

- Toda linguagem regular atende ao lema do bombeamento
  - Mas nem toda linguagem que atende ao lema do bombeamento é regular

- Considere a seguinte linguagem L sobre $\Sigma = \{0,1,a\}$

$$L = \{a0^n1^n \mid n \in N\} \cup \{a^m w \mid m \neq 1, w \in \{0,1\}^*\}$$

  - Essa linguagem atende ao lema do bombeamento, mas não é regular