Teoria da Computação

Propriedades de AFD's

Propriedades de AFD's

- Se existe um AFD M_1 para um linguagem e um AFD M_2 para outra linguagem, então é possível criar AFD's para as seguintes linguagens

  - **Complemento:** $\overline{L(M_1)}$

  - **União:** $L(M_1) \cup L(M_2)$

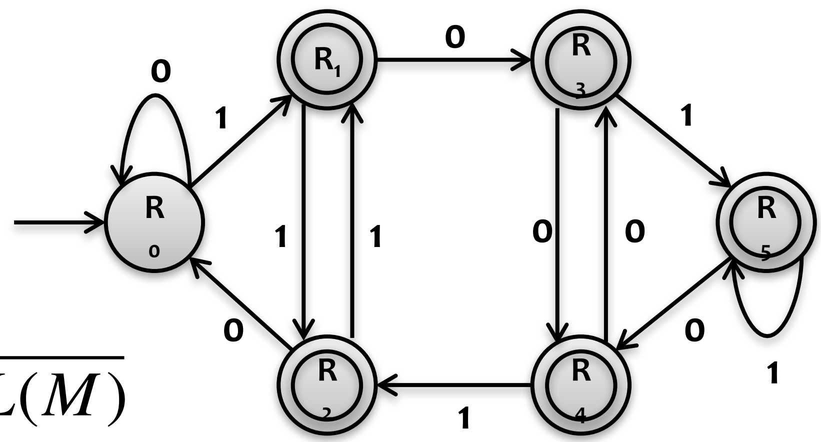
  - **Interseção:** $L(M_1) \cap L(M_2)$

Complemento

- Seja o AFD $\underline{M = (E, \Sigma, \delta, i, F)}$ para linguagem $L(M)$, então o AFD para $\overline{L(M)}$ é dado por $(E, \Sigma, \delta, i, (E - F))$

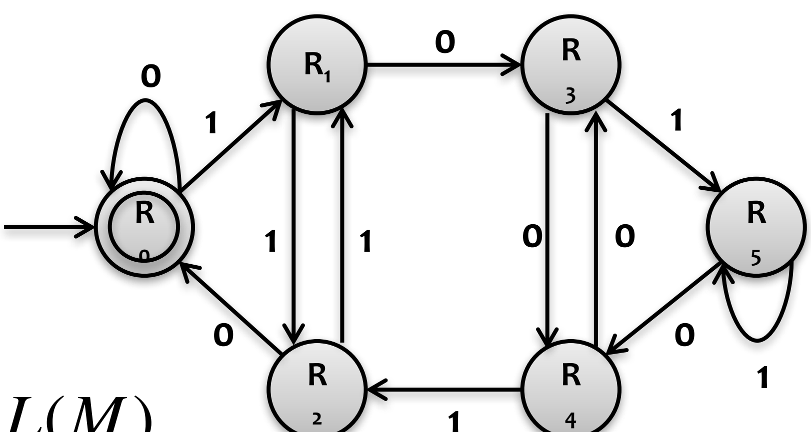
- Exemplo

Inverter os estados finais



$\overline{L(M)}$

{ números na base 2 **não** divisíveis por 6 }



$L(M)$

{ números na base 2 divisíveis por 6 }

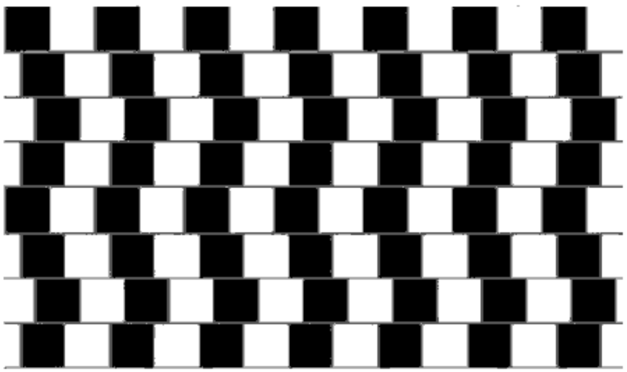
Cuidado: o autômato deve estar completo

União e Interseção

- A união ou a interseção de dois AFD's $M_1 = (E_1, \Sigma, \delta_1, i_1, F_1)$ e $M_2 = (E_2, \Sigma, \delta_2, i_2, F_2)$ é realizada através do **produto** de M_1 por M_2

$$M_1 \times M_2$$

- O produto é obtido simulando a execução em paralelo de dois AFD's



Produto de AFD's

- Sejam os AFD's $M_1 = (E_1, \Sigma, \delta_1, i_1, F_1)$ e $M_2 = (E_2, \Sigma, \delta_2, i_2, F_2)$ o AFD $M_3 = (E_3, \Sigma, \delta_3, i_3, F_3)$ pode ser construindo simulando a execução dos AFD's M_1 e M_2 em paralelo, onde $E_3 = E_1 \times E_2$
  - $\delta_3([e_1, e_2], a) = [\delta_1(e_1, a), \delta_2(e_2, a)]$
  - $i_3 = [i_1, i_2]$
  -
  - $F_3 = \begin{cases} F_1 \times F_2 & \text{(Interseção)} \\ (F_1 \times E_2) \cup (E_1 \times F_2) & \text{(União)} \end{cases}$

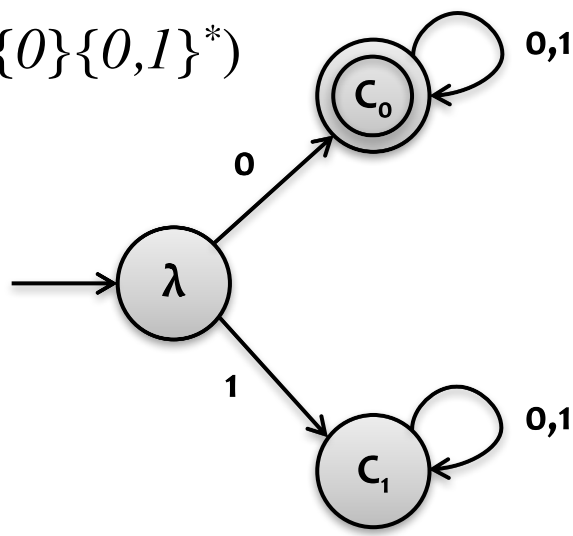
- Sejam dois estados $e_1 \in E_1$ e $e_2 \in E_2$ do AFD M_3, então

$$\hat{\delta}_3([e_1, e_2], w) = [\hat{\delta}_1(e_1, w), \hat{\delta}_2(e_2, w)], \forall w \in \Sigma^*$$

Produto de AFD's

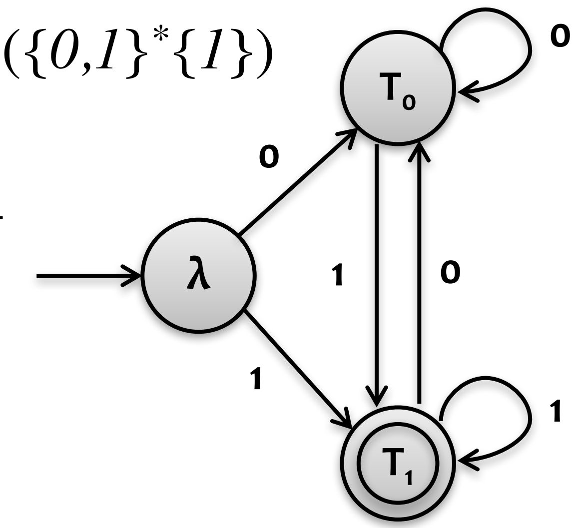
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	0	1
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1



$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	0	1
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1

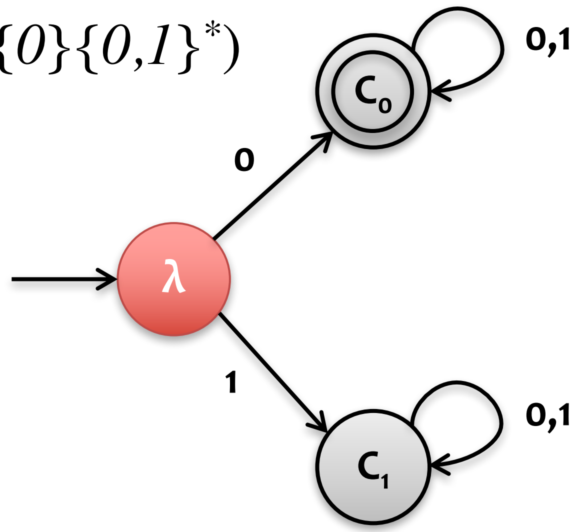


Como simular os dois em paralelo?

Produto de AFD's

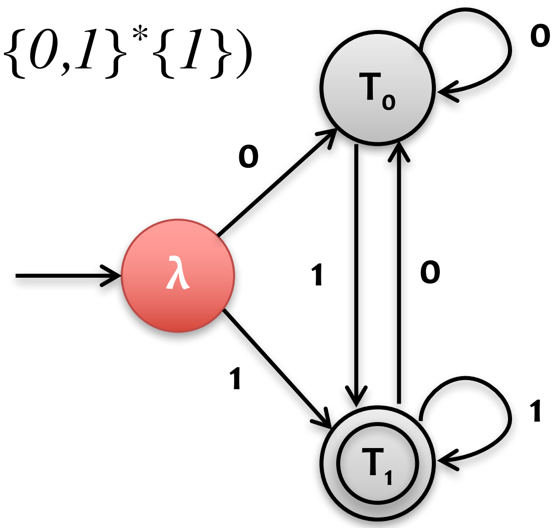
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	*0*	*1*
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1



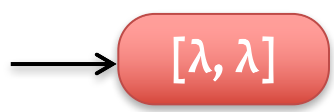
$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	*0*	*1*
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1



δ_3	*0*	*1*
[λ, λ]		

M_3

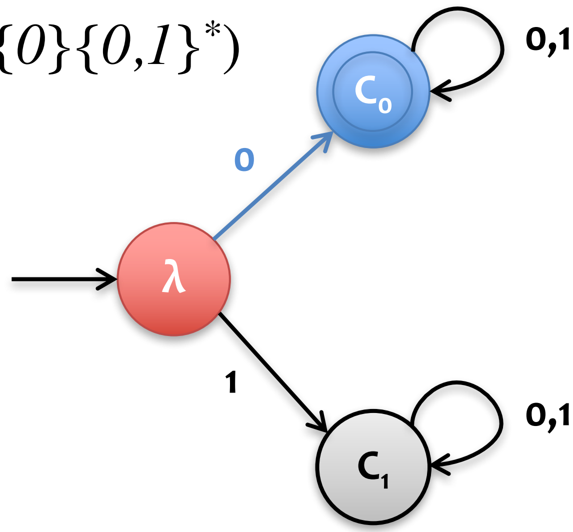


Criar um estado inicial no AFD M_3 com a junção dos estados iniciais dos AFD M_1 e M_2

Produto de AFD's

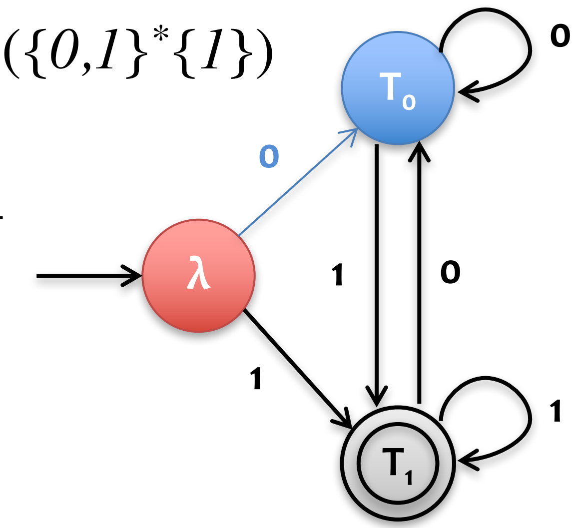
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	*0*	*1*
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1



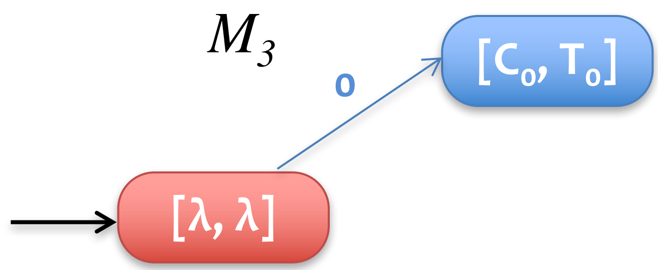
$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	*0*	*1*
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1



δ_3	*0*	*1*
$[\lambda, \lambda]$	$\mathbf{[C_0, T_0]}$	
$[C_0, T_0]$		

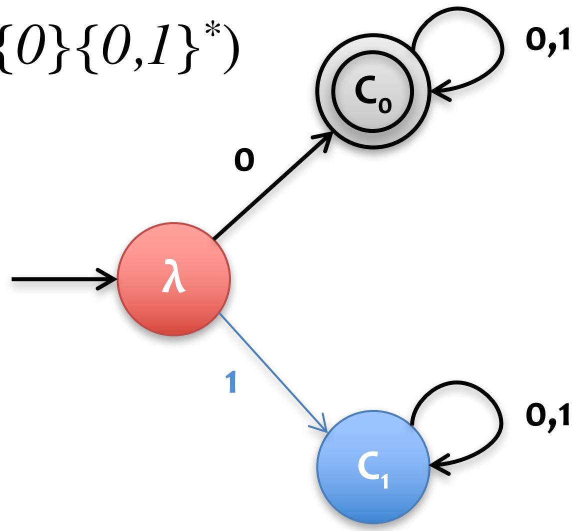
M_3



Produto de AFD's

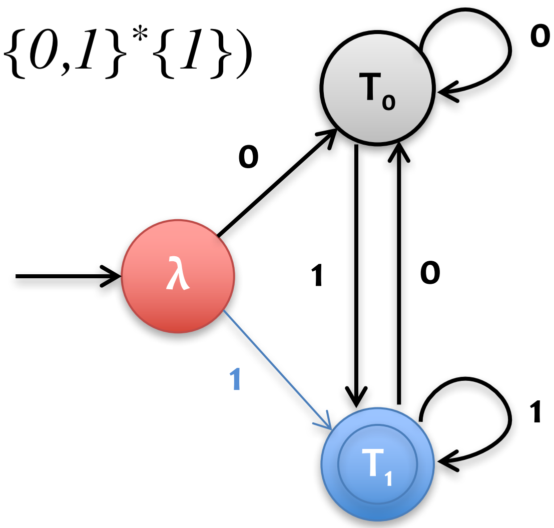
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	0	1
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1



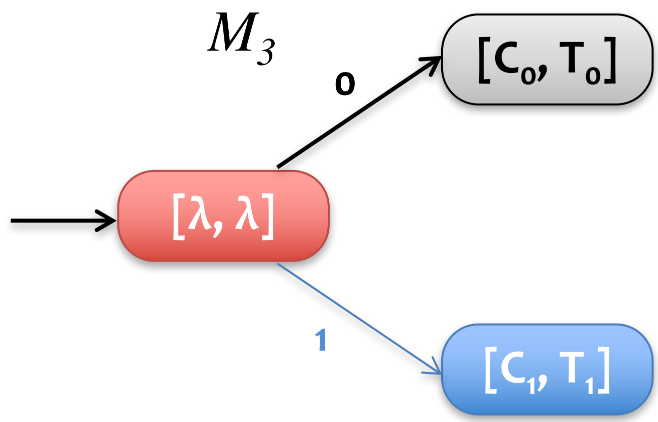
$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	0	1
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1



δ_3	0	1
$[\lambda, \lambda]$	$[C_0,T_0]$	$\mathbf{[C_1,T_1]}$
$[C_0,T_0]$		
$[C_1,T_1]$		

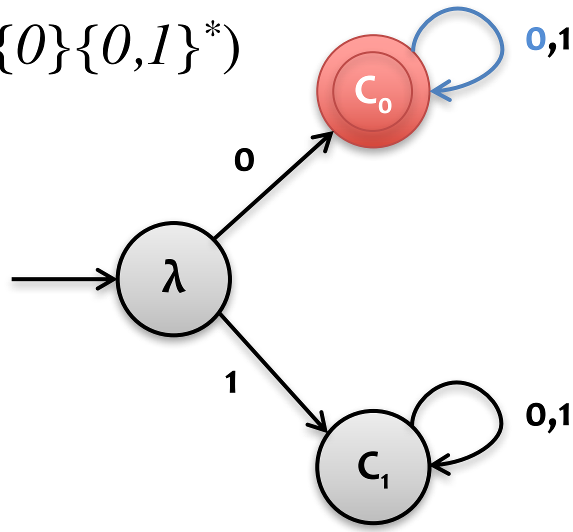
M_3



Produto de AFD's

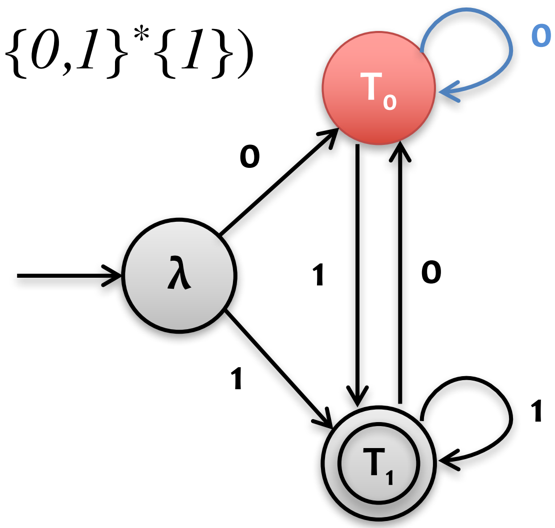
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	0	1
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1



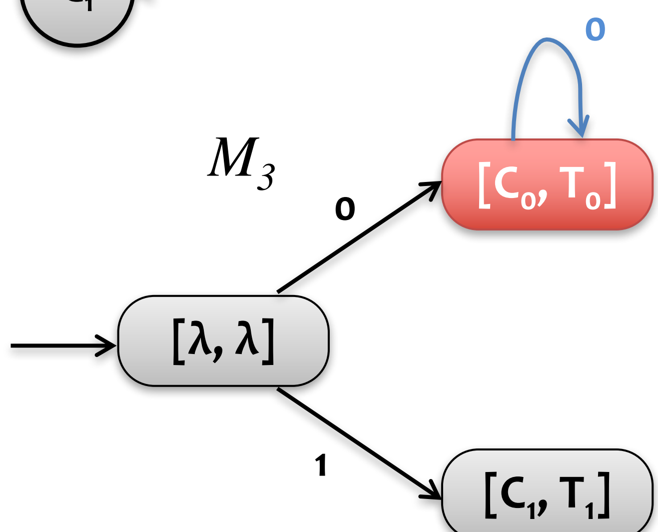
$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	0	1
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1



δ_3	0	1
[λ, λ]	[C_0,T_0]	[C_1,T_1]
[C_0,T_0]	**[C_0,T_0]**	
[C_1,T_1]		

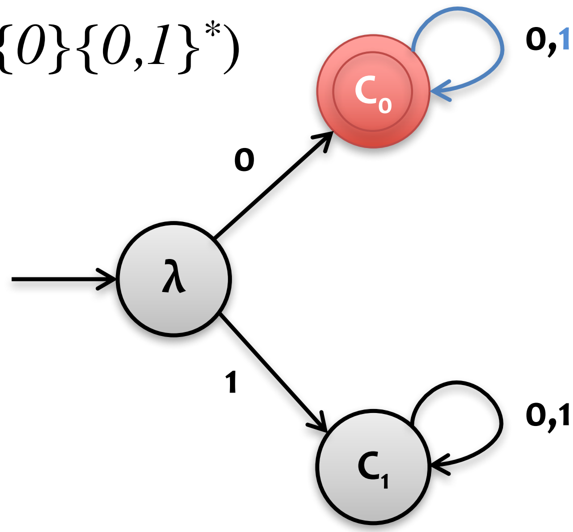
M_3



Produto de AFD's

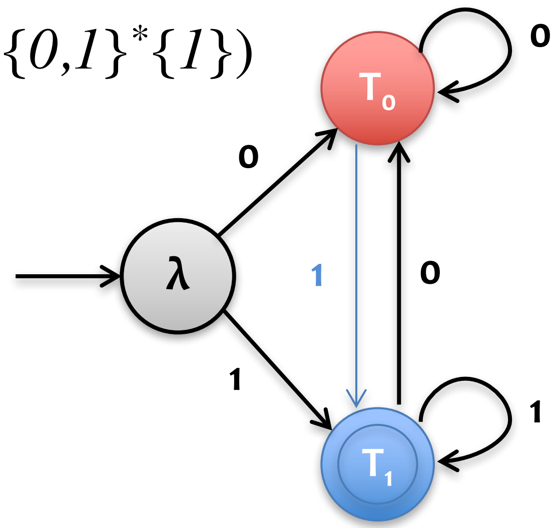
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	0	1
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1



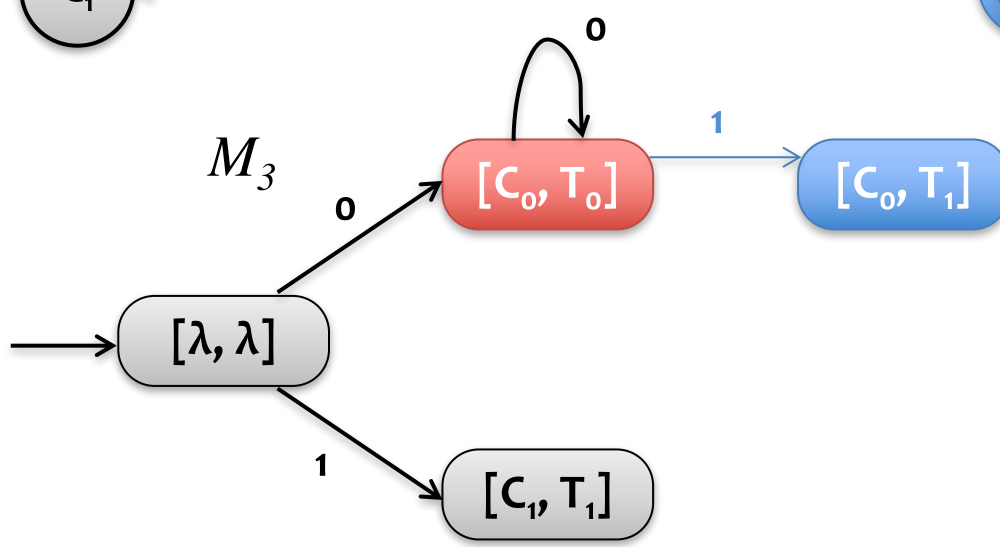
$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	0	1
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1



δ_3	0	1
[λ, λ]	$[C_0,T_0]$	$[C_1,T_1]$
$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_0]$	$\mathbf{[C_0,T_1]}$
$[C_1,T_1]$		
$[C_0,T_1]$		

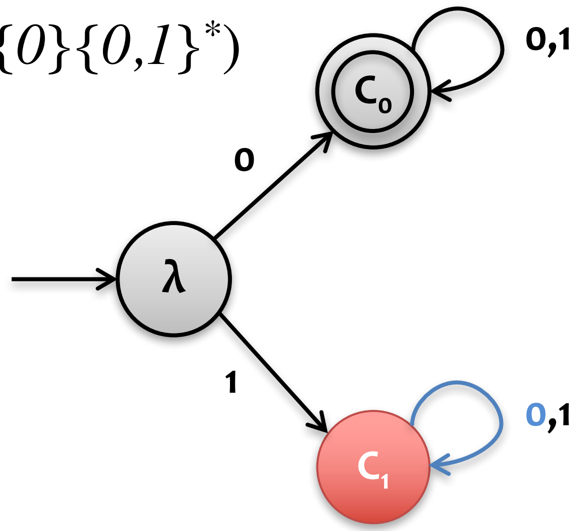
M_3



Produto de AFD's

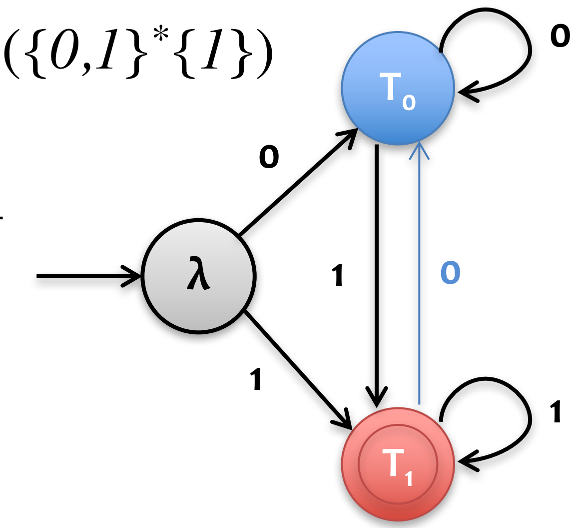
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	0	1
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1



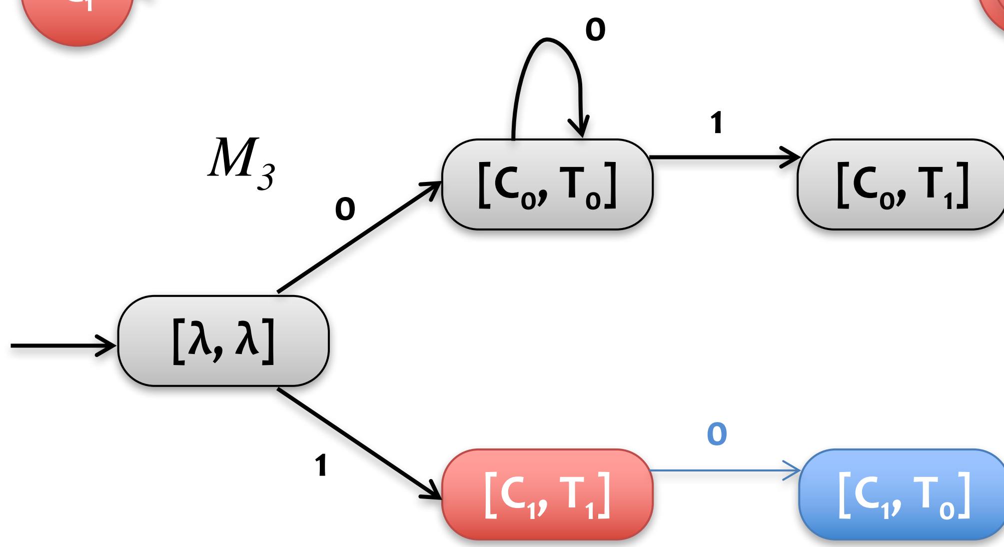
$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	0	1
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1



δ_3	0	1
$[\lambda, \lambda]$	$[C_0,T_0]$	$[C_1,T_1]$
$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_1]$
$[C_1,T_1]$	$\mathbf{[C_1,T_0]}$	
$[C_0,T_1]$		
$[C_1,T_0]$		

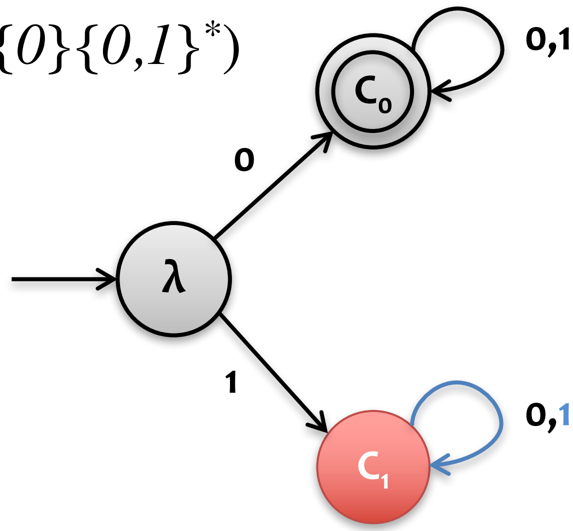
M_3



Produto de AFD's

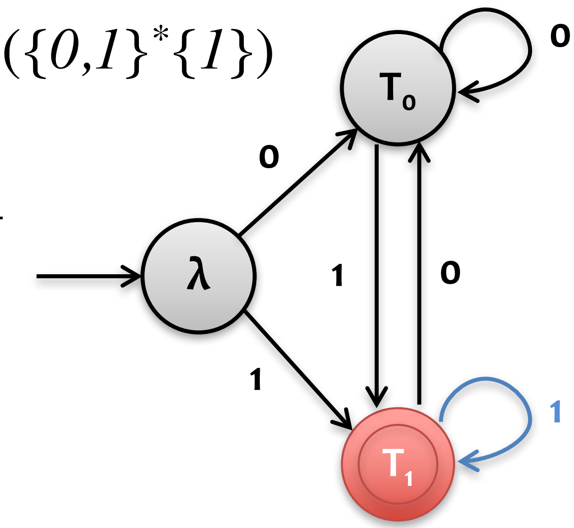
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	0	1
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1

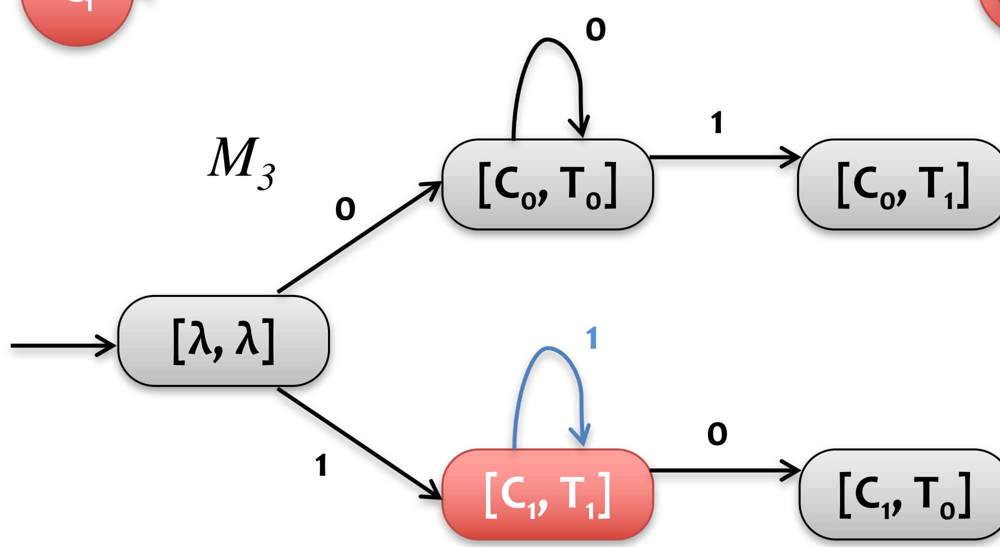


$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	0	1
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1



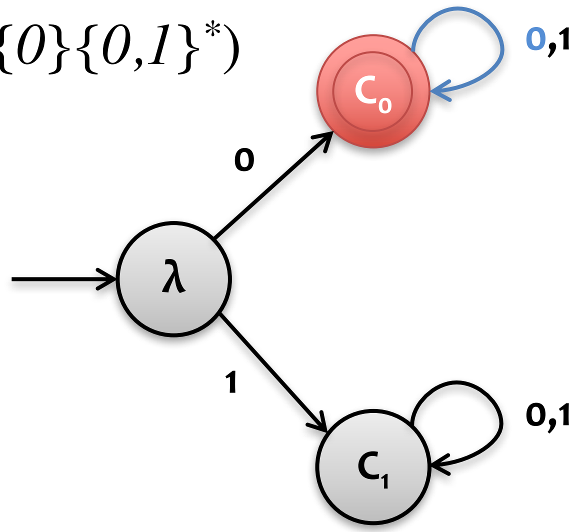
δ_3	0	1
$[\lambda, \lambda]$	$[C_0,T_0]$	$[C_1,T_1]$
$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_1]$
$[C_1,T_1]$	$[C_1,T_0]$	**$[C_1,T_1]$**
$[C_0,T_1]$		
$[C_1,T_0]$		



Produto de AFD's

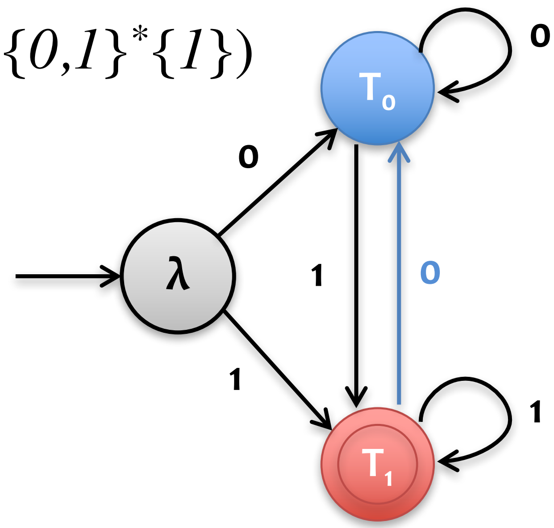
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	0	1
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1



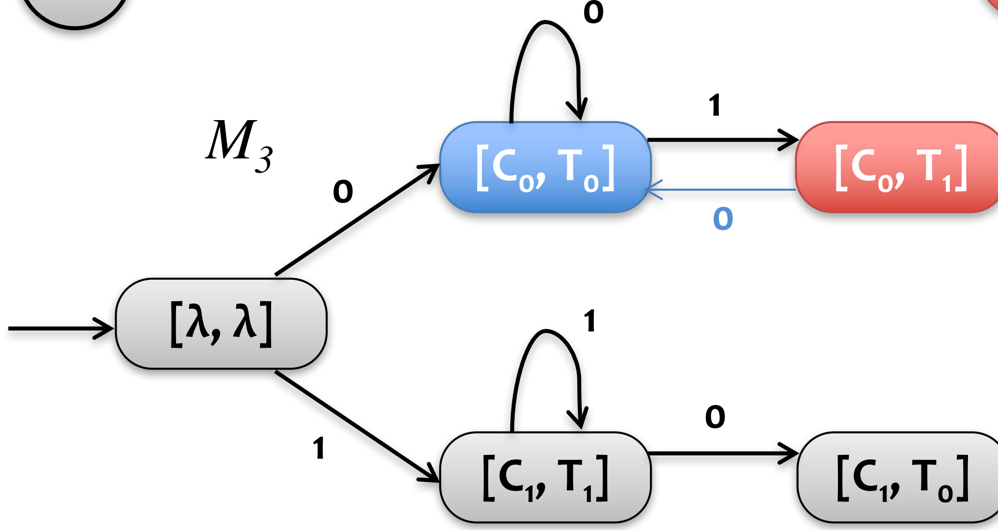
$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	0	1
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1



δ_3	0	1
[λ, λ]	[C_0,T_0]	[C_1,T_1]
[C_0,T_0]	[C_0,T_0]	[C_0,T_1]
[C_1,T_1]	[C_1,T_0]	[C_1,T_1]
[C_0,T_1]	**[C_0,T_0]**	
[C_1,T_0]		

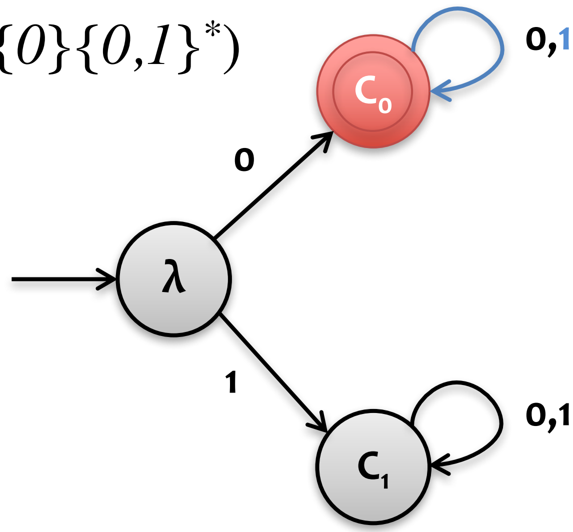
M_3



Produto de AFD's

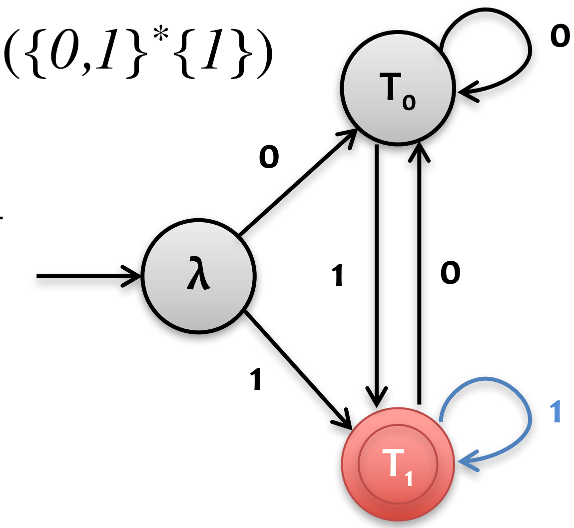
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	0	1
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1



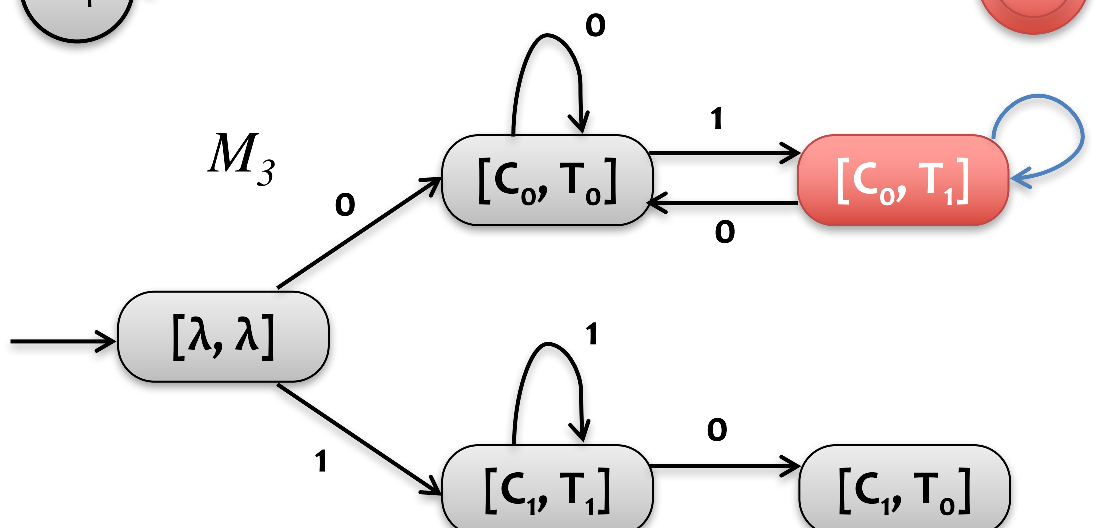
$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	0	1
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1



δ_3	0	1
$[\lambda, \lambda]$	$[C_0,T_0]$	$[C_1,T_1]$
$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_1]$
$[C_1,T_1]$	$[C_1,T_0]$	$[C_1,T_1]$
$[C_0,T_1]$	$[C_0,T_0]$	$\mathbf{[C_0,T_1]}$
$[C_1,T_0]$		

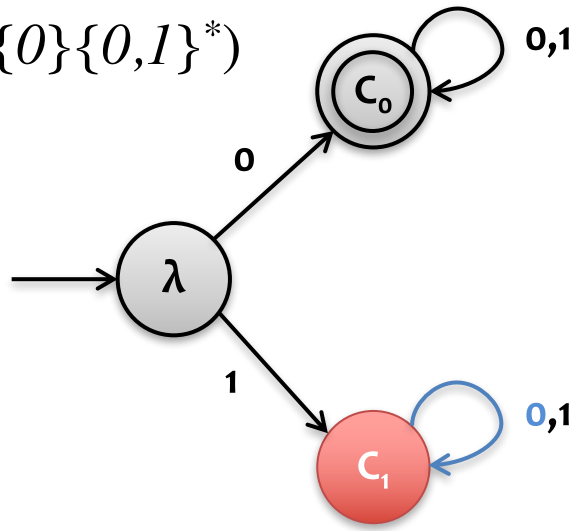
M_3



Produto de AFD's

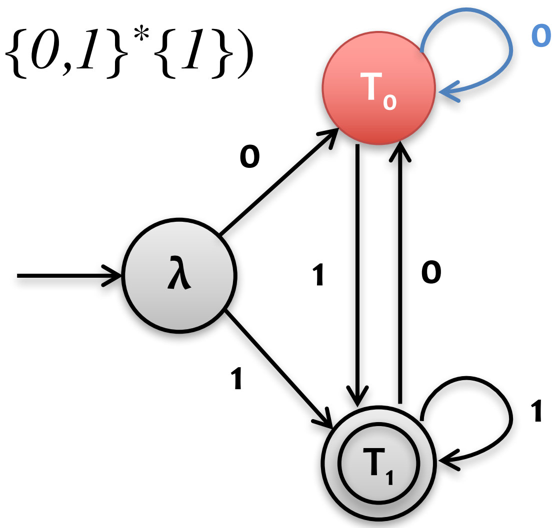
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	0	1
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1



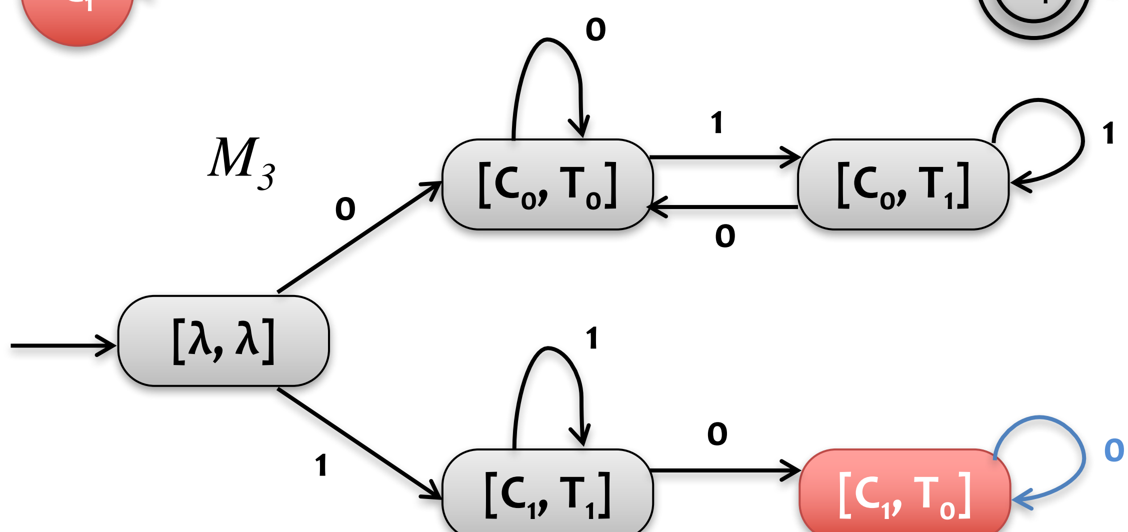
$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	0	1
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1



δ_3	0	1
$[\lambda, \lambda]$	$[C_0,T_0]$	$[C_1,T_1]$
$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_1]$
$[C_1,T_1]$	$[C_1,T_0]$	$[C_1,T_1]$
$[C_0,T_1]$	$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_1]$
$[C_1,T_0]$	$\mathbf{[C_1,T_0]}$	

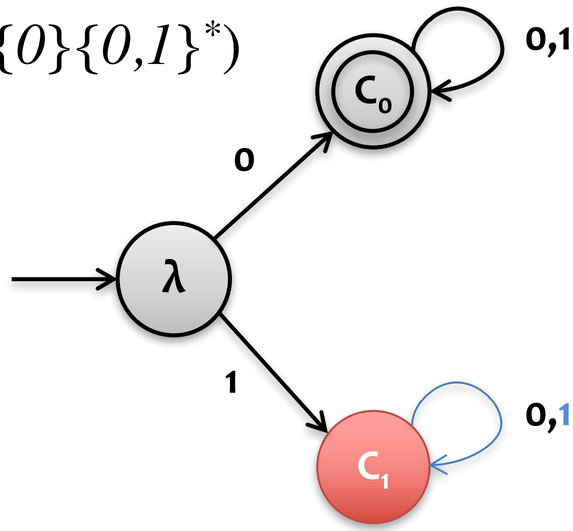
M_3



Produto de AFD's

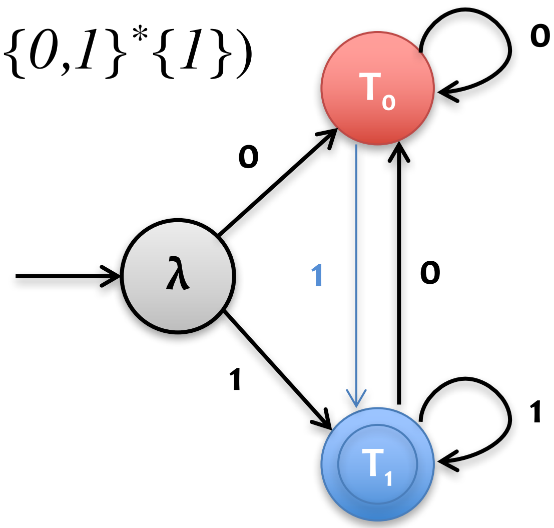
$M_1(\{0\}\{0,1\}^*)$

δ_1	*0*	*1*
λ	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_1	C_1



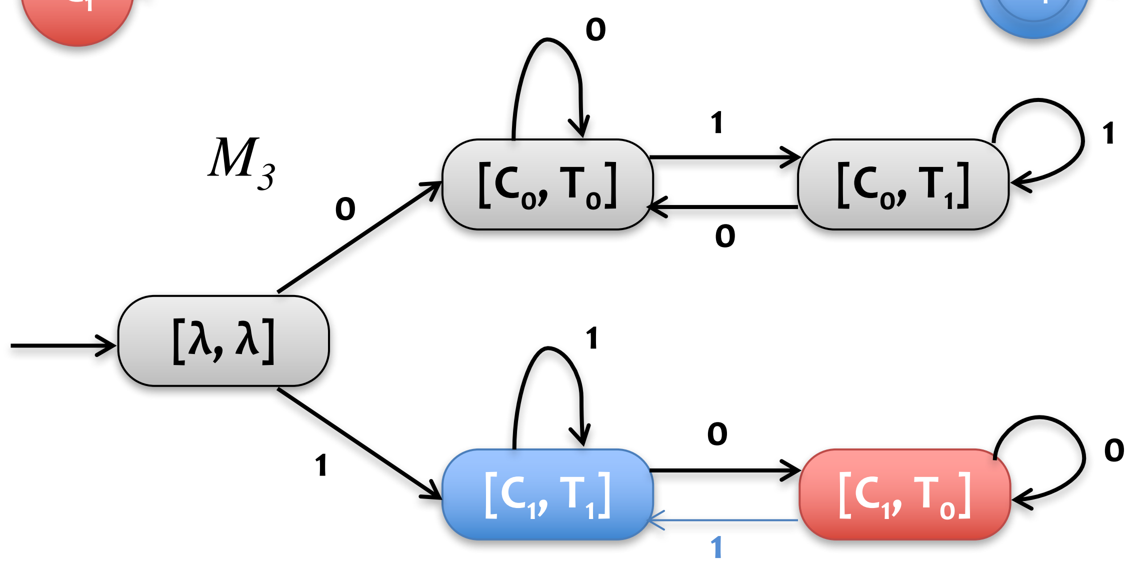
$M_2(\{0,1\}^*\{1\})$

δ_2	*0*	*1*
λ	T_0	T_1
T_0	T_0	T_1
T_1	T_0	T_1

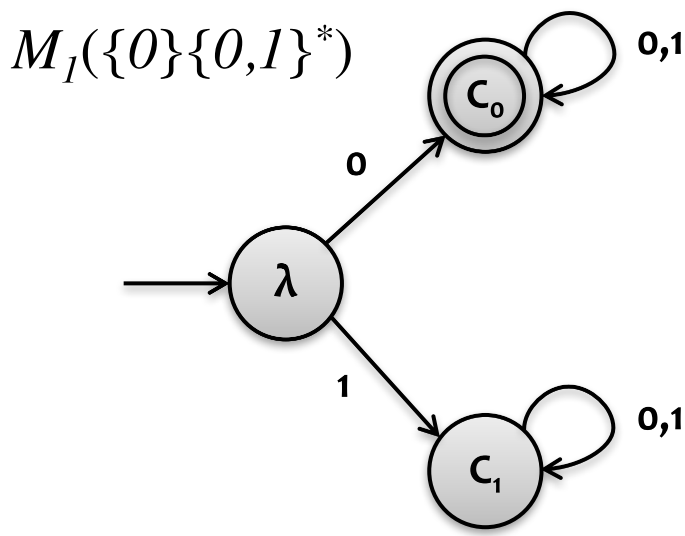


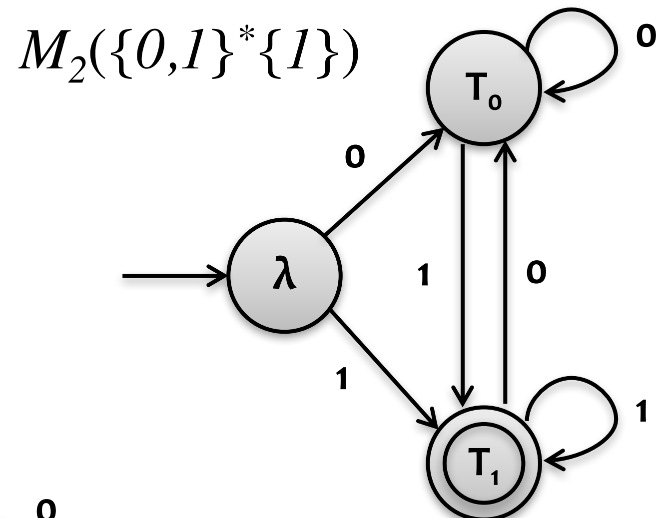
δ_3	*0*	*1*
[λ, λ]	$[C_0,T_0]$	$[C_1,T_1]$
$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_1]$
$[C_1,T_1]$	$[C_1,T_0]$	$[C_1,T_1]$
$[C_0,T_1]$	$[C_0,T_0]$	$[C_0,T_1]$
$[C_1,T_0]$	$[C_1,T_0]$	**$[C_1,T_1]$**

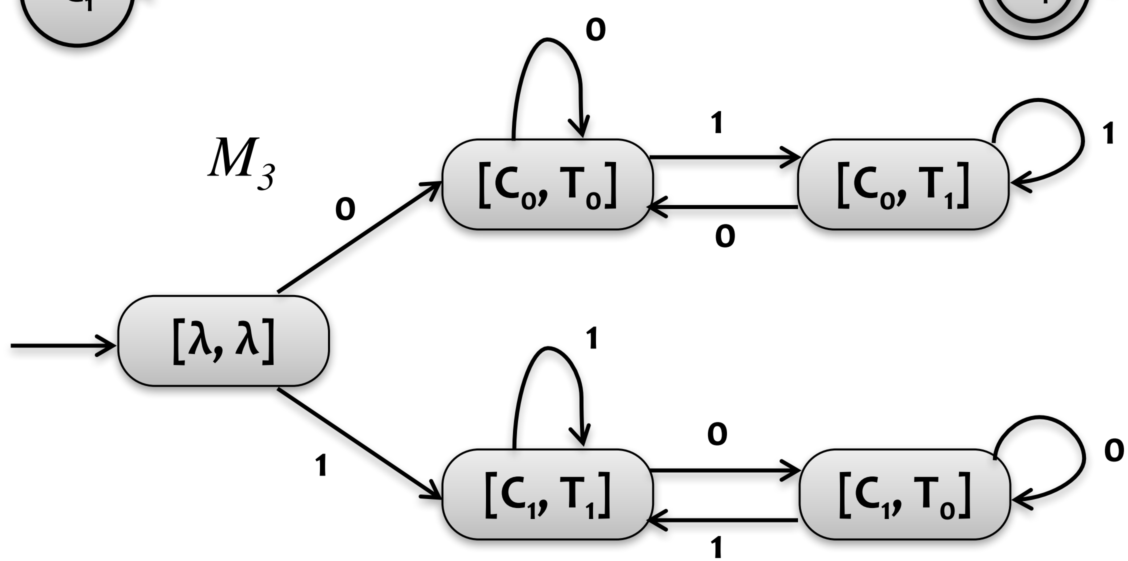
M_3



Produto de AFD's



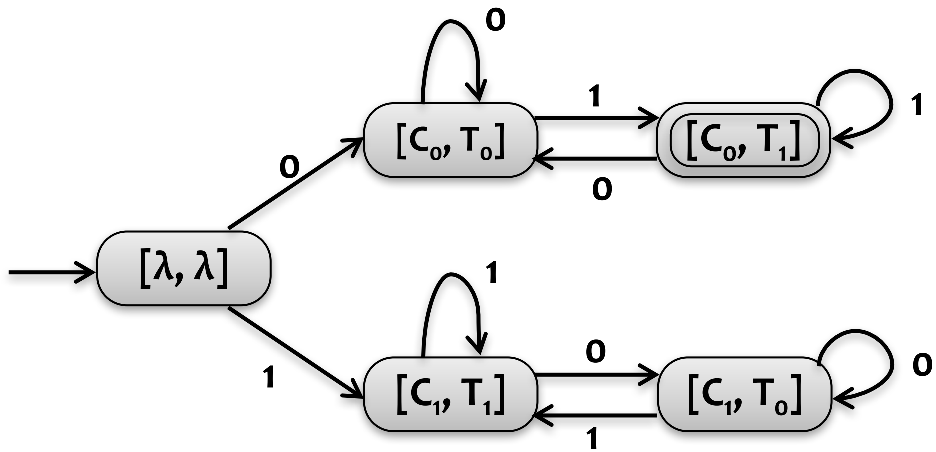




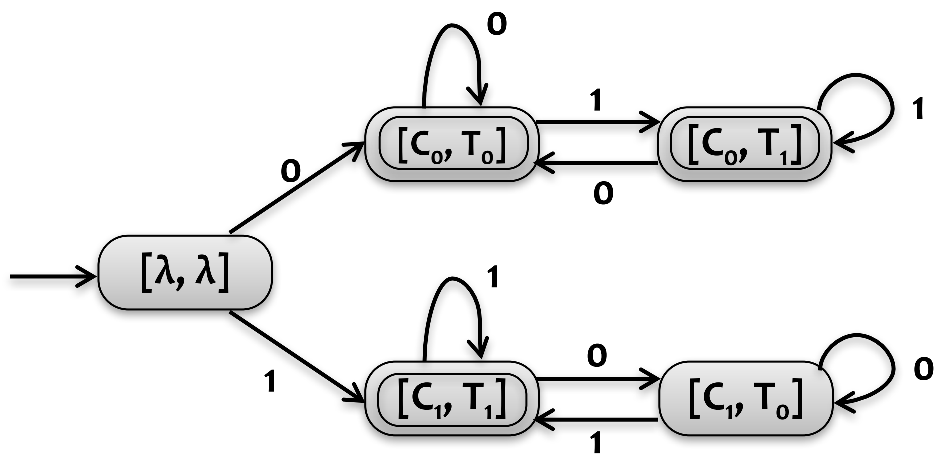
Onde colocar os estados finais?

Produto de AFD's

- Reconhecendo $\{0\}\{0,1\}^* \cap \{0,1\}^*\{1\}$



- Reconhecendo $\{0\}\{0,1\}^* \cup \{0,1\}^*\{1\}$



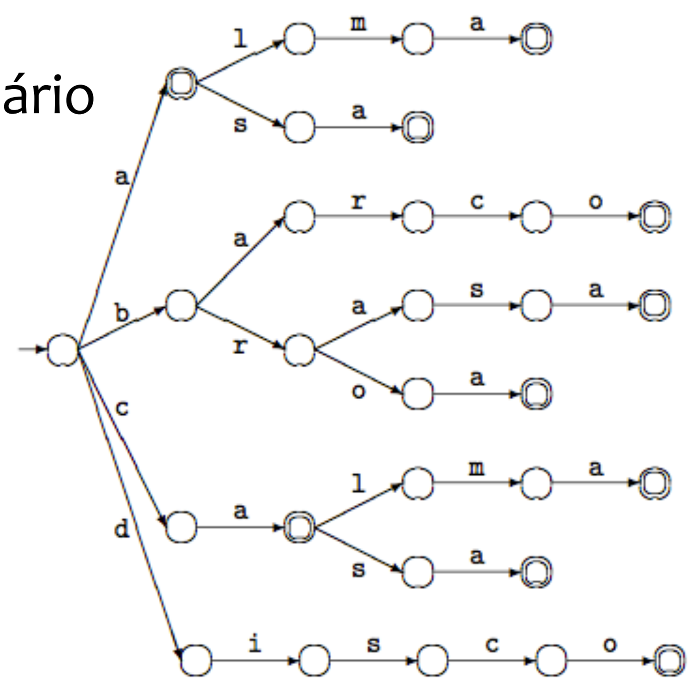
Linguagens Finitas

- Para toda **linguagem finita** existe um AFD

- Uma linguagem finita possui um AFD com diagrama de estados simplificado que **não possui ciclos**
  - O autômato é uma **árvore** cuja raiz é o estado inicial

- Exemplo: Um pequeno dicionário

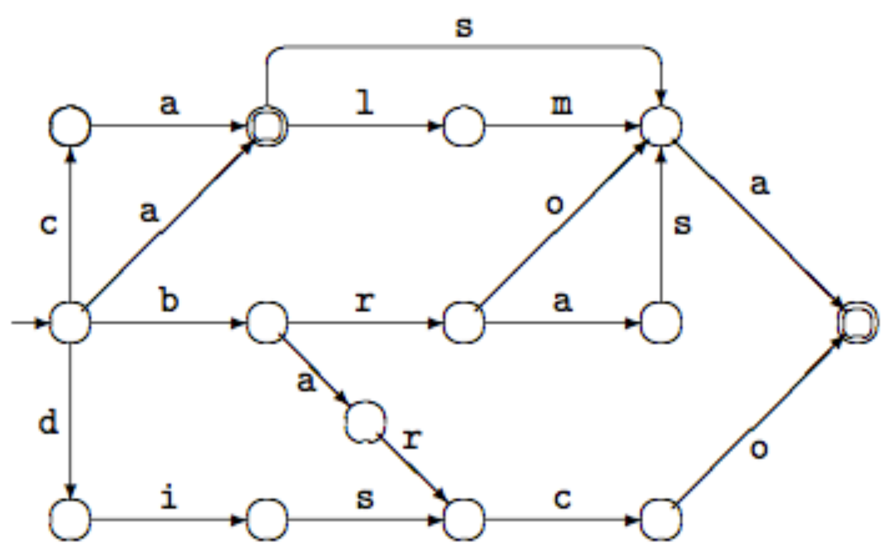
K = { a, alma, asa, barco, brasa, broa, ca, calma, casa, disco }



Linguagens Finitas

- Um AFD mais conciso pode ser construído a partir de um diagrama de estados simplificado sem ciclos – basta aplicar o algoritmo de minimização

- Alguns sufixos são comuns, como no exemplo do dicionário K



Linguagens Finitas

- Propriedades de linguagens finitas
  - Se uma linguagem é finita, então existe um AFD que a reconhece cujo diagrama de estados simplificado não contém ciclos
  - Se um AFD com diagrama de estados simplificado não contém ciclo, então a linguagem que ele reconhece é finita

Linguagens Infinitas

- Se um AFD reconhece uma linguagem infinita, então seu AFD com diagrama de estados simplificados **tem ciclos**
  - Já que uma linguagem infinita possui palavras de todos os tamanhos

- Seja uma linguagem infinita, como saber se existe ou não AFD que a reconhece?
  - Como mostrar que não existe AFD para uma determinada linguagem?

Linguagens Infinitas

- Suponha que existe um AFD M para reconhecer a linguagem
  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Como L é infinita, o AFD possui ciclos. Seja v ($v \neq \lambda$) uma subsequência de z consumida ao se percorrer o ciclo, onde $z = uvw$ para algum prefixo u e sufixo w. Como o ciclo pode ser percorrido várias vezes, têm-se $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$

$$uv^2w \notin L$$

- Seja $z = a^k b^k$ para algum k tal que $|z|$ é maior ou igual ao número de estados de M. Então $uv^2w = a^{k+|v|}b^k$, pois
  a) se v só contém a's: $uv^2w = a^{k-i}(a^i b^j)^2 b^{k-j} = a^k b^j a^i b^k$
  b) se $v = a^i b^j$ para $1 \leq i, j \leq k$
  c) se v só contém b's: $uv^2w = a^k b^{k+|v|}$

Contradição! A existe
reconhecimento de pa

Linguagens Infinitas

- A técnica empregada no exemplo anterior leva a um teorema para provar que não existe AFD para L

Teorema: Seja um AFD M de k estados, e $z \in L(M)$ tal que $|z| \geq k$. Então existem palavras u, v, w tais que

- $z = uvw$
- $v \neq \lambda$
- $uv^i w \in L(M), \forall i \geq 0$

Problemas de Decisão para AFD's

- Existem procedimentos de decisão para determinar, para qualquer AFD M, se
  - $L(M) = \emptyset$
  - $L(M)$ é finita

- Seja M' um AFD mínimo equivalente a M, então
  - $L(M) = \emptyset$ se, e somente se, M' não tiver estados finais
  - $L(M)$ é finita se, e somente se, o diagrama de estados de M' não possui ciclo