第八章 数字信号最佳接收技术

- 数字信号的统计特性
- 数字信号的最佳接收
- 二进制确知信号的最佳接收（重点）
- 匹配滤波（重点）

8.1 数字信号的统计特性

假设一个通信系统中的噪声是均值为0的带限高斯白噪声，其单边功率谱密度为 n_0；并设发送的二进制码元为“0”和“1”，其发送先验概率分别为 $P(0)$ 和 $P(1)$，则有 $P(0)+P(1)=1$。

根据抽样定理，得到k个抽样值$\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，…，$\mathbf{n}_i$，…，$\mathbf{n}_k$，由于每个噪声电压抽样值都是服从正态分布的随机变量，其一维概率密度分布函数可以写为

$$f(n_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

式中：σ_n^2 为噪声的方差，即噪声平均功率，$i = 1, 2, \ldots, k$。

设接收噪声电压***n*(*t*)**的***k***个抽样值的***k***维联合概率密度函数为

$$f_k(n_1, n_2, \cdots, n_k)$$

由高斯噪声的性质可知，高斯噪声的概率分布通过带限线性系统后仍为高斯分布。带限高斯白噪声按奈奎斯特速率抽样得到的抽样值之间是互不相关、相互独立的。这样，此***k***维联合概率密度函数可以表示为

$$f_k(n_1, n_2, \cdots, n_k) = f(n_1) f(n_2) \cdots f(n_k) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{k} n_i^2\right)$$

当k很大时，在一个码元持续时间内接收的噪声平均功率可以表示为（其中通信系统基带截止频率小于 f_H ）

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 = \frac{1}{2 f_H T_s}\sum_{i=1}^{k} n_i^2$$

将上式左端的求和式写成积分式，则上式变成

$$\frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} n^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2 f_H T_s}\sum_{i=1}^{k} n_i^2$$

将上式代入k维联合概率密度函数表达式，并注意到 $\sigma_n^2 = n_0 f_H$ ，其中 n_0 为噪声单边功率谱密度。可得

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k}\exp\left[-\frac{1}{n_0}\int_0^{T_s} n^2(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$f(\mathbf{n})=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k}\exp\left[-\frac{1}{n_0}\int_0^{T_s}n^2(t)\mathrm{d}t\right]$$

式中，

$$f(\mathbf{n})=f_k(n_1,n_2,\cdots,n_k)=f(n_1)f(n_2)\cdots f(n_k)$$

$\mathbf{n}$ 为*k*维矢量，表示一个码元内噪声的*k*个抽样值。

在码元持续时间 T_s、噪声单边功率谱密度 n_0 和抽样数*k*（它和系统带宽有关）给定后，$f(\mathbf{n})$ 仅取决于该码元期间内噪声的能量 $\int_0^{T_s}n^2(t)\mathrm{d}t$。

由于噪声的随机性，每个码元持续时间内噪声的波形和能量都是不同的，这就使被传输的码元中有一些会发生错误，而另一些则无错。

设接收电压 $r(t)$ 为信号电压 $s(t)$ 和噪声电压 $n(t)$ 之和 $r(t)=s(t)+n(t)$

则在发送码元确定之后，接收电压 $r(t)$ 的随机性将完全由噪声决定，故它仍服从高斯分布，其方差仍为 σ_n^2，但是均值变为 $s(t)$。

所以，当发送码元“**0**”的信号波形为 $s_0(t)$ 时，接收电压 $r(t)$ 的 ***k***维联合概率密度函数为

$$f_0(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^{T_s}\left[r(t)-s_0(t)\right]^2\mathrm{d}t\right\}$$

式中，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}+\boldsymbol{n}$ 为***k***维矢量，表示一个码元内接收电压的***k***个抽样值。

同理，发送码元“**1**”的信号波形的***k***维联合概率密度函数为

$$f_1(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^{T_s}\left[r(t)-s_1(t)\right]^2\mathrm{d}t\right\}$$

8.2 数字信号的最佳接收

衡量数字通信系统传输质量的主要指标是误码率，即符号传输的错误概率。下面将误码率最小作为判断系统性能"最佳"的准则，并且主要考虑高斯白噪声引起的误码。

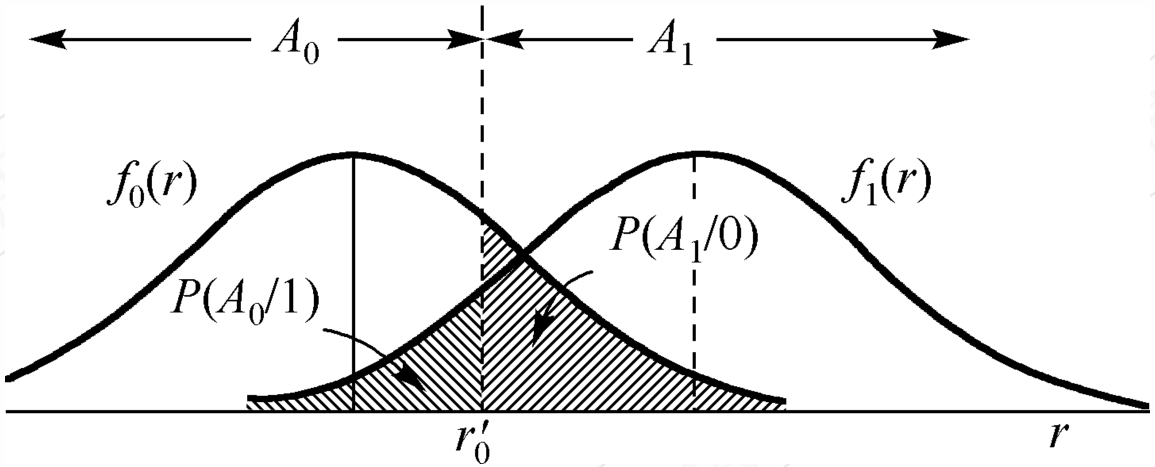
设在一个二进制通信系统中发送码元"1"的概率为 $P(1)$，发送码元"0"的概率为 $P(0)$，则总误码率 P_e 等于

$$P_e = P(1)P_{e1} + P(0)P_{e0}$$

式中，$P_{e1} = P(0/1)$ 为发送"1"时，收到"0"的条件概率；$P_{e0} = P(1/0)$ 为发送"0"时，收到"1"的条件概率；这二者称为错误转移概率。

接收设备需要对每个接收矢量作判决，判定它是发送码元"0"，还是"1"。

符号判决示意图



由接收矢量决定的两个联合概率密度函数$f_0(r)$和$f_1(r)$ 曲线如上图所示。

可以将此空间划分为两个区域 A_0 和 A_1，其边界是 r_0'，并将判决规则规定为：

- 若接收矢量落在区域 A_0 内，则判为发送码元是“0”；
- 若接收矢量落在区域 A_1 内，则判为发送码元是“1”。

显然，区域 A_0 和区域 A_1 是两个互不相容的区域。当这两个区域的边界 r_0' 确定后，错误概率也随之确定了。这样，总误码率可以写为

$$P_e = P(1)P(A_0/1) + P(0)P(A_1/0)$$

$P(A_0/1)$式中，表示发送“1”时，矢量A_0落在区域的条件概率，

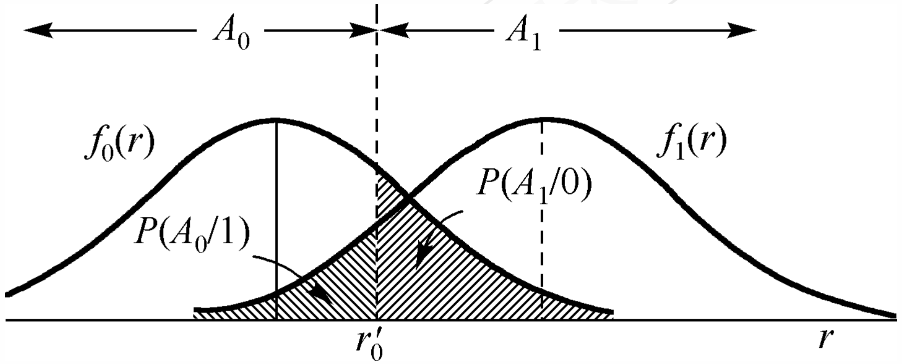
$P(A_1/1)$表示发送“0”时，矢量A_1落在区域的条件概率。

这两个条件概率可以写为

$$P(A_0/1)=\int_{A_0} f_1(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad P(A_1/0)=\int_{A_1} f_0(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$

将上两式代入总误码率公式可得

$$P_\mathrm{e}=P(1)\int_{A_0} f_1(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}+P(0)\int_{A_1} f_0(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=P(1)\int_{-\infty}^{\boldsymbol{r}_0'} f_1(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}+P(0)\int_{\boldsymbol{r}_0'}^{\infty} f_0(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$



为了求出使 P_e 最小的判决分界点 r_0'，上式对 求导

$$\frac{\partial P_e}{\partial \boldsymbol{r}_0'} = P(1) f_1(\boldsymbol{r}_0') - P(0) f_0(\boldsymbol{r}_0')$$

令函数等于0，求出最佳分界点的条件

$$P(1) f_1(\boldsymbol{r}_0) - P(0) f_0(\boldsymbol{r}_0) = 0$$

即

$$\frac{P(1)}{P(0)} = \frac{f_0(\boldsymbol{r}_0)}{f_1(\boldsymbol{r}_0)}$$

当 $P(1) = P(0)$ 时，$f_0(r_0) = f_1(r_0)$，所以最佳分界点位于符号判决示意图中两条曲线交点处的 r 值上。

在判决边界确定之后，按照接收矢量$\boldsymbol{r}$落在区域 应判为收到的是“0”的判决准则，这时有

$$\text{若}\ P(1)f_1(\boldsymbol{r})<P(0)f_0(\boldsymbol{r})\text{或}\frac{P(1)}{P(0)}<\frac{f_0(\boldsymbol{r})}{f_1(\boldsymbol{r})},\quad \text{则判为}''0''$$

反之

$$\text{若}\ P(1)f_1(\boldsymbol{r})>P(0)f_0(\boldsymbol{r})\text{或}\frac{P(1)}{P(0)}>\frac{f_0(\boldsymbol{r})}{f_1(\boldsymbol{r})},\quad \text{则判为}''1''$$

当发送“0”和发送“1”的先验概率相等时，即 $P(1)=P(0)$，上两式的条件简化为

$$\text{若}\ f_0(\boldsymbol{r})>f_1(\boldsymbol{r}),\ \text{则判为“0”}$$

$$\text{若}\ f_0(\boldsymbol{r})<f_1(\boldsymbol{r}),\ \text{则判为“1”}$$

这个判决准则常称为**最大似然准则**。按照这个准则判决就可以得到理论上最佳的误码率，即达到理论上的误码率最小值。

8.3 二进制确知信号的最佳接收

1、二进制确知信号的最佳接收机

假设到达接收机输入端的两个确知信号为 $s_0(t)$，$s_1(t)$，持续时间均为 T_s，且能量相等。输入噪声为高斯白噪声 $n(t)$，高白噪声均值为0，功率为 σ_n^2，单边功率谱密度为 n_0。可得输入信号的***k***维联合概率密度为

$$f_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^{T_s}\left[r(t)-s_0(t)\right]^2 \mathrm{d}t\right\}$$

$$f_1(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_n\right)^k}\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^{T_s}\left[r(t)-s_1(t)\right]^2 \mathrm{d}t\right\}$$

将上两式代入判决准则式

若 $\dfrac{P(1)}{P(0)} > \dfrac{f_0(\boldsymbol{r}_0)}{f_1(\boldsymbol{r}_0)}$，则判为“1”

若 $\dfrac{P(1)}{P(0)} < \dfrac{f_0(\boldsymbol{r}_0)}{f_1(\boldsymbol{r}_0)}$，则判为“0”

经简化，若

$$P(1)\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^{T_s}\left[r(t)-s_1(t)\right]^2\mathrm{d}t\right\}<P(0)\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^{T_s}\left[r(t)-s_0(t)\right]^2\mathrm{d}t\right\}$$

则发送码元判为 $s_0(t)$

若

$$P(1)\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^{T_s}\left[r(t)-s_1(t)\right]^2\mathrm{d}t\right\}>P(0)\exp\left\{-\frac{1}{n_0}\int_0^{T_s}\left[r(t)-s_0(t)\right]^2\mathrm{d}t\right\}$$

则发送码元判为 $s_1(t)$

对上面不等式求对数，可得，若

$$n_0\ln\frac{1}{P(1)}+\int_0^{T_s}\left[r(t)-s_1(t)\right]^2\mathrm{d}t>n_0\ln\frac{1}{P(0)}+\int_0^{T_s}\left[r(t)-s_0(t)\right]^2\mathrm{d}t$$

则发送码元判为 $s_0(t)$ $s_1(t)$，反之判为

再考虑两输入信号具有相同的能量，即

$$\int_0^{T_s} s_1^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{T_s} s_0^2(t)\mathrm{d}t$$

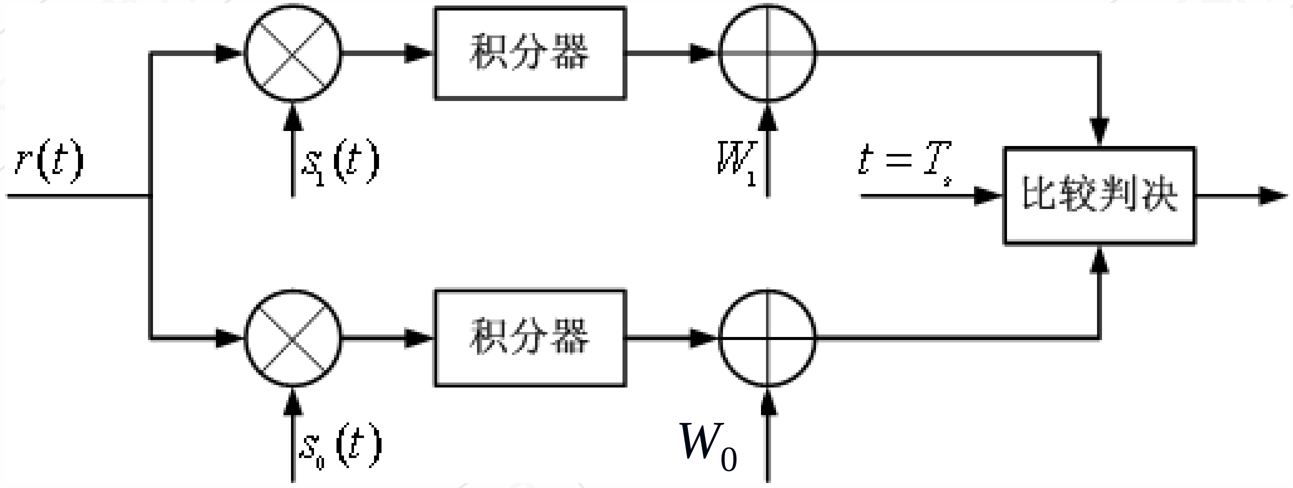
则上式可以化简为，若

$$W_1 + \int_o^{T_s} r(t)s_1(t)\mathrm{d}t < W_0 + \int_0^{T_s} r(t)s_0(t)\mathrm{d}t$$

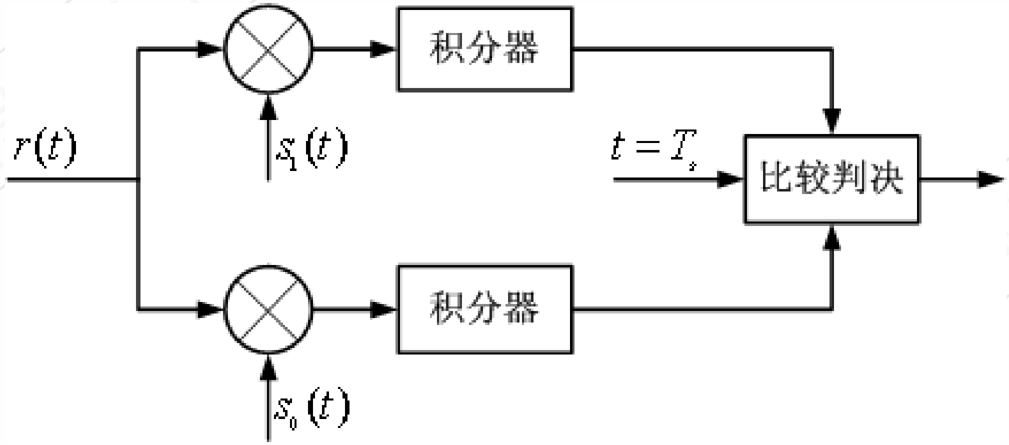
则发送码元判为 $s_0(t)$ $s_1(t)$，反之判为

其中 $\begin{cases} W_0 = \dfrac{n_0}{2}\ln P(0) \\ W_1 = \dfrac{n_0}{2}\ln P(1) \end{cases}$ 由先验概率决定的加权因子

由判决准则，可得二进制确知信号最佳接收机结构。



如果先验概率 $P(1)=P(0)$ ，则 $W_1 = W_0$ ，可得等概时的最佳接收机



2、二进制确知信号最佳接收的误码率

设发送 $s_1(t)$ 条件下，判为出现 $s_0(t)$ 的概率为 $P(0/1)$；发送 $s_0(t)$ 条件下，判为出现 $s_1(t)$ 的概率为 $P(1/0)$，则总的错误概率为

$$P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0)$$

其中

$$P(0/1) = P(\xi < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}dx$$

$$P(1/0) = P(\xi < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}dx$$

式中

$$a = \frac{n_0}{2}\ln\frac{P(0)}{P(1)} - \frac{1}{2}\int_0^{T_s}[s_1(t) - s_0(t)]^2 dt$$

$$b = \frac{n_0}{2}\ln\frac{P(1)}{P(0)} - \frac{1}{2}\int_0^{T_s}[s_0(t) - s_1(t)]^2 dt$$

$$\xi = \int_0^{T_s} n(t)\left[s_1(t) - s_0(t)\right]dt$$

$$E(\xi) = 0$$

$$\sigma_\xi^2 = D(\xi) = \frac{n_0}{2}\int_0^{T_s}[s_1(t) - s_0(t)]^2 dt$$

因此，总的误码率为

$$P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0)$$

$$= P(1)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}dx\right] + P(0)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}dx\right]$$

当 $P(0) = P(1) = 1/2$ 时，$a = b$，上式可简化为

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}dx$$

其中

$$c = -\frac{1}{2}\int_0^{T_s}[s_0(t) - s_1(t)]^2 dt$$

当先验概率相等时，对于给定的噪声功率，误码率仅和两种码元波形之差的能量有关，与波形本身无关。差别越大，**c**值越小，误码率也越小。

在噪声强度给定的条件下，误码率完全决定于信号码元的区别。给出定量地描述码元区别的一个参量，即码元的相关系数 ρ，其定义如下

$$\rho = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{\left[\int_0^{T_s} s_0^2(t)\mathrm{d}t\right]\left[\int_0^{T_s} s_1^2(t)\mathrm{d}t\right]}} = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{E_0E_1}}$$

式中，E_0、E_1 为信号码元的能量，有

$$E_0 = \int_0^{T_s} s_0^2(t)\mathrm{d}t, \qquad E_1 = \int_0^{T_s} s_1^2(t)\mathrm{d}t$$

当两码元的能量相等时，有 $E_0 = E_1 = E_b$，则有

$$\rho = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)\mathrm{d}t}{E_b}$$

$$c = -\frac{1}{2}\int_0^{T_s}[s_0(t)-s_1(t)]^2\,\mathrm{d}t = -E_b(1-\rho)$$

则误码率公式可写为

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}}\,\mathrm{d}x$$

对上式做代数变换，令 $z^2 = x^2/2\sigma_\xi^2$，则 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x/\sqrt{2}\sigma_\xi$ ，，有

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi} e^{-z^2}\sqrt{2}\sigma_\xi\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z$$

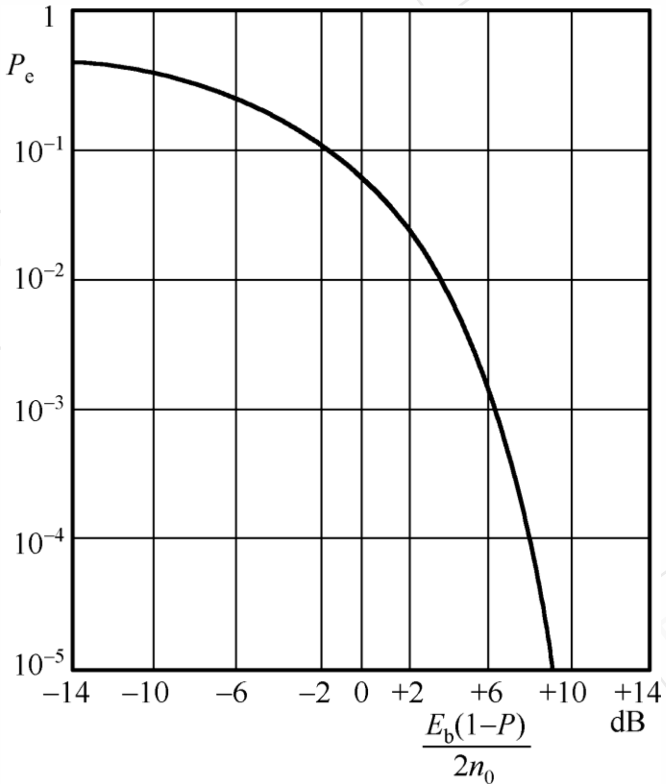
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi}^{\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi}^{\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1-\mathrm{erf}\left[\frac{E_b(1-\rho)}{\sqrt{2}\sigma_\xi}\right]\right\}$$

σ_{ξ}^{2} n_0 引入 与 的关系，可得误码率最终表达式

$$P_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\left[1-\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_{\mathrm{b}}(1-\rho)}{2n_0}}\right)\right]=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{E_{\mathrm{b}}(1-\rho)}{2n_0}}\right]$$

该式给出了理论上二进制等能量数字信号误码率最佳（最小可能）值，其对应的误码率曲线如图所示。



$$P_e = \frac{1}{2}\left[1 - \text{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}}\right)\right] = \frac{1}{2}\text{erfc}\left[\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}}\right]$$

相关系数对误码率的影响

两种码元的相关系数 ρ	误码率	调制方式
$\rho = 1$	$P_e = \frac{1}{2}$	
$\rho = -1$	$P_e = \frac{1}{2}\left[1 - \text{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}}\right)\right] = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}}\right)$	**2PSK**
$\rho = 0$	$P_e = \frac{1}{2}\left[1 - \text{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2n_0}}\right)\right] = \frac{1}{2}\text{erfc}\left[\sqrt{\frac{E_b}{2n_0}}\right]$	**2FSK**
其中一种码元的能量为零	$P_e = \frac{1}{2}\left(1 - \text{erf}\sqrt{\frac{E_b}{4n_0}}\right) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{4n_0}}\right)$	**2ASK**

8.4 匹配滤波

数字信号的接收是在抽样时刻按照抽样值对每个码元做出判决的，因此，信噪比越大，误码率越小。在用线性滤波器对接收信号进行滤波时，输出信噪比最大的最佳线性滤波器称为匹配滤波器。

设线性滤波器输入端加入信号与噪声的混合波形为

$$r(t)=s(t)+n(t),0\le t\le T_s$$

假定噪声为白噪声，双边功率谱密度 $P_n(f)=n_0/2$ $s(t)$，而信号的频谱密度函数为 $S(f)$。

令最佳线性滤波器的传输函数为 $H(f)$。根据线性电路的叠加原理，滤波器的输出电压 $y(t)$ 也包含有信号与噪声两部分，即

$$y(t) = s_o(t) + n_o(t)$$

其中，

$$s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi ft} df$$

输出噪声平均功率 N_o 为

$$N_o = \int_{-\infty}^{\infty} \left|H(f)\right|^2 \frac{n_0}{2} \mathrm{d}f = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|H(f)\right|^2 \mathrm{d}f$$

则线性滤波器在抽样时刻 t_0 上，输出信号瞬时功率与噪声平均功率之比为

$$r_o = \frac{\left|s_o(t_0)\right|^2}{N_o} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f) S(f) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t_0} \mathrm{d}f\right|^2}{\frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|H(f)\right|^2 \mathrm{d}f}$$

利用施瓦兹不等式，设计 $H(f)$，以获得 r_o 的最大值。

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx$$

当 $f_1(x)=kf_2^*(x)$ 时，该不等式的等号成立，**k**为常数。将此不等式用于 r_o 表达式右端的分子中，并令 $f_1(x)=H(f)$，$f_2(x)=S(f)e^{j2\pi f t_0}$

则可得

$$r_o \leqslant \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 \mathrm{d}f \int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 \mathrm{d}f}{\frac{n_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 \mathrm{d}f} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 \mathrm{d}f}{\frac{n_0}{2}} = \frac{2E}{n_0}$$

式中，$E=\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 df$ 为信号码元的能量。

当 $H(f)=kS^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$ 时，等号成立，即得到最大输出信噪比 $2E/n_0$

$H(f)$ 即为最佳接收滤波器传输特性，等于信号码元频谱的复共轭。

结论：在白噪声干扰的背景下，按 $H(f)=kS^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$ 设计的线性滤波器，将能在给定时刻 t_0 上获得最大的输出信噪比 $2E/n_0$。

这种滤波器就是最大信噪比意义下的最佳线性滤波器，由于它的传输特性与信号频谱的复共轭相一致（除相乘因子 $ke^{-j2\pi f t_0}$ 外），故又称它为匹配滤波器。

用冲激响应 $h(t)$ 来表示匹配滤波器的传输特性

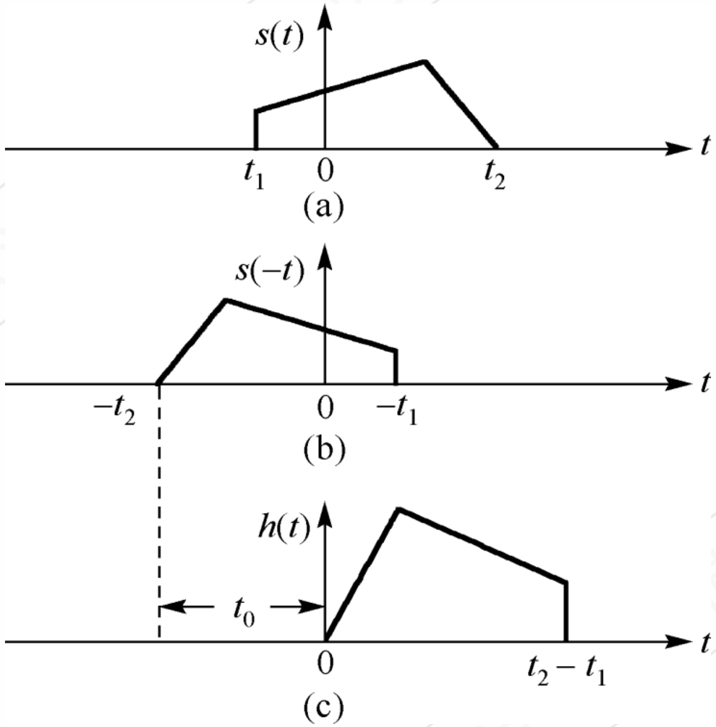
$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f=\int_{-\infty}^{\infty}kS^{*}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f$$

$$=k\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\right]^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f(t_0-t)}\mathrm{d}f$$

$$=k\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f(\tau-t_0+t)}\mathrm{d}f\right]s(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=k\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\delta(\tau-t_0+t)\mathrm{d}\tau$$

$$=ks(t_0-t)$$



由此可见，匹配滤波器的冲激响应便是信号 $s(t)$ 的镜象信号 $s(-t)$ 在时间轴上再向右平移 t_0，如图所示。

为了获得物理可实现的匹配滤波器，要求当 $h(t)=0$ 时有

为了满足这个条件，就要求满足

$$s(t_0 - t) = 0 \quad t < 0$$

$$s(t) = 0 \quad t > t_0$$ 即

该条件表明，物理可实现的匹配滤波器，其输入端的信号码元 $s(t)$ 在抽样时刻 t_0 之后必须为零。一般不希望在码元结束之后很久才抽样，故通常选在码元末尾抽样，即 $t_0 = T_s$。故匹配滤波器的冲激响应可以写为

$$h(t) = ks(T_s - t)$$

若匹配滤波器的输入信号为$s(t)$，匹配滤波器的输出信号波形可表示为

$$s_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau=k\int_{-\infty}^{\infty}s(t-\tau)s(T_s-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=k\int_{-\infty}^{\infty}s(-\tau')s(t-T_s-\tau')d\tau'$$

$$=kR(t-T_s)$$

由此可见，匹配滤波器的输出信号波形是输入信号的自相关函数的***k***倍，常把匹配滤波器看成一个相关器。

至于常数 ***k***，实际上它是可以任意选取的，因为 的最大值与***k***无关，因此，在分析问题时可令 。

匹配滤波器在二进制确知信号最佳接收中的应用

在最佳接收结构中，相关器是关键部件，而相关的实现可由匹配滤波器替代。

对信号 $s(t)$ 匹配的滤波器，其冲激响应为

$$h(t)=ks(T_s-t)$$

式中，k 为任意实数。

当 $r(t)$ 加入匹配滤波器时，输出可表示成

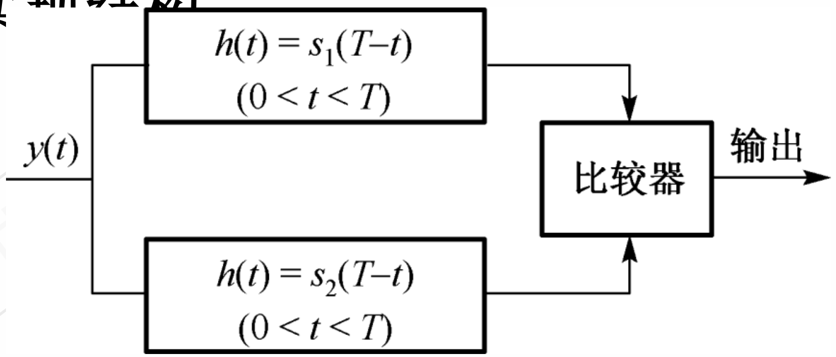
$$y(t)=r(t)*h(t)=k\int_{t-T_s}^{t}r(u)s(T_s-t+u)\mathrm{d}u$$

在抽样时刻 T_s，输出为

$$y(T_s)=k\int_{0}^{T_s}r(u)s(u)\mathrm{d}u$$

上式与相关器输出完全相同。结论：匹配滤波器在 $t=T_s$ 时刻的输出值恰好等于相关器的输出值，即匹配滤波器可以作为相关器。

可见，上式与相关器输出完全相同。由此得到一个重要结论：由于匹配滤波器在 $t = T$ 时刻的输出值恰好等于相关器的输出值，也即匹配滤波器可以作为相关器。由此，可得最佳接收机的另一种实现结构



比较器在每一个数字信号码元的结束时刻才给出最佳的判决结果。因此，判决时刻的任何偏离，都将直接影响接收机的最佳性能。