



نام و نام خانوادگی:

۲۲ آبان ۱۳۹۹

شماره‌ی دانش جویی:

زمان: ۱۵۰ دقیقه

مسئله‌ی ۱. کد هافمن [۱۲ نمره]

فرض کنید برای ساخت درخت کد هافمن از الگوریتم زیر استفاده کنیم. حروف الفبا را به دو دسته‌ی A و B به گونه‌ای افراز می‌کنیم که اختلاف تعداد تکرارهای حروف الفبا در A و B کمینه شود. به طور بازگشتی درخت کد هافمن را برای هر یک از این دو دسته می‌سازیم. سپس دو درخت به دست آمده برای A و B را به عنوان زیردرخت‌های ریشه‌ی درخت قرار می‌دهیم. اگر n تعداد حروف باشد، کوچک‌ترین مقدار n را بدست آورید که برای آن الگوریتم فوق درخت بهینه را تولید نکند.

مسئله‌ی ۲. ماتریس صفر و یک [۱۳ نمره]

فرض کنید درایه‌های یک ماتریس $n \times n$ اعداد ۰ و ۱ هستند. به ازای هر سطر و هر ستون تعداد یک‌های آن داده شده است. ماتریسی بسازید که تعداد یک‌ها و صفرهای آن با آنچه داده شده است مطابقت کند.

مسئله‌ی ۳. مستطیل با مجموع ماکزیمم [۱۵ نمره]

فرض کنید یک ماتریس $n \times n$ داده شده است که هر درایه آن یک عدد حقیقی (مثبت، منفی یا صفر) است. الگوریتمی از مرتبه $O(n^3)$ ارائه دهید که زیرمستطیلی (زیرماتریسی) از این ماتریس پیدا کند که مجموع درایه‌هایش ماکزیمم شود.

مسئله‌ی ۴. مسیرهای متمایز [۳۰ نمره]

فرض کنید درخت ریشه‌دار T با n گره و عدد طبیعی k داده شده است (درخت T لزوماً دودویی نیست). هدف پیدا کردن ماکزیمم تعداد مسیرهای نردبانی مجزای راسی به طول k در T است (k تعداد یال‌های مسیر است؛ مثلاً در شکل $k = 3$ است). منظور از مسیر نردبانی مسیری است که از یک گره آغاز و به سمت ریشه امتداد می‌یابد (به شکل دقت کنید).

۱. الگوریتمی حریصانه کارا برای محاسبه ماکزیمم تعداد مسیرهای نردبانی مجزای راسی به طول k در T ارائه دهید و آن را تحلیل کنید (زمان اجرا و درستی).

۲. فرض کنید به هر راس وزن مثبتی اختصاص داده شده باشد و وزن یک مسیر را مجموع وزن رئوس آن تعریف کنیم، اگر به جای ماکزیمم تعداد مسیرهای نردبانی مجزای راسی به طول k ، هدف پیدا کردن مسیرهای نردبانی مجزای راسی به طول k با مجموع وزن ماکزیمم باشد، با مثال نشان دهید الگوریتم حریصانه شما لزوماً درست کار نمی‌کند.

۳. برای قسمت دوم یک الگوریتم کارا ارائه دهید و آن را تحلیل کنید.



مسئله ۵. شمارش تعداد تقاطع‌ها [۳۰ نمره]

۱. فرض کنید دو مجموعه نقطه داده شده است: یکی مجموعه نقطه $\{p_1, \dots, p_n\}$ روی خط $y = 0$ و دیگر مجموعه نقطه $\{q_1, \dots, q_n\}$ روی خط $y = 1$. هر نقطه p_i را با پارخطی به نقطه متناظرش q_i وصل می‌کنیم. یک الگوریتم تقسیم و حل با زمان اجرای $O(n \log n)$ ارائه دهید که تعداد تقاطع این n پاره‌خط را پیدا کند.

۲. حال فرض کنید هر دو این مجموعه‌ها روی یک دایره به شعاع یک قرار دارند. مجدداً n پاره‌خط با وصل کردن p_i به q_i ایجاد می‌کنیم. یک الگوریتم تقسیم و حل با زمان اجرای $O(n \log^2 n)$ ارائه دهید که تعداد تقاطع‌ها را محاسبه کند.

۳. برای قسمت دوم یک الگوریتم از مرتبه $O(n \log n)$ ارائه دهید.

