حل سوالات میان‌ترم اول

آمار و احتمالات مهندسی
اردیبهشت ۱۴۰۰

نگارش: امیر نجفی

سوال ۱:

شما در یک مسابقه بخت‌آزمایی شرکت کرده‌اید. این مسابقه بی‌نهایت مرحله بالقوه دارد، که در هر مرحله (مستقل از سایر مراحل) با احتمال $1-p$ یک میلیون تومان جایزه دریافت کرده ولی با احتمال p خواهید باخت. در صورت باخت از مسابقه خارج شده و تمام جوایز کسب شده را نیز از دست می‌دهید. از طرف دیگر، پیش از وقوع یک باخت و در هر زمانی که اراده کنید می‌توانید جایزه جمع‌آوری شده تا آن لحظه را برداشته و از مسابقه خارج شوید.
بر خلاف اصرار مجری برنامه، واضح است که ادامه دادن بی‌حد این مسابقه کار به صلاحی نیست. چون بالاخره در مرحله‌ای خواهید باخت و چیزی عایدتان نمی‌شود. فرض کنید که تصمیم گرفته‌اید در صورت طی شدن m مرحله موفقیت‌آمیز جوایزتان را برداشته و خداحافظی کنید.

الف) در صورتیکه $m=1$ را انتخاب کنید، میانگین جایزه‌ای که دریافت می‌کنید چند میلیون تومان خواهد شد؟

ب) m چقدر باشد تا میانگین آماری جایزه کسب شده توسط شما بیشینه شود؟

حال فرض کنید که مجری به قصد تطمیع شما قوانین مسابقه را تغییر دهد. به صورتیکه در مرحله iام، مقدار i میلیون تومان جایزه ببرید (یعنی جوایز به صورت تصاعدی بیشتر شوند).

ج) در این صورت، دوباره مقداری m را به گونه‌ای بیابید که میانگین جایزه دریافتی‌تان بیشینه شود.

د) (**امتیازی**) آیا مجری می‌تواند قوانین تصاعد جوایز را طوری تنظیم کنید که شما نخواهید در هیچ مرحله‌ای از مسابقه خارج شوید؟ در این صورت حداقل میزان جایزه‌ای که مرحله iام می‌بایست دریافت کنید چقدر است؟

جواب:

الف) در صورت انتخاب $m = 1$، بازی فقط یک بار انجام خواهد شد. در نتیجه شما به احتمال $\mathbb{P}(\text{lose}) = p$ خواهید باخت و چیزی نمی‌گیرید، و با احتمال $\mathbb{P}(\text{win}) = 1 - p$ یک میلیون تومان جایزه می‌برید. پس داریم:

$$\mathbb{E}(\text{prize}) = (1-p) \times 1 + p \times 0 = 1 - p$$

پس جواب $1 - p$ است.

ب) برای پاسخ به این سوال ابتدا لازم است تا میانگین جایزه کسب شده را در صورت بازی m مرحله محاسبه کنیم. مشابه با مورد الف)، احتمال برد در هر مرحله مستقل از سایر مراحل $1 - p$ است. و شما در پایان m مرحله تنها در صورتی جایزه می‌برید که تمام m مرحله را برده باشید. در نتیجه احتمال بردن جایزه برابر با

$$\mathbb{P}(\text{win}) = (1-p)^m$$

است. به طبع، احتمال باخت و نبردن چیزی نیز

$$\mathbb{P}(\text{lose}) = 1 - (1-p)^m$$

است. در نتیجه، میانگین جایزه کسب شده برابر با

$$\mathbb{E}(\text{prize}) = m \times (1-p)^m + 0 \times \left[1 - (1-p)^m\right] = m(1-p)^m$$

است. در اینجا از این واقعیت استفاده شده که در صورت برنده شدن، شما حتما m میلیون تومان برنده شده‌اید.

واضح است که رابطه فوق به ازای یک مقدار از m بیشینه می‌شود. گام بعدی، مشتقگیری از میانگین جایزه نسبت به m، و بیشینه‌سازی آن است:

$$\frac{\partial}{\partial m}\mathbb{E}(\text{prize}) = \frac{\partial}{\partial m} m e^{-m\log\left(\frac{1}{1-p}\right)} = e^{-m\log\left(\frac{1}{1-p}\right)} - m\log\left(\frac{1}{1-p}\right) e^{-m\log\left(\frac{1}{1-p}\right)} = 0$$

در نتیجه، برای m^* یا تعداد بهینه مراحل خواهیم داشت:

$$1 - m^* \log\left(\frac{1}{1-p}\right) = 0 \Rightarrow m^* = \frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-p}\right)}$$

در واقع، m^* نزدیک‌ترین عدد صحیح به مقدار فوق است، به استثنای حالتی که $m^* \leq 1/2$ شود که در آن صورت $m^* = 1$ قابل قبول است. ولی در صورت رسیدن به همین مقدار فوق می‌توان تمام نمره را بدهید.

ج) تنها تفاوتی که با مورد ب) وجود دارد، مقدار جایزه است. در اینجا، مقدار جایزه در انتهای m مرحله برابر با

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}$$

است. در نتیجه، میانگین جایزه برابر با

$$\mathbb{E}(\text{prize}) = \frac{m(m+1)}{2}(1-p)^m$$

خواهد شد. در صورت مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$\left(\frac{2m+1}{2}\right) e^{m\log(1-p)} - \log\left(\frac{1}{1-p}\right)\left(\frac{m\,(m+1)}{2}\right) e^{m\log(1-p)} = 0$$

یا به صورت ساده‌تر:

$$\log\left(\frac{1}{1-p}\right) m^{*2} + \left(\log\left(\frac{1}{1-p}\right) - 2\right) m^* - 1 = 0$$

تا همین جا کافی بوده و نیازی به حل معادله درجه دو فوق نیست.

می‌توان دید که برای $p \ll 1$، جواب قسمت ب) تقریباً برابر با $m^* \simeq p^{-1}$ و جواب قسمت ج) تقریباً برابر با $m^* \simeq 2p^{-1}$ خواهد شد.

د) فرض کنید که شما در مرحله iام، مقدار $f\,(i)$ میلیون تومان جایزه می‌گیرید. تعریف میکنیم:

$$F\,(m) \triangleq \sum_{i=1}^{m} f\,(i)$$

در این صورت میانگین جایزه در مرحله mام برابر با

$$\mathbb{E}\left(\text{prize}\right) = F\,(m)\left(1-p\right)^m$$

خواهد شد. شما تنها در حالتی مایل به خروج از مسابقه نخواهید شد (در هیچ مرحله‌ای) که عبارت فوق مقدار بیشینه نداشته باشد. یعنی $F\,(m)$ می‌بایست به صورت نمایی با m زیاد شود تا کاهش نمایی $\left(1-p\right)^m$ را جبران نماید. در نتیجه، $f\,(i)$ نیز می‌بایست با i به صورت نمایی زیاد شود.

اما در این صورت، میانگین جایزه دریافتی همگرا نخواهد شد و لذا وجود نخواهد داشت. بیشینه کردن چیزی که وجود ندارد هم بی‌معنی است. در نتیجه، جواب به سوال ممکن نیست. مگر اینکه استراتژی شما از بیشینه کردن «میانگین جایزه دریافتی» به چیز دیگری تغییر یابد.

پس جواب به سوال منفی است، و میزانی از جایزه مرحله‌ای وجود ندارد که بیشینه میانگین جایزه دریافتی در بی‌نهایت اتفاق بیافتد. چون اگر میانگین وجود داشته باشد، در جایی بیشینه می‌شود. و در صورتیکه وجود نداشته باشد بیشینه‌سازی آن بی معنی است.

سوال ۲:

فرض کنید متحرکی در مبدأ مختصات ایستاده و سپس به صورت گام به گام شروع به یک حرکت تصادفی (Random walk) می‌کند. بدین صورت که در هر گام، مستقل از گام‌های پیشین، با احتمال‌های برابر ۱/۴ یک واحد به چپ، راست، بالا یا پایین حرکت می‌کند. فرض کنید که این متحرک k گام تصادفی را برداشته باشد.

الف) احتمال اینکه متحرک در این لحظه در نقطه (m,n) از مختصات ایستاده باشد چقدر است؟ (با فرض $m,n \in \mathbb{Z}$ و $k \geq |m| + |n|$)

ب) احتمال اینکه متحرک صرفاً در نقطه‌ای با $x = m$ (بدون هیچ شرطی روی محور y) ایستاده باشد چقدر است؟
ج) در صورتیکه بدانیم از k گام برداشته شده، دقیقاً تعداد k' (که داریم $k' \leq k$) گام در راستای محور x، یعنی چپ یا راست بوده‌اند، سوال بند ب) را دوباره پاسخ دهید.

جواب:

الف) فرض کنید متحرک در طی k گامی که برداشته، مقدار (r, l, u, d) گام را به ترتیب به سمت راست، چپ، بالا و پایین بردارد. همواره داریم $r + l + u + d = k$. چون قرار است در مختصه $x = m$ ایستاده باشد باید داشته باشیم: $r - l = m$، یا معادلاً $r = l + m$. همچنین، چون قرار است در مختصه $y = n$ نیز باشیم، داریم $u = d + n$.
دقت کنید که با توجه به استنتاجات بالا، اگر $k - |m| - |n|$ عددی زوج نشد، احتمال رسیدن به نقطه (m, n) در k گام صفر است.
در نتیجه، برای احتمال رسیدن به نقطه (m, n) می‌توان از توزیع چندجمله‌ای استفاده کرد. و خواهیم داشت:

$$P_{(m,n)} = \sum_{(l,r,u,d)\in S} \frac{k!}{l!r!d!u!} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

که برای مجموعه S داریم:

$$S = \left\{ \left(r, l, u, d\right) \;\middle|\; r, l, u, d \geq 0,\ r + l + u + d = k,\ r - l = m,\ u - d = n \right\}$$

تا همین‌جا برای جواب کافی است. اما می‌توان ساده‌تر هم کرد.
(نکته‌ای که شاید بعضی از دانشجویان موفق به دریافتن آن شده باشند این است که به ازای مقادیر دلخواه از k, m, n، برخی از نقاط صفحه دارای $P_{(m,n)} = 0$ هستند. یعنی به ازای نقطه‌ای مشخص مانند (m, n)، با برخی مقادیر k امکان ندارد بشود به آن رسید.)

ب) بدون از دست دادن کلیت مساله فرض کنید $m \geq 0$. در این صورت، می‌توان یک توزیع چندجمله‌ای با احتمال‌های $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ برای حرکت به راست، چپ و یا حرکت عمودی در نظر گرفت. در نتیجه، می‌توان نوشت:

$$P_m = \sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{k-m}{2} \right\rfloor} \frac{k!}{l!\left(l + m\right)!(k - 2l - m)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2l+m} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2l-m}$$

همچنین، به راحتی می‌توان استنتاج کرد که $P_m = P_{-m}$. پس می‌توانید در رابطه بالا m را به $|m|$ تغییر دهید.

ج) در صورت دانستن k' جواب بسیار ساده‌تر می‌شود (دقت کنید که مسئله کاملا یک بعدی خواهد شد. و احتمال حرکت به چپ یا راست هر کدام ۱/۲ خواهد بود):

$$P_{m|k'} = \binom{k'}{\frac{k'-|m|}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k'-|m|}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k'+|m|}{2}} = \binom{k'}{\frac{k'-|m|}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'}$$

در صورتیکه $k' - m$ عددی زوج نشد، $P_{m|k'}$ برابر با صفر است.

سوال ۳:

متغیرهای تصادفی X, Y به صورت i.i.d. و دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0,1]$ هستند. متغیرهای تصادفی جدید Z, W را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$Z = X + Y \quad , \quad W = X - Y$$

الف) آیا Z و W از یکدیگر مستقل‌اند؟ در صورت استقلال، آن را اثبات کرده و در صورت عدم استقلال، حداقل با ذکر یک حالت خاص وابستگی را نشان دهید.

ب) (**امتیازی**) اگر X, Y به جای توزیع یکنواخت، توزیع گاوسی استاندارد $\mathcal{N}(0,1)$ داشتند چطور؟

جواب:

الف) واضح است که وابسته هستند. برای مثال در صورتیکه بدانیم $Z = 2$، بدین معنی است که با احتمال یک داشته‌ایم $X = Y = 1$ و لذا مقدار $W = X - Y$ با احتمال یک برابر با صفر خواهد شد. اما در صورت ندانستن این مقدار، توزیع W یک چگالی احتمال مثلثی بین ۱ـ و ۱+ دارد. پس دانستن مقداری یکی از متغیرهای Z, W در مورد دیگر حاوی اطلاعات (information) است.
همین برای جواب به این سوال کافی است.

ب) این مورد در مباحثی که قرار بوده در امتحان پوشش داده بشود نبوده و هدف مشاهده نحوه فکر کردن دانشجوها است. و اما جواب: متغیرهای تصادفی X, Y مشترکاً گاوسی هستند (چون هر کدام گاوسی بوده و از هم مستقل‌اند)، پس ترکیبات خطی آنان نیز نسبت به یکدیگر مشترکاً گاوسی هستند.
از طرفی می‌توان دید که چون میانگین W, Z هر دو صفر است، داریم

$$\operatorname{cov}(W, Z) = \mathbb{E}\left((X+Y)(X-Y)\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(Y^2\right) = 0.$$

پس، W, Z متغیرهای تصادفی مشترکاً گاوسی و در عین حال ناهمبسته هستند. در نتیجه مستقل‌اند.

سوال ۴:

یک فرستنده قصد ارسال یک بیت اطلاعات را به یک گیرنده در نقطه‌ای دوردست دارد. توزیع این بیت دودویی که آن را با X نشان می‌دهیم، یک برنولی با احتمال موفقیت p است. یعنی $X \sim \text{Bern}\left(p, 1-p\right)$. در هنگام دریافت و به دلیل وجود نویز در محیط، گیرنده به جای دریافت مقدار اصلی X ارسال شده، مقدار تخریب شده $X+Z$ را دریافت می‌کند، که در اینجا $Z \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ یک متغیر تصادفی گاوسی مستقل از X است.

گیرنده که به جای دریافت یک مقدار گسسته صفر یا یک، حال یک عدد حقیقی پیوسته را دریافت کرده، به طریقه زیر گسسته‌سازی انجام می‌دهد: در صورتیکه مقدار دریافت شده از ۱/۲ کوچک‌تر بوده بیت دریافتی را صفر تلقی کرده، و در غیر این صورت آن را یک محسوب می‌کند.

الف) در صورتیکه بدانیم بیت ارسال مقدار واقعی $X=0$ را داشته، احتمال بروز خطا در تشخیص گیرنده چقدر است؟

ب) بدون دانستن مقدار X، احتمال اینکه گیرنده بیت ارسالی را به اشتباه تشخیص دهد چقدر است؟

جواب:

الف) در صورتیکه بدانیم بیت ارسالی مقدار صفر داشته، خطا تنها زمانی رخ خواهد داد که داشته باشیم $Z \geq \frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}\left(\text{Error} \,|\, X=0\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{1}{2}\right)$$

و با توجه به اینکه داریم $Z \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$، می‌توان برای خطا نوشت:

$$\mathbb{P}\left(Z \geq 0.5\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma}}^{\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(1 - \text{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$

لازم است که جواب آخر حتما بر اساس erf نوشته شود تا نحوه اثرگذاری σ در آن مشهود باشد. در غیر این صورت بخشی از نمره تعلق نخواهد گرفت.

ب) بدست آوردن احتمال خطای شرطی بسیار ساده است. لذا، خطای کل با استفاده از قانون احتمال کل بدست خواهد آمد:

$$\mathbb{P}\left(\text{Error}\right) = p\mathbb{P}\left(\text{Error} \,|\, X=1\right) + \left(1-p\right)\mathbb{P}\left(\text{Error} \,|\, X=0\right)$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\text{Error}\right) = p\mathbb{P}\left(Z \leq -0.5\right) + \left(1-p\right)\mathbb{P}\left(Z \geq 0.5\right)$$

که با توجه به متقارن بودن توزیع گاوسی با میانگین صفر حول مبدأ، داریم $\mathbb{P}\left(Z \leq -0.5\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq 0.5\right)$ و لذا:

$$\mathbb{P}\left(\text{Error}\right)=p\mathbb{P}\left(Z\geq 0.5\right)+\left(1-p\right)\mathbb{P}\left(Z\geq 0.5\right)=\mathbb{P}\left(Z\geq 0.5\right)=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$

که همان جواب قسمت الف) است.

سوال ۵:

متغیر تصادفی X را به صورت زیر می‌سازیم:
برای هر بار نمونه‌گیری از X، یک تاس nوجهی با احتمال‌های $\left(p_1,\ldots,p_n\right)$ را انداخته، و در صورت ظاهر شدن وجه i ام، از توزیع $\mathcal{N}\left(\mu_i,\sigma_i^2\right)$ یک نمونه می‌گیریم. مقادیر میانگین $\mu_1,\ldots,\mu_n\in\mathbb{R}$، انحراف معیارهای $\sigma_1,\ldots,\sigma_n\geq 0$ و احتمالات $p_1,\ldots,p_n$ مفروض و دانسته شده هستند.

الف) چگالی احتمال متغیر تصادفی X را بیابید.

متغیر تصادفی Y را نیز به صورت مستقل از X، با استفاده از یک تاس mوجهی با احتمالات $\left(p_1',\ldots,p_m'\right)$، و توزیع‌های گاوسی $\mathcal{N}\left(\mu_i',\sigma_i'^2\right)$ به طریقی مشابه با X تولید می‌کنیم. مشابه با قبل مقادیر میانگین $\mu_1',\ldots,\mu_m'\in\mathbb{R}$، انحراف معیارهای $\sigma_1',\ldots,\sigma_m'\geq 0$ و احتمالات $p_1',\ldots,p_m'$ مفروض و دانسته شده هستند.

ب) چگالی احتمال $X+Y$ را بیابید.

جواب:

الف) این بخش با استفاده از قانون احتمال کل قابل حل است. به شرط ظاهر شدن وجه iام، توزیع متغیر تصادفی X به صورت یک گاوسی با میانگین و انحراف معیار به ترتیب μ_i و σ_i خواهد بود. از طرفی، احتمال ظاهر شدن وجوه نیز مشخص و داده شده هستند. در نتیجه خواهیم داشت:

$$X\,|\,i\sim\mathcal{N}\left(\mu_i,\sigma_i^2\right)\Rightarrow f_X\left(x\,|\,i\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}e^{\frac{-\left(x-\mu_i\right)^2}{2\sigma_i^2}}$$

و طبق قانون احتمال کل داریم:

$$X\sim\sum_{i=1}^{n}p_i\mathcal{N}\left(\mu_i,\sigma_i^2\right)$$

ب) به دلیل استقلال دو متغیر تصادفی X,Y، چگالی احتمال جمع آنان از کانولوشن چگالی‌های توزیع تک تک آنها بدست خواهد آمد:

$$X+Y \sim \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \mathcal{N}\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)\right) * \left(\sum_{j=1}^{m} p'_j \mathcal{N}\left(\mu'_j, \sigma_j'^2\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p'_j \mathcal{N}\left(\mu_i, \sigma_i^2\right) * \mathcal{N}\left(\mu'_j, \sigma_j'^2\right)$$

که رابطه بالا به دلیل خاصیت پخشی کانولوشن برقرار است. از طرفی، از قبل می‌دانستیم که در صورت جمع دو متغیر تصادفی گاوسی مستقل (و وقوع کانولوشن میان توابع چگالی احتمال آنان)، توزیع متغیر تصادفی حاصله از این قرار خواهد بود: کماکان یک گاوسی با میانگینی برابر با جمع میانگین‌ها، و واریانسی برابر با مجموع واریانس‌های متغیرهای تصادفی مذکور است. در نتیجه، خواهیم داشت:

$$X+Y \sim \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p'_j \mathcal{N}\left(\mu_i + \mu'_j, \sigma_i^2 + \sigma_j'^2\right)$$

لذا توزیع حاصله نیز مانند خود توزیع‌های X, Y، متناظر با انداختن یک تاس mn وجهی با احتمال‌های $p_i p'_j$ است که در صورت ظاهر شدن وجه (i, j)ام، از یک توزیع گاوسی با میانگین $\mu_i + \mu'_j$ با واریانس $\sigma_i^2 + \sigma_j'^2$ نمونه می‌گیریم.

سوال ۶:

متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda > 0$ را در نظر بگیرید. گشتاور چهارم X یا $m_4 = \mathbb{E}\left(X^4\right)$ را محاسبه کنید.

جواب:

راه‌حل بسیار ساده است. داریم:

$$\mathbb{E}\left(X^4\right) = \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4} m_X(t)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)\bigg|_{t=0}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \frac{6\lambda}{(\lambda - t)^4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \frac{24\lambda}{(\lambda - t)^5}$$

در نتیجه، جواب آخر به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbb{E}\left(X^4\right) = \frac{24}{\lambda^4}$$

اگر کسی با انتگرال‌گیری جواب آخر را درست بدست آورده کل نمره را بگیرد. ولی اگر غلط بود، حداکثر ۱/۳ بارم سوال.