



گرد آورندگان: پویا اسمعیل آخوندی، امیرحسین عابدی، یاسمن زلفی، مهدی لطفیان، علیرضا نوروزی

مسئله ۱. بازم سکه بازی

میر و کاپیتان باهم بازی می کنند. آنها یک سکه ناعادلانه را بارها می اندازند. اگر دو بار پشت هم head بیاید، میر برنده شده و بازی تمام میشود و اگر دو بار پشت هم tail بیاید، کاپیتان می برد. اگر داشته باشیم $P(\text{head}) = p$ و بدانیم میر برنده شده است، احتمال آن که بار اول پرتاب head آمده باشد چقدر است؟ (۱۰ امتیاز)

مسئله ۲. توزیع توام

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع توام (PDF) زیر باشند:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{4}y & -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف

$f_{X|Y}(X|Y=y)$ را برای تمام y های بازه $[0, 1]$ بدست آورید. (۱ امتیاز)

ب

$P(X > 0 | Y = y)$ را برای y های $[0, 1]$ پیدا کنید. آیا به مقدار y بستگی دارد؟ (۲ امتیاز)

پ

آیا X و Y مستقل اند؟ (۲ امتیاز)

مسئله‌ی ۳. امیدریاضی شرطی

برای متغیرهای تصادفی X و Y داریم:

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < y < x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

اگر تابع چگالی حاشیه‌ای X برابر با $1: 0 < x < 1$ باشد، $f_X(x) = 2x$ باشد،

الف

تابع چگالی شرطی $f_X(x|y)$ را بدست آورید. (۲ امتیاز)

ب

امید ریاضی $E[X|Y]$ را بدست آورید. (۴ امتیاز)

پ

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = XY$ را بدست آورید. (۴ امتیاز)

مسئله‌ی ۴. ادعای تبلیغاتی

یک برند سیگار در تبلیغات خود بیان می‌کند که متوسط نیکوتین موجود در سیگارهای آن $1/5$ میلی گرم است که در مقایسه با سایر برندها کمتر است. یک گروه پژوهشی مستقل با آزمایش 100 نخ از سیگارهای این برند، می‌خواهد مشخص کند آیا ادعای این شرکت صحیح است یا مقدار نیکوتین سیگارهای آنها بیشتر از میزان ادعا شده است. با فرض اینکه انحراف معیار مقدار نیکوتین موجود در سیگارهای این برند $0/2$ میلی گرم است، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف

اگر p -value در آزمون فرض (Z -test) یک طرفه اجرا شده توسط این گروه برابر با $1/6$ درصد باشد، میانگین نمونه مورد استفاده آنها چقدر بوده است؟ (۵ امتیاز)

راهنمایی: H_0 : مقدار نیکوتین موجود در سیگارها $1/5$ میلی گرم باشد.

H_1 : مقدار نیکوتین موجود در سیگارها از $1/5$ میلی گرم بیشتر باشد.

ب

یک بازه اطمینان 99% برای میانگین نیکوتین موجود در سیگارهای این برند پیدا کنید. (۵ امتیاز)

مسئله ۵. مسابقه حیثیتی

کاپیتان در مسابقه بسکتبالی حساس در حال پرتاب پناستی است، احتمال موفقیت او به تشویق دانشجویان درس آمار و احتمال حاضر در سالن بستگی دارد. فرض کنید توزیع کیفیت تشویق دانشجویان از توزیع هندسی با پارامتر p $A \sim Geometric(p)$ پیروی کند. و p عددی ثابت بین ۰ و ۱ باشد. تعداد پرتاب‌های موفق کاپیتان از توزیع پواسون با پارامتر A ، $X \sim Poisson(\lambda = A)$ پیروی می‌کند.

الف

$MLE[A|X]$ را بدست آورید. (۵ امتیاز)

ب

$MAP[A|X]$ بدست آورید. (۱۰ امتیاز)

موفق باشید:)

Distribution	PMF/PDF and Support	Expected Value	Variance
Bernoulli Bern(p)	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = q = 1 - p$	p	pq
Binomial Bin(n, p)	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$	np	npq
Geometric Geom(p)	$P(X = k) = q^k p$ $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$	q/p	q/p^2
Negative Binomial NBin(r, p)	$P(X = n) = \binom{r+n-1}{r-1} p^r q^n$ $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$	rq/p	rq/p^2
Hypergeometric HGeom(w, b, n)	$P(X = k) = \binom{w}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{w+b}{n}$ $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$	$\mu = \frac{nw}{b+w}$	$\left(\frac{w+b-n}{w+b-1}\right) n \frac{\mu}{n} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)$
Poisson Pois(λ)	$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$	λ	λ
Uniform Unif(a, b)	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in (a, b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ $x \in (-\infty, \infty)$	μ	σ^2
Exponential Expo(λ)	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x \in (0, \infty)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma Gamma(a, λ)	$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} (\lambda x)^a e^{-\lambda x} \frac{1}{x}$ $x \in (0, \infty)$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{\lambda^2}$
Beta Beta(a, b)	$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $x \in (0, 1)$	$\mu = \frac{a}{a+b}$	$\frac{\mu(1-\mu)}{(a+b+1)}$
Log-Normal $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\log x - \mu)^2/(2\sigma^2)}$ $x \in (0, \infty)$	$\theta = e^{\mu + \sigma^2/2}$	$\theta^2(e^{\sigma^2} - 1)$
Chi-Square χ_n^2	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}$ $x \in (0, \infty)$	n	$2n$
Student- t t_n	$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)} (1 + x^2/n)^{-(n+1)/2}$ $x \in (-\infty, \infty)$	0 if $n > 1$	$\frac{n}{n-2}$ if $n > 2$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997