



نام و نام خانوادگی:

۳ آذر ۱۴۰۱

شماره‌ی دانش‌جویی:

زمان: ۱۲۰ دقیقه

## مسئله‌ی ۱. شمارنده [۱۲ نمره]

همان‌طور که قبلاً دیده بودیم هزینه‌ی سرشکن افزایش در یک شمارنده‌ی دودویی از مرتبه‌ی  $O(1)$  بود. حالا یک شمارنده دودویی در نظر بگیرید که در آن هزینه تغییر آمین بیت برابر  $i$  باشد. ثابت کنید در این حالت نیز بازهم هزینه سرشکن عمل افزایش  $O(1)$  است.

## مسئله‌ی ۲. صف و پشته [۱۳ نمره]

نشان دهید یک صف را تنها با استفاده از دو پشته می‌توان طوری پیاده‌سازی کرد که هزینه سرشکن هر عمل enqueue و dequeue از  $O(1)$  باشد.

## مسئله‌ی ۳. حدس و استقراء [۲۵ نمره]

برای تابع بازگشتی  $T(n)$  که در زیر تعریف آن آمده است با استقراء نشان دهید:  $T(n) = \Omega(n)$  و  $T(n) = O(n \log n)$ .

$$\forall n > 2 \exists n_1, n_2 \geq 1 : T(n) = T(n_1) + T(n_2) + \min(n_1, n_2), \quad n_1 + n_2 = n$$

آیا می‌توان همیشه نشان داد  $T(n) = \Theta(n \log n)$ ؟ چرا؟



## مسئله‌ی ۴. هرم کمینه [۲۵ نمره]

۱. یک هرم بیشینه حاوی ۶۴ عدد با کلیدهای ۱ تا ۶۴ است. بزرگترین عددی که می‌تواند در آخرین سطح این هرم قرار گیرد چه عددی است. دلیل خود را ذکر کنید.

۲. آرایه  $A[1 : 13] = 89, 19, 40, 17, 12, 10, 2, 5, 7, 11, 6, 9, 70$  را با کمترین جابجایی به هرم بیشینه تبدیل کنید (دلیل خود را ذکر کنید). دقت کنید در هر جابجایی می‌توانید دو خانه از این آرایه را جابجا کنید.

## مسئله‌ی ۵. تقسیم و حل [۲۵ نمره]

۱. در آرایه  $A[1 : n]$  هر خانه ۰ یا ۱ است. یک الگوریتم با زمان اجرای  $O(n)$  ارائه دهید که تعداد زوج‌های  $(i, j)$  را بدست آورد که  $i < j$  و  $(A[i], A[j]) = (1, 0)$ .

۲. فرض کنید دو مجموعه نقطه داده شده است: یکی مجموعه نقطه  $\{p_1, \dots, p_n\}$  روی خط  $y = 0$  و دیگر مجموعه نقطه  $\{q_1, \dots, q_n\}$  روی خط  $y = 1$ . هر نقطه  $p_i$  را با پارخطی به نقطه متناظرش  $q_i$  وصل می‌کنیم. یک الگوریتم تقسیم و حل با زمان اجرای  $O(n \log n)$  ارائه دهید که تعداد تقاطع این  $n$  پاره‌خط را پیدا کند. تحلیل زمان اجرا باید با استفاده از قضیه اصلی صورت گیرد.