



نام و نام خانوادگی:

۹ بهمن ۱۴۰۱

شماره‌ی دانش جویی:

زمان: ۱۵۰ دقیقه

**مسئله‌ی ۱. تصادفی [۱۲ نمره]**

الگوریتمی را در نظر بگیرید که ورودی  $a_1, \dots, a_n$  شامل  $n$  عدد مجزا را به ترتیب داده‌شده می‌خواند و هنگام خواندن  $a_i$  مقدار متغیر  $x$  را به احتمال  $1/i$  برابر  $a_i$  قرار می‌دهد. الگوریتم در پایان مقدار  $x$  را به عنوان خروجی گزارش می‌کند. با چه احتمالی خروجی الگوریتم برابر  $a_i$  است؟

**مسئله‌ی ۲. دی‌اف‌اس [۱۳ نمره]**

فرض کنید یک گراف بدون جهت و همبند ۵ راسی داریم که راس‌های آن با شماره‌های ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده‌اند. فرض کنید از راس ۱ DFS را اجرا می‌کنیم. فرض کنید تمام حالت‌هایی که DFS می‌تواند رئوس را ملاقات کند عبارتند از  $\langle 1, 2, 4, 3, 5 \rangle$ ,  $\langle 1, 3, 4, 2, 5 \rangle$  و  $\langle 1, 3, 5, 4, 2 \rangle$ . حال اگر از راس ۵ DFS را اجرا کنیم ترتیب ملاقات‌ها به چه شکل می‌تواند باشد. دلیل خود را بیان کنید.

**مسئله‌ی ۳. انتشار خبر [۲۰ نمره]**

فرض کنید گراف جهت‌دار  $G$  شامل  $n$  راس و  $m$  یال، روابط دوستی بین  $n$  فرد را مدل می‌کند. به عبارت دقیق‌تر از  $u$  به  $v$  یال وجود دارد اگر شخص  $u$  شخص  $v$  را بشناسد. در این شبکه هرگاه شخصی از یک خبر مطلع شود آن را به اطلاع همه‌ی دوستان خود می‌رساند. می‌خواهیم یک خبر مشخص را به اطلاع همه برسانیم. می‌خواهیم کم‌ترین تعداد افرادی را پیدا کنیم که با مطلع شدن آن‌ها از خبر، همه از خبر فوق مطلع شوند. الگوریتمی با زمان اجرای خطی برای حل این مسئله ارائه دهید.

**مسئله‌ی ۴. درهم‌سازی باز [۲۰ نمره]**

فرض کنید از درهم‌سازی با آدرس‌دهی باز و واریسی خطی برای درج اعداد صحیح در جدول درهم‌سازی  $H[0 \dots 10]$  استفاده شده است. می‌دانیم تابع درهم‌ساز بصورت  $h(x) = ax + b \bmod 11$  است که  $0 \leq a, b \leq 10$ . فرض کنید در حال حاضر جدول درهم‌ساز به صورت  $\langle 3, 12, 25, -, -, -, 18, -, 14, 36 \rangle = H[0 \dots 10]$  است که  $-$  نشان‌دهنده خانه خالی است. نشان دهید  $a$  و  $b$  بصورت یکتا قابل محاسبه است.

**مسئله‌ی ۵. درهم‌سازی سراسری [۲۰ نمره]**

خانواده‌ی  $H = \{h_1, \dots, h_k\}$  از توابع درهم‌ساز را در نظر بگیرید که  $h_i : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{0, 1\}$ . برای آنکه این خانواده یک خانواده‌ی درهم‌ساز سراسری باشد  $k$  حداقل چقدر باید باشد؟ (دلیل بیاورید) خانواده‌ی توابع  $H$  سراسری است اگر و فقط اگر به ازای هر  $u$  و  $v$  متمایز داشته باشیم  $Pr_{h \in H}[h(u) = h(v)] \leq \frac{1}{m}$  که  $m$  اندازه‌ی جدول درهم‌سازی است.

**مسئله‌ی ۶. دایکسترا [۲۰ نمره]**

ثابت کنید در حالت‌های زیر الگوریتم دایکسترا برای گراف بدون جهت  $G$  درست کار می‌کند.

۱. همه یال‌ها وزن مثبت داشته باشند به استثنای یال‌های خروجی از مبدا (source) که می‌توانند وزن منفی داشته باشند.
۲. همه یال‌ها وزن مثبت داشته باشند به استثنای یال‌های برشی که می‌توانند وزن منفی داشته باشند.