طراحي الگوريتمها

نيمسال اول ٩٩-٠٠

آزمون میانترم اول مدرس: آبام



نام و نام خانوادگی: شماره ی دانش جویی: شماره ی دانش جویی:

مسئلهی ۱. کد هافمن [۱۲ نمره]

فرض کنید برای ساخت درخت کد هافمن از الگوریتم زیر استفاده کنیم. حروف الفبا را به دو دسته ی A و B به گونهای افراز می کنیم که اختلاف تعداد تکرارهای حروف الفبا در A و B کمینه شود. به طور بازگشتی درخت کد هافمن را برای هر یک از این دو دسته می سازیم. سپس دو درخت به دست آمده برای A و B را به عنوان زیردرخت های ریشه ی درخت قرار می دهیم. اگر n تعداد حروف باشد، کوچک ترین مقدار n را بدست آورید که برای آن الگوریتم فوق درخت بهینه را تولید نکند.

مسئلهی ۲. ماتریس صفر و یک [۱۳ نمره]

فرض کنید درایههای یک ماتریس n imes n اعداد • و ۱ هستند. به ازای هر سطر و هر ستون تعداد یکهای آن داده شده است. ماتریسی بسازید که تعداد یکها و صفرهای آن با آنچه داده شده است مطابقت کند.

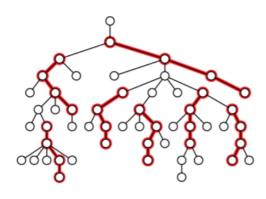
مسئلهی ۳. مستطیل با مجموع ماکزیمم [۱۵ نمره]

فرض کنید یک ماتریس $n \times n$ داده شده است که هر درایه آن یک عدد حقیقی (مثبت، منفی یا صفر) است. الگوریتمی از مرتبه $O(n^{"})$ ارائه دهید که زیرمستطیلی (زیرماتریسی) از این ماتریس پیدا کند که مجموع درایههایش ماکزیمم شود.

مسئلهی ۴. مسیرهای متمایز [۳۰ نمره]

فرض کنید درخت ریشه دار T با n گره و عدد طبیعی k داده شده است (درخت T لزوما دو دویی نیست). هدف پیدا کردن ماکزیمم تعداد مسیرهای نردبانی مجزای راسی به طول k در T است (k تعداد یالهای مسیر است؛ مثلاً در شکل m است). منظور از مسیر نردبانی مسیری است که از یک گره آغاز و به سمت ریشه امتداد می یابد (به شکل دقت کنید).

- ۱. الگوریتمی حریصانه کارا برای محاسبه ماکزیمم تعداد مسیرهای نردبانی مجزای راسی به طول k در T ارائه دهید و آن را تحلیل کنید (زمان اجرا و درستی).
- ۲. فرض کنید به هر راس وزن مثبتی اختصاص داده شده باشد و وزن یک مسیر را مجموع وزن رئوس آن تعریف کنیم، \mathbb{Z} اگر به جای ماکزیمم تعداد مسیرهای نردبانی مجزای راسی به طول \mathbb{Z} ، هدف پیدا کردن مسیرهای نردبانی مجزای راسی به طول \mathbb{Z} با مجموع وزن ماکزیمم باشد، با مثال نشان دهید الگوریتم حریصانه شما لزوما درست کار نمی کند.
 - ۳. برای قسمت دوم یک الگوریتم کارا ارائه دهید و آن را تحلیل کنید.



مسئلهی ۵. شمارش تعداد تقاطعها [۳۰ نمره]

- ۱. فرض کنید دو مجموعه نقطه داده شده است: یکی مجموعه نقطه $\{p_1,\dots,p_n\}$ روی خط y=0 و دیگر مجموعه نقطه $\{q_1,\dots,q_n\}$ روی خط y=0. هر نقطه $\{q_1,\dots,q_n\}$ را با پارخطی به نقطه متناظرش $\{q_1,\dots,q_n\}$ روی خط الگوریتم تقسیم و حل با زمان اجرای $\{q_1,\dots,q_n\}$ ارائه دهید که تعداد تقاطع این $\{q_1,\dots,q_n\}$ باره خط را پیدا کند.
- p_i کردن p_i کردن p_i کردن p_i کردن p_i کردن و این مجموعهها روی یک دایره به شعاع یک قرار دارند. مجددا p_i پارهخط با وصل کردن p_i به ایجاد می کنیم. یک الگوریتم تقسیم و حل با زمان اجرای $O(n\log^7 n)$ ارائه دهید که تعداد تقاطعها را محاسبه کند.
 - ۳. برای قسمت دوم یک الگوریتم از مرتبه $O(n \log n)$ ارائه دهید.

