



نام و نام خانوادگی:

۵ دی ۱۳۹۹

شماره‌ی دانش‌جویی:

زمان: ۱۵۰ دقیقه

مسئله‌ی ۱. صفحه‌ی شطرنج [۱۲ نمره]

یک صفحه‌ی شطرنج با اندازه $n \times n$ داریم که تعدادی از خانه‌های آن حذف شده‌اند. می‌خواهیم این صفحه‌ی شطرنج را با تعدادی دومینو (کاشی‌های 1×2 یا 2×1) بپوشانیم. الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای ارائه دهید که امکان انجام چنین کاری را بررسی کند.

مسئله‌ی ۲. تبدیل ارز [۱۳ نمره]

فرض کنید نرخ تبدیل n ارز موجود به یکدیگر را می‌دانیم. m ریال پول در اختیار داریم. می‌خواهیم بدانیم با چندین بار تبدیل پول و نهایتاً تبدیل آن به ریال می‌توانیم مقدار m را افزایش دهیم. الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای برای تشخیص چنین کاری ارائه دهید.

مسئله‌ی ۳. درخت پوشای کمینه [۲۰ نمره]

گراف وزن‌دار، همبند و بدون جهت G با n راس و m یال در نظر بگیرید که در آن وزن یال‌ها یکی از دو مقدار حقیقی a یا b است. الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(m)$ ارائه دهید که درخت پوشای کمینه G را محاسبه کند.

مسئله‌ی ۴. همه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها [۲۵ نمره]

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار و وزن‌دار باشد. وزن‌ها می‌توانند مثبت، منفی یا صفر باشند.

۱. چگونه می‌توان راسی مانند v را از این گراف حذف کرد بدون آنکه طول کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو راس دیگر تغییر نکند؟ الگوریتمی باز زمان اجرای $O(|V|^2)$ طراحی کنید که گراف $G' = (V', E')$ که $V' = V - \{v\}$ بسازد به گونه‌ای که طول کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو راس در G' برابر طول کوتاه‌ترین مسیر دو راس مشابه در G باشد.

۲. حال فرض کنید طول تمام کوتاه‌ترین مسیرها در G' را محاسبه کرده‌ایم. الگوریتمی طراحی کنید که در زمان $O(|V|^2)$ طول کوتاه‌ترین مسیر از v به بقیه رئوس و از بقیه رئوس به v را محاسبه کند.

۳. دو قسمت بالا را با هم ترکیب کنید تا یک الگوریتم از مرتبه‌ی $O(|V|^3)$ برای مسئله‌ی همه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها بدست آید.

مسئله‌ی ۵. جریان کمینه [۳۰ نمره]

شبکه‌ی شار $G = (V, E)$ با مبدا s و مقصد t را در نظر بگیرید و برای سادگی فرض کنید راس s یال ورودی ندارد. فرض کنید در این شبکه به ازای هر یال به جای ظرفیت یک تقاضا داده شده است. در واقع میزان جریان عبوری از یال (u, v) باید حداقل به میزان تقاضای داده شده $d(u, v)$ باشد. فرض کنید تقاضاها اعداد صحیح و نامنفی هستند. سوال طبیعی در این سناریو پیدا کردن جریان کمینه از s به t که همه تقاضاها را برآورده کند. اندازه جریان بطور مشابه مجموع جریان خارج شده از s می‌باشد. فرض کنید شبکه داده شده دارای این خاصیت است که اگر همه تقاضاها برابر یک باشد $(\forall (u, v) \in E : d(u, v) = 1)$ ، جریانی از s به t وجود دارد که همه تقاضاها را برآورده کند.

۱. با توجه به فرض‌های گفته شده، نشان دهید همیشه جریانی (نه لزوماً جریان کمینه) وجود دارد که همه تقاضاها را برآورده کند.
۲. حال فرض کنید شما مجاز به استفاده از تابعی هستید که می‌تواند مسئله شار بیشینه را در شبکه‌ای که وزن‌ها ظرفیت را نشان می‌دهند حل کند. الگوریتمی ارائه دهید که با یک بار فراخوانی این تابع مسئله شار کمینه از s به t را برای برآورده کردن تمامی تقاضاهای داده شده حل کند.
۳. نشان دهید در این مسئله، شار کمینه برابر برش بیشینه‌ای است که s را از t جدا می‌کند.