

1. 设 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

(a) 证明: $f(x)$ 是 \mathbb{F}_3 上的不可约多项式。

Solution.

$f(x)$ 的次数 $\deg f = 3$, 若 $f(x)$ 有次数最小的非常数因式 $p(x)$, 可知 $\deg p \leq \frac{\deg f}{2}$, 即 $\deg p = 1$, 即所有可能的 $p(x)$ 有这样的形式: $p(x) = x - a$, $a \in \mathbb{F}_3$, 所以只需验证 $\forall a \in \mathbb{F}_3$, 有 $f(a) \neq 0$, 即可证明 $f(x)$ 是 \mathbb{F}_3 上的不可约多项式。

$$\because f(0) = 1 \neq 0$$

$$f(1) = 4 = 1 \neq 0$$

$$f(2) = 17 = 2 \neq 0$$

所以 $f(x)$ 是 \mathbb{F}_3 上的不可约多项式。 ■

(b) 证明: 由 $f(x)$ 生成的 (主) 理想 $I = (f(x))$ 是多项式环 $\mathbb{F}_3[x]$ 中的极大理想。
ddasd