1. 为最终证明如下的定理：$\mathbb{F}_{q^n}$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上的自同构集是一个阶为 n 的循环群，其生成元为自同构 $\sigma_q(\alpha) = \alpha^p$，请依次完成以下四个小问的问题。

   (a) 证明：Frobenins 映射 $\sigma_q : \alpha \mapsto \alpha^q$ 是 $\mathbb{F}_{q^n}$ 的 $\mathbb{F}_q$-自同构，其中 $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}, q = p^m$，$p$ 为素数。

   (b) 取 β 是 $\mathbb{F}_{q^n}$ 中的生成元，即 $\mathbb{F}_{q^n} = \{0\} \cup < \beta >$，证明：$\beta, \sigma_q(\beta), \ldots, \sigma^{n-1}(\beta)$ 是 β 的共轭根。

   Solution.

   df ■

   (c) 取定整数 d 使得 $d|n$，对所有满足条件 $\sigma^d(\alpha) = \alpha, \alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ 的 α，在正规基底 $[\beta, \sigma(\beta), \sigma^2(\beta), \ldots, \sigma^{n-1}(\beta)]$ 下写出元素 α 的坐标：$\alpha = a_0\beta + a_1\sigma(\beta) + a_2\sigma^2(\beta) + \cdots + a_{n-1}\sigma^{n-1}(\beta)$，其中 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F}_q$。请确定系数 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ 之间的关系。