1. 设 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

(a) 证明：$f(x)$ 是 $\mathbb{F}_3$ 上的不可约多项式。

Solution.
$f(x)$ 的次数 $deg\ f = 3$，若 $f(x)$ 有次数最小的非常数因式 $p(x)$，可知 $deg\ p \leq \frac{deg\ f}{2}$，即 $deg\ p = 1$，即所有可能的 $p(x)$ 有这样的形式：$p(x) = x - a,\ a \in \mathbb{F}_3$，所以只需验证 $\forall a \in \mathbb{F}_3$，有 $f(a) \neq 0$，即可证明 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}_3$ 上的不可约多项式。

$$\begin{aligned} \because f(0) &= 1 \neq 0 \\ f(1) &= 4 = 1 \neq 0 \\ f(2) &= 17 = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}_3$ 上的不可约多项式。 ■

(b) 证明：由 $f(x)$ 生成的（主）理想 $I = (f(x))$ 是多项式环 $\mathbb{F}_3[3]$ 中的极大理想。