

1. 置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 σ^{-1} , $\sigma\tau\sigma^{-1}$, $\sigma\tau$, 并将 $\tau, \sigma\tau\sigma^{-1}$ 表示为一系列循环置换的乘积。

置换群 考察了简单概念, 求逆就是交换行, 列可以随意交换, 阅读书 p261-p263 即可理解

Solution.

$$\sigma^{-1} \stackrel{\text{交换行}}{=} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau\sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

将 $\tau, \sigma\tau\sigma^{-1}$ 表示为一系列循环置换的乘积:

$$\tau = (1, 5, 3, 4, 2, 6)$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (1, 4, 2, 5, 3, 6)$$

■

2. 设 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

(a) 证明: $f(x)$ 是 \mathbb{F}_3 上的不可约多项式。

Solution.

$f(x)$ 的次数 $\deg f = 3$, 若 $f(x)$ 有次数最小的非常数因式 $p(x)$, 可知 $\deg p \leq \frac{\deg f}{2}$, 即 $\deg p = 1$, 即所有可能的 $p(x)$ 有这样的形式: $p(x) = x - a, a \in \mathbb{F}_3$, 所以只需验证 $\forall a \in \mathbb{F}_3$, 有 $f(a) \neq 0$, 即可证明 $f(x)$ 是 \mathbb{F}_3 上的不可约多项式。

$$\because f(0) = 1 \neq 0$$

$$f(1) = 4 = 1 \neq 0$$

$$f(2) = 17 = 2 \neq 0$$

所以 $f(x)$ 是 \mathbb{F}_3 上的不可约多项式。 ■

(b) 证明: 由 $f(x)$ 生成的 (主) 理想 $I = (f(x))$ 是多项式环 $\mathbb{F}_3[x]$ 中的极大理想。

Solution.

若存在 M 为 $\mathbb{F}_3[x]$ 的理想且 M 真包含 I 的情况下 (即 $M \supsetneq I$), 则必定存在一个不属于 I 的多项式 $g(x) \in M \setminus I$, 使得 $f(x) \nmid g(x)$ 。

因为 $f(x)$ 为不可约多项式, 所以有 $(f(x), g(x)) = 1$, 由广义欧几里得除法以及广义 Bézout 定理可知:

$$\exists s(x), t(x) \in \mathbb{F}_3[x] \text{ s.t. } s(x)f(x) + t(x)g(x) = 1$$

由理想的定义可知, 若 $f(x), g(x) \in M, s(x), t(x) \in \mathbb{F}_3[x]$, 则 $s(x)f(x) + t(x)g(x) = 1 \in M$, 故 $M = \mathbb{F}_3[x]$, 即 I 与 $\mathbb{F}_3[x]$ 之间不存在中间理想, 所以由 $f(x)$ 生成的 (主) 理想 $I = (f(x))$ 是多项式环 $\mathbb{F}_3[x]$ 中的极大理想。 ■

3. 为最终证明如下的定理: \mathbb{F}_{q^n} 在 \mathbb{F}_q 上的自同构集是一个阶为 n 的循环群, 其生成元为自同构 $\sigma_q(\alpha) = \alpha^q$, 请依次完成以下四个小问的问题。

(a) 证明: Frobenius 映射 $\sigma_q: \alpha \mapsto \alpha^q$ 是 \mathbb{F}_{q^n} 的 \mathbb{F}_q -自同构, 其中 $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}, q = p^m, p$ 为素数。

知识点 素域及域的特征 p272-273, 自同态、自同构, 二项展开, 映射

Solution.

取任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{q^n}$, 有

$$\sigma_q(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^q = \alpha^q + \beta^q + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{q!}{k!(q-k)!} \alpha^k \beta^{q-k}$$

因为域 $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^m}$ 由域 \mathbb{F}_p 扩张得到, 而域 \mathbb{F}_{q^n} 由域 \mathbb{F}_q 扩张得到, p 为素数, 所以域 \mathbb{F}_p 为域 \mathbb{F}_{q^n} 的素域, 域 \mathbb{F}_{q^n} 的特征 $\text{char}(\mathbb{F}_{q^n}) = p$, 由域的特征的定义可知对 $\forall \gamma \in \mathbb{F}_{q^n}$:

$$p \cdot \gamma = 0$$

$$\Rightarrow q \cdot \gamma = p^m \cdot \gamma = 0$$

$$\because 1 \leq k \leq q-1, (q, k!(q-k)!) = 1, \therefore q \sum_{k=1}^{q-1} \frac{(q-1)!}{k!(q-k)!} \alpha^k \beta^{q-k} = 0, \text{ 即}$$

$$\sigma_q(\alpha + \beta) = \alpha^q + \beta^q + q \sum_{k=1}^{q-1} \frac{(q-1)!}{k!(q-k)!} \alpha^k \beta^{q-k} = \alpha^q + \beta^q = \sigma_q(\alpha) + \sigma_q(\beta)$$

所以映射 σ_q 保持加法。又因为

$$\sigma_q(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^q = \alpha^q \beta^q = \sigma_q(\alpha) \sigma_q(\beta)$$

所以映射 σ_q 保持乘法。由同态的定义可知, σ_q 是 \mathbb{F}_{q^n} 的自同态, 要证明 σ_q 是 \mathbb{F}_{q^n} 的自同构, 只需证明 σ_q 为一一映射即可:

- i. 先证明 σ_q 为单射, 即证 $\ker(\sigma_q) = \{0\}$, 其中 0 为有限域 \mathbb{F}_{q^n} 的加法零元, 其中 $\ker(\sigma_q) = \{a \in \mathbb{F}_{q^n} | \sigma_q(a) = 0\}$, 即被 σ_q 映射至加法零元的元素集合。
 $\because \sigma_q(a) = a^q = 0 \Rightarrow a = 0, \therefore \ker(\sigma_q) = 0$, 所以 σ_q 为单射。
- ii. 再证 σ_q 为满射, 由于 \mathbb{F}_{q^n} , 故 σ_q 单射必须是满的。

所以 σ_q 为 \mathbb{F}_{q^n} 的自同构。因为有限域 \mathbb{F}_q 中一共只有 q 个元素, 其中元素的指数是 q 的因数, 所以对 $\forall a \in \mathbb{F}_q, \sigma_q(a) = a^q = a$, 所以 σ_q 为 \mathbb{F}_{q^n} 的 \mathbb{F}_q -自同构, 不动元是 \mathbb{F}_q 。 ■

- (b) 取 β 是 \mathbb{F}_{q^n} 中的生成元, 即 $\mathbb{F}_{q^n} = \{0\} \cup \langle \beta \rangle$, 证明: $\beta, \sigma_q(\beta), \dots, \sigma_q^{n-1}(\beta)$ 是 β 的共轭根。

Solution.

取 $f(x)$ 为生成元 β 的定义多项式, 则 $f(x)$ 的形式可表示为 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0, a_i \in \mathbb{F}_q$, 当 $f(\beta) = \beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \dots + a_1\beta + a_0 = 0$ 时, 有:

$$\begin{aligned} \sigma_q(f(\beta)) &= \sigma_q(\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \dots + a_1\beta + a_0) \\ &= \sigma_q(\beta^n) + \sigma_q(a_{n-1}\beta^{n-1}) + \dots + \sigma_q(a_1\beta) + \sigma_q(a_0) \\ &= \sigma_q(\beta^n) + \sigma_q(a_{n-1})\sigma_q(\beta^{n-1}) + \dots + \sigma_q(a_1)\sigma_q(\beta) + \sigma_q(a_0) \\ &= \sigma_q(\beta)^n + a_{n-1}\sigma_q(\beta)^{n-1} + \dots + a_1\sigma_q(\beta) + a_0 \\ &= f(\sigma_q(\beta)) \end{aligned}$$

因为 $\sigma_q(f(\beta)) = \sigma_q(0) = 0 = f(\sigma_q(\beta))$, 所以 $\sigma_q(\beta)$ 也是定义多项式 $f(x)$ 的根。
 归纳地可以得到: $\sigma_q^2(\beta), \sigma_q^3(\beta), \dots, \sigma_q^{n-1}(\beta)$ 也都是定义多项式 $f(x)$ 的根。
 由于 $f(x)$ 一共有 n 个根, 所以 $\beta, \sigma_q(\beta), \dots, \sigma_q^{n-1}(\beta)$ 是 β 的 $f(x)$ 的 n 个不同的根。 ■

- (c) 证明: $\forall \tau \in G = \text{Aut}_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$, 存在 i 使得 $\tau(\beta) = \sigma_q^i(\beta)$, $0 \leq i \leq n-1$, 其中 β 为域 \mathbb{F}_{q^n} 的生成元。

Solution.

因为映射 τ 保持域 \mathbb{F}_q 中的元素不动, 所以有

$$\begin{aligned} f(\tau(\beta)) &= \tau(\beta)^n + a_{n-1}\tau(\beta)^{n-1} + \dots + a_1\tau(\beta) + a_0 \\ &= \tau(\beta^n) + a_{n-1}\tau(\beta^{n-1}) + \dots + a_1\tau(\beta) + a_0 \\ &= \tau(\beta^n) + \tau(a_{n-1})\tau(\beta^{n-1}) + \dots + \tau(a_1)\tau(\beta) + \tau(a_0) \\ &= \tau(\beta^n) + \tau(a_{n-1}\beta^{n-1}) + \dots + \tau(a_1\beta) + \tau(a_0) \\ &= \tau(\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \dots + a_1\beta + a_0) \\ &= \tau(f(\beta)) = \tau(0) = 0 \end{aligned}$$

可见 $\tau(\beta)$ 也是 $f(x)$ 的根, 又因为 $\beta, \sigma_q(\beta), \dots, \sigma_q^{n-1}(\beta)$ 是 β 的 $f(x)$ 的所有 n 个不同的根, 所以必然存在 i , 使得 $\tau(\beta) = \sigma_q^i(\beta)$, $0 \leq i \leq n-1$ 。 ■

- (d) 取定整数 d 使得 $d|n$, 对所有满足条件 $\sigma^d(\alpha) = \alpha, \alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ 的 α , 在正规基底 $[\beta, \sigma(\beta), \sigma^2(\beta), \dots, \sigma^{n-1}(\beta)]$ 下写出元素 α 的坐标: $\alpha = a_0\beta + a_1\sigma(\beta) + a_2\sigma^2(\beta) + \dots + a_{n-1}\sigma^{n-1}(\beta)$, 其中 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}_q$ 。请确定系数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 之间的关系。

Solution.

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0\beta + a_1\sigma(\beta) + a_2\sigma^2(\beta) + \dots + a_{n-1}\sigma^{n-1}(\beta) \\ \sigma^d(\alpha) &= \sigma^d(a_0\beta + a_1\sigma(\beta) + a_2\sigma^2(\beta) + \dots + a_{n-1}\sigma^{n-1}(\beta)) \\ &= \sigma^d(a_0\beta) + \sigma^d(a_1\sigma(\beta)) + \sigma^d(a_2\sigma^2(\beta)) + \dots + \sigma^d(a_{n-1}\sigma^{n-1}(\beta)) \\ &= \sigma^d(a_0)\sigma^d(\beta) + \sigma^d(a_1)\sigma^d(\sigma(\beta)) + \sigma^d(a_2)\sigma^d(\sigma^2(\beta)) + \dots + \sigma^d(a_{n-1})\sigma^d(\sigma^{n-1}(\beta)) \\ &= a_0\sigma^d(\beta) + a_1\sigma^{d+1}(\beta) + a_2\sigma^{d+2}(\beta) + \dots + a_{n-1}\sigma^{d+n-1}(\beta) \end{aligned}$$

$\because \sigma^d(\alpha) = \alpha$ 且 σ^n 为恒等映射, 对比相应基底的系数可知: 排列 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ 循环右移 d 位后与原先的排列相同。也就是说:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_d = a_{2d} = \dots = a_{(\frac{n}{d}-1)d} \\ a_1 &= a_{d+1} = a_{2d+1} = \dots = a_{(\frac{n}{d}-1)d+1} \\ &\dots \\ a_{d-1} &= a_{2d-1} = a_{3d-1} = \dots = a_{n-1} \end{aligned}$$

回到题目的问题, 系数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 之间的关系就是每隔 d 项的系数相等, 独立的系数只有 $d-1$ 个, 将系数相同的基底合并起来可以写成如下的抽象的形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\sigma_q^d) &= \{\alpha | \sigma^d(\alpha) = \alpha\} \\ &= \{a_0\gamma + a_1\sigma(\gamma) + a_2\sigma^2(\gamma) + \dots + a_{d-1}\sigma^{d-1}(\gamma) | \gamma = \beta + \sigma^d(\beta) + \sigma^{2d}(\beta) + \dots \\ &\quad + \sigma^{(\frac{n}{d}-1)d}(\beta)\} \end{aligned}$$

其中 a_0 到 a_{d-1} 是独立的系数个数, γ 为相同系数的基底合并后的简写。

具体来说 取 $n = 8, d = 2, d|n$, 所以 $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ 循环右移 2 位后为 $(a_6, a_7, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, 与原先相等, 即

$$\begin{aligned} &(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \\ &= (a_6, a_7, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \end{aligned}$$

所以 $a_0 = a_2 = a_4 = a_6, a_1 = a_3 = a_5 = a_7$, α 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\sigma_q^d) &= \{\alpha | \sigma^d(\alpha) = \alpha\} \\ &= \{a_0\gamma + a_1\sigma(\gamma) | \gamma = \beta + \sigma^2(\beta) + \sigma^4(\beta) + \sigma^6(\beta)\} \end{aligned}$$

