Faculté des Sciences de Monastir
Département de Physique

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICES CORRIGES

PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE SCIENTIFIQUE

L OTFI BEJI
AHMED REBEY
BELKACEM EL JANI

Cinématique du point matériel (I)

Exercice 1

Soit un repère fixe R_0 (0,x,y,z) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et M un point défini dans R_0 par ces cordonnées :

x=cosα, y= sinα, z=sin$^2\alpha$, ; avec α un paramètre réel .

Soit M_0 la position de M pour α=0, et S la longueur de l'arc M_0M.

a-Trouver les vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ de **Serret-Frenet** en M.

b-Calculer le rayon de courbure ρ. Pour α=0, vérifier que $\rho = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Exercice 2

Soit un point matériel repéré par ces cordonnées cylindriques ρ, φ, et z telles que :

$\rho = at^2, z = at, \varphi = \omega t,$ où a et ω sont des constantes.

1-Calculer les composantes cylindriques du vecteur vitesse.

2- On déduire les composantes cylindriques du vecteur accélération.

3- Calculer les modules des vecteurs $\vec{V} et \vec{\gamma}$.

Exercice 3

Soit un mobile M se déplaçant sur une branche d'hyperbole dans un repère R (o,$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

M est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ =x(t) $\vec{i} + \frac{a}{x(t)}\vec{j}$, avec a constante positive et x(t) = at.

1- Déterminer les vecteurs unitaires de **Serret-Frenet** en fonction des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$, et $\vec{k}$

2- Calculer le rayon de courbure $\rho(t)$ et le centre de courbure C.

3- Tracer l'hodographe

Exercice 4

Dans le plan (Oxy), le mouvement d'un point P est déterminé par les équations paramétriques :

x=v_0 t cosα , $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ où v_0 est la vitesse initiale de P et α est l'angle que fait v_0 avec l'axe Ox.

1- quelle est la nature de la trajectoire ?

2- Déterminer :

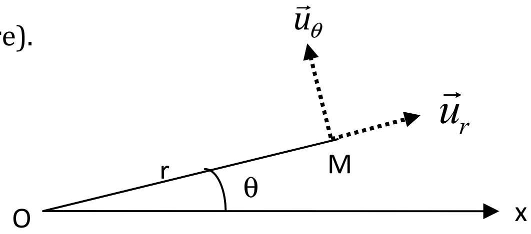
- Les accélérations normales et tangentielles.
- Le rayon de courbure $\rho(t)$ ainsi que le centre de courbure C(t)
- Les expressions des vecteurs unitaires de **Serret-Frenet**.

3- Trouver l'angle entre les vecteurs vitesses et accélérations au point où la trajectoire recoupe l'axe Ox.

Exercice 5

Le mouvement d'un point matériel M dans un plan est défini par les équations paramétriques suivantes : $r(t)=r_0 exp(-\frac{t^2}{\tau^2})$; $\theta(t)=\frac{t^2}{\tau^2}$ où r_0 et τ étant deux constantes positives.

On appellera $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}_\theta$ le vecteur qui lui est directement perpendiculaire (voir figure).



1- Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ ainsi que son module.

2- Evaluer l'angle entre le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ de la tangente à la trajectoire en M et le vecteur unitaire radiale. Que peut –on dire de cet angle ?

3- Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(M)$. En déduire ses composantes tangentielle et normale dans la base de Serret-Frenet $(\vec{u}_r, \vec{u}_N, \vec{B})$.

4- Calculer le rayon de courbure ainsi que le centre de courbure de la trajectoire à l'instant t.

Exercice 6

Un mobile assimilé à un point matériel M a pour coordonnées à l'instant t

$$X(t) = v_0\, t \cos \omega t \,;\; y(t) = v_0\, t \sin \omega t \,;\; z(t)=0$$

où v_0 et ω sont des constantes positives.

1- Donner les expressions vectorielles de la vitesse instantanée et de l'accélération instantanée de M ainsi que leurs modules.

2- Calculer les composantes tangentielles et normales de l'accélération ainsi que le rayon de courbure.

3- Lorsque v_0= 50 $\mu m / s$ et $\omega=\frac{2\pi}{3}$, déterminer entre l'instant t=0 et t_s= 6 mn

a- L'équation de la trajectoire. Tracer cette trajectoire

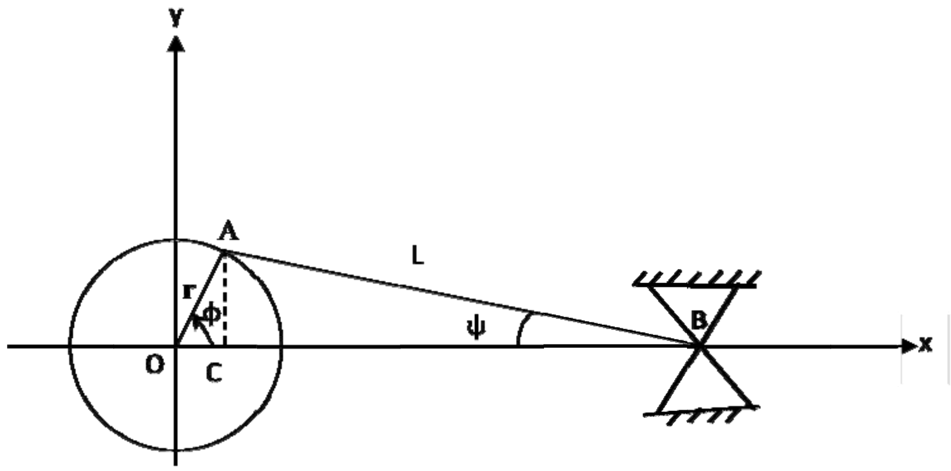
b- La longueur curviligne S parcourue par M.

c- Représenter les différents vecteurs vitesses et accélérations aux instants : t= 0, t =3 mn et t = 4 mn 30 s.

Exercice 7

Soit un plan rapporté au système d'axes (Oxy) (voir figure).

Dans ce plan une manivelle OA tel que $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = r$ est animée d'un mouvement circulaire uniforme autour du point fixe 0, ce qui revient à dire que l'angle $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = \omega t$ avec ω = cte.



- Figure -

Dans son point A, la manivelle est articulée sur la bielle AB tel que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ =l, cette dernière met en mouvement par l'intermédiaire d'une articulation un point matériel B qui se déplace suivant Ox entre deux glissières de guidage parallèles.

1- Donner l'équation du mouvement du point matériel B. (On posera $\lambda = \frac{r}{l}$)

L'équation du mouvement sera donné en fonction de $r, l, \lambda, \omega,$ et t

2- En déduire la vitesse et l'accélération du point B.

3- Dans l'hypothèse où λ << 1 donner des expressions approchées de l'équation du mouvement, de la vitesse et de l'accélération du point B.

Solution des exercices

Exercice 1

a- $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} + 2\sin 2\alpha\,\vec{k}\,)$

$\|\vec{v}\| = \dot{\alpha}\ \ \sqrt{1+\sin^2 2\alpha}$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{-\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j} + 2\sin 2\alpha\vec{k}}{\sqrt{1+\sin^2 2\alpha}};\quad \vec{u}_N = \frac{\frac{d\vec{\tau}}{ds}}{\left\|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right\|};\qquad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 2\alpha}}\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} = \frac{\left[-\cos\alpha\ \ (1+\sin^2 2\alpha) + \sin\alpha\sin 4\alpha\right]\vec{i} - \left[\sin\alpha(1+\sin^2 2\alpha) + \cos\alpha\sin 4\alpha\right]\ \vec{j} + 2\cos 2\alpha\,\vec{k}}{(1+\sin^2 2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right\| = \frac{\sqrt{5-3\sin^2 2\alpha}}{(1+\sin^2 2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{u}_N = \frac{1}{\sqrt{5-3\sin^2 2\alpha}\sqrt{1+\sin^2 2\alpha}}\left|\begin{array}{l} -\cos\alpha(1+\sin^2 2\alpha) + \sin\alpha\sin 4\alpha \\ -\sin\alpha(1+\sin^2 2\alpha) - \cos\alpha\sin 4\alpha \\ 2\cos 2\alpha \end{array}\right.$$

b- $\frac{\vec{u}_N}{\rho} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\rho} = \left\|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right\| \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{(1+\sin^2 2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{(5-3\sin^2 2\alpha)^{\frac{1}{2}}}$

pour $\alpha = 0;\ \rho_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Exercice 2 :

1- $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$; $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{z}\vec{k}$

Or : $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\vec{u}_\varphi \Rightarrow \qquad \vec{v} = 2at\vec{u}_\rho + at^2\omega\vec{u}_\varphi + a\vec{k}$

2- $\vec{\gamma} = 2at\,\vec{u}_\rho + 2at\ \omega\vec{u}_\varphi + 2at\omega\vec{u}_\rho - at^2\omega^2\vec{u}_\rho \Rightarrow \qquad \vec{\gamma} = (2a -\ at^2\omega^2\ )\ \vec{u}_\rho + 4\ \ at\omega\vec{u}_\varphi$

3- $\|\vec{v}\| = |a|\ \ (4t^2 + t^4\omega^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$; $\|\vec{\gamma}\| = \left|a\ \ (4 + t^4\omega^4\,)^{\frac{1}{2}}\right|$

Exercice 3

1- $\|\vec{v}\| = a\vec{i} - \frac{1}{t^2}\vec{j}$; $|\vec{v}|^2 = a^2(1+\frac{1}{(at^2)^2})$

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(at^2)^2}}}(\vec{i} - \frac{1}{at^2}\vec{j})$$

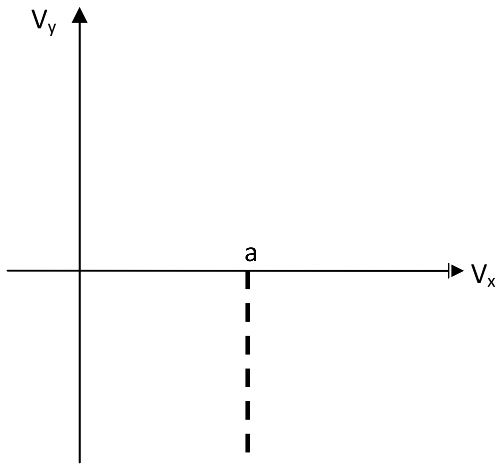
$$\vec{b} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} = \frac{1}{(1+\frac{1}{a^2t^4})^{\frac{1}{2}}}(\frac{1}{at^2}\vec{i} + \vec{j})$$

2- $\gamma_n = \frac{v^2}{\rho}$; $\vec{\gamma} = 2t^{-3}\vec{j} \Rightarrow \quad \gamma_n = \vec{\gamma}\vec{n} = \frac{2}{t^3(1+\frac{1}{a^2t^4})^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \rho = \frac{1}{2}a^2t^3(1+\frac{1}{a^2t^4})^{\frac{3}{2}}$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OM} + \rho\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{at}{2}\ (3+\frac{1}{a^2t^4})\ \vec{i} + \frac{1}{2t}\ (2+a^2\ t^4\ \ (1+\frac{1}{a^2t^4})\ )\vec{j}$$

3- L'hodographe :

$$\vec{V} = \left| \begin{array}{l} V_x = a = cte \\ V_y = -\frac{1}{t^2} \end{array} \right.$$



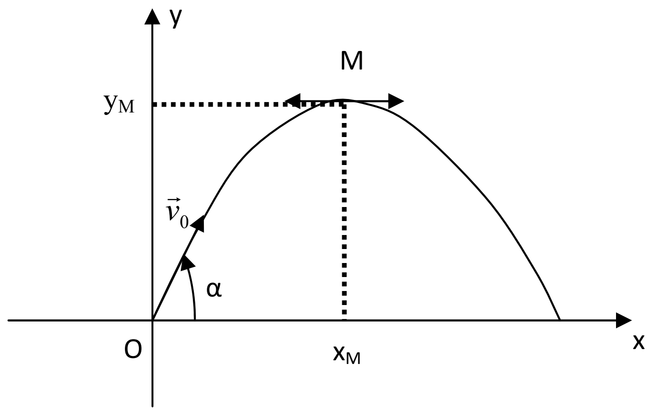
Exercice 4

1- $\overrightarrow{OP} \ = v_0 t \cos\alpha \vec{i} + (v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2)\vec{i}$

$$x = v_0 t \cos\alpha \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}\ g\ \frac{x^2}{v_0^{\ 2}\cos^2\alpha} + x\ \tan g\alpha$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \quad \frac{-gx}{v_0^{\ 2}\cos^2\alpha} + \tan g\alpha = 0 \Rightarrow x_M = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

Mouvement parabolique admettant une tangente horizontale au point M : $x_M = v_0^2\,\frac{\sin 2\alpha}{2g}$; $y_M = v_0^2\,\frac{\sin^2\alpha}{2g}$



2- $\overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{vmatrix} v_0\cos\alpha \\ v_0\sin\alpha - gt \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} 0 \\ -g \end{vmatrix}$

$$\|\vec{v}\| = (v_0{}^2 + g^2t^2 - 2gtv_0\sin\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

* $\gamma_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{g^2t - v_0 g\sin\alpha}{\sqrt{v_0{}^2 + g^2t^2 - 2gtv_0\sin\alpha}}$; $\gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_r^2 \Rightarrow \gamma_n = (\gamma^2 - \gamma_t^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\gamma_n = \frac{v_0 g\cos\alpha}{\sqrt{v_0{}^2 + g^2t^2 - 2gtv_0\sin\alpha}}$$

* Rayon de courbure : $\gamma_n = \dfrac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \dfrac{v^2}{\gamma_n}$; $\rho = \dfrac{(v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0\sin\alpha)^{\frac{3}{2}}}{v_0 g\cos\alpha}$

* $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OP} + \rho\vec{u}_n$

$$\vec{u}_n = \frac{\vec{\gamma} - \gamma_\tau\vec{u}_\tau}{\gamma_n} = ?$$

$$\vec{u}_\tau = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{v_0\cos\alpha\vec{i} + (v_0\sin\alpha - gt)\vec{j}}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0\sin\alpha}}$$

$$\gamma_\tau\vec{u}_\tau = \frac{g^2t - v_0 g\sin\alpha}{v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0\sin\alpha}(v_0\cos\alpha\vec{i} + (v_0\sin\alpha - gt)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_n = \frac{(v_0\sin\alpha - g\ \ t)\ \ \vec{i} - v_0\cos\alpha\ \ \vec{j}}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0 s in\alpha}}$$

$$\overrightarrow{OC} = \left(v_0 t\cos\alpha + \frac{(v_0\sin\alpha - gt)\left(v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0\sin\alpha\right)}{v_0 g\cos\alpha} \right)\vec{i} +$$

$$\left(v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{g}\left(v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0\sin\alpha\right) \right)\vec{j}$$

$$* \ \overrightarrow{OC} = \frac{v_0 \sin\alpha \ \left(v_0^2 - 3v_0 \ t \ g \ \sin\alpha + 3g^2t^2\right) - g^3t^3}{v_0 \ g \ \cos\alpha}\vec{i} + \left(3 \ tv_0 \sin\alpha - \frac{3}{2}g \ t^2 - \frac{v_0^2}{g}\right)\vec{j}$$

$$* \ \vec{b} = \vec{u}_\tau \wedge \vec{u}_n = -\vec{k}$$

3 - La trajectoire recoupe l'axe Ox $\Rightarrow y_c = 0 \Rightarrow t_c = 2\dfrac{v_0}{g}\sin\alpha \Rightarrow x_c = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$

$$\vec{v}\,\vec{\gamma} = v\gamma_t = \|\vec{v}\| \ \|\vec{\gamma}\|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{v\gamma_t}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{\gamma}\|} = \frac{\gamma_t}{\|\vec{\gamma}\|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{gt - v_0\sin\alpha}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0\sin\alpha}}$$

A l'instant $t_c \Rightarrow \cos\theta_c = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{\sqrt{v_0^2 + 4v_0^2\sin^2\alpha - 4v_0^2\sin\alpha}} = \sin\alpha \Rightarrow \theta_c = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$

Exercice 5

1- $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{u}_r \ ; \ \vec{v}(M) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}(t)\vec{u}_r + r(t)\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{v}(M) = 2\dfrac{t}{\tau^2}r_0\exp(-\dfrac{t^2}{\tau^2})(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$

$$\|\vec{v}(M)\| = 2\sqrt{2}\frac{t}{\tau^2}r_0\exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$$

2- $\vec{v}\,\vec{u}_r = \|\vec{v}\|\|\vec{u}_r\|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\vec{u}_r}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{4} = cte$

α est l'angle que fait le vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M avec le vecteur unitaire radiale. Il nous donne l'orientation du vecteur vitesse par rapport à $\overrightarrow{OM} \Rightarrow \alpha = cte \Rightarrow$ l'orientation du vecteur vitesse par rapport à $\overrightarrow{OM}$ ne change pas au cours du temps.

3- $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = - \ 2\dfrac{r_0}{\tau^2}\exp\left(-\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)\vec{u}_r + \dfrac{2r_0}{\tau^2}\exp\left(-\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)\left\{1 - 4\dfrac{t^2}{\tau^2}\right\}\vec{u}_\theta$

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{2}\frac{r_0}{\tau^2}\left(1 - 2\frac{t^2}{\tau^2}\right)\exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$$

4- Rayon de courbure : $\gamma_n = \dfrac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \dfrac{v^2}{\gamma_n} \Rightarrow \rho = \sqrt{2}r_0\exp\left(-\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} + \rho\vec{u}_N \ ; \quad \vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)}$$

$$\vec{u}_N = \frac{\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_t}{\gamma_N} = \frac{\tau^2}{4\sqrt{2}t^2}\left(-2\vec{u}_r + 2\left(1 - 4\frac{t^2}{\tau^2}\right)\vec{u}_\theta + 2\left(1 - 2\frac{t^2}{\tau^2}\right)\vec{u}_r - 2\left(1 - 2\frac{t^2}{\tau^2}\right)\vec{u}_\theta\right)$$

$$\Rightarrow \vec{u}_N = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{u}_r - \vec{u}_\theta\right) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = - \ r_0 \ \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)\vec{u}_\theta$$

Exercice 6

1 - $\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} x(t) = v_0 t\cos\omega t \\ y(t) = v_0 t\sin\omega t \\ z(t) = 0 \end{array} \right. \quad \vec{v} = \left| \begin{array}{l} -v_0 t\omega\sin\omega t + v_0\cos\omega t \\ v_0 tw\cos\omega t + v_0\sin\omega t \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{\gamma} = \left| \begin{array}{l} -2v_0\omega\sin\omega t - v_0 t\omega^2\cos\omega t \\ 2v_0\omega\cos wt - v_0 t\omega^2\sin\omega t \\ 0 \end{array} \right.$

$$\|\vec{v}\| = v_0\left(1+\omega^2t^2\right)^{\frac{1}{2}} \;;\quad \|\vec{\gamma}\| = v_0\omega\left(4+t^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2- $\gamma_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{v_0\omega^2 t}{\left(1+\omega^2t^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

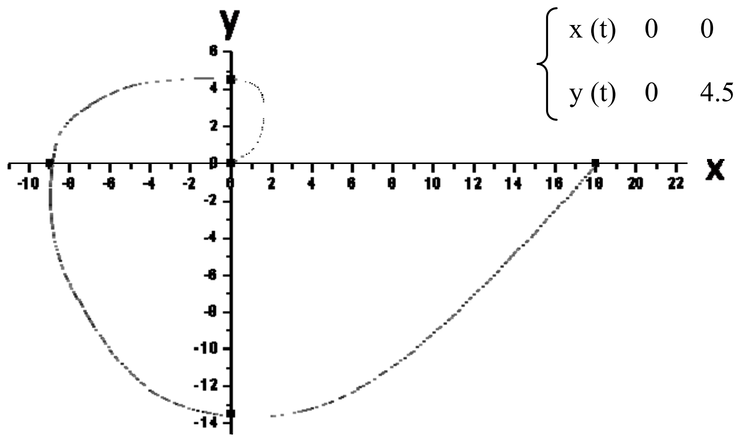
$$\gamma_N = \left(\gamma^2 - \gamma_t^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \gamma_N = v_0\omega\left(\frac{4+\omega^2t^2\left(4+\omega^2t^2\right)}{1+\omega^2t^2}\right)^{\frac{1}{2}} = v_0\omega\frac{\left(2+\omega^2t^2\right)}{\left(1+\omega^2t^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\gamma_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\gamma_N} \Rightarrow \rho = \frac{v_0}{\omega}\frac{\left(1+\omega^2t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(4+\omega^2t^2\left(4+\omega^2t^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{v_0}{\omega}\frac{\left(1+\omega^2t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(2+\omega^2t^2\right)}$$

4- a- Equation de la trajectoire :

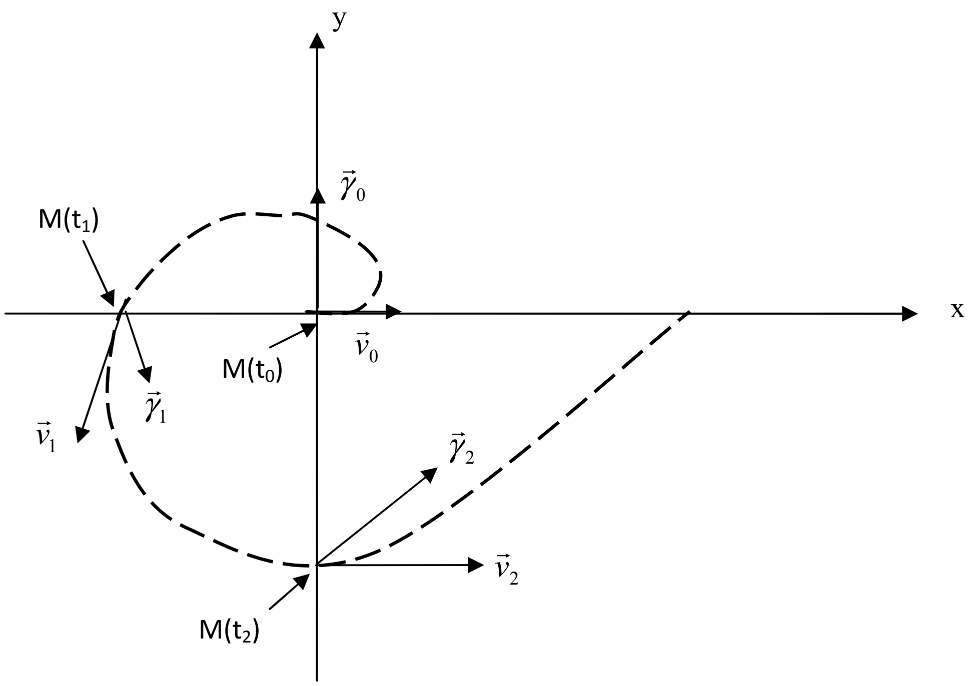
$x^2 + y^2 = v_0 t \Rightarrow$ En coordonnées polaires : $\begin{cases} r = v_0 t \\ \phi = \omega t \end{cases} \Rightarrow r(\phi) = \dfrac{v_0}{\omega}\phi$: Equation d'un mouvement spirale.

t (s)	0	90	180	270	360
x (t)	0	0	-9	0	18
y (t)	0	4.5	0	-13 .5	0



b- v= $\dfrac{dS}{dt} \Rightarrow dS = vdt \quad \Rightarrow \quad S = \displaystyle\int_0^{t_s} v_0(1+\omega^2t^2)^{\frac{1}{2}}dt$

On pose $\omega t = shu \;\Rightarrow dt = \dfrac{chu}{\omega}du \qquad \Rightarrow s = \displaystyle\int \frac{v_0}{\omega}ch^2udu = \frac{v_0}{2w}\int_0^{Argsh\omega t_s} 1 + sh2udu$



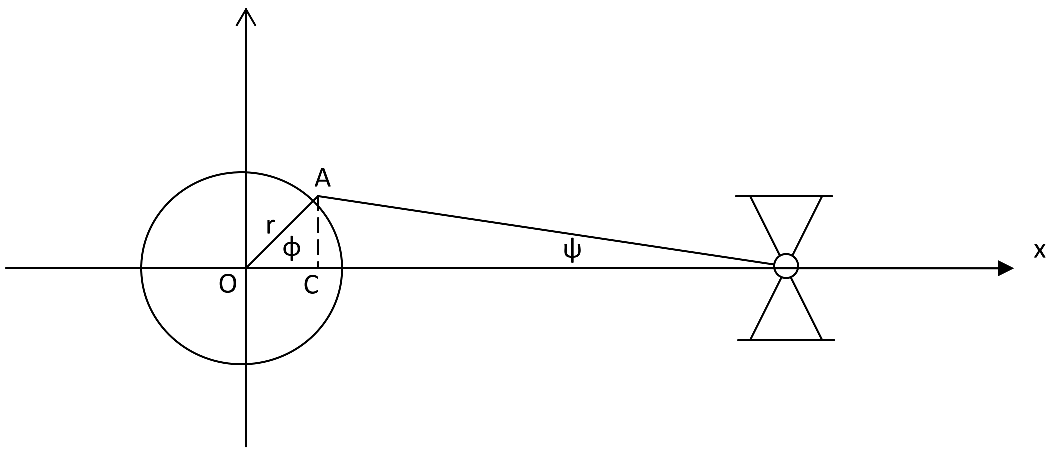
$$\Rightarrow S=\frac{v_0}{2\omega}\left[Argsh\ \ (\omega t_s)+\frac{1}{2}sh2Argsh\omega t_s\right]\quad \text{AN : } S\simeq 61\ \ mm$$

$t=0\ ;\ \vec{v}_0=v_0\vec{i}\ \ ;\ \ \vec{\gamma}_0=2v_0\omega\ \ \vec{j}$

$t=180s\ ;\ \ \vec{v}_1=-v_0\ \ (\vec{i}+\pi\ \ \vec{j})\ ;\ \vec{\gamma}_1=v_0\omega\ \ (\pi\vec{i}-2\vec{j})$

$t=270s\ \ ;\ \ \vec{v}_2=v_0\ \ (\frac{3\pi}{2}\vec{i}-\vec{j})\ ;\ \ \vec{\gamma}_2=v_0\omega\ \ (2\vec{i}+\frac{3\pi}{2}\vec{j})$

Exercice 7



1- Equation du mouvement du point matériel B.

$x=OB=OC+CB=r\ \cos\varphi+l\ \cos\psi$

On a $AC=r\sin\varphi=l\sin\psi\Rightarrow\sin\psi=\frac{r}{l}\sin\varphi=\lambda\sin\varphi$

$$\sin^2\psi = 1-\cos^2\psi = \lambda^2\sin^2\varphi \;\Rightarrow\; \cos\psi = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}$$

Finalement : $x = r \quad \cos\omega t + l \quad \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \omega t}$

2- Vitesse : $v = \dfrac{dx}{dt} = -r\omega \sin\omega t - \dfrac{1}{2}\lambda^2 l\omega \dfrac{\sin 2\omega t}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}}$

Accélération : $\gamma = \dfrac{d^2x}{dt^2} = - \;\; r\omega^2\cos\omega t \;\; -\lambda^2 l\omega^2 \dfrac{\cos 2\omega t}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}} + \dfrac{\lambda^4 l\omega^2 \sin 2\omega t}{2\;\left(1-\lambda^2\sin^2\omega t\right)}$

3- Expressions approchées pour $\lambda \prec\prec 1$: $\left(1-\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1-\dfrac{1}{2}\varepsilon$

$$x = r\cos\omega t + l \;\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\omega t\right)$$

$$v = -r\omega\sin\omega t - \frac{\lambda^2}{2} l\omega \sin 2\omega t$$

$$\gamma = -r\omega^2\cos\omega t - \lambda^2 l\omega^2\cos 2\omega t$$

Cinématique du point matériel (II)

Exercice 1

Accompagné par son fil, un pêcheur de Saumon remonte à contre courant une rivière à bord d'une barque. Prévenue par son fil d'avoir perdu, 4 mn plutôt, sa canne à pêche, il fait alors demi-tour et récupère la canne emportée par le courant.

Constatant un déplacement de la canne de 400 m par rapport à son point de chute, la garçon veut déterminer pour son père la vitesse V_c du courant sachant que la vitesse V_b de la barque reste constante.

Faites le calcul pour lui.

Exercice 2

Dans un plan fixe xoy, une droite D tourne autour du point O avec une vitesse angulaire ω(t)=$\dfrac{d\theta}{dt}$, $\left[\theta=\left(Ox,D\right)\right];$ un point M est mobile sur la droite D. A l'instant t on a $\overrightarrow{OM}=\vec{r}\left(t\right)$, soit $\vec{u}_r$ Le vecteur unitaire porté par la droite D tel que $\overrightarrow{OM}=r\vec{u}_r$.

1- Calculer la vitesse de M dans le référentiel lié à D.

2- Calculer la vitesse de M dans le repère (Oxy).

3- Calculer l'accélération $\vec{\gamma}\left(M\right)$ par rapport au repère et montrer qu'elle est la somme de trois termes. On utilisera pour ceci la notion du point coïncident. Si ω=ct, démontrer que $\vec{\gamma}_e=\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})$

Exercice 3

On considère un repère absolu R_0, et deux repères distincts R_1 et R_2 en mouvement de rotation quelconque l'un par rapport à l'autre et les deux par rapport à R_0

1- Montrer la relation générale suivante :

$$\vec{V}_{E(2/0)}(M)=\vec{V}_{E(2/1)}(M)+\vec{V}_{E(1/0)}(M)$$

2- Montrer qu'une relation du même type que la précédente est facilement vérifiable pour $\left[\vec{\gamma}_E+\vec{\gamma}_C\right]_{(2/0)}$

NB : $\vec{V}_{E(i/0)}\left(M\right)$, $\vec{\gamma}_{E(i/0)}\ \left(M\right)$ *et* $\vec{\gamma}_{C(i/0)}(M)$ signifient, respectivement, la vitesse d'entrainement, l'accélération d'entrainement, l'accélération de Coriolis de M lorsque R_i est le repère relatif et R_0 le repère fixe.

Exercice 4

On considère un avion supersonique qui se déplace le long d'un cercle parallèle de l'Ouest vers l'Est avec la vitesse de 500 ms-1. On donne la latitude de ce parallèle : $\lambda = 60^{\circ}$ et le rayon de la terre $R = \dfrac{40000}{2\pi} km$. On néglige la hauteur de l'avion.

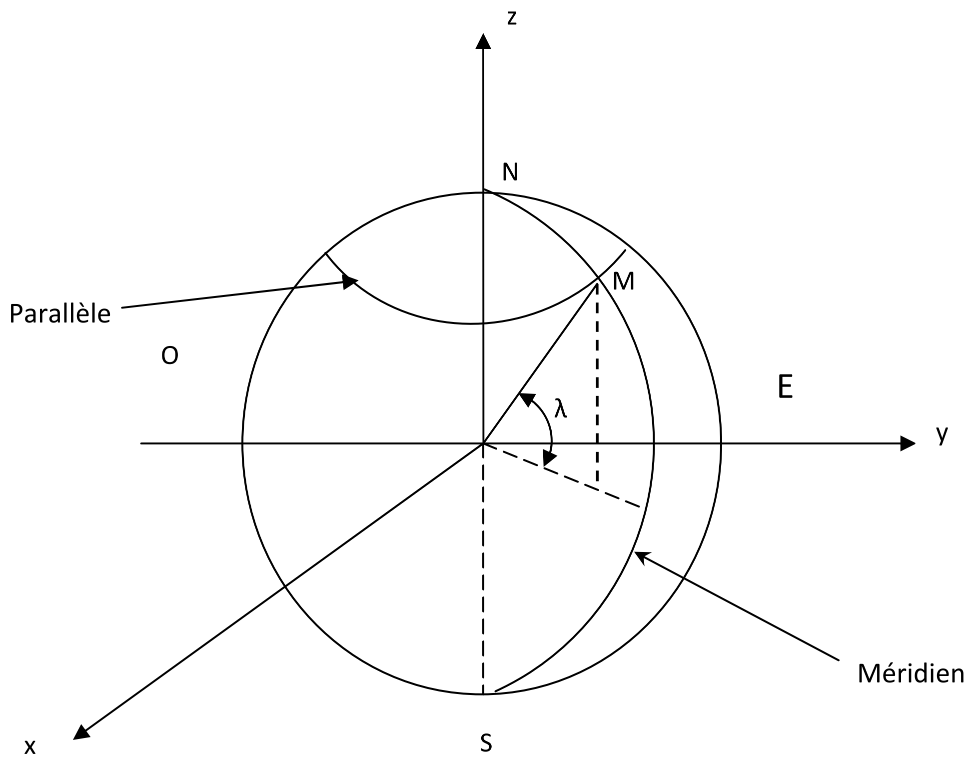
1- Calculer le vecteur accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_C$ de l'avion.

2- Comparer $\left| \vec{\gamma}_C \right|$ au module de l'accélération d'entrainement $\left|\vec{\gamma}_E\right|$ de l'avion.

Représenter $\vec{\gamma}_C$ et $\vec{\gamma}_E$ en M sur le schéma ci-joint.

3- Calculer $\vec{\gamma}_C$ et $\left| \vec{\gamma}_C \right|$ si l'avion se déplace le long d'un cercle méridien. En déduire sa valeur à l'équateur sans faire de calcul ; à t =0, l'avion est au pôle nord.

N .B : Les applications numériques sont demandées.



Exercice 5

Soit R_0 (O,X,Y,Z) un repère absolu de base $\left(\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$, soit un fil rigide ayant une forme parabolique d'équation $z = ax^2$, disposé verticalement dans le plan xOy d'un repère mobile R(O,x,y,z).

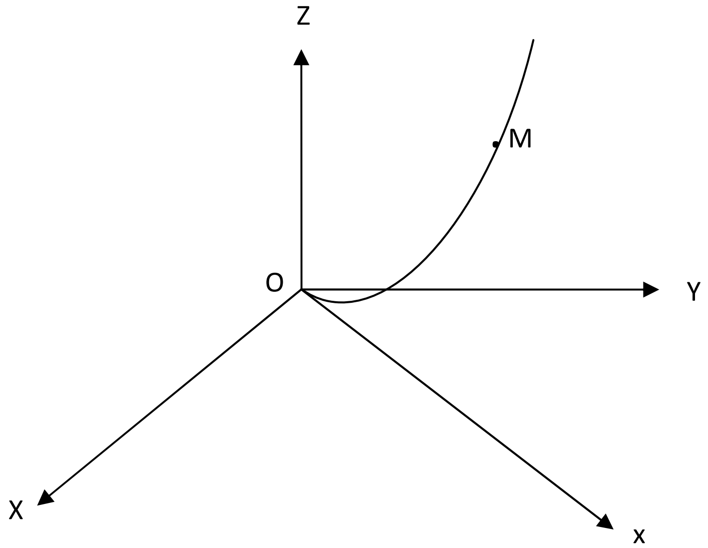
$\vec{\Omega}_{R/R_0} = \left(\frac{1}{2}\right)\sigma t^2 \vec{K}$: est le vecteur rotation instantanée du repère R par rapport à R_0. A t= 0, les deux repères coïncident.

Un mobile M, initialement au repos en 0, se déplace sur le fil de façon que la composante de sa vitesse suivant Ox est constante : $V_x=V_0$

1-a- Etablir la relation entre les vecteurs unitaires des deux bases.

b- Déterminer dans R : le vecteur position, le vecteur vitesse d'entrainement et le vecteur accélération de Coriolis.

2- Quelle est la longueur parcourue par M lorsque le fil fait un tour complet.



Exercice 6

Un manège d'enfants, constitué d'un disque de rayon a, au bout duquel sont fixées des petites voitures, tourne autour de l'axe OZ avec une vitesse angulaire constante ω_0. Un homme debout sur l'axe OZ et qui surveille les enfants sur les voitures, peut se déplacer sur le disque tournant.

Une personne placée sur l'axe OX au point fixe A(x_0, 0, 0), dans le même plan que le disque, commande la rotation du manège.

Le repère R(O,X,Y,Z) de vecteurs de base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est fixe.

1- M se trouve en O mais lié au disque, observe la voiture en B. On demande de calculer dans le repère fixe R$(O,\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$:

a- Le vecteur position de B par rapport à O. En déduire la vitesse absolue $\vec{V}_B$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma}_B$.

b- Le vecteur position de B par rapport à A .En déduire la vitesse $\vec{V}_{B/A}$ et l'accélération $\vec{\gamma}_{B/A}$ de B par rapport à A.

2- Le surveillant M se dirige maintenant tout droit vers la voiture B avec une vitesse de module constant V_0.

a- Exprimer dans R le vecteur position $\overrightarrow{OM}\ (t)$ si M quitte O à t=0. En déduire la vitesse $\vec{V}_a$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a$.

b- Tracer l'allure de la trajectoire de M dans R sans faire de calcul, dans les cas suivants : $a\omega_0 >> V_0$; $a\omega_0 = V_0$ et $a\omega_0 << V_0$

3- On veut étudier ce même mouvement de M avec la composition des vitesses.

a- Définir un repère mobile R_1 par rapport à R et donner le' vecteur rotation instantanée de R_1 / R .

b- Calculer la vitesse d'entrainement $\vec{V}_e$ et la vitesse $\vec{V}_r$, en déduire la vitesse absolue $\vec{V}_M$ exprimée dans R_1.

4- La voiture B est maintenant placée sur des ressorts qui lui permettent d'effectuer un mouvement sinusoïdal vertical entre z=0 et z=2d de position d'équilibre z=d et de pulsation α constante. A l'instant initiale la voiture B est placée en B_0(a,o,o) avec une vitesse initiale nulle.

a- Donner les équations paramétriques de la trajectoire de B par rapport à R_1 puis par rapport à R.

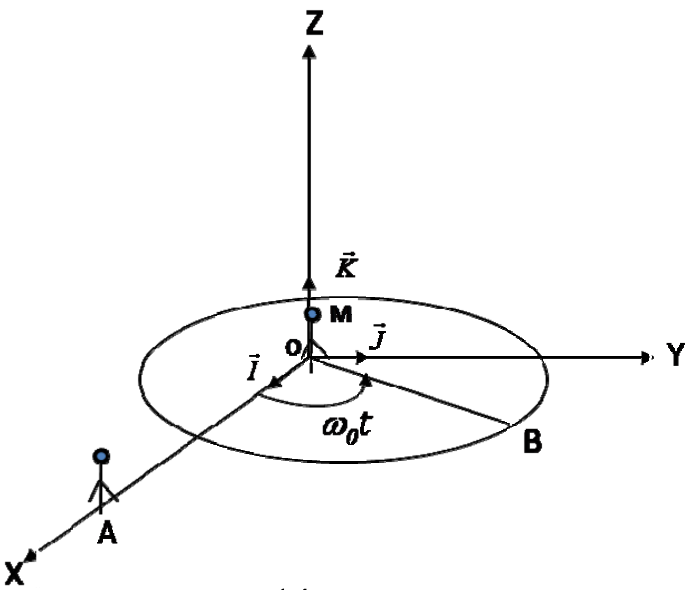
b- Trouver la relation entre α et ω_0 pour que la voiture B vienne à sa position initiale B_0 après avoir effectué un tour complet.

c- Calculer la vitesse et l'accélération absolues exprimées dans R_1.

5- A la fin du spectacle, le manège est freiné pour être arrêté. Sa vitesse angulaire devient décroissante avant de s'annuler $\omega(t) = -\beta t + \omega_0$

a- Quel est le temps nécessaire pour l'arrêt total en fonction de β et ω_0

b- La vitesse et l'accélération absolues de la question 3b et 3c changent-elles ? De quelle manière ?



Exercice 7

Soit $R_0(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ un repère absolu, et soit un disque tournant autour de l'axe $(O,\vec{k})$, de centre O_1 et de rayon a, le centre étant défini par : $\overrightarrow{OO_1} = h(t)\,\vec{K}$ (où h(t) est une fonction du temps) . Le disque étant dans un plan parallèle à $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit $R_1\,(O_1,\vec{i},\vec{j},\vec{k}=\vec{K})$, le repère relatif lié au disque et on pose l'angle $(\vec{I},\vec{J}) = \theta(t)$.

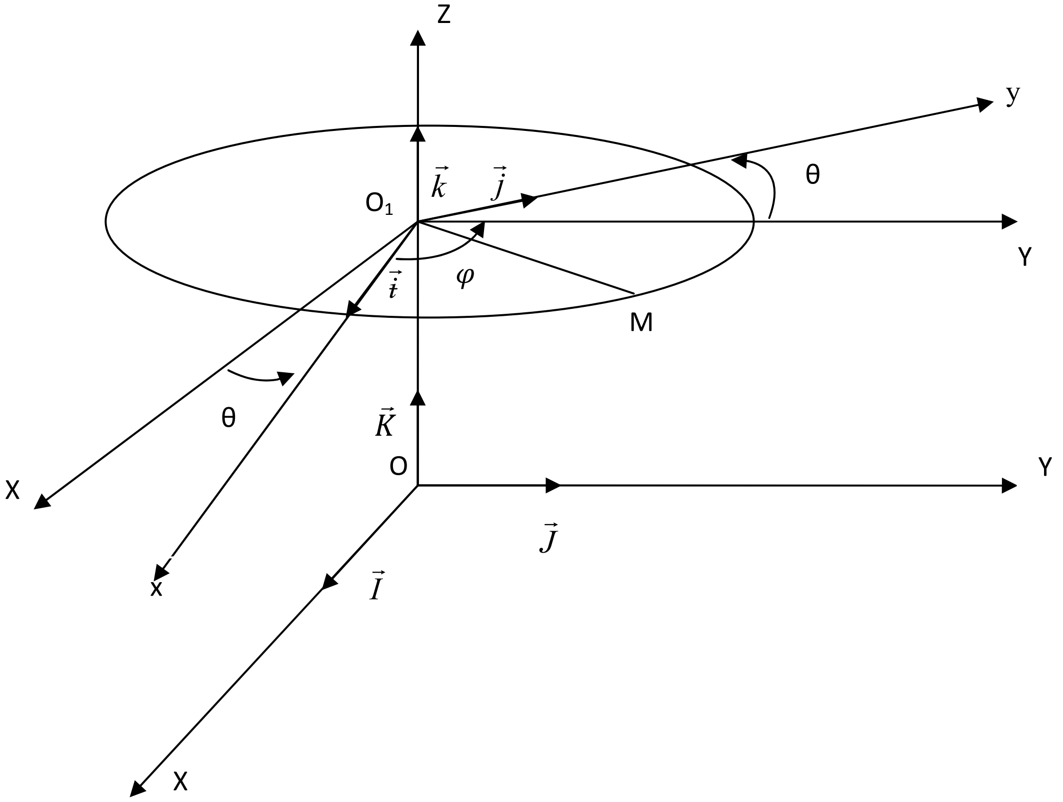
Soit M, un point matériel en mouvement qui décrit l'extrémité du disque et dont la position est repérée par l'angle $\varphi(t) = (\vec{i},\vec{u}_\rho)$, avec $\vec{u}_\rho$ un vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{O_1M}$.

On associe au point M la base cylindrique $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{k})$.

1- Donner le vecteur position de M par rapport à R_0

2- Calculer les vecteurs vitesses : $\vec{V}_a, \vec{V}_e$ *et* $\vec{V}_r$

3- Calculer les vecteurs accélérations : $\vec{\gamma}_a$ *et* $\vec{\gamma}_r$. En déduire les vecteurs accélérations : $\vec{\gamma}_e$ *et* $\vec{\gamma}_c$



Exercice 8

Un disque plan vertical de centre O_1 tourne autour de son axe horizontal OO_1 avec la vitesse angulaire constante $\dot{\varphi}$. L'ensemble (disque + axe) tourne autour de l'axe vertical OZ à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta}$.

Un point matériel M se déplace sur un rayon du disque avec une vitesse uniforme. On pose $\left|\overrightarrow{O_1M}(t)\right| = r(t) = r$.

On définit les repères :

$R_0(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$: Repère absolu

$R_1(O_1,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: Repère lié à l'axe du disque avec $\vec{k} = \vec{K}$

$R_2(O_1,\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{i})$: Repère lié au disque

Avec $\vec{i}$ porté par $\overrightarrow{OO_1}$; $\vec{u}_r$ porté par $\overrightarrow{O_1M}$; $\theta =$ l'angle $(\vec{I},\vec{i})$; $\varphi =$ l'angle $(\vec{j},\vec{u}_r)$

1- Donner le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{2/1}$ de R_2 par rapport à R_1

En déduire et exprimer dans R_2 .

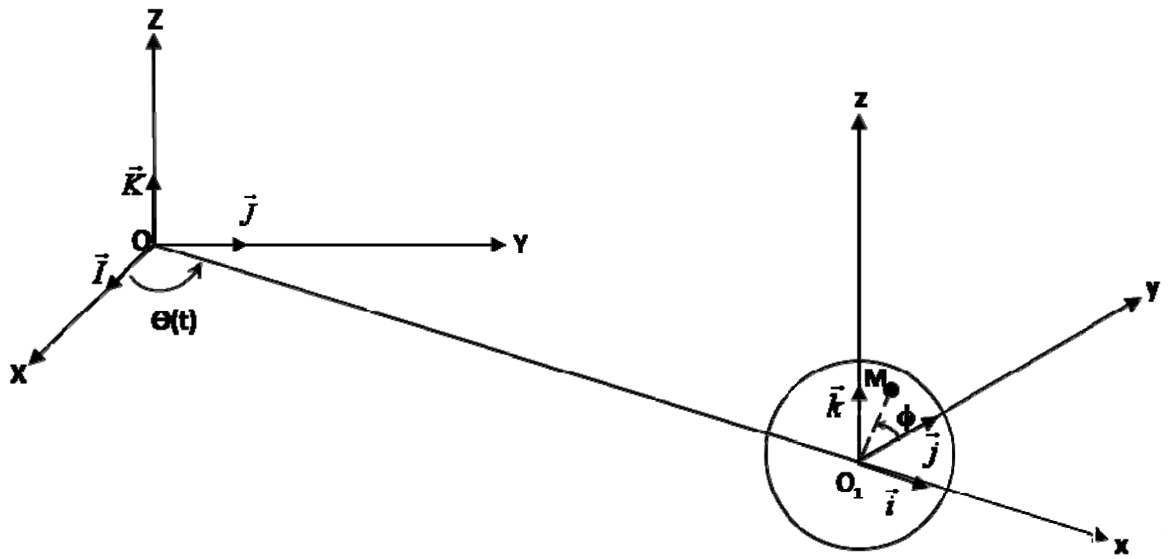
a- La vitesse de M par rapport à R_1 : $\vec{V}_{R_1}(M)$

b- L'accélération de M par rapport à R_1 : $\vec{\gamma}_{R_1}(M)$

4- Donner le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{1/0}$ de R_1 par rapport à R_0 , en déduire et exprimer dans R_1

a- La vitesse absolue : $\vec{V}_{R_0}(M)$

b- L'accélération absolue : $\vec{\gamma}_{R_0}(M)$



Exercice 9

Soit un cercle de centre O' et de diamètre OB= 2R, contenu dans le plan $\left(O'x_1\, y_1\right)$ du repère $R_1(O',x_1,y_1,z_1)$ de base orthonormée directe $\left(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1\right)$. Soit une tige AC=2R articulé en O' $\left(AO' = O'B = R\right)$ en rotation autour de l'axe $O'z_1 // Oz$ avec une accélération angulaire constante $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \sigma$

Soit $R_2(O',x_2,y_2,z_2)$ le repère mobile lié à la tige de base orthonormée directe $\left(\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{k}_2\right)$.

Soit un mobile oscillant autour de O' le long de la tige. L'élongation de M, comptée positivement de O' vers C, est $\overrightarrow{O'M} = R\sin\omega t$. A t = 0, la tige est portée par l'axe Ox_1 est au repos.

I- Dans cette partie, on suppose que le repère lié au cercle (R_1) est fixe.

1- Calculer la vitesse absolue de M $\left(\vec{V}_{R_1}(M)\right)$, en utilisant la composition des vitesses, dans la base $\left(\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{k}_2\right)$.

2- De même, calculer les accélérations d'entrainement, de Coriolis et absolue dans la même base.

II- Dans la suite du problème, on considère que le repère R_1, lié au cercle est en rotation par rapport à un repère absolue $R_0(o,x,y,z)$, de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ avec une vitesse angulaire constante ω_0, autour de Oz. On se propose d'étudier le mouvement de M par rapport à R_0. Sachant que le mobile M continue d'avoir le même mouvement relatif que précédemment.

A t=0, Ox_1 est confondu avec Ox de même Oy_1 est confondu avec Oy.

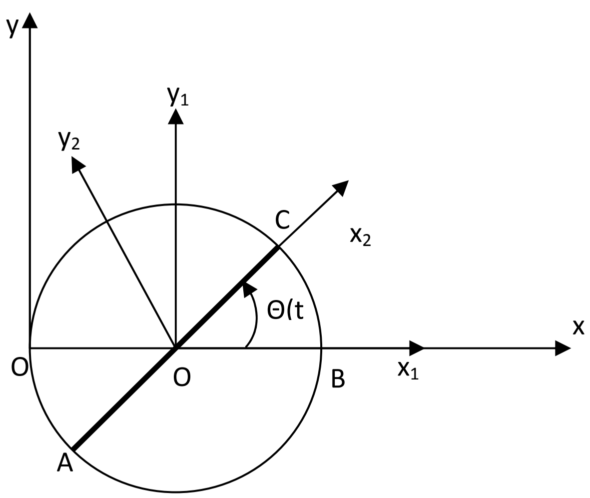
1- Représenter sur un schéma clair, ce mouvement à un instant t.

2- Vérifier les deux relations suivantes.

$$\vec{V}_{E(R_2/R_0)} = \vec{V}_{E(R_2/R_1)} + \vec{V}_{E(R_1/R_0)}$$

$$(\vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_C)_{R_2/R_0} = \left(\vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_C\right)_{R_2/R_1} + \left(\vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_C\right)_{R_1/R_0}$$

On donne : $\vec{V}_{E(R_i/R_j)}$ vitesse d'entrainement de R_i par rapport à R_j et $(\vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_C)_{R_i/R_j}$ accélération d'entrainement et de Coriolis de R_i par rapport à R_j



Exercice 10

Soit $\overrightarrow{OA}$ l'aiguille des heures d'un réveil et $\overrightarrow{OB}$ l'aiguille des minutes, tel que $\left|\overrightarrow{OB}\right| = 2\left|\overrightarrow{OA}\right| = 2a$

Soit un repère fixe R_0 (O,x,y,z) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constituant un trièdre direct et tel que les axes Ox et Oy indiquent en permanence 3h00 (figure1). Soit un mobile M se trouvant toujours au milieu du segment AB joignant les extrémités de la petite et de la grande aiguille.

<u>Initialement le réveil indique 12h00</u>

I- Seulement dans cette partie, on suppose que la petite aiguille reste immobile sur midi (figure1) et seul la grande aiguille est en mouvement.

Soit $R_2(0, x_2, y_2, z)$ est un repère orthonormé mobile de base $\left(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}\right)$ tel que $\overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OB}\right| \vec{j}_2$

1-a- Déterminer le vecteur rotation instantané $\overrightarrow{\Omega}_{2/0}$ du repère mobile R_2 par rapport à R_0. On pose $\left|\overrightarrow{\Omega}_{2/0}\right| = \omega_0$

b- Etablir les relations entre les deux bases $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et $\left(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}\right)$

c- Déterminer le vecteur position du mobile M dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Il est conseillé d'introduire un point $0_1(0, \frac{a}{2}, 0)$

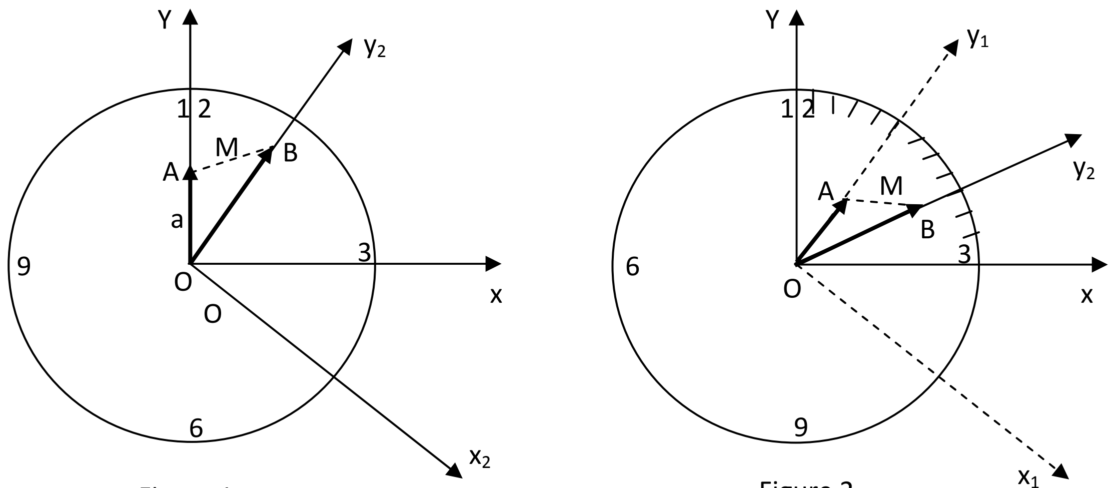


Figure 1 Figure 2

d- Montrer que la trajectoire de M est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

2-a- Calculer dans R_0, la vitesse d'entrainement par deux méthodes. Puis, déterminer la vitesse absolue dans R_0 en fonction de a et $\omega_0 t$.

b- Calculer dans R_0, l'accélération relative $\vec{\gamma}_{R_2}(M)$, l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_{E(2/0)}(M)$ et l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_{C(2/0)}(M)$

c- Représenter sur un schéma clair la vitesse absolue ainsi que l'accélération absolue.

II- Dans la suite du problème, on considère le cas réel c'est-à-dire qu'en tiendra compte du mouvement de la petite aiguille (figure 2).

Soit un deuxième repère mobile R_1 (0, x_1, y_1, z) lié à $\overrightarrow{OA}$, la petite aiguille , de base $\left(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$

1- a- Déterminer les vecteurs rotations instantanées $\vec{\Omega}_{2/1}$ et $\vec{\Omega}_{1/0}$ respectivement du repère R_2 par rapport à R_1 et du repère R_1 par rapport à R_0. On pose $\left|\vec{\Omega}_{2/1}\right| = \omega_2$ et $\left|\vec{\Omega}_{1/0}\right| = \omega_1$

c- Tracer, point par point, la trajectoire de M lorsque le temps varie de midi à 14 h 12 mn. Il est conseillé de procéder par intervalle de 12 mn

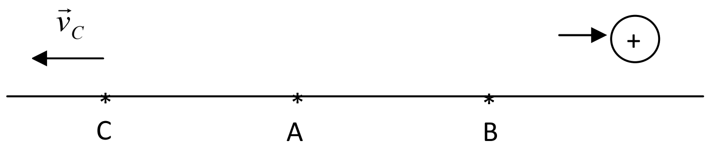
d- Comparer les accélérations d'entrainement $\left|\vec{\gamma}_{E(1/0)}\right|$ et $\left|\vec{\gamma}_{E(2/1)}\right|$ respectivement du repère R_1 par rapport à R_0 et du repère R_2 par rapport à R_1.

L'approximation faite en première partie $\left[\left(\overrightarrow{OA}\right) demeure\ fixe\right]$ est elle bonne ?

Solution des exercices

Exercice 1

Soit A le point où la canne est tombée, B le point où la barque fait demi-tour et C le point où la canne est récupérée. t_1 le temps mis pour aller de A à B et t_2 le temps mis pour aller de B en C.



AB –AC =AC soit :

$$(v_b - v_c)t_1 - (v_b + v_c)t_2 = -v_c(t_1 + t_2)$$

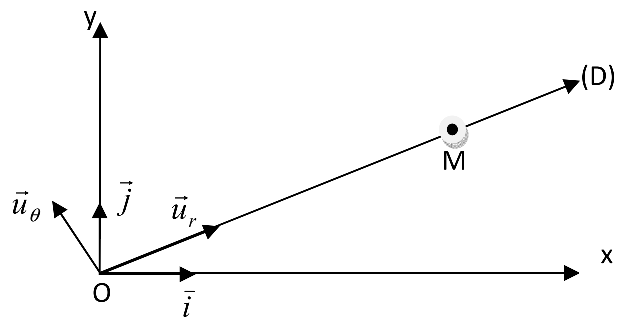
$$\Rightarrow v_b(t_1 - t_2) - v_c(t_1 + t_2) = -v_c(t_1 + t_2)$$

$$\Rightarrow v_b(t_1 - t_2) = 0 \quad \Rightarrow t_1 = t_2 \quad et \quad AC = -2v_c t_1$$

$$\Rightarrow v_c = \frac{-400}{2\times 4\times 60} = 0,86 \quad ms^{-1}$$

Exercice 2 :

Soit R$\left(O,\vec{i}\ ,\vec{j},\vec{k}\right)$ le repère fixe et $R'\left(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{k}\right)$ le repère mobile lié à (D)



1-$\vec{V}_{R'}(M) = \dfrac{d\overline{\overline{OM}}}{dt} / R'$ = $\dot{r}\vec{u}_r$

2-$\vec{V}_R(M) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} / R \ = \dot{r}\vec{u}_r + r\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} \Rightarrow \vec{V}_R\left(M\right) = \dot{r}\vec{u}_r + rw(t)\vec{u}_\theta$

3-

$$\vec{\gamma}_R(M)) = \frac{d^2\overline{OM}}{dt}_{/R} = \frac{d\vec{V}_R(M)}{dt}_{/R} = \frac{d\left(\dot{r}\vec{u}_r + r\omega(t)\vec{u}_\theta\right)}{dt}_{/R}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_R(M) = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\omega(t)\vec{u}_\theta + \dot{r}\omega(t)\vec{u}_\theta + r\omega(t)\vec{u}_\theta + r\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\theta - r\omega^2(t)\vec{u}_r$$

$$= \underbrace{\ddot{r}\vec{u}_r}_{\substack{\vec{\gamma}_r(M) \\ \downarrow \\ \textit{Accélération relative}}} + \underbrace{2\dot{r}\omega(t)\vec{u}_\theta}_{\substack{\vec{\gamma}_c(M) \\ \downarrow \\ \textit{Accélération de Coriolis}}} + \underbrace{r\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\theta - r\omega^2(t)\vec{u}_r}_{\substack{\vec{\gamma}_E(M) \\ \downarrow \\ \textit{Accélération d'entrainement}}}$$

$$\vec{\gamma}_r=\frac{d\vec{V}_{R'}(M)}{dt};\ \vec{\gamma}_c=2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_{R'}(M)$$

La relation s'effectue autour de l'axe oz $\omega=\omega\vec{k}$

$\vec{\gamma}_e=\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{/R}$ (M fixe dans R')$=r\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\theta-r\omega^2(t)\vec{u}_r$

Si ω= cte $\Rightarrow\frac{d\omega}{dt}=0\ et\ \vec{\gamma}_e=-r\omega^2(t)\vec{u}_r=\omega\vec{k}\wedge\left(\omega\vec{k}\wedge r\vec{u}_r\right)=\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$

Exercice 3

1- $\vec{V}_{E(2/0)}(M)=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{/R_0}$ (M fixe dans R_2)

O : est le centre du repère R_0, O_1 celle du repère R_1 et O_2 celle de repère R_2.

$*\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{/R_0}$ (M fixe dans R_2)$=\left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{/R_0}+\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{/R_0}$ (M fixe dans R_2)

$$*\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{/R_0}=\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{/R_1}+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}$$

$$*\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{/R_1}=\underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{/R_1}}_{\vec{V}_{R_1}(O_2)}+\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\Big/_{R_1}$$

$$*\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{/R_1}=\underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{/R_2}}_{0\ car\ M\ est\ fixe\ dans\ R2}+\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\overrightarrow{O_2M}$$

$$\Rightarrow\vec{V}_{E(2/0)}(M)=\underbrace{\vec{V}_{R_1}(O_2)+\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\overrightarrow{O_2M}}_{\vec{V}_{E(2/1)}(M)}+\underbrace{\vec{V}_{R_0}(O_1)+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}}_{\vec{V}_{E(1/0)}(M)}$$

2- $\vec{V}_{a(2/0)}(M)=\vec{V}_{E(2/0)}(M)+\vec{V}_{R_2}(M)$

$$\vec{V}_{R_2}(M)=\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{/R_2}$$

$$\vec{\gamma}_{a(2/0)}=\vec{\gamma}_{E(2/0)}+\vec{\gamma}_{C(2/0)}+\vec{\gamma}_{R_2}(M)$$

$$\vec{\gamma}_{M(R_2)}=\left.\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{/R_2}$$

$$\vec{\gamma}_{a(2/0)}=\left.\frac{d\vec{V}_{E(2/0)}}{dt}\right|_{/R_0}+\left.\frac{d\vec{V}_{R_2}(M)}{dt}\right|_{/R_0}$$

$$\left.\frac{d\vec{V}_{R_2}(M)}{dt}\right|_{/R_0}=\left.\frac{d\vec{V}_{R_2}(M)}{dt}\right|_{/R_1}+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{R_2}(M)$$

$$\left.\frac{d\vec{V}_{R_2}(M)}{dt}\right/_{R_1}=\left.\frac{d\vec{V}_{R_2}(M)}{dt}\right/_{R_2}+\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\vec{V}_{R_2}(M)$$

$$\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{R_2}(M)=\vec{\omega}_{R_1/R_2}\wedge\left(\vec{V}_{R_1}(M)-\vec{V}_{E(2/1)}\right)=\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{R_1}(M)-\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{E(2/1)}$$

$$\Rightarrow\vec{\gamma}_{a(2/0)}=\left.\frac{d\vec{V}_{E(2/0)}}{dt}\right/_{R_0}+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{R_1}(M)-\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{E(2/1)}+\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\vec{V}_{R_2}(M)+\vec{\gamma}_{R_2}(M)$$

$$\Rightarrow\left[\vec{\gamma}_E+\vec{\gamma}_C\right]_{(2/0)}=\left.\frac{d\vec{V}_{E(2/0)}}{dt}\right/_{R_0}+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{R_1}(M)-\vec{\omega}_{R_1//R_0}\wedge\vec{V}_{R_1/R_0}+\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\vec{V}_{R_2}(M)$$

D'après la question 1 ; $\quad\dfrac{d\vec{V}_{E(2/0)}}{dt}=\left.\dfrac{d\vec{V}_{E(2/1)}}{dt}\right/_{R_0}+\left.\dfrac{d\vec{V}_{E(1/0)}}{dt}\right/_{R_0}$

$$\left.\frac{d\vec{V}_{E(2/1)}}{dt}\right/_{R_0}=\frac{d\vec{V}_{E(2/1)}}{dt}/R_1+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{E(2/1)}$$

$$\Rightarrow\left[\vec{\gamma}_E+\vec{\gamma}_C\right]_{(2/0)}=\left.\frac{d\vec{V}_{E(1/0)}}{dt}\right/_{R_0}+\left.\frac{d\vec{V}_{E(2/1)}}{dt}\right/_{R_1}+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{R_1}(M)+\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\vec{V}_{R_2}(M)$$

$$\left.\frac{d\vec{V}_{E(1/0)}}{dt}\right/_{R_0}=\vec{\gamma}_{R_0}(O_1)+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right/_{R_0}+\left.\frac{d\vec{\omega}_{R_1/R_0}}{dt}\right/_{R_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right/_{R_0}=\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right/_{R_1}+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}$$

$$\left.\frac{d\vec{V}_{E(1/0)}}{dt}\right/_{R_0}=\vec{\gamma}_{R_0}(O_1)+\vec{\omega}_{R_1/R_2}\wedge\left(\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)+\left.\frac{d\vec{\omega}_{R_2/R_0}}{dt}\right/_{R_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{R_1}(M)$$

$$\left.\frac{d\vec{V}_{E(2/1)}}{dt}\right/_{R_1}=\vec{\gamma}_{R_1}(O_2)+\vec{w}_{R_2/R_1}\wedge\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}/R_1+\frac{d\vec{w}_{R_2/R_1}}{dt}/R_1\wedge\overrightarrow{O_2M}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right/_{R_1}=\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right/_{R_2}+\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\overrightarrow{O_2M}$$

$$\left.\frac{d\vec{V}_{E(2/1)}}{dt}\right/_{R_1}=\vec{\gamma}_{R_1}(O_2)+\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\left(\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\overrightarrow{O_2M}\right)+\left.\frac{d\vec{\omega}_{R_2/R_1}}{dt}\right/_{R_1}\wedge\overrightarrow{O_2M}+\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\vec{V}_{R_2}(M)$$

$$\Rightarrow\left[\vec{\gamma}_E+\vec{\gamma}_C\right]_{(2/0)}=\left\{\vec{\gamma}_{R_1}(O_2)+\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\left(\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\overrightarrow{O_2M}\right)+\left.\frac{d\vec{\omega}_{R_2/R_1}}{dt}\right/_{R_1}\wedge\overrightarrow{O_2M}+2\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\vec{V}_{R_2}(M)\right\}+$$

$$\left\{\vec{\gamma}_{R_0}(O_1)+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\left(\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)+\left.\frac{d\vec{\omega}_{R_1/R_0}}{dt}\right/_{R_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}+2\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{R_1}(M)\right\}$$

$$=\left[\vec{\gamma}_E+\vec{\gamma}_C\right]_{(2/1)}+\left[\vec{\gamma}_E+\vec{\gamma}_C\right]_{(1/0)}$$

Exercice 4

Soit $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère fixe et $R\left(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right)$ un repère mobile lié à la terre.

$\vec{\omega}_{R_1/R} = \omega\vec{k}$: Avec ω est la vitesse de rotation de la terre autour d'elle même.

L'avion est en mouvement de rotation dans le repère R' avec une vitesse angulaire ω_1. Soit, $\vec{u}_{\rho_1}, \vec{u}_{\varphi_1}$ et $\vec{u}_z$ les vecteurs unitaires liés au mouvement de l'avion :

1- $\vec{V}_{R_1}(M) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/R_1} = R\cos\lambda \left.\dfrac{d\vec{u}_{\rho_1}}{dt}\right|_{/R_1} = R\omega_1 \cos\lambda \vec{u}_{\rho_1} \Rightarrow \vec{V}_{R_1}(M) = V\vec{u}_{\varphi_1}$

$$\vec{\gamma}_C = 2\vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \vec{V}_{R_1}(M) = -2\omega V \vec{u}_{\rho_1} \; ; \quad |\vec{\gamma}_C| = 2\omega V$$

AN : $|\vec{\gamma}_C| = 2\dfrac{2\pi\times 500}{24\times 3600}$; $|\vec{\gamma}_C| = 7{,}27\,10^{-2} ms^{-2}$

2- $\vec{\gamma}_E = \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \left(\vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = -R\omega^2 \cos\lambda \vec{u}_{\rho_1}$ et $|\vec{\gamma}_E| = R\omega^2 \cos\lambda$

AN : $|\vec{\gamma}_E| = 1{,}68\,10^{-2} ms^{-2} \Rightarrow |\vec{\gamma}_E| << |\vec{\gamma}_C|$

3- $\vec{V}_{R_1}(M) = V\vec{u}_\theta$; soit $\alpha = \left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\right) \Rightarrow \vec{u}_\theta = \cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{k}$

$\vec{\gamma}_C = 2\vec{w}_{R_1/R} \wedge \vec{V}_{R_1}(M) = 2w\vec{k} \wedge \vec{u}_\theta V = 2wV\cos\alpha\,\vec{j}'$

et $|\vec{\gamma}_C| = 2wV|\cos\alpha|$ AN : $|\vec{\gamma}_C = 7.27\,10^{-2}\|\cos\alpha| ms^{-2}$

Au pole nord $\alpha = 0 \Rightarrow |\vec{\gamma}_C| = 2\omega V$

A l'équation $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow |\vec{\gamma}_C| = 0$

Exercice 5

1-a- : $\vec{i} = \cos\theta\vec{I} + \sin\theta\vec{J}\,;\ \vec{j} = -\sin\theta\vec{I} + \cos\theta\vec{J}$ avec $\theta = \dfrac{1}{4}\sigma t^2$

b-

$* \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + z\vec{k} = v_0 t\vec{i} + ax^2\vec{k} = v_0 t\vec{i} + av_0^2 t^2 \vec{k}$

$* \vec{V}_E = \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2} v_0 t^2 \sigma \vec{j}$

$* \vec{\gamma}_E = \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + \dfrac{d\vec{\Omega}_{R/R_0}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} = -\dfrac{1}{4} v_0 t^3 \sigma^2 \vec{i} + \dfrac{1}{2}\delta\,\vec{k} \wedge v_0 t\vec{i}$

$= -\dfrac{1}{4} v_0 t^3 \sigma^2 \vec{i} + -\dfrac{1}{2}\sigma\, v_0\, t\,\vec{j}$

$* \vec{\gamma}_C = 2\vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{V}_r\,;\ \vec{V}_r = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} / R = v_0\vec{i} + 2av_0^2 t\vec{k} \Rightarrow \vec{\gamma}_C = v_0 \sigma t\vec{j}$

2- $\dfrac{dS}{dt}=v_r=\left(v_0^2+4a^2v_0{}^4t^2\right)^{\frac{1}{2}}=v_0\left(1+4v_0{}^2a^2t^2\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\quad dS=v_0\left(1+4v_0^2a^2t^2\right)^{\frac{1}{2}}dt$

$$\theta=2\pi=\frac{1}{4}\sigma T^2\quad\Rightarrow T=\left(\frac{8\pi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow s=v_0\int_0^{\frac{8\pi}{\sigma}}\left(1+4v_0^2a^2t^2\right)^{\frac{1}{2}}dt$$

On pose : $u^2=4v_0^2a^2t^2\Rightarrow u=2v_0at$

$$s=\frac{du}{2v_0a}=dt\Rightarrow s=\frac{v_0}{2v_0a}\int_0^{2v_0a\sqrt{\frac{8\pi}{\sigma}}}\sqrt{1+u^2}\,du;\qquad \text{si on pose}\quad u=shx\Rightarrow du=chxdx$$

$$\sqrt{1+u^2}=\sqrt{1+sh^2x}=chx\Rightarrow s=\frac{1}{2a}\int_0^{Argsh\left(2v_0a\sqrt{\frac{8\pi}{\sigma}}\right)}ch^2x\,dx=\frac{1}{4a}\int_0^A(ch2x+1)dx$$

$$s=\frac{1}{4a}Argsh(2v_0a\sqrt{\frac{8\pi}{\sigma}})+\frac{1}{8a}sh(2(Argsh(2v_0a\sqrt{\frac{8\pi}{\sigma}})))$$

Exercice 6

1- a- $\overrightarrow{OB}=a\vec{u}_{OB}=a\cos\theta\vec{I}+a\sin\theta\vec{j}$ avec $\theta=\omega_0t$

$$\vec{V}_B=\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}=-a\omega_0\sin\theta\vec{I}+a\omega_0\cos\theta\vec{J}\Rightarrow\vec{\gamma}_B=-a\omega_0^2\quad\left(\cos\theta\ \vec{I}+\sin\theta\ \vec{J}\right)$$

b- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=(-X_0a\cos\theta)\vec{I}+a\sin\theta\vec{J}$

$\vec{V}_{B/A}=\vec{V}_{B/O}$ et $\vec{\gamma}_{B/A}=\vec{\gamma}_{B/O}$

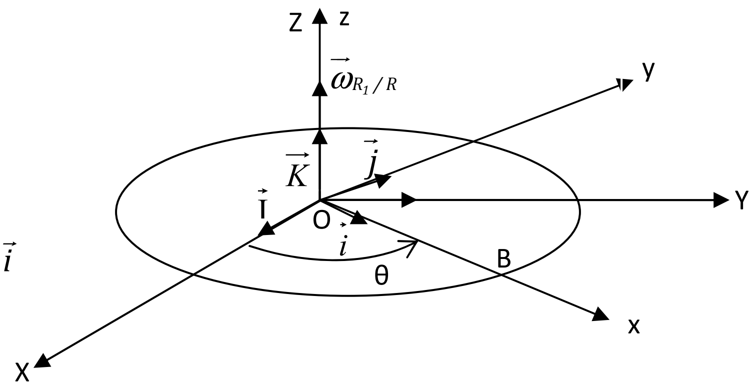
2-

$$\overrightarrow{OM}=v_0t\ \ \vec{u}_{OB}=v_0t\cos\theta\ \ \vec{I}+v_0t\sin\theta\vec{j}$$
$$\vec{V}_a=\left(v_0\cos\theta-v_0t\omega_0\sin\theta\right)\ \vec{I}+\left(v_0\sin\theta\right)+\left(v_0\sin\theta+v_0t\omega_0\cos\theta\right)\vec{J}$$

$$\vec{\gamma}_a=-\left(2v_0\omega_0\sin\theta+v_0\omega_0^2\cos\theta\right)\vec{I}+\left(2v_0\omega_0\cos\theta-v_0\omega_0^2t\sin\theta\right)\vec{J}$$

3-a : $R_1(O,x,y,z)$: repère mobile lié au disque.

$\vec{\omega}_{R_1/R}=\omega_0\vec{k}$



b- $\vec{v}_e=\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\overrightarrow{OM}=\omega v_0t\,\vec{j}$; $\vec{v}_r=v_0\vec{i}$

$\vec{v}_M=\vec{v}_e+\vec{v}_r\ \ =v_0\vec{i}+\omega v_0t\vec{j}$

c- $\vec{\gamma}_e=\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\left(\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\overrightarrow{OM}\right)=-\omega_0^2v_0t\vec{i}$

$\vec{\gamma}_r=\vec{0}$; $\vec{\gamma}_C=\vec{\omega}_{R_1/R}\wedge\vec{v}_r=2\omega_0v_0\vec{j}$

$\vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_e+\vec{\gamma}_C+\vec{\gamma}_r=-\omega_0^2v_0t\vec{i}+2\omega_0v_0\vec{j}$

4-a :

$$\overrightarrow{OB}_{/R_1}\begin{cases}x=a\\ y=0\\ z=2d\sin\alpha t\end{cases}\qquad \overrightarrow{OB}_{/R}\begin{cases}X=a\cos\omega_0 t\\ Y=a\sin\omega_0 t\\ Z=2d\sin\alpha t\end{cases}$$

b- $z(T)=0\Rightarrow \sin\alpha T=0\Rightarrow \alpha T=n\pi\ /\ n\in\mathbb{N}\quad\Rightarrow \alpha=\dfrac{n}{2}\omega_0\ /\ n\in\mathbb{N}$

c- $\vec{V}_a/R_1=a\omega_0\vec{j}+2d\alpha\cos t\,\vec{j}\Rightarrow\quad \vec{\gamma}_a/R_1=-a\omega_0^2\vec{i}-2d\alpha^2\sin\alpha t\,\vec{k}$

5-a : $\quad\omega(t)=-\beta t+\omega_0\Rightarrow\omega(t_a)=0\Rightarrow t_a=\dfrac{\omega_0}{\beta}$

b- : $\quad\vec{v}_a=v_0\vec{i}+v_0t(\omega_0-\beta t)\vec{j}\Rightarrow\vec{\gamma}_a=v_0t(-\beta t+\omega_0)^2\vec{i}+v_0(2\omega_0-3\beta t)\vec{j}$

Exercice 7

1- $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1M}=h(t)\vec{k}+a\vec{u}_\rho$

2- $\vec{v}_a=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|_{/R_0}=\dot{h}(t)\vec{k}+a\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt}\Big|_{/R_0}$

$\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt}\Big|_{/R_0}=\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt}\Big|_{/R_1}+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{u}_\rho=\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi+\dot{\theta}\vec{u}_\varphi=(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\vec{u}_\varphi\Rightarrow\vec{v}_a=\dot{h}(t)\vec{k}+a(\dot{\phi}+\dot{\theta})\vec{u}_\varphi$

$\vec{v}_e=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|_{/R_0}$ (M fixe dans R1) $\Rightarrow\vec{v}_e=\dot{h}\vec{k}+a\dot{\theta}\vec{u}_\varphi$ et $\vec{v}_r=\vec{v}_a-\vec{v}_e=a\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$

3- $\vec{\gamma}_a=\dfrac{d\vec{v}_a}{dt}\Big|_{/R_0}=\ddot{h}\vec{k}+a(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta})\vec{u}_\varphi+a(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\dfrac{d\vec{u}_\varphi}{dt}\Big|_{/R_0}$

$\dfrac{d\vec{u}_\varphi}{dt}\Big|_{/R_0}=\dfrac{d\vec{u}_\varphi}{dt}\Big|_{/R_1}+\vec{w}_{R_1/R_0}\wedge\vec{u}_\varphi=-(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\vec{u}_\rho$

$\Rightarrow\vec{\gamma}_a=\ddot{h}\vec{k}+a(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta})\vec{u}_\varphi+a(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\dfrac{d\vec{u}_\varphi}{dt}\Big|_{/R_0}$

$\vec{\gamma}_r=a\ddot{\varphi}\vec{u}_\varphi-a\dot{\varphi}^2\vec{u}_\rho$

$\vec{\gamma}_e=\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|_{/R_0}$ (M fixe dans R1) $\Rightarrow\vec{\gamma}_e=\ddot{h}\vec{k}+a\ddot{\theta}\vec{u}_\varphi-a\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho$

$\vec{\gamma}_c=\vec{\gamma}_a-\vec{\gamma}_e-\vec{\gamma}_r\Rightarrow\vec{\gamma}_c=-2a\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\vec{u}_\rho$

Exercice 8

1- $\vec{\Omega}_{2/1}=\dot{\varphi}\vec{i}$

a- $\overrightarrow{OM})=r\vec{u}_r\Rightarrow\vec{v}_{R_1}(M)=\dfrac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}/R_1=\dot{r}\vec{u}_r+r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$

b- $\vec{\gamma}_{R_1}(M)=\dot{r}\dot{\varphi}\vec{u}_{\varphi}+\dot{r}\dot{\varphi}\vec{u}_{\varphi}-r\dot{\varphi}^2\vec{u}_r \Rightarrow \vec{\gamma}_{R_1}(M)=-r\dot{\varphi}^2\vec{u}_r+2\dot{r}\dot{\varphi}\vec{u}_{\varphi}$

2- $\overrightarrow{\Omega}_{1/0}=\dot{\theta}\ \vec{k}$

a- $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1O}=\left\|\overrightarrow{OO_1}\right\|\vec{i}+r\vec{u}_r$

$\vec{v}_{R_0}(M)=\vec{v}_{R_1}(M)+\vec{v}_e$

$\vec{v}_e=\vec{v}_{R_0}(O_1)+\overrightarrow{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}$

$\vec{v}_{R_0}(O_1)=\left\|\overrightarrow{OO_1}\right\|\frac{d\vec{i}}{dt}_{/R_0}=\left\|\overrightarrow{OO_1}\right\|\dot{\theta}\vec{j}$ On pose $\left\|\overrightarrow{OO_1}\right\|=d$

$\overrightarrow{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}=\dot{\theta}\vec{k}\wedge r\vec{u}_r=\dot{\theta}\vec{k}\wedge r(\cos\varphi\vec{j}+\sin\varphi\vec{k})=-\dot{\theta}r\cos\varphi\vec{i}$

$\Rightarrow \vec{v}_e=d\dot{\theta}\vec{j}-r\dot{\theta}\cos\varphi\vec{i}$

$\vec{v}(M)_{R_1/R_1}=\dot{r}\left(\cos\varphi\vec{j}+\sin\varphi\vec{k}\right)+\dot{\varphi}r\quad\left(-\sin\varphi\vec{j}+\cos\varphi\vec{k}\right)$

$\Rightarrow \vec{v}(M)_{R_0/R_1}=-r\dot{\theta}\cos\varphi\vec{i}+\left(d\dot{\theta}+\dot{r}\cos\varphi-\dot{\varphi}r\sin\varphi\right)\vec{j}+\left(\dot{r}\sin\varphi+r\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\vec{j}$

b- $\vec{\gamma}(M)_{R_0/R_1}=?$

$\vec{\gamma}_{R_0}(M)=\frac{d\vec{v}_{R_0}(M)}{dt}_{/R_0}$

$=-\dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi\vec{i}+r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{i}-r\dot{\theta}^2\cos\varphi\vec{j}+\left(-\dot{r}\dot{\varphi}\quad\sin\varphi-\dot{\varphi}\dot{r}\quad\sin\varphi-r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\vec{j}$

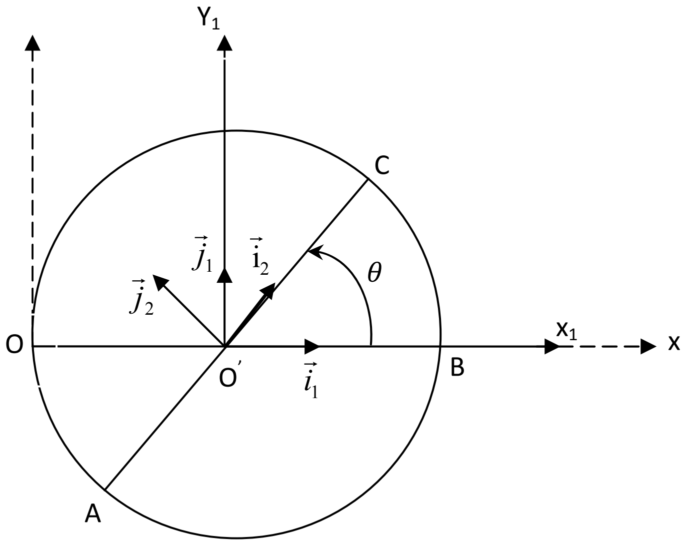
$-\left(d\dot{\theta}^2+\dot{r}\dot{\theta}\quad\cos\varphi-r\dot{\varphi}\dot{\theta}\quad\sin\dot{\varphi}\right)\quad\vec{i}+\quad\left(\dot{r}\dot{\varphi}\quad\cos\varphi+\dot{r}\dot{\varphi}\quad\cos\varphi-r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\vec{k}$

$\vec{\gamma}_{R_0}(M)/R_1=-\left(d\dot{\theta}^2+2\dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi-2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi\right)\vec{i}-\left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\right)\right)\vec{j}$

$+(2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi-r\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\vec{k}$

Exercice 9

I-



1- $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=\sigma \quad \Rightarrow \dfrac{d\theta}{dt}=\sigma t+\left.\dfrac{d\theta}{dt}\right|_{t=0}$; la tige est au repos à t= 0

$$\Rightarrow \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0}=0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}=\sigma t \Rightarrow \theta(t)=\frac{1}{2}\sigma t^2+\theta(t=0)$$

Or à t=0, la tige est portée par Ox_1 $\Rightarrow \theta_0=0 \Rightarrow \theta(t)=\dfrac{1}{2}\sigma t^2$

$R_1(O',x_1,y_1,z_1)$ Repère lié au cercle supposé fixe.

$R_2\ (O',x_2,y_2,z_2)$ Repère lié à la tige.

$O'z_1 // O'z_2 // O'z$

$$\vec{v}_{R_1}(M)=\vec{v}_{R_2}(M)+\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\omega}_{R_2/R_1}=\dot{\theta}\vec{k}=\sigma t\vec{k}\\ \overrightarrow{O'M}=R\sin\omega t\vec{i}_2\end{array}\right\}\Rightarrow \quad \vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\overrightarrow{O'M}=R\ \ \sigma\ \ t\sin\ \ \omega t\ \ \left(\vec{k}\wedge\vec{i}_2\right)=R\sigma t\sin\omega t\,\vec{j}_2$$

$$\vec{v}_{R_2}(M)=\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/R_2}=R\omega\cos\omega t\ \ \vec{i}_2 \Rightarrow \vec{v}_{R_1}(M)=R\omega\cos\omega t\ \ \vec{i}_2+R\sigma\ \ t\sin\omega t\ \ \vec{j}_2$$

2- $\gamma_E(M)=\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge(\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\overrightarrow{O'M})+\left.\dfrac{d\vec{\omega}_{R_2/R_1}}{dt}\right|_{/R_1}\wedge\overrightarrow{O'M}=R\sigma^2t^2\sin\omega t\,\vec{k}\wedge\vec{j}_2+\sigma\vec{k}\wedge R\sin\omega t\vec{i}_2$

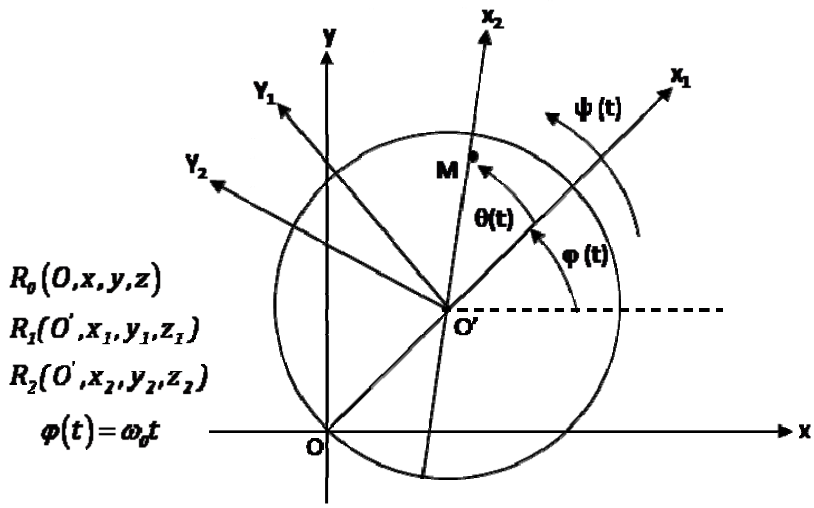
$$\vec{\gamma}_E=-R\sigma^2t^2\sin\omega t\ \ \vec{i}_2+R\sigma\sin\omega t\ \ \vec{j}_2$$

$$*\vec{\gamma}_c=2\vec{\omega}_{R_2/R_1}\wedge\vec{v}_{R_1}(M)=2\sigma t\ \ \vec{k}\wedge R\omega\cos\omega t\ \ \vec{i}_2=2\sigma tR\omega\cos\omega t\ \ \vec{j}_2$$

$$*\vec{\gamma}_{R_2}(M)=\left.\frac{d\vec{v}_{R_2}(M)}{dt}\right|_{/R_2}=-R\omega^2\sin\omega t\,\vec{i}_2$$

$$*\vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_{R_c}(M)+\vec{\gamma}_t+\vec{\gamma}_c=-\left(R\omega^2\sin\omega t+R\sigma^2t^2\sin\omega t\right)\ \vec{i}_2+\left(R\sigma\sin\omega t+2\sigma tR\omega\cos\omega t\right)\ \vec{j}_2$$

II/ 1-



2- $\psi=\theta(t)+\varphi(t)=\frac{1}{2}\sigma t^2+\omega_0 t \Rightarrow \vec{\omega}_{R_2/R_0}=\frac{d\psi}{dt}\vec{k}=(\omega_0+\sigma t)\vec{k}$

$$\vec{v}_E(R_2/R_0)=\vec{v}_{R_0}(O')+\vec{\omega}_{R_2/R_0}\wedge\overrightarrow{O'M}=R\omega_0\vec{j}_1+(\omega_0+\sigma t)\vec{k}\wedge R\sin\omega t\vec{i}_2$$

$$=R\omega_0\vec{j}_1+(w_0+\delta t)R\sin\omega t\vec{j}_2$$

$$\vec{v}_E(R_2/R_1)=\underbrace{\vec{v}_{R_1}(O')}_{0}+\vec{\omega}_{R_1/R_2}\wedge\overrightarrow{O'M}=R\sigma t\sin\omega t\vec{j}_2$$

$$\vec{v}_E(R_1/R_0)=\vec{v}_{R_0}(O')+\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v}_{R_0}(O')=R\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{/R_0}=R\omega_0\vec{j}_1\ ;\qquad \vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{O'M}=\omega_0\vec{k}_1\wedge R\sin\omega t\vec{i}_2=R\omega_0\sin\omega t\vec{j}_2$$

$$\Rightarrow\vec{v}_E(R_2/R_1)+\vec{v}_E(R_1/R_0)=R\omega_0\vec{j}_1+(\sigma t+\omega_0)R\sin\omega t\vec{j}_2=\vec{v}_E(R_2/R_0)$$

Exercice10

I-1-a : $\vec{\Omega}_{2/0}=-\omega_0\vec{k}$

b- $\vec{i}_2=\cos\omega_0 t\vec{i}-\sin\omega_0 t\vec{j}\ ;\quad \vec{j}_2=\sin\omega_0 t\vec{i}+\cos\omega_0 t\vec{j}$

c- $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1M}=\frac{a}{2}\vec{j}+a\vec{j}_2$

Autre méthode : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{a}{2}\vec{j}+a\vec{j}_2$

$$\overrightarrow{OM}=(\frac{a}{2}+a\cos\omega_0 t)\vec{j}+a\sin\omega_0 t\vec{i}$$

d- $\overrightarrow{OM}-\frac{a}{2}\vec{j}=a\cos\omega_0 t\vec{j}+a\sin\omega_0 t\vec{i}\qquad\Rightarrow\left(\overrightarrow{OM}-\frac{a}{2}\vec{j}\right)^2=a^2\Rightarrow\mathcal{C}(O_1,a)$

2-a $\vec{v}_E=\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\overrightarrow{OM}$

$$\Rightarrow\vec{v}_E=a\omega_0\left(\frac{1}{2}+\cos\omega_0 t\right)\vec{i}-a\omega_0\sin\omega_0 t\vec{j}$$

$$\vec{v}_{R_2}(M)=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{/R_2}=\frac{a}{2}\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{/R_2}=\frac{a}{2}\left(\vec{\Omega}_{0/2}\wedge\vec{j}\right)$$

Or $\vec{\Omega}_{0/2}=-\vec{\Omega}_{2/0}=\omega_0\vec{k}\qquad\Rightarrow\vec{v}_{R_2}(M)=-\frac{a}{2}\omega_0\vec{i}$

Autre méthode :

$$\vec{j}=-\sin\omega_0 t\vec{i}+\cos\omega_0 t\vec{j}_2\quad ;\quad \vec{i}=\cos\omega_0 t\vec{i}+\sin\omega_0 t\vec{j}_2$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt}_{/R_2} = -\omega_0(\cos\omega_0 t\,\vec{i} + \sin\omega_0 t\,\vec{j}_2) = -\omega_0\,\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{R_2}(M) = -\frac{a}{2}\omega_0\,\vec{i}$$

$$*\ \vec{\gamma}_E(R_2/R_0) = \vec{\gamma}_{R_0}(O') + \vec{\omega}_{R_2/R_0} \wedge (\vec{\omega}_{R_2/R_0} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}_{R2/R_0}}{dt}_{/R_0} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$*\ \vec{\gamma}_{R_0}(O') = -R\omega_0^2\vec{i}_1$$

$$*\ \vec{\omega}_{R_2/R_0} \wedge (\vec{\omega}_{R_2/R_0} \wedge \overrightarrow{O'M}) = (\omega_0 + \sigma t)\vec{k} \wedge (\omega_0 + \sigma t) R\sin\omega t\,\vec{j}_2$$

$$= (\omega_0 + \sigma t)^2 R\sin\omega t\,\vec{i}_2$$

$$*\ \frac{d\vec{\omega}_{R2/R_0}}{dt}_{/R_0} \wedge \overrightarrow{O'M} = \sigma\vec{k} \wedge R\sin\omega t\vec{i}_2 = R\sigma\sin\omega t\,\vec{j}_2$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_E(R_2/R_0) = -R\omega_0^2\vec{i}_1 - (\omega_0 + \sigma t)^2 R\sin\omega t\,\vec{i}_2 + R\sigma\sin\omega t\,\vec{j}_2$$

$$*\ \vec{\gamma}_c(R_2/R_0) = 2\vec{\omega}_{R_2/R_0} \wedge \vec{v}_{R_2}(M) = 2(\omega_0 + \sigma t)\vec{k} \wedge R\omega\cos\omega t\vec{i}_2$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_c(R_2/R_0) = 2(\omega_0 + \sigma t)R\omega\cos\omega t\,\vec{j}_2$$

$$*\ (\vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_E)_{(R_2/R_0)} = -R\omega_0^2\vec{i}_1 - (\omega_0 + \sigma t)^2 R\sin\omega t\,\vec{i}_2 + (R\sigma\sin\omega t + 2(\omega_0 + \sigma t)R\omega\cos\omega t)\vec{j}_2$$

$$*\ (\vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_E)_{(R_2/R_1)} = \underbrace{\vec{\gamma}_{R_1}(O')}_{0} + \vec{\omega}_{(R_2/R_1)} \wedge \left(\vec{\omega}_{(R_2/R_1)} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}_{(R_2/R_1)}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + 2\vec{\omega}_{(R_2/R_1)} \wedge \vec{v}_{R_2}(M)$$

$$= -R\sigma^2 t^2 \sin\omega t\vec{i}_2 + (R\sigma\sin\omega t + 2\sigma t R\omega\cos\omega t)\vec{j}_2$$

$$*(\vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_E)_{(R_1/R_0)} = \vec{\gamma}_{R_0}(O') + \vec{\omega}_{R_1/R_0} \wedge (\vec{\omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O'M}) + 2\vec{\omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{v}_{R_1}(M)$$

$$*\vec{\gamma}_{R_0}(O') = -R\omega_0^2\vec{i}_1$$

$$*\vec{\omega}_{R_1/R_0} \wedge (\vec{\omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O'M}) = \omega_0\vec{k} \wedge (\omega_0\vec{k} \wedge R\sin\omega t\vec{i}_2) = -R\omega_0^2\sin\omega t\vec{i}_2$$

$$*2\vec{\omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{v}_{R_1}(M) = 2\omega_0\vec{k} \wedge (R\omega\cos\omega t\vec{i}_2 + R\sigma t\sin\omega t\vec{j}_2) = 2R\omega\omega_0\cos\omega t\vec{j}_2 - 2R\sigma t\sin\omega t\vec{i}_2$$

$$(\vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_E)_{(R_2/R_1)} + (\vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_E)_{(R_1/R_0)} = (-R\sigma^2 t^2\sin\omega t - 2R\sigma t\omega_0\sin\omega t)\vec{i}_2 + \begin{pmatrix} R\sigma\sin\omega t + 2R\sigma\omega t\cos\omega t \\ +2R\omega_0\omega\cos\omega t \end{pmatrix}\vec{j}_2$$

$$-R\omega_0^2\sin\omega t\vec{i}_2 - R\omega_0^2\vec{i}_1 = -R(\sigma t + \omega_0)^2\sin\omega t\vec{i}_2 + (R\sigma\sin\omega t + 2R\omega(\omega_0 + \sigma t)\cos\omega t)\vec{j}_2 - R\omega_0^2\vec{i}_1$$

$$\Rightarrow (\vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_E)_{(R_2/R_0)} = (\vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_E)_{(R_2/R_1)} + (\vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_E)_{(R_1/R_0)}$$

$$\vec{v}_a = a\omega_0\cos\omega_0 t\vec{i} - a\omega_0\sin\omega_0 t\,\vec{j} = a\omega_0\vec{i}_2$$

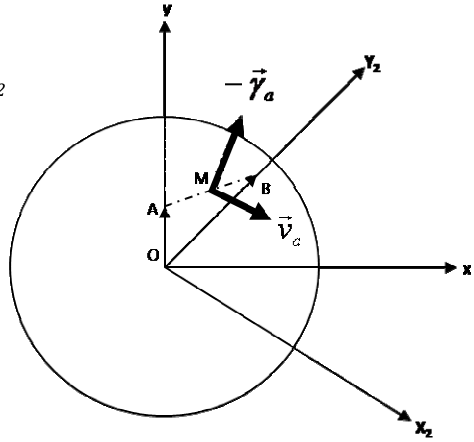
b- $\vec{\gamma}_{R_2}(M) = \frac{d\vec{v}_{R_2}(M)}{dt}_{/R_2} = -\frac{a}{2}\omega_0^2\vec{j}$

$$\vec{\gamma}_{E(2/0)}(M) = \vec{\omega}_{R_2/R_0} \wedge (\vec{\omega}_{R_2/R_0} \wedge \overrightarrow{O'M}) = -a\omega_0^2 \left(\sin\omega_0 t\vec{i} + \left(\frac{1}{2} + \cos\omega_0 t\right)\vec{j} \right)$$

$$\vec{\gamma}_{c(2/0)}(M) = 2\vec{\omega}_{R_2/R_0} \wedge \vec{v}_{R_2}(M) = a\omega_0^2\vec{j}$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_r = a\omega_0^2\left(\sin\omega_0 t\vec{i} + \cos\omega_0 t\vec{j}\right) = -a\omega_0^2\vec{j}_2$$

c-



II-1-a $\vec{\Omega}_{2/1} = -\omega_2\vec{k}$ et $\vec{\Omega}_{1/0} = -\omega_1\vec{k}$

b- $\overrightarrow{OM} = \frac{a}{2}\vec{j}_1 + a\,\vec{j}_2$ $\vec{j}_2 = \sin\omega_0 t\vec{i} + \cos\omega_0 t\vec{j}$; $\vec{j}_1 = \sin\omega_1 t\vec{i} + \cos\omega_1 t\vec{j}$ avec $\omega_0=\omega_1+\omega_2$

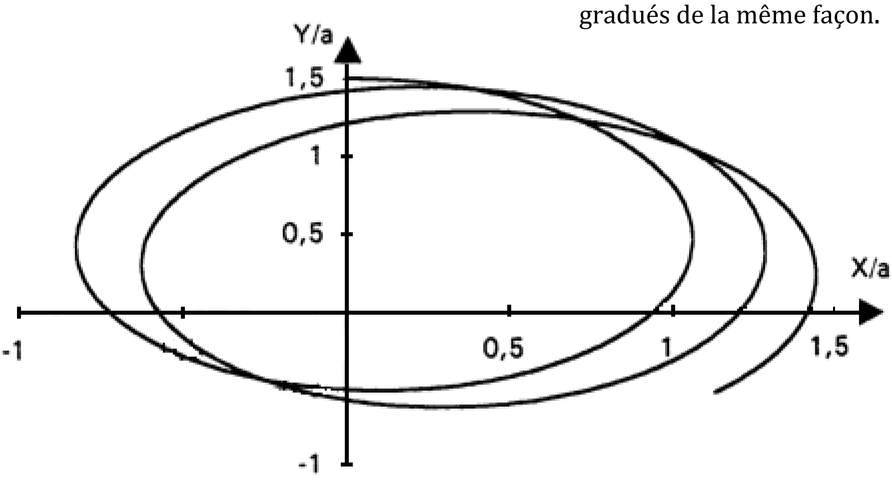
$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = a\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{2}\sin\omega_1 t\right)\vec{i} + a\left(\cos\omega_0 t + \frac{1}{2}\cos\omega_1 t\right)\vec{j}$$

$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ avec T_2 =1h=3600s $\Rightarrow \omega_2 = \frac{2\pi}{3600} rds^{-1}$; $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ avec T_1 =12h=43200s

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{43200} rds^{-1}$$

t-12h	0mn	12mn	24mn	36mn	48mn	60mn	72mn	84mn	96mn	108mn	120mn	24mn
W_1t	0	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{15}$	$\frac{\pi}{10}$	$2\frac{\pi}{15}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$7\frac{\pi}{30}$	$\frac{4\pi}{15}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{30}$
W_2t	0	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{8\pi}{5}$	2π	$\frac{12\pi}{5}$	$\frac{14\pi}{5}$	$\frac{16\pi}{5}$	$\frac{18\pi}{5}$	4π	$\frac{22\pi}{5}$
$\frac{x}{a}$	0	1 ,030	0,510	1,105	-0,539	0,750	1,244	1,143	-0,622	0,095	1,299	1,12
$\frac{y}{a}$	$\frac{3}{2}$	0,705	-0,424	0,166	1,125	1,299	0,095	-0 ,216	0,230	1,244	0,750	-0,530
W_0t	0	$\frac{13\pi}{30}$	$\frac{13\pi}{15}$	$\frac{13\pi}{5}$	$\frac{26\pi}{15}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{5}$	$\frac{81\pi}{30}$	$\frac{52\pi}{15}$	$\frac{39\pi}{10}$	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{143\pi}{30}$

N .B : Les axes ne sont pas gradués de la même façon.



c-

$$\vec{\gamma}_{E(1,0)} = \vec{\omega}_{1/0} \wedge (\vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O'M}) = \omega_1^2 \vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \left(\frac{a}{2}\vec{j}_1 + a\vec{j}_2 \right) \right)$$

$$= \omega_1^2 \vec{k} \wedge \left(-\frac{a}{2}\vec{i}_1 - a\vec{i}_2 \right) = -\frac{a}{2}\omega_1^2 \vec{j}_1 - a\omega_1^2 \vec{j}_2$$

$$\vec{\gamma}_{E(1/0)} = -a\omega_1^2 \left\{ \left(\frac{1}{2}\cos\omega_1 t + \cos\omega_0 t \right)\vec{j} + \left(\frac{1}{2}\sin\omega_1 t + \sin\omega_0 t \right)\vec{i} \right\}$$

$$\left|\vec{\gamma}_{E(1/0)}\right|^2 = a^2\omega_1^4 \left\{ \frac{1}{4} + 1 + \cos\omega_1 t \cos\omega_0 t + \sin\omega_1 t \sin\omega_0 t \right\}$$

$$= a^2\omega_1^4 \left\{ \frac{5}{4} + \cos(\omega_0 - \omega_1)t \right\} = a^2\omega_1^4 \left\{ \frac{5}{4} + \cos(\omega_2 t \right\}$$

$$\vec{\gamma}_{E(1/2)} = \vec{\omega}_{1/2} \wedge (\vec{\omega}_{1/2} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\omega_2^2 \vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \left(\frac{a}{2}\vec{j}_1 + a\vec{j}_2 \right) \right)$$

$$= -a\omega_2^2 \left\{ \left(\frac{1}{2}\cos\omega_1 t + \cos\omega_0 t \right)\vec{j} + \left(\frac{1}{2}\sin\omega_1 t + \sin\omega_0 t \right)\vec{i} \right\}$$

$$\left|\vec{\gamma}_{E(1,2)}\right| = a\omega_2^2 \left\{ \frac{5}{4} + \cos\omega_2 t \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\left|\vec{\gamma}_{E(1,2)}\right|}{\left|\vec{\gamma}_{E(1,0)}\right|} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \qquad \text{or} \qquad \omega_2 \gg \omega_1 \Rightarrow \left|\vec{\gamma}_{E(1,2)}\right| \gg \left|\vec{\gamma}_{E(1,0)}\right|$$

$\Rightarrow$ L’approximation faite en première partie est bonne.

Dynamique du point matériel

Exercice 1

Un point matériel M de masse m se déplace dans un plan (π) défini par le système d'axes Oxy, qui constitue le référentiel galiléen R_a. Un système d'axes OXY mobile (par rapport à R_a) du plan (π) constitue un repère relatif R_r. Le mouvement de M par rapport à R_a sera dit « mouvement absolue de M », et le mouvement de M par rapport à R_r sera dit « mouvement relatif de M »

On désigne par :

- $\theta=\omega t$, l'angle que fait OX avec Ox , ω étant une constante positive et t le temps.

X et Y les coordonnées de M dans le système d'axes OXY. $\vec{I}$ et $\vec{J}$ les vecteurs unitaires des axes OX et OY.

Le point M soumis à la force $\vec{F}$ de composantes F_x et F_y suivant $\vec{I}$ et $\vec{J}$.

1- Montrer que la loi fondamentale de la dynamique peut s'écrire : $m\vec{\Gamma}_r=\vec{F}+\vec{F}_e+\vec{F}_c$

Où $\vec{\Gamma}_r$ est l'accélération de M par rapport à R_r , $\vec{F}_e,\vec{F}_c$ sont des forces que l'on explicitera en fonction de X, Y et leurs dérivées s'il y a lieu .

2- Démontrer que dans le mouvement relatif de M l'une des deux forces $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$ ne travaille pas et que l'autre dérive d'un potentiel dont on donnera l'expression. (On considérera pour cela les puissances relatives de $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$).

Exercice2

Etude de l'usure des rails de chemin de fer

Soit un repère galiléen R_0 (O, X, Y, Z). Centré au centre de la terre et dont l'axe OZ coïncide avec l'axe passant par les pôles Sud et Nord (S-N).

Soit un repère mobile R(O,x,y,z) , lié à la terre , dont l'axe Ox est initialement confondu avec l'axe OX. Soit $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantané de R par rapport à R_0.

Soit un train de masse m, assimilé à un point matériel M, se trouve sur une voie ferrée, situé en Afrique du Nord et reliant une gare de départ M_0 et le nord –Est du pays.

θ' Est l'angle que fait la direction de la voie ferrée avec le Nord. λ est la latitude de la gare M_0.

I- Cas du train en arrêt à la gare de départ

On considère le train en arrêt en M_0 (Figure 1)

1- Déterminer l'accélération absolue de M, en appliquant la loi de composition des accélérations, dans la base sphérique.

2- a- Etablir le bilan des forces dans R.

b- Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans R.

3- a- En projetant le PFD sur la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$, déterminer les composantes de la réaction.

b-Pour quelle composante la réaction non galiléenne est très négligeable ? on appellera cette composante R_1.

c- Etudier les différentes composantes de la réaction en fonction de la latitude λ. Conclure.

d- A .N : On donne λ=30°, g= 10 ms^{-2}, m= 100 tonnes, rayon da la terre = 6400 Km.

II- Cas du train en mouvement uniforme :

Le train se déplace vers le Nord-Est avec une vitesse relative constante(V_0).

A l'instant t, il se trouve en M . (figure 2).

1-a Déterminer le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$. Etant que le train se déplace en Afrique du Nord, cette nouvelle latitude sera-t-elle très différente de la précédente ?

b- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique dans R .

b- Montrer que la composante $\vec{R}_1$ de la réaction opposée au poids reste pratiquement inchangée par rapport au cas I.

A.N : t= 100 mn , V_0 = 100 Km/h , θ′= 45°. Calculer la tension de cette composante en gardant les données numériques précédentes.

Calculer les nouvelles corrections non galiléennes affectant les deux autres composantes de la réaction $\left(\vec{R}_2, et\, \vec{R}_3\right)$

On propose de décomposer $\vec{R}_2 + \vec{R}_3$ dans le cas II comme suit :

$\left(\vec{R}_2 + \vec{R}_3\right)_{II} = \vec{R}_c + \left(\vec{R}_2 + \vec{R}_3\right)_I$ avec $\vec{R}_c$: la nouvelle correction non galiléenne à $\left(\vec{R}_2 + \vec{R}_3\right)_I$ du cas I. Déterminer la direction, le sens et l'intensité de $\vec{R}_c$. Déterminer $\left\|\vec{R}_2\right\|, \left\|\vec{R}_3\right\|, et \left\|\vec{R}_c\right\|$

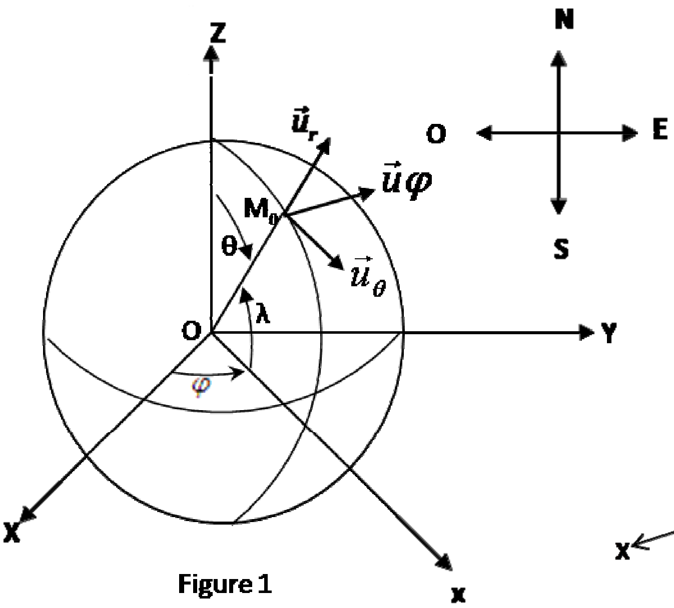


Figure 1

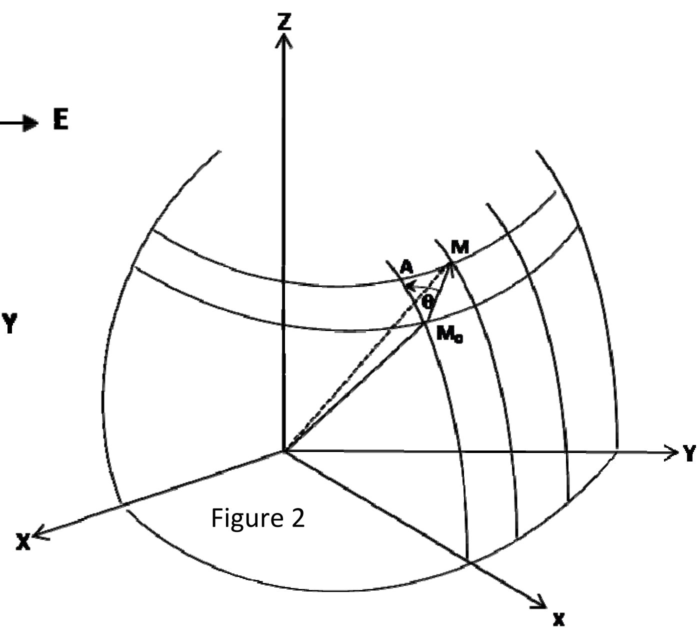


Figure 2

Exercice 3

Un homme se tient debout et immobile au bord d'un plateau circulaire horizontale de rayon R , autour de son axe OZ avec une vitesse angulaire ω constante . Soient R(OXYZ) le repère fixe au sol et R'(O' xyz) le repère lié au plateau dont l'origine O' coïncide avec le pied de l'homme. L'angle (OX ,O'x) est égale à θ = ω t .

1- Calculer les vecteurs vitesses d'entrainement $\vec{V}_e$ et accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ de l'homme.

2- A l'instant t=0, l'homme lâche sans vitesse initiale une bille M de masse m, d'un point M_0 de l'axe O'Z situé à une hauteur h au dessus du plateau.

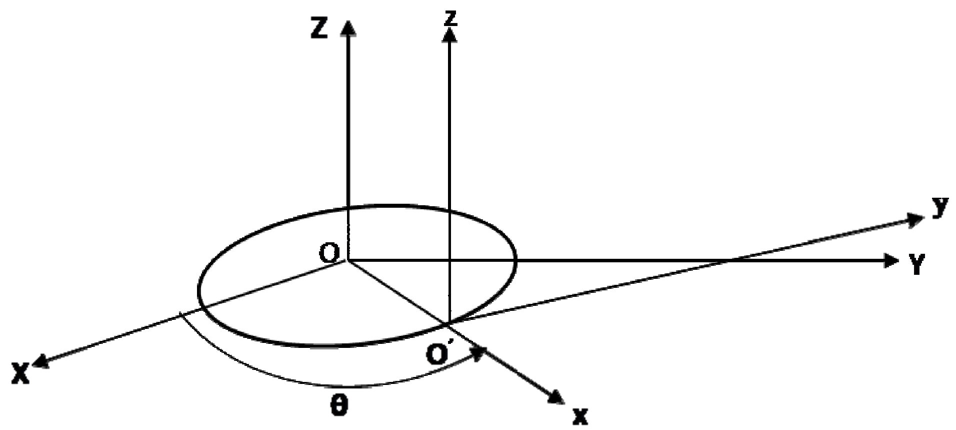
a- Quelle est la vitesse initiale $\vec{V}_a$ (M,t=0) de la bille ?

b- Déterminer les coordonnées X,Y,Z de la bille en fonction du temps .

c- La bille tombe- t- elle sur le plateau ou à l'extérieur ?

Calculer la distance du point d'impact (Z=0) par rapport au centre du plateau.

3- A l'instant t=0, l'homme lance du point O' la bille sur le plateau, dirigée vers le centre O. Le mouvement s'effectue sans frottement.



a- Ecrire la relation fondamentale de la dynamique appliqué à la bille dans le référentiel R'(O' x y z).

b- Déterminer les coordonnées x(t), y(t), et z(t) de la bille.

Exercice 4

Soit R_0 (O x y z) le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen de vecteurs de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Une tige Δ, dont la partie inférieure est fixée en O, tel que $[(Oz, \Delta) = \theta = cte]$, tourne uniformément autour de Oz.

Un anneau M de masse m peut coulisser sans frottement sur Δ. L'accélération de la pesanteur dans R_0 est g. Soit $R_1(O\, x_1\, y_1\, z_1)$ un référentiel de vecteurs de base $\left(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}\right)$ tel que la tige Δ soit constamment dans le plan x_1oz.

1ère partie

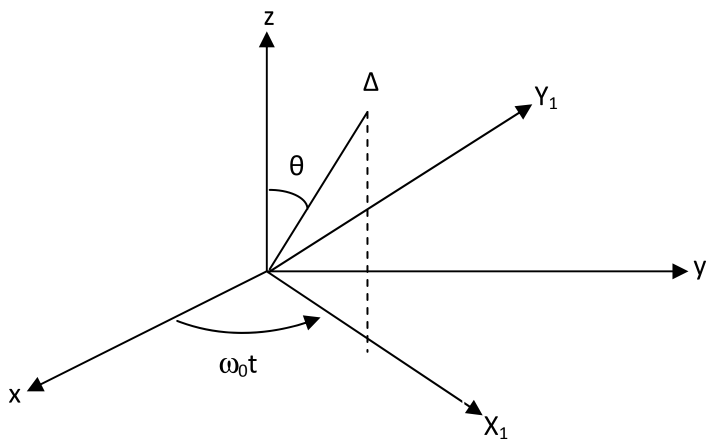
Tout d'abord l'anneau se déplace sur la tige avec une vitesse uniforme v_r.

1- Calculer directement les composantes des vecteurs : vitesse et accélération absolues de M, en déduire les expressions dans R_1.

2- En utilisant les théorèmes de la composition des vitesse et accélération calculer :

a- La vitesse relative et d'entrainement dans R_1.

b- L'accélération relative, l'accélération d'entrainement et l'accélération de Coriolis dans R_1



2ème partie

Maintenant à l'instant (t=0) l'anneau est lâché sans vitesse initiale d'un point M_0 tel que $OM_0 = r_0$.

1- Quelles sont les forces appliquées à M si l'on se déplace dans le repère R_1

2- Déterminer l'équation horaire du mouvement de l'anneau r(t) ?

3- A quelle distance r_0=r de l'origine l'anneau reste-t-il immobile ?

4- Calculer la composante de la réaction de la tige sur l'anneau M suivant Oy

N .B : On rappelle que l'équation différentielle suivante :

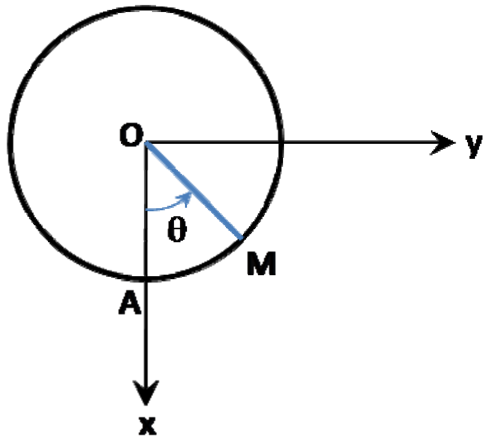
$$\ddot{f}(t) - \Omega^2 f(t) = A,\ \text{admet pour solution}\ f(t) = A_1 e^{-\Omega t} + A_2 e^{\Omega t} - \frac{A}{\Omega^2}$$

Exercice 5

Une particule assimilée à un point matériel de masse m, se déplace sur la rainure intérieure d'un cerceau de centre 0, de rayon a et d'axe horizontale Oz, avec une force de frottement visqueux $\vec{f} = -bm\vec{v}$ où $\vec{v}$ désigne la vitesse relative de la particule par rapport au cerceau et b un coefficient positif constant.

La particule est repérée par $\theta = \left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}\right)$.

On supposera θ petit dans tout le problème.
La particule est abandonnée à l'instant t=0 depuis la position $\theta = \theta_0$ sans vitesse initiale.



A- Le cerceau est immobile :

1- Etablir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta(t)$.

2- a – Quelle valeur a_c faut-il donner au rayon du cerceau pour que la particule atteigne l'équilibre le plus rapidement possible ? Déterminer alors la loi horaire θ(t).

b- Calculer dans ces conditions la valeur maximale du module de la vitesse la particule et la réaction correspondante.

B- Le cerceau est animé d'un mouvement oscillatoire de rotation, de faible amplitude autour de son axe Oz.

$\varphi = \varphi_0 \sin \Omega t$ où $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}\right)$, $\overrightarrow{OA}$ désigne un rayon fixe de cerceau.

1- Etablir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta(t)$.

2- Déterminer l'amplitude θ_M de l'élongation $\theta(t)$ ainsi que le rayon a_R du cerceau qui permet d'obtenir la résonance d'amplitude. (Il est conseillé d'utiliser dans cette question la méthode complexe)

Exercice 6

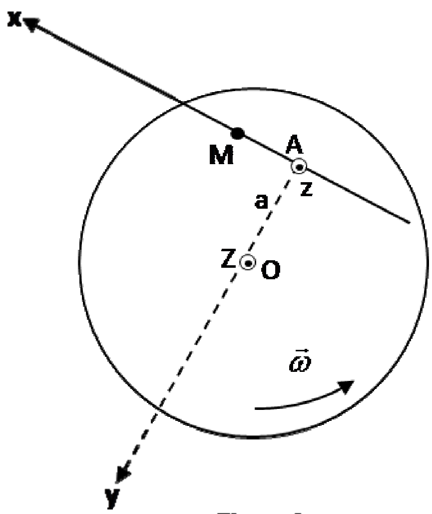
Un plateau horizontale(P) tourne à vitesse angulaire constant $\vec{\omega}$ autour d'un axe vertical OZ d'un repère fixe (O, X, Y, Z).
Un point matériel M de masse m est mobile sans frottement sur un guide rectiligne Ax lié au plateau à la distance OA=a du centre O. Ce point est rappelé vers A par une force de rappel $\vec{F}$ Proportionnelle à $x = \overline{AM}$ $\left(F = -kx\right)$ grâce à un ressort de raideur k et de masse négligeable (figure 1)

1- En prenant un repère entrainé d'origine A : (A,x,y,z) :

a- Etablir le bilan de toutes les forces agissant sur M par rapport à ce repère.

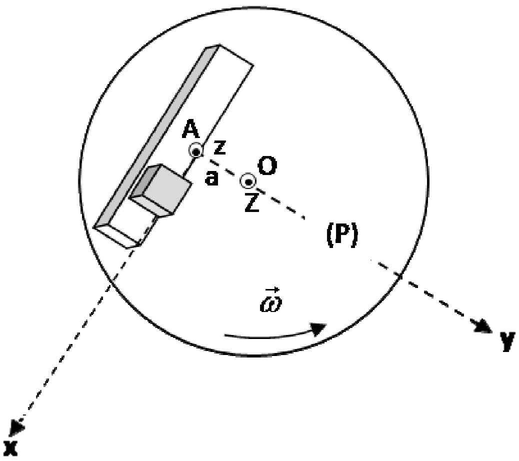
b- Ecrire le principe fondamental de la dynamique par rapport à ce repère et projeter la relation vectorielle obtenue sur l'axe Ax. Indiquer si le point M peut être en équilibre relatif par rapport au plateau ?

c- Si oui, déterminer les positions d'équilibre relatif. Etudier leurs stabilités.



-Figure1-

OA=a



-Figure2-

2- A l'instant initial, M est au point A, il y est lâché avec une vitesse relative $\vec{v}_0$. Démontrer qu'on pourrait avoir deux solutions pour x(t) dont on déterminera les amplitudes correspondantes : Un mouvement relatif oscillatoire dont on déduit la période des oscillations et un mouvement où la particule s'éloigne indéfiniment.

3- Maintenant la force de rappel est supprimée et le point matériel M est un petit cube qui glisse sans frottement sur le plateau(P). Mais s'appuie sur un guide vertical avec un frottement de coefficient f (voir figure2).

Le point M est d'abord fixé au point A (x=0) et lâché à l'instant t=0 avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$.

On désigne par $\vec{R}_1$ la réaction du plateau sur M et par $\vec{R}_2 = \vec{T} + \vec{N}$, la réaction du guide vertical sur M (M désigne le petit cube) ; $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont respectivement les composantes tangentielle (parallèle à Ax)et normale (parallèle à Ay) telles que : $\left\|\vec{T}\right\| = f\left\|\vec{N}\right\|$

a- Ecrire le principe fondamental de la dynamique par rapport au repère (A,x,y,z).

b- Projeter cette relation sur les trois axes Ax, Ay et Az.

Démontrer que la loi horaire en x(t) vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2f\omega\frac{dx}{dt} - \omega^2 x = -f\omega^2 a$$

Intégrer cette équation différentielle et montrer que le mouvement de M suivant Ax est apériodique.

Exercice 7

Soit un repère galiléen R_0 (OXYZ), de base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$, centré au centre de la terre O et dont OZ coïncide avec l'axe passant par les deux pôles .

Soit une zone d'exploration géologique située a une profondeur L d'un point O_1, de latitude λ fixe à la surface de la terre. L'accès à cette zone se fait grâce à un forage (~ un puits) cylindrique dont l'axe de symétrie O_1z passe par le centre de la terre O.

On se propose d'étudier le mouvement d'une masse m, assimilée à un point matériel M, lâchée en chute libre, de O_1 sans vitesse initiale par rapport à la terre.

On néglige les variations du module de l'accélération de la pesanteur $|\vec{g}|$.

Soit un repère direct R_1 (O_1,x,y,z) de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que l'axe O_1x est porté par la tangente à la surface de la terre et dirigé vers l'Est . A t=0 s , M est en O_1 dans le plan XOZ (voir figure) .

I-1-a- Le repère R_1 est-t-il galiléen ? Déterminer le vecteur rotation instantanée de R_1 par rapport à R_0

1-c – Ecrire le principe fondamentale de la dynamique (PFD) appliqué à M dans R_1.

1-a- Déterminer le module de la force de Coriolis.

1-b- Déterminer le module de la force d'entrainement.

1-c- On peut négliger un terme par rapport à un autre s'il est 20 fois plus petit. Pour $\lambda = \dfrac{\pi}{4}$ et $|\vec{g}| = 10m/s^2$, trouver les domaines de profondeur L où on peut négliger les effets de la force de Coriolis $\vec{F}_c$ devant ceux de la force d'entrainement $\vec{F}_e$ et vice-versa.

On donne : T (période de la terre)=24 Heures ; R_t (Rayon de la terre)=6400 Km

III- Dans le cas où $|\vec{F}_e| << |\vec{F}_c|$, on se propose d'étudier la déviation de la particule M par rapport à O_1z.

1-a- Exprimer le vecteur $\vec{K}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1-b- Réécrire le PDF appliqué à M dans R_1.

1-c- En déduire les équations du mouvement de M.

2-a- Montrer que l'abscisse x(t) de la masse m s'écrit sous la forme suivante :

$$x(t) = \left[(g\cos\lambda)/4\omega^2\right]\left[2\omega t - \sin 2\omega t\right]$$

2-b- Quelle est la période T' de la fonction $\sin 2\omega t$?

2-c- Pour des durées de chutes libres t <<T', et en effectuant un développement limité de x(t) au premier terme non nul, déterminer le sens de la déviation compté sur le cercle parallèle passant par O_1 .

3-a- Calculer l'ordonnée y de M à l' instant t.

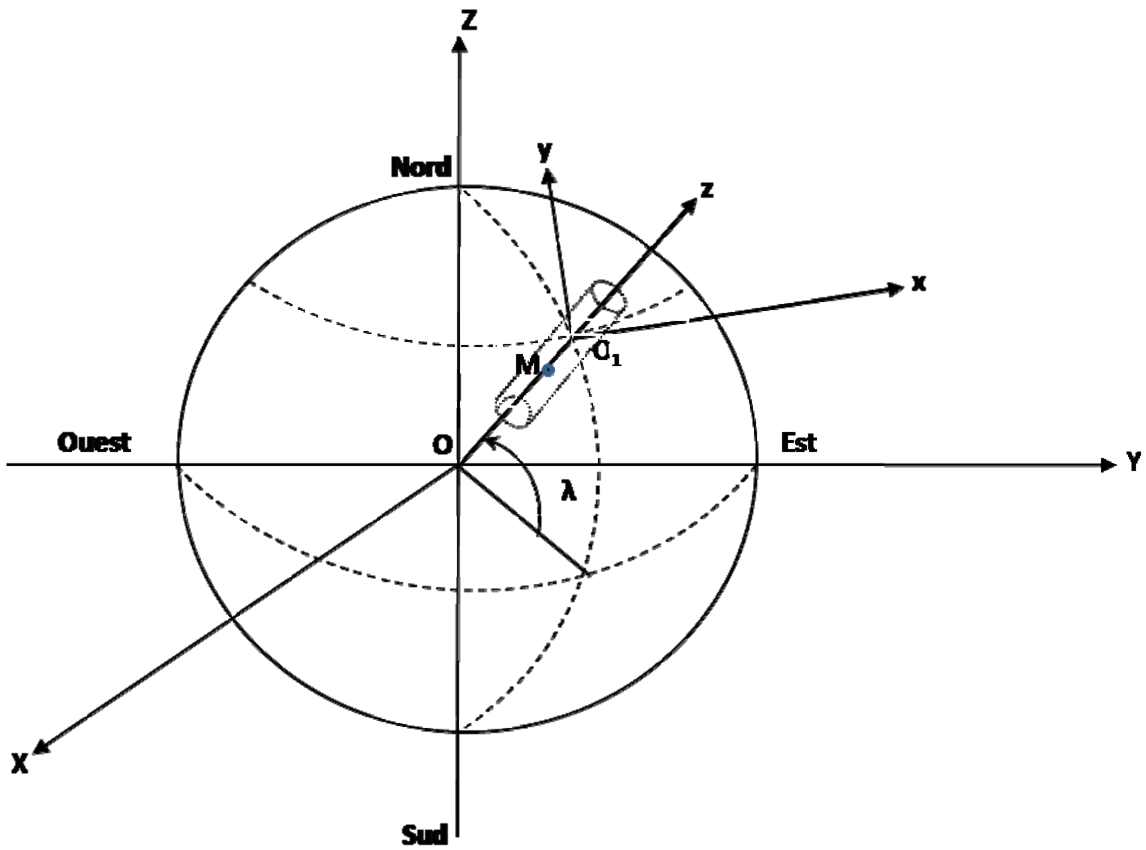
3-b- En déduire le sens de la déviation compté sur le méridien de O_1

3-c- Cette déviation se fait –elle dans le même sens lorsque O_1 est situé dans l'hémisphère nord ou lorsqu'il est situé dans l'hémisphère Sud ?

4- Quelle est la position du point d'impact de la masse au fond d'un forage, situé en Tunisie, par rapport à son axe.

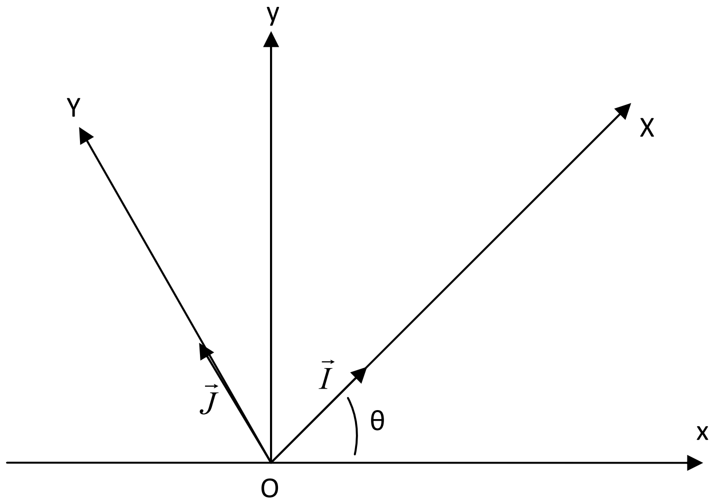
N .B : Pour une équation différentielle de la forme $x'' + A^2 x = B$ où A est une constante et B est une fonction du temps, sa solution générale est de la forme : $x(t) = a\cos At + b\sin At + \left(\frac{B}{A^2}\right)$

avec a et b des constantes d'intégration qu'on déterminera à partir des conditions initiales.



Correction des exercices

Exercice 1



1- $\vec{F} = F_x\vec{I} + F_y\vec{J}$

R_a un repère galiléen $\Rightarrow m\vec{\Gamma}_a = \vec{F}$

$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_c \Rightarrow \vec{\Gamma}_r = \vec{\Gamma}_a - \vec{\Gamma}_e - \vec{\Gamma}_c \Rightarrow m\vec{\Gamma}_r = m\vec{\Gamma}_a - m\vec{\Gamma}_e - m\vec{\Gamma}_c$

$\vec{F}_e = -m\vec{\Gamma}_e$ et $\vec{F}_c = -m\vec{\Gamma}_c$

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} \Rightarrow \vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big/_{R_a,\ avec\ X,Y=cte} = X\frac{d\vec{I}}{dt} + Y\frac{d\vec{J}}{dt} = X\frac{d\vec{I}}{dt}\frac{d\theta}{dt} + Y\frac{d\vec{J}}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_e = \omega\left(X\vec{I} - Y\vec{J}\right) \Rightarrow \vec{\Gamma}_e = \frac{d\vec{V}_e}{dt}\Big/_{R_a,\ avec\ X,Y=cte} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e = m\omega^2\overrightarrow{OM} = m\omega^2(X\vec{I} + Y\vec{J})$$

$$\vec{\Gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r \Rightarrow \vec{F}_c = 2\omega m\left(\dot{X}\vec{I} - \dot{Y}\vec{J}\right)$$

2- Puissances relatives

$$\vec{V}_r = \left(\dot{X}\vec{I} + \dot{Y}\vec{J}\right)$$

$$P\left(\vec{F}_e\right) = \vec{F}_e\vec{V}_r = m\omega^2\left(\dot{X}X + \dot{Y}Y\right)$$

$$U_e = -\int P\left(\vec{F}_e\right)dt = -\frac{m\omega^2}{2}\left(X^2 + Y^2\right) + cte$$

$\Rightarrow \vec{F}_e$ ne travaille pas.

$$P\left(\vec{F}_e\right) = 2m\omega\left(\dot{X}X - \dot{Y}Y\right) = 0$$

3- Condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{F}$ dérive du même potentiel dans les deux mouvements absolu et relatif.

Il faut que $\vec{F}.\vec{V}_a = \vec{F}.\vec{V}_r = \vec{F}\left(\vec{V}_r + \vec{V}_e\right) \Rightarrow \vec{F}.\vec{V}_e = 0$

$\Rightarrow \omega\left(X\vec{I}-Y\vec{J}\right)\left(F_x\vec{I}+F_y\vec{J}\right)=0 \Rightarrow XF_y-YF_x=0 \Rightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}=\vec{0} \Rightarrow \vec{F}$ est une force centrale de centre O

Exercice 2

I- Cas du train en arrêt à la gare de départ

1- $\vec{\gamma}_r=\vec{0};\vec{\gamma}_c=\vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_e=\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM_0})$

$$\vec{k}=\cos\theta\vec{u}_r-\sin\theta\vec{u}_\theta=\sin\lambda\vec{u}_r-\cos\lambda\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{\gamma}_e=\vec{\gamma}_a=-R\omega^2\cos\lambda\left(\cos\lambda\vec{u}_r+\sin\lambda\vec{u}_\theta\right)$$

2-a : bilan des forces dans R : $\begin{cases}\vec{P}=-mg\vec{u}_r\,;\,\vec{R}=R_1\vec{u}_r+R_2\vec{u}_\theta : \text{ Forces réelles}\\ \vec{F}_c=\vec{0}\,;\,\vec{F}_e=-R\omega^2\cos\lambda\left(\cos\lambda\vec{u}_r+\sin\lambda\vec{u}_\theta\right) : \text{Forces fictives}\end{cases}$

c- RFD dans R $\Rightarrow \sum\vec{F}_{reeles}+\sum\vec{F}_{fictives}=m\vec{\gamma}_r$

$$\Rightarrow -mg\vec{u}_r+R_1\vec{u}_r+R_2\vec{u}_\theta+mR\omega^2\cos\lambda\left(\cos\lambda\vec{u}_r+\sin\lambda\vec{u}_\theta\right)=\vec{0}$$

3-a- Projection de la RFD sur $\vec{u}_r \Rightarrow R_1=m\left(g-R\omega^2\cos^2\lambda\right)$

Projection de la RFD sur $\vec{u}_\theta \Rightarrow R_2=-mR\omega^2\cos\lambda\sin\lambda$

b-Si $g >> R\omega^2\cos^2\lambda \Rightarrow R_1 \simeq mg$ la correction non galiléenne est négligeable

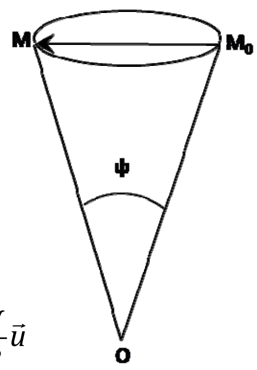
c-

$$R_1=m\left(g-Rw^2\cos^2\lambda\right)=\begin{cases} m\left(g-Rw^2\right) \text{ à l'équateur } \lambda=0 \;\; (R_1 \text{ est min})\\ mg \text{ au pôle nord } \lambda=\dfrac{\pi}{2} \;\; (R_2 \text{ est max})\end{cases}$$

$$R_2 = -m\frac{r\omega^2}{2}\sin 2\lambda=\begin{cases} 0 \text{ pour } \lambda=0\\ -m\dfrac{R\omega^2}{2} \quad \text{pour } \lambda=\dfrac{\pi}{4} \;\; (R_2 \text{ est min})\\ 0 \text{ pour } \lambda=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

d - A.N : $\left|\vec{R}_1\right|=999975$ N, $\left|\vec{R}_2\right|=1466$ Newton

II- Cas du train en mouvement uniforme.



1-a- $\overrightarrow{M_0M}$? soit ψ l'angle (M₀ÔM)

$$\widehat{M_0M}=v_0t=R\psi$$

$$\sin\frac{\psi}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|}{2R} \Rightarrow \left|\overrightarrow{M_0M}\right|=2R\sin\frac{\psi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M}=\left|\overrightarrow{M_0M}\right|\vec{u}=2R\sin\frac{\psi}{2}\vec{u}$$

On considère maintenant le triangle OM_0A avec l'angle $(M_0OA)=\lambda'-\lambda$

$$\left|\overrightarrow{M_0A}\right| = \left|\overrightarrow{M_0M}\right| cos\theta' = 2R\,sin\left(\frac{\lambda' - \lambda}{2}\right) \Rightarrow sin\left(\frac{\lambda' - \lambda}{2}\right) = sin\frac{\psi}{2} cos\theta' = cos\theta'\, sin\frac{v_0 t}{2R}$$

Le déplacement en Afrique du Nord vers le Nord-Est sera très limité à cause de la méditerrané

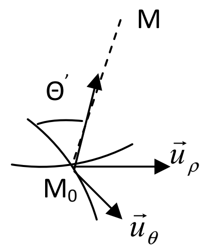
$$\Rightarrow \frac{v_0 t}{2R} << \;\Rightarrow sin\left(\frac{\lambda' - \lambda}{2}\right) \simeq 0 \Rightarrow \lambda' \simeq \lambda$$

La nouvelle latitude ne sera pas très différente de la précédente ($\lambda' \simeq \lambda$)

b- $\vec{\gamma}_e = \omega^2 \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{u}_r)$ or $\vec{k} = sin\lambda' \vec{u}_r - cos\lambda' \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{\gamma}_e = -R\omega^2 cos\lambda' \left[cos\lambda' \vec{u}_r + sin\lambda' \vec{u}_\theta\right]$

$\vec{\gamma}_c = 2\omega\vec{k} \wedge \vec{v}_r$ or $\vec{v}_r = v_0 \vec{u}$ avec $\vec{u} = -cos\theta' \vec{u}_\theta + sin\theta' \vec{u}_\varphi$

$\vec{\gamma}_c = 2\omega v_0 \left(sin\lambda' \vec{u}_r - cos\lambda' \vec{u}_\theta\right) \wedge \left(-cos\theta' \vec{u}_\theta + sin\theta' \vec{u}_\varphi\right)$



$\vec{\gamma}_c = -2\omega v_0 \left(sin\lambda'(cos\theta' \vec{u}_\varphi + sin\theta' \vec{u}_\theta) + cos\lambda'\, sin\theta \vec{u}_r\right)$

2- R .F .D dans R

Mouvement uniforme $\Rightarrow \vec{\gamma}_r = \vec{0}$

$$-mg\vec{u}_r + R_1\vec{u}_r + R_2\vec{u}_\theta + R_3\vec{u}_\varphi + mR\omega^2 cos\lambda' \left(cos\lambda' \vec{u}_r + sin\lambda' \vec{u}_\theta\right) +$$
$$2m\omega_0 v_0\, sin\lambda' (cos\theta' \vec{u}_\varphi + sin\theta' \vec{u}_\theta) + 2m\omega v_0\, cos\lambda'\, sin\theta' \vec{u}_r = \vec{0}$$

b- Projection de la R.F.D sur $\vec{u}_r \Rightarrow R_1 = mg - mR\omega^2 cos^2\lambda' - 2m\omega v_0\, cos\lambda'\, sin\theta'$

Projection de la R.F.D sur $\vec{u}_\theta \Rightarrow R_2 = -mR\omega^2 cos\lambda'\, sin\lambda' - 2m\omega v_0\, cos\lambda'\, sin\theta'$

Projection de la R.F.D sur $\vec{u}_\varphi \Rightarrow R_3 = -2m\omega v_0\, sin\lambda'\, cos\theta'$

$R\omega >> v_0 \;\Rightarrow R_1 \simeq mg - R\omega^2 cos^2\lambda'$ or $\lambda' = \lambda \Rightarrow R_1\big]_I \simeq R_1\big]_{II}$

A.N : $\left\|\vec{R}_1\right\| = 397405$ N

3-a- Voir 2b.

b- On a $Rw >> v_0 \Rightarrow$ la nouvelle correction non galiléenne affectant la composante R_2 n'est pas très importante.

$R_3\big]_I = 0$ et $R_3\big]_{II} \neq 0 \Rightarrow$ La correction non galiléenne est importante.

4- $\vec{R}_c = \left(\vec{R}_2 + \vec{R}_3\right)_{II} - \left(\vec{R}_2 + \vec{R}_3\right)_I$

$$\vec{R}_c = \left\{-m\frac{R\omega^2}{2}\left(sin2\lambda' - sin2\lambda\right) - 2m\omega v_0\, sin\lambda'\, sin\theta'\right\}\vec{u}_\theta - 2m\omega v_0\, sin\lambda'\, cos\theta' \vec{u}_\varphi$$

$\vec{R}_c = A\vec{u}_\theta + B\vec{u}_\varphi$

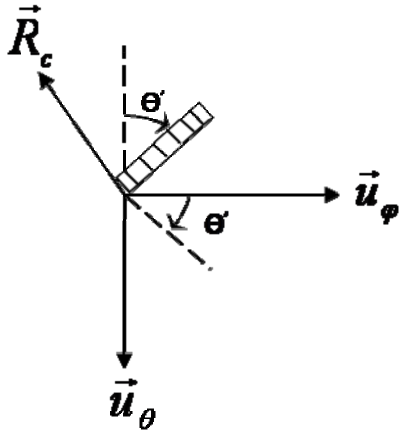
On a $\lambda' \simeq \lambda \Rightarrow \vec{R}_c = -2m\omega v_0\, sin\lambda\left(sin\theta' \vec{u}_\theta + cos\theta' \vec{u}_\varphi\right)$

$\vec{R}_c = \left|\vec{R}_c\right| \vec{u}_{R_c}$; $\left|\vec{R}_c\right| = 2m\omega v_0 \sin\lambda$ et $\vec{u}_{R_c} = -\sin\theta' \vec{u}_\theta - \cos\theta' \vec{u}_\varphi$

A.N :

$\left|\vec{R}_c\right|$ =202 N.

C'est cette composante qui provoque l'usure des rails de chemin de fer.



Exercice 3

1- $\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right._{/R} = \frac{d(R\vec{i}\,)}{dt} = R\omega\vec{j} = R\omega(-\sin\theta\vec{I} + \cos\theta\vec{J}\,)$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = -R\omega^2\vec{i} = -r\omega^2\left(\cos\theta\vec{I} + \sin\theta\vec{J}\right)$$

2-a- Vitesse initiale de la bille : $\vec{v}_a\left(M, t=0\right) = \vec{v}_{homme}(t=0) = \vec{v}_e(t=0) = R\omega\vec{j}$

c- Coordonnées de la bille en fonction du temps :

P.F.D : $m\vec{\gamma}_a = m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{\gamma}_a = \vec{g}$

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2Y}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2Z}{dt^2} = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dX}{dt} = C_x \\ \frac{dY}{dt} = C_y \\ \frac{dZ}{dt} = -gt + C_Z \end{cases} \quad conditions\ initiale \begin{cases} C_x = 0 \\ C_y = R\omega \\ C_Z = -0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = 0 \\ \frac{dY}{dt} = R\omega \\ \frac{dZ}{dt} = -gt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(t) = C'_x \\ Y(t) = R\omega t + C'_y \\ Z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C'_Z \end{cases} \quad condition\ sinitiales \begin{cases} C'_x = R \\ C'_y = 0 \\ C'_Z = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(t) = R \\ Y(t) = R\omega t \\ Z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

c - La bille mis du temps pour Z=0 ; $\Rightarrow t_0=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; $X(t_0)=R;Y(t_0)=R\omega\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\neq 0$ la bille tombe à l'extérieur du plateau

Point d'impact : $\rho_0{}^2=R^2+R^2\omega^2\left(\dfrac{2h}{g}\right)\Rightarrow\rho_0=R\sqrt{1+\dfrac{2\omega^2h}{g}}$

3- Relation fondamentale de la dynamique appliquée à la bille dans le référentiel $R^{'}(O^{'}xyz)$

$$\overrightarrow{O^{'}M}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

a- $m\vec{\gamma}_r=m\vec{g}+\vec{F}_e+\vec{F}_c+\vec{R}=\vec{F}_e+\vec{F}_c\ car\ m\vec{g}+\vec{R}=\vec{0}$

$$\vec{F}_e=-m\vec{\gamma}_e=m\omega^2R\vec{i}$$
$$\vec{F}_C=-2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r$$

$$\vec{\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix};\ \vec{v}_r\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{F}_c=2m\omega(\dot{z}\vec{i}-\dot{x}\vec{j})$$

b-

$$\begin{cases}\ddot{x}=R\omega^2+2\omega\dot{z} & (1)\\ \ddot{y}=-2\omega\dot{x} & (2)\\ \ddot{z}=0 & (3)\end{cases}$$

(3)$\Rightarrow\dot{z}=cte$, à t =0 , $\Rightarrow$ z=cte=0

(1) $\ddot{x}=R\omega^2\Rightarrow\dot{x}=R\omega^2t+C_1$, à t=0 , $\dot{x}=-v_0=C_1$

$\Rightarrow\dot{x}=\omega^2Rt-v_0\Rightarrow x(t)=\dfrac{R\omega^2t^2}{2}-v_0t+C^{'}_1$ à t =0, x=0 $\Rightarrow C^{'}_1=0$ $\Rightarrow x(t)=\dfrac{1}{2}R\omega^2t^2-v_0t$

(2) $\Rightarrow\ddot{y}=-2\omega\dot{x}=-2\omega\left(\omega^2Rt-v_0\right)=-2\omega^3Rt+2\omega v_0$

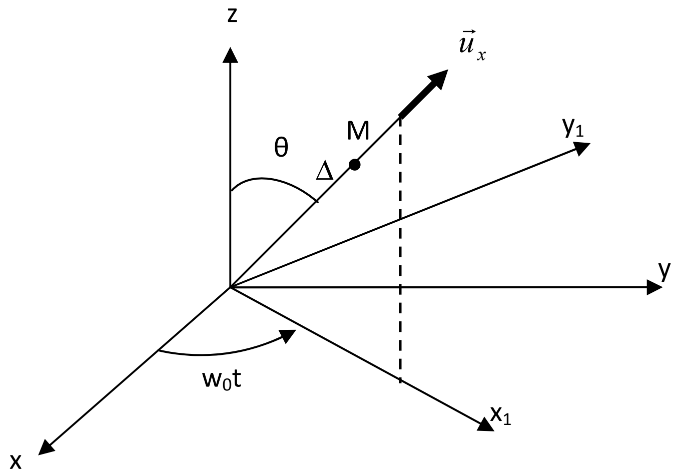
$\dot{y}=-2\omega^3R\dfrac{t^2}{2}+2\omega v_0t+C_2$ à t=0 , $\dot{y}=0\Rightarrow C_2=0$

$$\dot{y}=-\omega^3Rt^2+2\omega v_0t\Rightarrow y(t)=-\frac{1}{3}\omega^3Rt^3+\omega v_0t^2+C^{'}_2$$

à t=0 , y=0 $\Rightarrow C^{'}_2$ donc $y(t)=-\dfrac{\omega^3}{3}Rt^3+\omega v_0t^2$

Exercice 4

1ère partie



1- $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = v_r t \vec{u}_r$

$$\vec{u}_{r_{\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)}} = \begin{cases} \sin\theta\cos\omega_0 t \\ \sin\theta\sin\omega_0 t \\ \cos\theta \end{cases}$$

* Composantes de vecteur vitesse absolue dans R_0

$$\vec{V}_{M/R_{0}\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)} = \begin{cases} v_r \sin\theta\cos\omega_0 t - \omega_0 r\sin\theta\sin\omega_0 t \\ v_r \sin\theta\sin\omega_0 t + \omega_0 r\sin\theta\cos\omega_0 t \\ v_r \cos\theta \end{cases}$$

* Composantes de vecteur accélération absolue dans R_0

$$\vec{\gamma}_{M/R_{0}\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)} = \begin{cases} -2v_r\omega_0 \sin\theta\sin\omega_0 t - \omega^2 r\sin\theta\cos\omega_0 t \\ 2v_r\omega_0 \sin\theta\cos\omega_0 t - \omega^2 r\sin\theta\sin\omega_0 t \\ 0 \end{cases}$$

* Dans le repère R_1

$$\vec{V}_{M/R_{0}\left(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}\right)} = \begin{cases} v_r\, sin\theta \\ \omega_0 r\, sin\theta; \\ v_r\, cos\theta \end{cases} \quad \vec{\gamma}_{M/R_{0}\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)} = \begin{cases} -\omega^2 r\, sin\theta \\ 2v_r\omega_0\, sin\theta \\ 0 \end{cases}$$

2- Théorèmes de la composition des vitesses et des accélérations :

a- $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = r\left(cos\theta\vec{k} + sin\theta\vec{i}_1\right)$

vitesse relative : $\vec{V}_{M/R_{1}\left(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}\right)} = \begin{cases} v_r\, sin\theta \\ 0 \\ v_r\, cos\theta \end{cases}$

Vitesse d'entrainement :

$$\vec{v}_e = \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega_0\,\vec{k} \wedge r\left(\cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{i}_1\right) \Rightarrow \vec{v}_e(M)_{\left(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}\right)} = \omega_0 r\sin\theta\,\vec{j}_1$$

b- Accélération relative

$$\vec{\gamma}(M)_{/R_1} = \vec{\gamma}_r = \frac{d(\vec{v}(M)_{/R_1})}{dt}\Big/_{R_1} = \frac{d}{dt}\left(v_r \cos\theta \vec{k} + v_r \sin\theta \vec{i}_1\right)_{/R_1} \Rightarrow \vec{\gamma}_r = \vec{0}$$

- Accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e = \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge (\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{OM}) \Rightarrow \vec{\gamma}_e = -\omega_0^2 r \sin\theta \vec{i}_1$

-Accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{V}_{M/R_1} = 2\omega_0 v_r \sin\theta \vec{j}_1$

2ème partie

1- R_1 est un repère non galiléen :

Forces réelles : Poids $\vec{P} = m\vec{g}$; Réaction $\vec{R} \perp \Delta$

Forces fictives : $\begin{array}{l} \vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e = m\omega_0^2 r \sin\theta \, \vec{i}_1 \\ \vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c = -2m\omega_0 \dot{r} \sin\theta \vec{j}_1 \end{array}$

2- L'équation horaire du mouvement de l'anneau

P.F.D : $m\vec{\gamma}_r = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

Projection sur Δ :

$$m\vec{\gamma}_r\vec{u}_r = \vec{P}\vec{u}_r + \vec{R}\vec{u}_r + \vec{F}_e\vec{u}_r + \vec{F}_c\vec{u}_r \quad or \quad \vec{R}\vec{u}_r = \vec{F}_c\vec{u}_r = 0$$

$$-mg\cos\theta + m\omega_0^2 r \sin^2\theta = m\frac{d^2r}{dt^2} \Leftrightarrow \ddot{r} - \left(\omega_0 \sin\theta\right)^2 r = -g\cos\theta$$

$$\Rightarrow r(t) = C_1 e^{(\omega_0 \sin\theta)t} + C_2 e^{-(\omega_0 \sin\theta)t} + \frac{g\cos\theta}{\omega_0^2 \sin^2\theta}$$

Condition initiale t=0 $\begin{cases} r = r_0 \Rightarrow C_1 + C_2 = r_0 - \dfrac{g\cos\theta}{\omega_0^2 \sin^2\theta} \\ \dot{r} = 0 \Rightarrow C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}(r_0 - \frac{g\cos\theta}{\omega_0^2 \sin^2\theta})$$

$$r(t) = (r_0 - \frac{g\cos\theta}{\omega_0^2 \sin^2\theta}) ch\left(\omega_0 t \sin\theta\right) + \frac{g\cos\theta}{\omega_0^2 \sin^2\theta}$$

3- L'anneau est immobile $\dot{r}(t) = 0$

$$\dot{r}(t) = (r_0 - \frac{g\cos\theta}{\omega_0^2 \sin^2\theta}) \; \omega_0 \sin\theta \; sh \; (\omega_0 t \sin\theta) = 0 \quad \Rightarrow r_0 = \frac{g\cos\theta}{\omega_0^2 \sin^2\theta}$$

4- La composante de la réaction de la tige sur l'anneau M suivant Oy_1

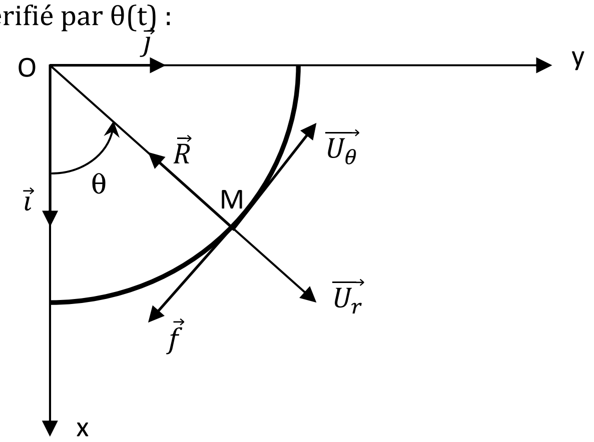
Projection du P .F .D sur $\vec{j}_1$: $\begin{array}{l} \vec{P} \; \vec{j}_1 = 0; \; \vec{R} \, \vec{j}_1 = R_y; \; \vec{F}_e \, \vec{j}_1 = 0 \; ; \; \vec{F}_c \; \vec{j}_1 = -2m\omega_0 \dot{r} \sin\theta \\ \vec{\gamma}(M)_{/R_1} \vec{j}_1 = \vec{\gamma}_r \, \vec{j}_1 = 0 \end{array}$

$$\Rightarrow R_y - 2m\omega_0 \dot{r} \sin\theta = 0 \; \Rightarrow R_y = 2m\omega_0 \dot{r} \sin\theta$$

Exercice 5

A- Le cerceau est immobile :

1- Equation différentielle du second ordre vérifié par θ(t) :



R(Oxyz) est galiléen

P.F.D : $m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{appliqué}$

Forces : Poids : $\vec{P} = mg\vec{i}$

Réaction : $\vec{R} = -r\vec{u}_r$

Frottement visqueux : $\vec{f} = -bm\vec{V}$

Dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, on a $\overrightarrow{OM} = a\vec{u}_r \Rightarrow \vec{V} = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -a\dot{\theta}^2 \\ a\ddot{\theta} \end{pmatrix}; \vec{P} = \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{pmatrix}; \ \vec{R} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix} \ et \ \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -bma\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Projection suivant $\vec{u}_r : -ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R$

Projection suivant $\vec{u}_\theta : ma\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - bma\dot{\theta}$

$$\theta \text{ : petit} \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \frac{g}{a}\theta = 0$$

2-a Le retour à l'équilibre le plus rapidement possible s'effectue suivant le régime critique $\Rightarrow$ Le discriminent du polynôme caractéristique doit être nul :

$$r^2 + br + \frac{g}{a} = 0; \ \Delta = b^2 - 4\frac{g}{a} = 0 \Rightarrow a_c = \frac{4g}{b^2}, \ alors \, r_1 = r_2 = -\frac{b}{2}$$

La loi horaire : $\theta(t) = (At + B)e^{-\frac{b}{2}t}$ avec $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \theta_0 = B$ et

$$\left[(At+B)\left(\frac{-b}{2}\right) + A\right]e^{-\frac{b}{2}t}\Bigg|_{t=0} = -\frac{Bb}{2} + A = 0 = -\frac{B\theta_0}{2} + A$$

Soit $\theta(t) = \theta_0\left[\frac{bt}{2} + 1\right]e^{-\frac{bt}{2}}$

b- Valeur maximale du module de la vitesse

On a $v = v_\theta = a_c\dot{\theta} = a_c\theta_0\left[-\frac{b}{2} - \frac{b^2}{4}t + \frac{b}{2}\right]e^{-\frac{b}{2}t} = -\frac{a_c b^2}{4}\theta_0 t\, e^{-\frac{b}{2}t}$ Soit $|\vec{v}| = \frac{a_c b^2}{4}\theta_0 t\, e^{-\frac{b}{2}t}$

$|\vec{v}|$ est max pour $\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 = \frac{a_c b^2}{4}\theta - [1 - \frac{bt}{2}]e^{-\frac{b}{2}t}$

Soit $t=\dfrac{2}{b} \Rightarrow |\vec{v}|_{max} = \dfrac{a_c b\theta_0}{2e}$; $|\vec{v}|_{\max} = \dfrac{2g\theta_0}{eb}$

- La réaction : on a $-ma_c\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R \Rightarrow R = mg\cos\theta + ma_c\dot{\theta}^2$

$$\text{avec } \theta = \frac{2\theta_0}{e} \text{ et } a_c\dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{a_c} = \frac{2g\theta_0}{eb}\frac{b^2}{4g} = \frac{b\theta_0}{2e}$$

$$R = mg\cos\left(\frac{2\theta_0}{e}\right) + \frac{mb\theta_0}{2e}$$

B- Le cerceau est animé d'un mouvement oscillatoire de rotation, de faible amplitude autour de son axe Oz

1- $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Rightarrow a\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \vec{V}_r + a\dot{\varphi}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{v}_r = a\left(\dot{\theta}-\dot{\varphi}\right)\vec{u}_\theta$

P.F.D suivant $\vec{u}_\theta$: $ma\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - bma\left(\dot{\theta}-\dot{\varphi}\right) \Leftrightarrow \ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \dfrac{g}{b}\theta = b\dot{\varphi}$

$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\Omega t \Rightarrow \dot{\varphi} = \Omega\varphi_0\cos\Omega t$

Soit $\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \dfrac{g}{b}\theta = b\Omega\varphi_0\cos\Omega t$

2- L a solution est de type $\theta(t) = \theta_M \cos(\Omega t + \alpha)$

Méthode complexe : $\theta(t) \to \underline{\theta}(t) = \theta_M e^{j(\Omega t+\alpha)}$ $\quad\varphi(t) \to \underline{\varphi}(t) = b\varphi_0\Omega e^{j\Omega t}$

Soit $\left[-\Omega^2 + j\Omega b + \dfrac{g}{a}\right]\theta_M e^{j\alpha}e^{j\Omega t} = b\varphi_0\Omega e^{j\Omega t} \Rightarrow \theta_M e^{j\alpha} = \dfrac{b\varphi_0\Omega}{\dfrac{g}{a} - \Omega^2 + j\Omega b}$

où $\theta_M = \dfrac{b\varphi_0\Omega}{\sqrt{(\frac{g}{a}-\Omega^2)^2 + \Omega^2 b^2}}$. Le phénomène de résonance est obtenu lorsque θ_M est max.

$$\frac{d\theta_M}{d\Omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\Omega}\left[\left(\frac{g}{a}-\Omega^2\right)^2 + \Omega^2 b^2\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{g}{a_R} = \Omega^2 \quad \Rightarrow a_R = \frac{g}{\Omega^2}$$

Remarque : On peut aboutir à la même équation A-1 , en utilisant le théorème de moment cinétique

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = a\vec{u}_r \wedge ma\dot{\theta}\vec{u}_\theta = ma^2\dot{\theta}\vec{k}$$

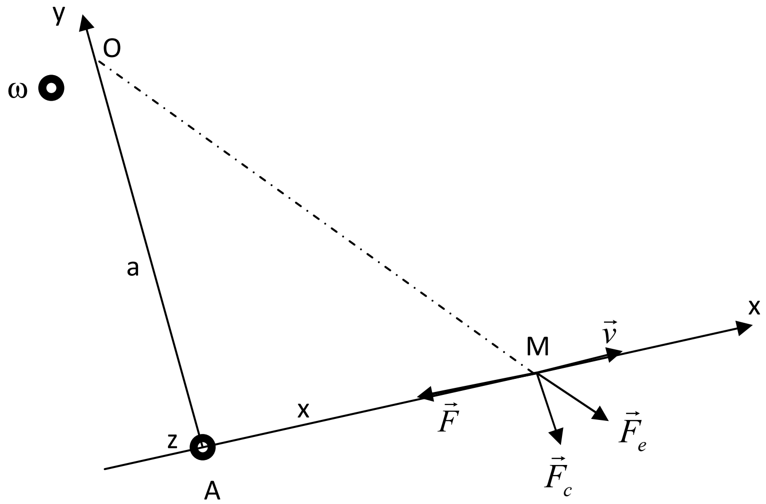
$$\mathfrak{M}_0(\vec{R}) = a\vec{u}_r \wedge \left(-R\vec{u}_r\right) = \vec{0};\ \mathfrak{M}_0(\vec{f}) = a\vec{u}_r \wedge \left(-bm\vec{V}\right) = -a^2bm\dot{\theta}\vec{k}$$

$$\mathfrak{M}_0(m\vec{g}) = a\vec{u}_r \wedge \left[mg\cos\theta\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta\right] = -mga\sin\theta\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \mathfrak{M}_0(\vec{R}) + \mathfrak{M}_0(\vec{f}) + \mathfrak{M}_0(m\vec{g}) \Rightarrow ma^2\ddot{\theta} = -a^2bm\dot{\theta} - mga\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \frac{g}{a}\theta = 0$$

Exercice 6

1- a- Forces réelles : $\begin{cases} \text{Poids : } m\vec{g} \\ \text{Réaction : } \vec{R} \perp Ax \\ \text{Force de rappel du ressort : } \vec{F} \end{cases}$



Forces fictives : Force d'entrainement : $-m\vec{\gamma}_e = m\omega^2\overrightarrow{OM}$

Force de Coriolis : $-m\vec{\gamma}_c = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}$

$\vec{v}$ est porté par Ax, donc $\left(-m\vec{\gamma}_c\right) \perp Ax$

b- Le principe fondamental de la dynamique.

$$m\vec{\gamma}_r = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F} + m\omega^2\overrightarrow{OM} - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}$$

Projection sur A_x

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + m\omega^2 x = -x(k - m\omega^2) \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -x(k - m\omega^2)$$

Equilibre relatif : solution x=0 , $(\frac{d^2x}{dt^2} = 0)$

Si $x \neq 0$, la force suivant A_x est $-x(k - mw^2)$ est de rappel, donc l'équilibre sera stable si $k > m\omega^2$. L'équilibre est instable si $k < m\omega^2$. Il est indifférent si $k = m\omega^2$

2- * Si $k > m\omega^2$, soit $\Omega^2 = \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}$; $x(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$

Condition initiales : x=0 , $\frac{dx}{dt} = 0$ pour t=0 donnent A=0 , B=$\frac{v_0}{\Omega}$

$$x(t) = \frac{v_0}{\Omega}\sin\Omega t; \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}}$$

* -Si $k < m\omega^2$, soit $\alpha = \sqrt{\dfrac{m\omega^2 - k}{m}}$; $x(t) = \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{-\alpha t}$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(0) = \lambda\alpha - \mu\alpha = v_0 \\ x(0) = \lambda + \mu = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -\mu \quad et \quad \alpha(\lambda - \mu) = v_0 \Rightarrow \lambda = \frac{v_0}{2\alpha} \quad et \quad \mu = -\frac{v_0}{2\alpha}$$

$x(t) = \dfrac{v_0}{\alpha} sh\ \alpha t$: Le point M s'éloigne indéfiniment.

3-a - Principe fondamental de la dynamique :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{R}_1 + \left(\vec{N} + \vec{T}\right) + m\omega^2\overrightarrow{OM} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

b- Projection sur l'axe Ax : $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -T + m\omega^2 x \quad \Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -fN + m\omega^2 x$ (1)

Projection sur l'axe Ay : $0 = N - m\omega^2 a - 2m\omega\dfrac{dx}{dt}$ (2)

Projection sur l'axe Az : $0 = R_1 - mg$

Pour trouver l'équation différentielle vérifiant la loi horaire en x(t).

(2) $\Rightarrow N = m\omega^2 a + 2m\omega\dfrac{dx}{dt}$, remplaçant N dans l'équation (1) $\Rightarrow$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f\left(m\omega^2 a + 2m\omega\frac{dx}{dt}\right) + m\omega^2 x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2f\omega\frac{dx}{dt} - \omega^2 x = -f\omega^2 a$$

Résolution de cette équation différentielle : $r^2 + 2f\omega - \omega^2 = 0$; $\Delta' = \omega^2(f+1)$

$r_{1,2} = -f\omega \pm \omega\sqrt{f^2+1}$ réels, le mouvement est donc apériodique.

à t=0, x=0 et $\dfrac{dx}{dt} = v_0$. La solution générale est: $x(t) = \dfrac{a(1-f)}{r_1 - r_2}\left(r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}\right) + af$

où af est une solution particulière

Exercice 7

I- 1-a R_1 est en mouvement de rotation autour de R_0 (fixe), R_1 n'est pas galiléen.

$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \omega\vec{K}$$

1-b Bilan des forces dans R_1 :

- Forces réelles : Poids : $\vec{P} = -mg\vec{k}$

- Forces fictives : $\begin{cases} Force\ de\ Coriolis\ \vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c = -2m\omega\vec{k} \wedge \vec{v}_{R_1}(M) \\ Force\ d'entrainement\ \vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e = -m\left(\vec{\gamma}_{O_1/R} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)\right) \end{cases}$

1-c P.F.D appliqué à M dans R_1

$$m\vec{\gamma}_{R_1}(M) = -mg\vec{k} - 2m\omega\vec{K}\wedge\vec{V}_{R_1}(M) - m\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}/_R - m\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$\vec{V}_{R_1}(M) = \frac{d\left(\overrightarrow{O_1M}\right)}{dt}/R_1 \text{ or } \overrightarrow{O_1M} = -\frac{1}{2}gt^2\vec{k} \Rightarrow \vec{V}_{R_1}(M) = -gt\vec{k}$$

2-a- Force de Coriolis . $\left\|\vec{F}_c\right\| = 2m\omega gt\left|\sin\left(\widehat{\vec{K},\vec{k}}\right)\right| = 2m\omega gt\ \cos\lambda$

2-b- Force d'entrainement :

$$\vec{F}_e = -m\left[\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}_{/R} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)\right] = -m\left[\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OO_1}\right) + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)\right]$$

$$= -m\left(R - \frac{1}{2}gt^2\right)\omega^2\vec{K}\wedge\left(\vec{K}\wedge\vec{k}\right)$$

$\vec{k} = \cos\lambda\ \vec{u}_\rho + \sin\lambda\vec{K}; (\vec{u}_\rho, \vec{i}, \vec{K})$ *trièdre direct*

$\vec{K}\wedge\vec{k} = \cos\lambda\vec{i}$

$$\Rightarrow \left\|\vec{F}_e\right\| = m\left(R - \frac{1}{2}gt^2\right)\omega^2\cos\lambda$$

3- Cas où $\left|\vec{F}_c\right| \le 20\left|\vec{F}_e\right|$

$$2m\omega gt\cos\lambda \le 20m\left(R - \frac{1}{2}gt^2\right)\omega^2\cos\lambda \Leftrightarrow gt + 10\left(-R\omega + \frac{1}{2}g\ t^2\ \omega\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow 5g\omega t^2 + gt - 10R\omega \le 0;\ \Delta = g^2 + 200g\omega^2 R > 0$$

$$t_1 = \frac{-g - \sqrt{\Delta}}{10g\omega} < 0 : a\ rejeté \quad ; \quad t_2 = \frac{-g + \sqrt{\Delta}}{10g\omega}$$

t	**0**		**t_2**		**$+\infty$**
$5g\omega t^2 + gt - 10R\omega$		-	0	+	

$\Rightarrow$ Pour t$\in[0, t_2]$: $5g\omega t^2 + gt - 10R\omega \le 0$

$$or\ L = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow L \in \left[0, \frac{1}{2}gt_2^2\right]: \textit{Domaine où on peut négliger } \left|\vec{F}_c\right| \textit{devant} \left|\vec{F}_e\right|$$

A.N : pour que $\left|\vec{F}_c\right| \le 20\left|\vec{F}_e\right|$ il faut que $L \in [0; 3300]$ km

- Cas où $\left|\vec{F}_e\right| \le 20\left|\vec{F}_c\right|$

$$\Rightarrow g\omega t^2 + 80gt - 2R\omega \ge 0;\ \Delta' = (40g)^2 + 2Rg\omega^2 > 0$$

$$t_1 = \frac{-40g - \sqrt{\Delta'}}{g\omega} < 0 \ a\, rejeté\,; \ t_2 = \frac{-40g + \sqrt{\Delta'}}{g\omega} > 0$$

t	0	t_2	$+\infty$
$g\omega t^2 + 80gt - 2R\omega$	-	0	+

$\Rightarrow$ Pour $t \geq t_2$ on a $g\omega t^2 + 80gt - 2R\omega \geq 0 \Rightarrow L \geq \frac{1}{2} g t_2^{\,2}$

A.N : $L \geq 6m$

II- On se place dans le cas où $\left|\vec{F}_e\right| << \left|\vec{F}_c\right|$

1-a- $\vec{K} = \cos\theta \vec{k} + \sin\theta \vec{j}$ $\; or \; \theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ $\;$; $\vec{K} = \sin\lambda \vec{k} + \cos\lambda \vec{j}$

1-b- PFD appliqué à M dans R_1

$$m\vec{\gamma}_{R_1}(M) = -mg\vec{k} - 2m\omega\vec{K} \wedge \vec{V}_{R_1}(M)$$

$$m\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases} = -mg\vec{k} - 2m\omega \begin{cases} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{cases} \wedge \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

1-c- Equations du mouvement de M :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\left(\cos\lambda \dfrac{dz}{dt} - \sin\lambda \dfrac{dy}{dt}\right) \quad (1) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\omega \sin\lambda \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega\cos\lambda \dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

2-a :

1ère intégration $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2\omega(\cos\lambda z - \sin\lambda y) \\ \dfrac{dy}{dt} = -2\omega \sin\lambda x \\ \dfrac{dz}{dt} = -gt + 2\omega x\cos\lambda \end{cases}$ $\quad$ $à\, t = 0 \; M\, en\, O_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$ $\; et \; \vec{V}_{R_1}(O_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En remplaçant dans (1) les expressions de $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$

On obtient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega gt\cos\lambda - 4\omega^2 x\cos^2\lambda - 4\omega^2 x\sin^2\lambda = -4\omega^2 x + 2\omega gt\cos\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 4\omega^2 x = 2\omega gt\cos\lambda$$

Solution particulière : $x_p = \frac{gt\cos\lambda}{2\omega}$

Solution générale : $x = x_p + A\sin 2\omega t + B\cos 2\omega t$

à t=0, x=0 et $\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow B = 0$ et $A = \frac{-g\cos\lambda}{4\omega^2}$

Soit $x(t) = \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}\left(2\omega t - \sin 2\omega t\right)$

2-b : $T' = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2} = 12\ heures$

2-c : $\sin 2\omega t \simeq 2\omega t - \frac{(2\omega t)^3}{3!}$ pour une durée de chute $t << T'$

$\Rightarrow x(t) = g\omega\frac{t^3}{3}\cos\lambda \geq 0\ \ \forall\lambda$ la déviation est vers l'Est.

3-a : $\frac{dy}{dt} = -2\omega x\sin\lambda \simeq -\frac{2\omega^2}{3}gt^3\sin\lambda\cos\lambda$

$\Rightarrow y(t) = \frac{-\omega^2}{6}gt^4\sin\lambda\cos\lambda = -\frac{\omega^2}{12}gt^4\sin 2\lambda$

3-b : $\lambda \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin 2\lambda > 0 \Rightarrow y < 0 \Rightarrow$ la déviation est vers le sud.

3-c * O_1 situé dans l'hémisphère nord $\Rightarrow \lambda \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ Déviation vers le sud

* O_1 situé dans l'hémisphère sud $\Rightarrow \lambda \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow y > 0 \Rightarrow$ Déviation vers le nord

4- La Tunisie est situé en hémisphère nord $\Rightarrow$ déviation vers le Sud –Est.

Energie

Exercice 1

Un point matériel de masse m se déplace dans le plan xOy de façon que son vecteur position soit donné par :

$$\vec{r} = a\cos\omega t\ \vec{i} + b\sin\omega t\ \vec{j}$$

où a et b sont deux constantes positives telles que a>b

1-a- Montrer que le point matériel se déplace sur une ellipse.

b- Montrer que la force agissant sur le point matériel est en tout point dirigée vers l'origine.

c- Montrer que cette force dérive d'un potentiel.

2- a- Calculer l'énergie cinétique du point matériel aux points A (a, 0) et B (0, B).

b- Calculer le travail fourni par le champ de force en déplaçant le point matériel de A à B.

c- Montrer que le travail total, effectué en faisant faire au point matériel une fois le tour de l'ellipse, est nul.

d- En utilisant le résultat de la question (c), calculer l'énergie potentielle aux points A et B.

e- Calculer l'énergie totale du point matériel et montrer qu'elle est constante, en d'autres termes, démontrer le principe de la conservation de l'énergie.

Exercice 2

1- Déterminer l'énergie potentielle E_p dont dérive la force $\vec{F}$ (F_x, F_y, F_z)

avec : $\begin{cases} F_x = ax + by^2 \\ F_y = az + 2bxy \\ F_z = ay + bz^2 \end{cases}$ a et b sont deux constantes. On vérifiera que la force est conservative.

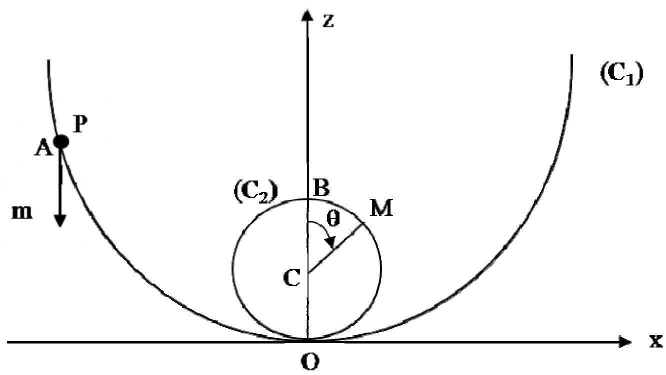
2- On abandonne sans vitesse initiale une bille P de masse m en un point A d'un cerceau (C_1) ; au point O le plus bas de (C1), on suppose que la trajectoire de P décrit un deuxième cerceau (C2), de centre C et de diamètre OB = 2R, intérieur à celui de (C1). On suppose que le mouvement de P s'effectue sans roulement et que les frottements sont négligeables.

a- Calculer la vitesse minimale de P au point B.

b- En déduire l'altitude minimale h du point de départ A de P en appliquant la loi de conservation de l'énergie.

c- Donner l'expression de l'énergie potentille de P en un point M en fonction de θ, m, R et g.

d- Déterminer les positions d'équilibre de P et discuter leurs natures.



Exercice 3

Dans un repère R (O, x, y, z) fixe, on considère un tube circulaire de rayon a et de centre O_1 (0,0,a) en rotation autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire ω=cte. La masse et la section du tube sont négligeables.

Soit R_1 (O_1, x_1, y_1, z) un repère mobile tel que le plan x_1O_1z contient le tube. A t=0, ce plan coïncide avec le plan xOz. Une masse ponctuelle métallique m se déplace sans frottement à l'intérieur du tube.

I- Calcul de l'énergie :

a- Etablir le bilan des forces appliquées à la masse m dans R_1.

b- Quelles sont les forces qui ne travaillent pas ? Montrer que les forces restantes sont conservatives.

c- En prenant $E_p(\theta = 0) = 0$, montrer que l'énergie potentielle totale est de la forme :

$$E_p(\theta) = -\frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, r^2 - mga\cos\theta + cste$$

avec r : distance du point M par rapport à l'axe Oz. $\theta = (\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{O_1M})$.

d- Calculer l'énergie mécanique totale. Justifier sa conservation.

II- Etude des positions d'équilibres relatives

Déterminer les positions d'équilibres relatives et étudier leur stabilité.

III- Etude du mouvement relatif :

Dans la suite du problème, on considère le cas où $\omega^2 < g/a$ et on s'intéresse seulement aux petits mouvements par rapport à la position d'équilibre relatif stable.

En utilisant le développement limité de $E_p(\theta)$ en série de Taylor au voisinage de la position d'équilibre considérée : $E_p(\theta) = E_p(\theta_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\Big|_{\theta=\theta_0}(\theta - \theta_0)^2 + \ldots$

En se limitant aux deux premiers termes du développement :

a- Montrer que l'équation du mouvement est de la forme : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\,\theta = 0$

b- Donner la signification physique de ω_0 après l'avoir déterminer en fonction de g, a et ω. Quelle est la nature du mouvement relatif de la masse m?

Exercice 4

Un point matériel M de masse m de coordonnées (x,y,z) est placé dans un champ scalaire d'énergie potentielle $U(x, y, z) = mgz - \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$; avec g et ω sont deux constantes.

1- a - Déterminer l'équation cartésienne de la surface équipotentielle U_0.

1- b - Quelle est la nature de cette surface ?

1- c - Le point M décrit la parabole $z = \frac{\omega^2}{2g}x^2$ dans le plan y=0, voit-il une variation de son énergie potentielle le long de cette courbe ? Quel est le travail effectué ?

1- d - Le point M au repos est lâché à partir d'un point P de la parabole précédente pour atteindre le point $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Déduire sa vitesse en ce point.

2- a - Calculer les composantes cartésiennes de la force qui dérive de ce potentiel U.

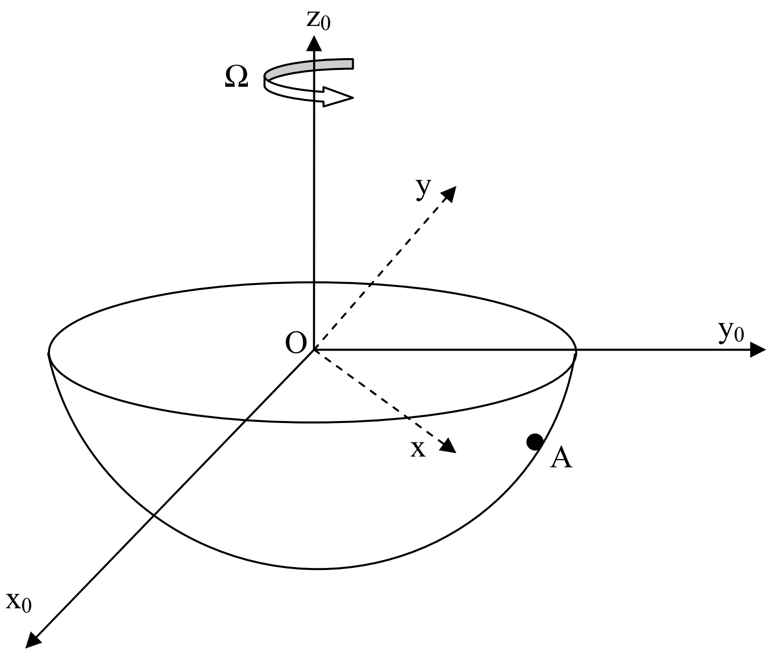
2- b - A partir du principe fondamental de la dynamique, déduire l'équation paramétrique de la trajectoire pour un point partant du repos d'un point S (a, 0, 0) ; $a \neq 0$.

Exercice 5

Un point matériel A, de masse m, est entrain à se déplacer, sans frottement, sur la surface intérieure d'une demi-sphère creuse S. cette surface tourne uniformément, à la vitesse angulaire Ω, autour de son axe de révolution vertical.

Sur la figure suivante on a représenté le référentiel terrestre noté R_0 (O x_0 y_0 z_0), supposé galiléen. Oz_0 étant la verticale ascendante et le référentiel R(O x y z_0) lié à S.

On se propose d'étudier le mouvement de A par rapport à (R). Pour cela on projette les relations vectorielles dans la base de (R), et on introduit la quantité $\Omega_0^2 = g/r_0$, g étant l'intensité du champ de pesanteur terrestre et r_0 le rayon de la demi-sphère S.



1- Exprimer, en fonction des coordonnées (x, y, z) de A dans (R), de leurs dérivées par rapport au temps $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ et de Ω : la vitesse d'entrainement de A, son accélération d'entrainement et son accélération de Coriolis qui interviennent dans la composition des mouvements de A par rapport à (R) et (R_0).

2- Ecrire vectoriellement la loi fondamentale de la dynamique pour A dans son mouvement par rapport à (R). En déduire les équations différentielles aux quelles satisfont x, y et z ; on mettra la force de réaction $\vec{R}$ qu'exerce S sur A sous la forme suivante que l'on justifiera : $\vec{R} = -R\,\frac{\vec{r}}{r_0}$ où $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$

3- a - Quelle est, en fonction de z, l'énergie potentielle de pesanteur de A ? On prendra l'origine de l'énergie potentielle à z=0.

3- b - Montrer que la force d'inertie d'entrainement dérive aussi de l'énergie potentielle $\frac{1}{2}\,m\,\Omega^2\,z^2$, lorsque l'on prend l'origine à z=0.

3- c - En déduire l'énergie potentielle totale E_p de A.

4- a - Tracer le graphe de la fonction : $f(u) = u^2 + \frac{2\,\omega_0^2\,u}{\Omega^2}$

Montrer que $E_p = \frac{1}{2}\,m\,\Omega^2\,r_0^2\,f(z/r_0)$.

4- b - Discuter qualitativement la nature des différents mouvements en z, suivant la valeur de l'énergie mécanique totale E_m de A dans (R).

4- c - Pour quelle valeur de l'énergie E_m le point A évolue- t – il en contact avec S dans un plan horizontal ? Quelle est la cote z_m correspondante en fonction de r_0 ?

Correction des exercices

Exercice 1

1- $\vec{r} = a\cos\omega t\ \vec{\imath} + b\sin\omega t\ \vec{\jmath}$

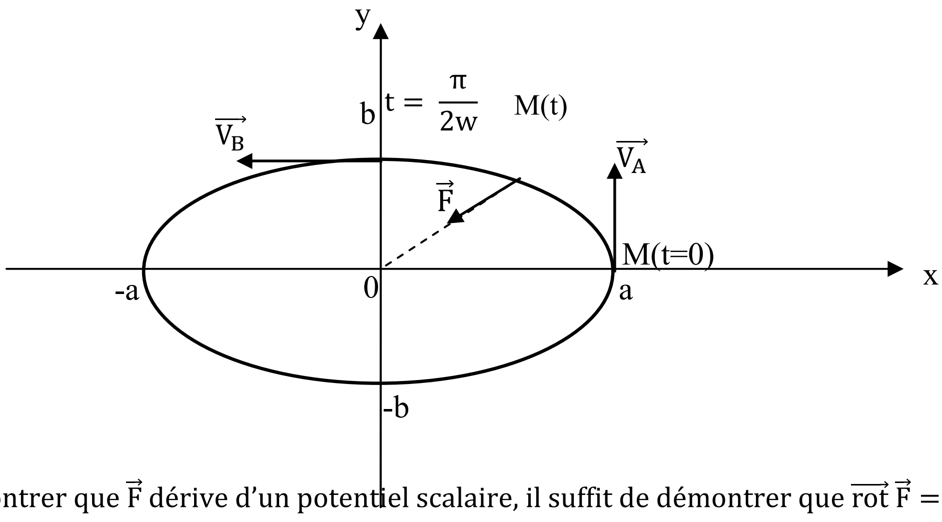
a- $x = a\cos\omega t$ c.à.d. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \cos^2\omega t$

$y = b\sin\omega t$ c.à.d. $\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2\omega t$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: Équation d'une ellipse de centre O et d'axes a et b.

b- $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ or $\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\,\vec{r}$

c- $\vec{F} = -m\,\omega^2\,\vec{r}$ il s'agit d'une force centrale.



d- Pour démontrer que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire, il suffit de démontrer que $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$. En effet :

$$\vec{F}\begin{cases} F_x = -m\omega^2 x \\ F_y = -m\omega^2 y \\ F_z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{cases} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{cases} \wedge \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \end{cases} = \begin{cases} \partial F_z/\partial x - \partial F_y/\partial z = 0 \\ \partial F_x/\partial y - \partial F_z/\partial x = 0 \\ \partial F_y/\partial z - \partial F_x/\partial y = 0 \end{cases}$$

⇨ $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ ⇨ ∃ V tel que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,V$.

Calcul de V :

$$\begin{cases} -m\omega^2 x = -\frac{\partial V}{\partial x} & (1) \\ -m\omega^2 y = -\frac{\partial V}{\partial y} & (2) \\ 0 = -\frac{\partial V}{\partial z} & (3) \end{cases} \qquad V = V(x, y, z)$$

(1) ⇨ $\frac{1}{2}\,m\omega^2\,x^2 + C_1\,(y,z)$ (4)

$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial C_1\,(y,z)}{\partial y} = m\omega^2 y \implies$ $C_1(y,z) = \frac{1}{2}\,m\omega^2 y^2 + C_2(z)$

$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial C_2(z)}{\partial z} = 0 \implies \qquad C_2(z) = cste = C$

Conclusion :

$V(x,y,z) = \frac{1}{2} m\omega^2(x^2+y^2) + C$

$V(x,y,z) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + C$: C'est l'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}$.

Autre méthode :

$\overrightarrow{grad}\, r = \overrightarrow{U_r} = \frac{\vec{r}}{r} \qquad \implies \qquad \vec{r} = r\,\overrightarrow{grad}\, r = \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}\, r^2 = \overrightarrow{grad}\left(\frac{r^2}{2}\right)$

$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r} = -\overrightarrow{grad}\left(m\omega^2 r^2/2\right) \qquad \implies \qquad V = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + Cste$

Remarque : le potentiel scalaire est déterminé à une constante additive près.

2-a- Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} mV^2$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega \sin\omega t\, \vec{\imath} + \omega b \cos\omega t\, \vec{\jmath}$$

t= 0, M en A, $\overrightarrow{V_A} = \omega b\, \vec{\jmath}$, $E_{c_A} = \frac{1}{2} m\omega^2 b^2$

$t = \frac{\pi}{2\,\omega}$ M est en B, $\overrightarrow{V_B} = -\omega a\, \vec{\imath}$, $E_{c_B} = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$

b- Travail fourni par le champ de force en déplaçant le point matériel de A à B.

$\omega = \int_A^B \vec{F}\, \overrightarrow{dl}$ or $\overrightarrow{\mathrm{dl}} = \overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}$

$\omega = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy = \int_a^0 -m\omega^2 x\, dx + \int_0^b -m\omega^2 y\, dy$

$\omega = -\frac{1}{2} m\omega^2(b^2 - a^2) = E_{c_B} - E_{c_A}$

Conclusion :

$E_{c_B} - E_{c_A} = \int_A^B \vec{F}\, \overrightarrow{dl}$; $\vec{F}$: Résultante des forces s'exerçant sur le point M.

c- $\oint_A^A \vec{F}\, \overrightarrow{dl} = E_{c_A} - E_{c_A} = 0$

Il est normal de trouver que le travail de $\vec{F}$ le long de toute l'ellipse est nul car $\vec{F}$ est un vecteur de gradient.

d- Energie potentielle E_p tel que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$; $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2\, r^2 + C$

L'énergie potentielle est définie à une constante additive près.

Au point A : $E_{p_A} = \frac{1}{2} m\omega^2\, a^2 + C$;

Au point B : $E_{p_B} = \frac{1}{2} m\omega^2\, b^2 + C$

Remarque : la constante C peut être déterminé en prenant l'origine des énergies potentielles en un point particulier.

Exemple :

Nous prenons l'origine des énergies potentielles au point A. Nous trouvons $E_{p_A} = 0 \implies$

$C = -\frac{1}{2} m\omega^2\, a^2$ et $E_{p_B} = \frac{1}{2} m\omega^2(b^2 - a^2)$

e- Energie mécanique totale est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + C$

$E_A = E_{c_A} + E_{p_A} = \frac{1}{2} m\omega^2 b^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 + C$

$E_B = E_{c_B} + E_{p_B} = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 b^2 + C$

Conclusion : $E_A = E_B$ conservation de l'énergie mécanique totale.

Remarque : L'énergie mécanique totale se conserve si les forces auxquels sont soumis les points matériels sont conservatives.

Exemple de force non conservative : force de frottement (la conservation de E cesse d'être valable).

Exercice 2

1- Force conservative $\Longrightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

$$\begin{cases} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{cases} \wedge \begin{cases} ax + by^2 \\ az + 2bxy \\ ay + bz^2 \end{cases} = \begin{cases} a - a = 0 \\ 0 - 0 = 0 \\ 2by - 2by = 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \vec{F} \text{ est conservative.}$$

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

$dE_p = -F_x\,dx \quad \Longrightarrow \quad E_p = -\int (ax + by^2)\,dx = -\frac{ax^2}{2} - bxy^2 + C(x,y)$

$dE_p = -F_y dy \Longrightarrow \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = -F_y = -az - 2bxy = -2bxy + \frac{\partial C(x,y)}{\partial y}$

$\Longrightarrow \frac{\partial C(x,y)}{\partial y} = -az \quad \Longrightarrow \quad C = -azy + k(z)$

$E_p = -\frac{ax^2}{2} - bxy^2 - ayz + k(z)$

$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = ay - \frac{dk(z)}{dz} = ay + bz^2 \quad \Longrightarrow \quad k(z) = -\frac{bz^3}{3} + k_1$

$E_p = -\frac{ax^2}{2} - bxy^2 - ayz - \frac{bz^3}{3} + k_1$

2- a- Vitesse minimale de P au point B.

En B : $\frac{m\,V_m^2}{R} = mg \quad \Longrightarrow \quad V_m = \sqrt{g\,R}$

b- l'altitude minimale h du point de départ A de P.

$\frac{1}{2}\,m\,V_m^2 + 2mgR = 0 + mgh$

$\frac{1}{2}\,m\,gR + 2mgR = mgh$

$h = \frac{5}{2}R$

c- l'énergie potentielle de P en un point M en fonction de θ, m, R et g.

$$E_p = mgR\,(1 + \cos\theta)$$

d- Positions d'équilibre :

$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = -mgR\sin\theta$

$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \implies \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$

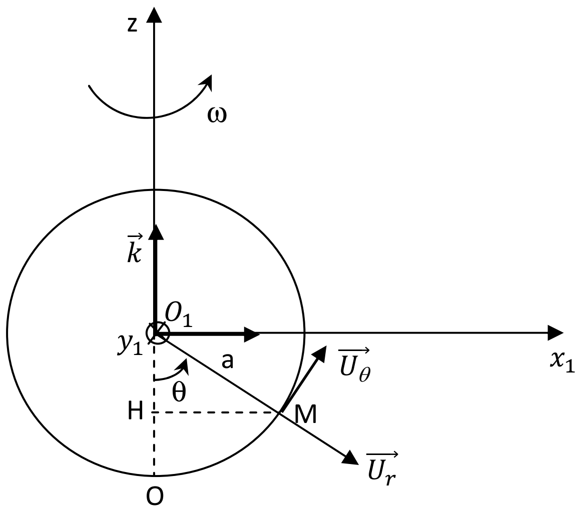
Nature des positions d'équilibre :

$\frac{\partial^2 E_p}{\partial^2 \theta} = -mgR\cos\theta$

✓ Pour $\theta = 0$, $\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right]_{\theta=0} = -mgR < 0 \implies$ Equilibre instable.

✓ Pour $\theta = \pi$, $\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right]_{\theta=\pi} = mgR > 0 \implies$ Equilibre stable.

Exercice 3



$\overrightarrow{U_r} = -\cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{\imath_1}$

$\overrightarrow{U_\theta} = -\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{\imath_1}$

I- Calcul de l'énergie :

a- Forces appliquées à M dans R_1.

Forces réelles

- Poids : $\vec{P} = -mg\vec{k}$
- La réaction du tube sur M : $\vec{R}$

Pas de frottement $\implies \vec{R} \in$ plan ⊥ au tube au point M, donc c'est le plan engendré par les vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_r}$ et $\vec{\jmath_1}$ $\implies \vec{R} = R_1\overrightarrow{U_r} + R_2\vec{\jmath_1}$

Forces fictives :

- $\overrightarrow{F_e}$: Force d'inertie d'entrainement

$\overrightarrow{F_e} = -m\,\overrightarrow{\gamma_e}$

$\overrightarrow{\gamma_e} = -\omega^2\overrightarrow{HM} = -\omega^2\,a\sin\theta\;\vec{\imath_1}$ ou bien $\overrightarrow{\gamma_e} = -\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_1M})$

$\implies \overrightarrow{F_e} = m\,\omega^2 a\sin\theta\;\vec{\imath_1}$

- $\overrightarrow{F_c}$: Force d'inertie de Coriolis (complémentaire).

$\overrightarrow{F_c} = -m\,\overrightarrow{\gamma_c} = -2m\,\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r} = -2m\,\omega\,\vec{k}\wedge\left.\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} = -2\,m\,\omega\,a\,\dot{\theta}\,\vec{k}\wedge\overrightarrow{U_\theta}$

$\implies \overrightarrow{F_c} = -2\,m\,\omega\,a\,\dot{\theta}\cos\theta\;\vec{\jmath_1}$

b- $\overrightarrow{dl_M} = a\,d\theta\,\overrightarrow{U_\theta}$

$d\,W(\vec{R}) = \vec{R}.\overrightarrow{dl_M} = 0$

$d\,W(\overrightarrow{F_c}) = \overrightarrow{F_c}.\overrightarrow{dl_M} = 0$

La réaction $\vec{R}$ et la force de Coriolis ne travaillent pas

$\oint_{tube} \vec{P}.\overrightarrow{dl_M} = \int_0^{2\pi} -mga \sin\theta \, d\theta = 0$

$\oint_{tube} \overrightarrow{F_e}.\overrightarrow{dl_M} = \int_0^{2\pi} ma^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta \, d\theta = 0$

$\Rightarrow$Le poids $\vec{P}$ et la force d'entrainement $\overrightarrow{F_e}$ sont conservatives.

c- $\vec{P} + \overrightarrow{F_e} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$

$\vec{P} + \overrightarrow{F_e} = -mg\,\vec{k} + ma\omega^2 \sin\theta\, \overrightarrow{\iota_1} = -mg\,\vec{k} + m\omega^2 x_1 \overrightarrow{\iota_1}$

$\overrightarrow{grad}\, E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x_1}\overrightarrow{\iota_1} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial x_1} = -m\omega^2 x_1 & (1) \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} = mg & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $E_p(x_1, z) = -\frac{1}{2} m\,\omega^2 {x_1}^2 + C(z)$ (3)

(2) $\Rightarrow$ $\frac{\partial C(z)}{\partial z} = mg$ $\Rightarrow$ $C(z) = mgz + C$

$\Rightarrow E_p(x_1, z) = -\frac{1}{2} m\,\omega^2 {x_1}^2 + mgz + C$

Or $E_p(\theta = 0) = E_p(x_1 = 0, z = -a) = 0$ $\Rightarrow$ $C = mga$

Donc $E_p(\theta) = -\frac{1}{2} m\,\omega^2 r^2 + mga(1 - \cos\theta)$

$x_1 = r = a\sin\theta\,;\, z = O_1H$

d- Energie mécanique totale :

E= E_c + E_p où $E_c = \frac{1}{2} m\,V_r^2 = \frac{1}{2} m\,a^2\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m\,a^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m\,\omega^2 r^2 + mga\,(1 - \cos\theta)$

Comme c'est seulement les forces conservatives qui travaillent $\Rightarrow \Delta E = 0$

II- Etude des positions d'équilibre relatives :

Rappel : soit θ_0 une position d'équilibre. Cet équilibre est dit stable, si l'énergie correspondant est minimale. Faisons le développement de Taylor au voisinage de $\theta = \theta_0$au second ordre.

$E_p(\theta) \cong E_p(\theta_0) + (\theta - \theta_0)\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0} + \frac{(\theta-\theta_0)^2}{2!}\,\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\Big|_{\theta=\theta_0}$

$\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0} = 0$ car θ_0 est une position d'équilibre.

$E_p(\theta_0)$ correspond à l'énergie minimale si $\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\Big|_{\theta=\theta_0}$ est > 0.

Finalement :

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\Big|_{\theta=\theta_0} \text{ est } \begin{cases} > 0 \ \textit{équilibre stable} \\ < 0 \ \textit{équilibre instable} \\ = 0 \ \textit{équilibre indifférent} \end{cases}$$

Positions d'équilibres relatives :

$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 = ma\,(g - \omega^2 a \cos\theta)\sin\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\theta = 0\\ \theta = \pi\end{cases}$ ou $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 a}$ n'est acceptable que si $\frac{g}{\omega^2 a} \leq 1$

Pour $\frac{g}{\omega^2 a} < 1$ on a 4 positions d'équilibre : $\theta = 0,\ \theta = \pi$ et $\theta = \pm\, Arc\cos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$

Pour $\frac{g}{\omega^2 a} \geq 1$ on a 2 positions d'équilibres : $\theta = 0$ et $\theta = \pi$

Etude de la stabilité : $\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = ma^2\omega^2(1 - 2\cos^2\theta) + mga\cos\theta$

	$\boldsymbol{\theta_0}$	$\frac{\partial^2 E_p}{\partial\theta^2}\Big\vert_{\theta=\theta_0}$	$\boldsymbol{sign}\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial\theta^2}\Big\vert_{\theta=\theta_0}\right)$	***Nature de l'équilibre***
$\boldsymbol{\frac{g}{\omega^2 a}} < 1$	*0*	$ma\,(g - \omega^2 a)$	*< 0*	*Instable*
	π	$-\,ma\,(g + \omega^2 a)$	*< 0*	*Instable*
	$+\,Arc\cos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$	$\frac{m}{\omega^2}\,(a^2\omega^4 - g^2)$	*> 0*	*Stable*
	$-\,Arc\cos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$	$\frac{m}{\omega^2}\,(a^2\omega^4 - g^2)$	*> 0*	*Stable*
$\boldsymbol{\frac{g}{\omega^2 a}} > 1$	*0*	$ma\,(g - \omega^2 a)$	*> 0*	*Stable*
	π	$-\,ma\,(g - \omega^2 a)$	*< 0*	*Instable*
$\boldsymbol{\frac{g}{\omega^2 a} = 1}$	*0*	*0*		*Indifférent*
	π	*-2mag*	*< 0*	*Instable*

III- Etude du mouvement relatif :

$\omega^2 < \frac{g}{a}$ L'équilibre stable pour $\theta = 0$

$E = E_p + E_c = \frac{1}{2}m\,a^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\,ma\,(g - a\,\omega^2)\theta^2$

$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow\quad ma^2\,\ddot\theta\,\dot\theta + ma\,(g - a\omega^2)\dot\theta\,\theta = 0$

$\Leftrightarrow\ \frac{\partial^2\dot\theta}{\partial t^2} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\theta = 0$

$\Leftrightarrow\ \ddot\theta + \omega_0^2\theta = 0$

Equation différentielle d'un mouvement sinusoïdale de pulsation $\omega_0 = \left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)^{1/2}$

Exercice 4

1- a- équation cartésienne de la surface équipotentielle U_0 est :

$mga - \frac{m\,\omega^2}{2}\,(x^2 + y^2) = U_0$

$\Leftrightarrow\ z = \frac{\omega^2}{2g}\,(x^2 + y^2) + \frac{U_0}{mg}$

b- Nature de cette surface : c'est une paraboloïde d'axe Oz.

c- Si y = 0 et $z = \frac{\omega^2}{2g} x^2 \Rightarrow U(x,y,z) = 0$ pas de variation de l'énergie potentielle U.

Le travail effectué sur cette courbe équipotentielle

$\int dW = -\int dU = 0$ car $dW = \vec{F}.\vec{d}M = -\overrightarrow{grad}\,U.\overrightarrow{dU} = -dU$

d- L'énergie totale est conservée puisque la force appliquée dérive de $U\ (x,y,z)$

$\Rightarrow$ On prend deux états :

(1) sur la parabole : E = ($E_c + E_p$) parabole $E_c = 0$ car au repos et $E_p = 0$ (Voir c-)

(2) Sur le point $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$: $E_C = \frac{1}{2} m\, v_0^2$

$$E_p = U(P_0) = U(x_0,y_0,z_0) = mg\, z_0 - \frac{m\omega^2}{2}(x_0^2 + y_0^2\ )$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m\, v_0^2 + mg\, z_0 - \frac{m\,\omega^2}{2}\ (x_0^2 + y_0^2\ ) \Rightarrow v_0^2 = \omega^2(x_0^2 + y_0^2\ ) - 2gz_0$$

2- a – Les composantes de la force $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,U(x,y,z)$

$F_x = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = m\omega^2\, x$; $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = m\omega^2\, y$; $F_z = -mg$

b- Principe fondamental : $\vec{F} = m\,\vec{\gamma}$

$F_x = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2\, x \Rightarrow \quad x(t) = A\, ch\, \omega t + B\, sh\, \omega t$

$F_y = m\,\frac{d^2y}{dt^2} \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2\, y \Rightarrow \quad y(t) = A'\, ch\, \omega t + B'\, sh\, \omega t$

$F_z = m\,\frac{d^2z}{dt^2} \quad \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = -g \quad \Rightarrow \quad z(t) = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + V_{0z}t + z_0$

Conditions initiales :

t= 0, x= a, y= 0, z=0 et $\vec{v} = \vec{0}$. On obtient $\begin{cases} x(t) = a\, ch\, \omega t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{cases}$

Exercice 5

1- Vitesse d'entrainement de A :

$\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{U_x} + y\,\overrightarrow{U_y} + z\,\overrightarrow{U_{z0}}$

$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_{o'}}/R_0 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'A}$

$O' \equiv O \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_{o'}}/R_0 = \vec{0}, \quad \overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{v_e} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} = \Omega\,\overrightarrow{U_{z0}} \wedge (x\,\overrightarrow{U_x} + y\,\overrightarrow{U_y} + z\,\overrightarrow{U_{z0}})$

$\overrightarrow{v_e} = \Omega\,(x\,\overrightarrow{U_{z0}} \wedge \overrightarrow{U_x} + y\,\overrightarrow{U_{z0}} \wedge \overrightarrow{U_y})$

$\overrightarrow{v_e} = \Omega\,(x\overrightarrow{U_y} - y\,\overrightarrow{U_x})$

Accélération d'entrainement de A.

$\overrightarrow{\gamma_e} = \underbrace{\overrightarrow{\gamma_{O'}}/R}_{0} + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'A}}_{0} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'A})$

$\overrightarrow{\gamma_e} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}) = \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge (x\overrightarrow{U_y} - y\ \overrightarrow{U_x})]$

$\overrightarrow{\gamma_e} = -\Omega^2 \left(x\,\overrightarrow{U_x} + y\,\overrightarrow{U_y}\right)$

Accélération de Coriolis :

$\overrightarrow{\gamma_C} = 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_A}/R\,;\quad \overrightarrow{V_A}/R = \dot{x}\,\overrightarrow{U_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{U_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{U_{z0}}$

$\overrightarrow{\gamma_C} = 2\Omega\,(\dot{x}\overrightarrow{U_{z0}} \wedge \overrightarrow{U_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{U_{z0}} \wedge \overrightarrow{U_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{U_{z0}} \wedge \overrightarrow{U_{z0}})$

$\overrightarrow{\gamma_C} = 2\Omega\,(\dot{x}\overrightarrow{U_y} - \dot{y}\ \overrightarrow{U_x})$

2- Loi fondamentale de la Dynamique :

$$m\,\vec{\gamma}_{A/R} = \sum \vec{F}_{\text{réelles}} + \sum \vec{F}_{Fictives}$$

$$\sum \vec{F}_{\text{réelles}} = \vec{P} + \vec{R}$$

$$\sum \vec{F}_{Fictives} = \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

Soit $m\,\vec{\gamma}_{A/R} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

$$\vec{\gamma}_{A/R} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\,\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_{z0}$$

$$\vec{P} = -mg\vec{k},\quad \vec{R} = -\frac{R}{r_0}\left(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_{z0}\right)$$

$$\vec{F}_e = -m\,\vec{\gamma}_e = m\,\omega^2\left(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y\right)$$

$$\vec{F}_c = -m\,\vec{\gamma}_c = -2\,m\,\omega\left(\dot{x}\,\vec{u}_y - \dot{y}\,\vec{u}_x\right)$$

Projection de P. F. D sur (Ox) :

$$m\,\ddot{x} = 0 - \frac{Rx}{r_0} + m\,\Omega^2 x + 2\,m\,\Omega\,\dot{y}$$

Projection sur (Oy) : $m\ddot{y} = 0 - \dfrac{Ry}{r_0} + m\,\Omega^2 y - 2\,m\,\Omega\,\dot{x}$

Projection sur (Oz_0) : $m\ddot{z} = -mg - \dfrac{Rz}{r_0}$

Finalement:

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = \left(-\dfrac{R}{r_0} + m\,\Omega^2\right)x + 2\,m\,\Omega\,\dot{y} \\ m\ddot{y} = \left(-\dfrac{R}{r_0} + m\,\Omega^2\right)y - 2\,m\,\Omega\,\dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg - \dfrac{Rz}{r_0} \end{cases}$$

3-a- Energie potentielle de pesanteur de *A*

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}\, E_{p_1} \Leftrightarrow -mg = -\frac{\partial E_{p_1}}{\partial z} \Leftrightarrow E_{p_1}(z) = mgz + C$$

$$z = 0,\ E_{p_1}(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$E_{p_1}(z) = mgz$$

b- Energie potentielle de la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_e = -\overrightarrow{grad}\, E_{p_2} \Leftrightarrow \begin{cases} + m\Omega^2 x = -\dfrac{\partial E_{p_2}}{\partial x} \\ + m\Omega^2 y = -\dfrac{\partial E_{p_2}}{\partial y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial E_{p_2}}{\partial x} = -m\Omega^2 x \Rightarrow E_{p_2} = -\frac{1}{2} m\,\Omega^2 x^2 + C_1(y)$$

$$\frac{\partial E_{p_2}}{\partial y} = -m\Omega^2 y \Rightarrow \frac{\partial C_1}{\partial y} = -m\Omega^2 y \Rightarrow C_1(y) = -\frac{1}{2} m\,\Omega^2 y^2 + C_2$$

$$E_{p_2} = -\frac{1}{2} m\,\Omega^2 \left(x^2 + y^2\right) + C_2$$

$$= -\frac{1}{2} m\,\Omega^2 \left(r_0^{\,2} - z^2\right) + C_2 \quad puisque\ r_0 = constante = x^2 + y^2 + z^2$$

$$E_{p_2} = \frac{1}{2} m\,\Omega^2 z^2 + C_2 - \frac{1}{2} m\,\Omega^2 r_0^{\,2}$$

Lorsque l'on prend l'origine à z=0

$$z = 0 \Rightarrow E_{p2} = 0 \Rightarrow C_2 - \frac{1}{2} m\,\Omega^2 r_0^{\,2} = 0 \quad Finalement\ E_{p_2} = \frac{1}{2} m\,\Omega^2 z^2$$

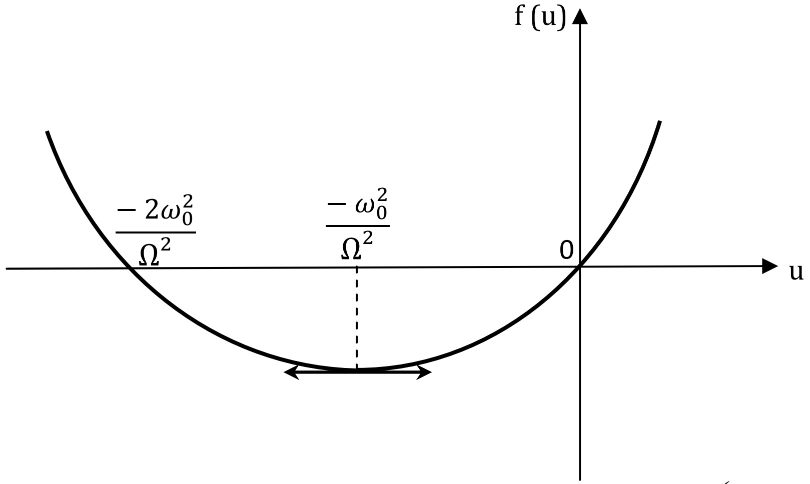
c- Energie potentielle totale E_p de *A* :

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2}; \quad E_p = mgz + \frac{1}{2} m\,\Omega^2 z^2$$

4- a Etude de la fonction : $f(u) = u^2 + \dfrac{2\,\omega_0^{\,2} u}{\Omega^2}$

$$\frac{df}{du} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ ou \\ u = -\dfrac{2\omega_0^{\,2}}{\Omega^2} \end{cases}$$

u	$-\infty$	$-\dfrac{\omega_0^{\,2}}{\Omega^2}$	$+\infty$
f' (u)	-	0	+
f (u)	$-\infty$ ↘	$-\dfrac{\omega_0^{\,4}}{\Omega^4}$	↗ $+\infty$



$$E_p = mgz + \frac{1}{2} m\, \Omega^2 z^2 = \frac{1}{2} m\, \Omega^2 r_0^{\,2}\left(\frac{z^2}{r_0^{\,2}} + \frac{2\,g}{\Omega^2 r_0^{\,2}} z\right) = \frac{1}{2} m\, \Omega^2 r_0^{\,2}\left(\left(\frac{z}{r_0}\right)^2 + \frac{2\,g}{\Omega^2 r_0^{\,2}} z\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\, \omega^2 r_0^{\,2}\left(\left(\frac{z}{r_0}\right)^2 + \frac{2\,\omega_0^{\,2}}{\Omega^2}\left(\frac{z}{r_0}\right)\right)$$

On pose : $u = \dfrac{z}{r_0} \Rightarrow E_p = \dfrac{1}{2} m\, \Omega^2 r_0^{\,2} f\left(\dfrac{z}{r_0}\right) = \dfrac{1}{2} m\, \Omega^2 r_0^{\,2} f(u)$

b- E_m : énergie mécanique totale de A dans (R)

Soit $E_m \cap E_p = \{A, B\}$

à gauche de A et à droite de B pour que $E_m = E_p + E_c$; E_c doit être négatif ce qui est impossible. Entre A et B $E_c > 0$. En A et B, $E_c = 0$

La particule oscille entre A et B autour d'une position stable $z = - r_0^{\,2} \dfrac{\omega_0^{\,2}}{\Omega^2}$

Choc

Exercice 1

Un neutron (A) de masse m et un noyau lourd (B) de masse M ne sont soumis à aucune forces extérieure. Ils entrent en collision, dans le référentiel de laboratoire R supposé Galiléen. Avant le choc, (B) est au repos et (A) à la vitesse $\overrightarrow{V_A}$. On constate qu'après le choc, il se forme une particule (AB) de masse (m+M) de vitesse $\overrightarrow{V'_{AB}}$ dans R_L (référentiel de Laboratoire).

1- Montrer que cette collision ne conserve pas l'énergie cinétique du système. Calculer la variation W de l'énergie cinétique au cours du choc en fonction de m, M et de l'énergie cinétique E_0 de la particule avant le choc.

2- On se place dans le référentiel R_G du centre de masse G de (A) et (B).

a- Montrer que R_G est Galiléen.

b- Calculer l'énergie cinétique de (AB) après le choc dans R_G.

c- Calculer l'énergie cinétique E^* du système [(A) + (B)] avant le choc dans R_G. L'écrire en fonction de E_0 et la comparer à W.

Exercice 2

Une particule de masse m_1 et de vitesse $\overrightarrow{V_1}$ entre en collision avec une particule de masse m_2 et de vitesse $\overrightarrow{V_2}$ [$\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ // x'x].

1- Calculer la vitesse $\overrightarrow{V_G}$ du centre de masse des deux particules.

2- Quelles sont les vitesses $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ dans le système de centre de masse avant la collision ? On exprimera ces vitesses en fonction de la masse réduite μ et la vitesse relative $\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$.

Que vaut alors la quantité totale de mouvement dans ce système ? Qu'en déduire lors d'une collision ?

3- Calculer, avant la collision, l'énergie cinétique totale du système :

a- dans le référentiel du centre de masse.

b- dans le référentiel du laboratoire.

Montre que $E = E_r + E_G$, où

E_r : énergie cinétique d'une particule de masse μ et de vitesse V_r.

E_G : énergie cinétique du centre de masse.

4- Lorsque la collision est inélastique, que peut-on dire sur $\overrightarrow{V_r}$?

Exercice 3

Soit deux masses M_1= 85g et M_2 = 200g qui se déplacent dans un plan horizontal et qui entrent en collision. Avant le choc les vitesses des deux masses dans le référentiel (L) lié au laboratoire sont : $\overrightarrow{V_{1L}} = 6{,}4\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{V_{2L}} = -6{,}7\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$

Après le choc la masse M_2 a pour vitesse : $\overrightarrow{V'_{2L}} = -4{,}4\vec{\imath} + 1{,}9\vec{\jmath}$

$\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont les vecteurs unitaires d'un repère orthonormé (Oxy) ($\overrightarrow{\imath^2} = \overrightarrow{\jmath^2} = 1$; $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$) et les vitesses sont exprimées en mètre par seconde.

1- Trouver la vitesse de centre de masse dans le référentiel (L).

2- Trouver les vitesses des deux masses avant le choc dans le référentiel du centre de masse.

3- Trouver la vitesse $\overrightarrow{V'_{1L}}$ de la masse M_1 après le choc.

4- Trouver les vitesses relatives $\vec{W} = \overrightarrow{V_{1L}} - \overrightarrow{V_{2L}}$ et $\overrightarrow{W'} = \overrightarrow{V'_{1L}} - \overrightarrow{V'_{2L}}$. Le choc et –t-il élastique où inélastique ? Justifier votre réponse.

Exercice 4

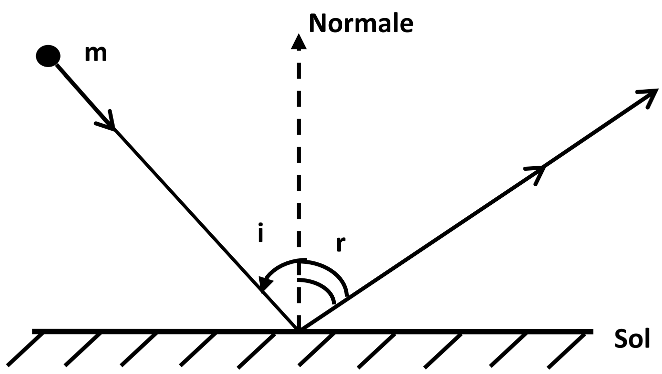
1- Une balle de masse m, arrive sur un sol horizontal sous l'angle d'incidence i, heurte le sol sans frottement et rebondit.

a- Le choc est supposé élastique, déterminer l'angle de réflexion r de la balle.

b- Dans le cas d'un choc inélastique, on définie le coefficient de restitution e par le rapport des composantes normales des vitesses relatives des deux particules avant et après le choc (Voir figure).

Déterminer l'angle de réflexion r de la balle en fonction de i et e.

A.N : i=30° ; calculer r pour un choc élastique et un choc inélastique défini par e= 0,5.



2- On suppose le choc élastique. Déterminer la force moyenne exercée sur le sol par la balle arrivant normalement au sol, pendant l'intervalle de temps égal à la période de rebondissement de la balle. On admettra que la force exercée par la balle sur le sol est constante pendant le choc.

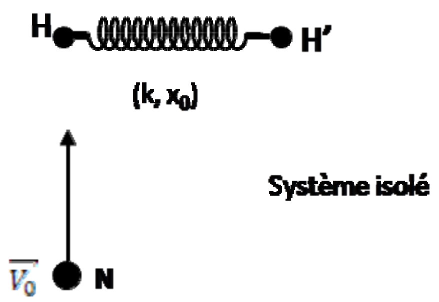
3- On considère le choc élastique de molécules monocinétiques (de même vitesse v, de même masse m_0) sur le piston. On désigne par n, le nombre de molécule par unité de volume de faisceau de molécules. Quelles forces faut-il exercer sur le piston, de section S pour qu'il reste immobile ?

A. N : molécule d'Argon (A=40), de vitesse v= 400 m/s. Nombre d'Avogadro $\mathcal{N}$= 6 10^{23}, section de piston S= 0,2 m^2; n= 5 10^{20} molécules/m^3.

Exercice 5

Dans ce problème, on se propose d'étudier le cas du bombardement d'une molécule diatomique d'hydrogène par des neutrons. Cette molécule peut être matérialisée par deux masses identiques (H et H') reliées par un ressort non tendu de rigidité k et de longueur à vide x_0.

Le ressort matérialise la liaison chimique H-H. la molécule est initialement au repos. Le neutron (N), de masse m, est animé d'une vitesse v_0 perpendiculaire à HH'. Il heurte un seul des deux atomes de la molécule, soit H, lors d'un choc supposé parfaitement élastique.



1- Etude des chocs :

a- Quelles sont les grandeurs physiques conservées lors de ce choc ? Pourquoi ?

b- Ecrire les lois de conservation. En déduire les vitesses de H et N juste après le choc.

2- **Etude de mouvement de la molécule après le choc**

Après le choc le système formé par la molécule seul est supposé isolé : le neutron n'intervient pas. Ce système sera étudié, dans la suite du problème, par rapport au référentiel liée au centre de masse : RCM.

a- Quelles sont les grandeurs physiques conservées dans ce cas ?

b- Déterminer :

- La vitesse du centre de masse.
- Les vitesses de H et H', juste après le choc, par rapport au RCM.

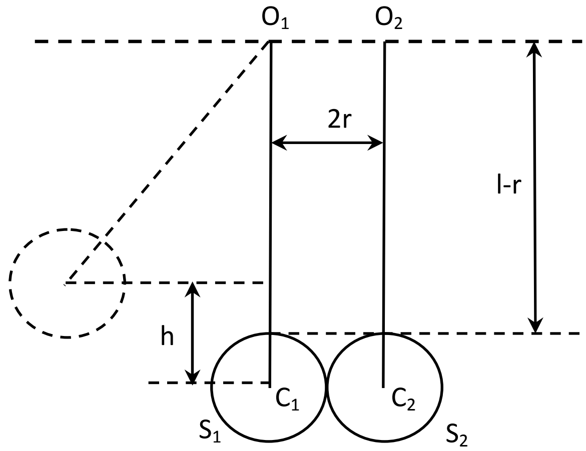
c- Lors de l'allongement maximal du ressort ($x = x_0+a$) les vitesses par rapport au RCM de H et H' seront de nouveau perpendiculaires au ressort HH' et respectivement égales à (+V') et (-V').

Ecrire les lois de conservation du moment cinétique et de l'énergie du système (H et H') juste après le choc ($x \approx x_0$) et à l'instant de l'allongement maximal ($x = x_0+a$).

Montrer que : $\frac{mv_0^2}{2kx_0^2} = \left(\frac{a}{x_0}\right)\left[1+\left(\frac{a}{x_0}\right)\right]^2 / \left[2+\left(\frac{a}{x_0}\right)\right]$ puis déterminer les valeurs de (a) pour $mv_0^2 \ll 2kx_0^2$ et $mv_0^2 \gg 2kx_0^2$.

Exercice 6

Un pendule simple P_1 est constitué par une sphère homogène S_1 de petit rayon r, de masse m_1, suspendue à un fil de longueur (l-r) inextensible et de masse négligeable, fixé lui même en un point O_1. La distance $\overline{O_1C_1}$ de O_1au centre C_1 de S_1 est donc l.



a – Etablir l'équation qui permet de déterminer la période T des oscillations de petite amplitude de ce pendule.

b- Indiquer brièvement la correction à faire sur l'expression de la période T du pendule simple précédent si l'on tient compte du rayon r de la sphère. Dans la suite on la négligera.

2- Un deuxième pendule simple P_2 a la même longueur l que le précédent, mais la sphère S_2 de rayon r suspendue au fil et de masse m_2 ($m_2 \leq m_1$). Le pendule P_2 est suspendu en un point O_2, situé dans le plan horizontal de O_1, à une distance O_1O_2 = 2r de O_1.

A l'équilibre, les 2 sphères sont donc tangentes entre elles.

On écarte le pendule P_1 de sa position d'équilibre en maintenant le fil tendu, dans le plan vertical de O_1O_2 ; le centre C_1 de la sphère S_1 monte d'une hauteur h. On lâche alors le pendule P_1 sans lui donner de vitesse initiale.

a- Quelles sont, immédiatement avant le choc, les vitesses v_1 et v_2 des centres C_1 et C_2 des sphères S_1 et S_2 ?

b- quelles est la relation entre les vitesses v_1 et v_2 et les vitesses v'_1 et v'_2 de C_1 et C_2 immédiatement après le choc ?

c- Si l'énergie cinétique était conservée dans le choc, quelles seraient les vitesses v'_1 et v'_2 ? A quelle hauteur maximales h'_1 et h'_2 s'élèverait alors C_1 et C_2 après le choc ?

Examiner en particulier le cas $m_1=m_2$.

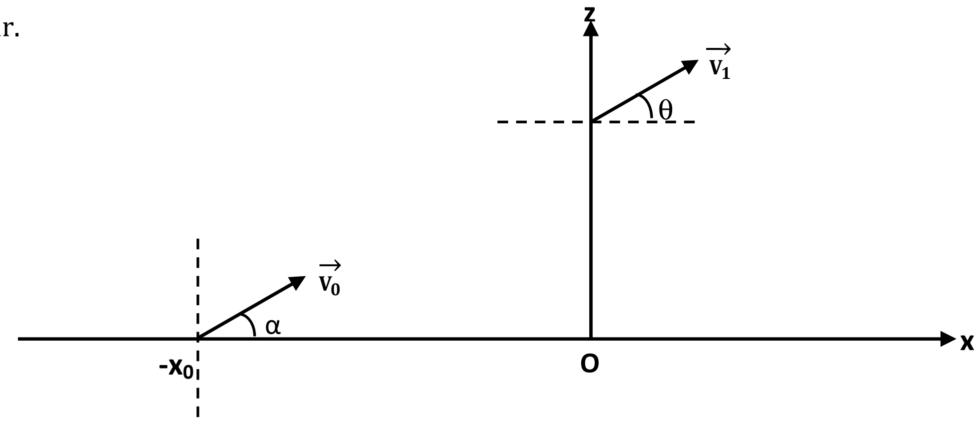
d- On constate en réalité que le pendule P_1 s'élève à la hauteur h'_2=h. En déduire quelle était la vitesse initiale v'_2 de C_2 juste après le choc. Examiner la perte d'énergie cinétique ΔE_C dans le choc en fonction de m_1, m_2, g et h. Examiner le cas $m_1=m_2$.

e- Où et quand se produira le deuxième choc ? Quelles seront immédiatement avant ce deuxième choc les vitesses des deux pendules P_1 et P_2 ?

Exercice 7

Un enfant lance son ballon sur un mur, situé en face de lui à une distance x_0=5m, avec une vitesse v_0 = 20 m/s faisant un angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontal. Son chien se dispose de telle façon qu'après le choc (supposé parfaitement élastique et très bref) il attrape le ballon à son arrivé au sol.

I- On se propose d'étudier le mouvement de ballon de masse m, assimilé à un point matériel M, afin d'aider le chien à sa réception. On défini le repère dire et R (Oxyz) de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ qui est fixe et tel que le mouvement se fait dans le plan (Oxy). (Voir figure) On néglige la résistance de l'air.



1- Quelle est la position du point d'impact de ballon sur le mur ?

2- Déterminer la vitesse $\overrightarrow{(v_1)}$ de ballon juste avant le choc, en déduire son angle θ avec l'horizontal.

3- On suppose que le système (mur-ballon) est isolé

a- Quelles sont les grandeurs physiques conservées lors de ce choc ?

b- Déterminer la vitesse $\overrightarrow{(v_1')}$ après le choc.

4- Déterminer la position que devrait prendre le chien pour recevoir le ballon.

II- Maintenant, le système (mur, ballon, enfant et chien) se trouve sur une plate forme qui peut tourner autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire ω.

Soit un repère direct $R_1(O, x_1, y_1, z)$ de base $\left(\overrightarrow{\imath_1}, \overrightarrow{\jmath_1}, \vec{k}\right)$ lié à la plate forme. Ce système se met à tourner juste après le choc. Cet instant sera pris comme origine de temps.

1- Déterminer la vitesse d'entrainement $(\overrightarrow{v_e})$, l'accélération d'entrainement $(\overrightarrow{\gamma_e})$ et l'accélération de Coriolis $(\overrightarrow{\gamma_c})$.

2- Indiquer au chien la direction de la déviation subie par le ballon.

3- Dans cette question, on néglige $\overrightarrow{\gamma_e}$.

a- Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au ballon dans R_1.

b- Déterminer les équations paramétriques de M. On donne g=10 m/s^2.

Solutions des Exercices

Exercice 1

1- Le système n'est soumis à aucune force extérieure

$\Longrightarrow$ Système isolé donc on a conservation de la quantité de mouvement.

$m\overrightarrow{v_A} = (m+M)\overrightarrow{v'_{AB}} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{v'_{AB}} = \frac{m}{m+M}\,\overrightarrow{v_A}$

E_{ci} *(avant le choc)* = ½ mv_A^2

E_{cf} *(après le choc)* = ½ $(m+M)\, v_{AB}'^2$

E_{cf} = ½ $(m+M)\,\frac{m^2}{(m+M)^2}v_A^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}V_A^2 \neq E_{ci}$ $\Longrightarrow$ Pas de conservation de l'énergie cinétique.

W : variation de l'énergie cinétique au cours du choc.

$W = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2}\frac{m^2}{(m+M)^2}v_A^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_A^2\,(\frac{m}{m+M} - 1) = -E_0\,(\frac{M}{m+M})$

$\Longrightarrow \quad W = -(\frac{M}{m+M})E_0$

1- Pour que R_G soit galiléen il faut que $\overrightarrow{V_G}/R_G$ soit constante.

Soit O le centre de référentiel R_L galiléen : $\overrightarrow{OG} = \frac{m\,\overrightarrow{OA} + M\,\overrightarrow{OB}}{m+M}$

$\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}/R_L = \overrightarrow{V_G}/R_L = \frac{m\,\overrightarrow{V_A}/R_L + M\,\overrightarrow{V_B}/R_L}{m+M}$

Avant le choc :

$\overrightarrow{V_G}/R_L = \left(\frac{m}{m+M}\right)\overrightarrow{V_A}/R_L = \left(\frac{m}{m+M}\right)\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{v'_{AB}}$

Après le choc :

$\overrightarrow{V_A}/R_L = \overrightarrow{V_B}/R_L = \overrightarrow{v'_{AB}}$

$\overrightarrow{V_G}/R_L$ (avant le choc) = $\overrightarrow{V_G}/R_L$ (après le choc).

$\Longrightarrow$ R_G est Galiléen.

R_G est en mouvement de translation uniforme par rapport à R_L (Galiléen) $\Longrightarrow$ R_G est Galiléen.

b- $E_c(AB)/R_G$ = ½ $(m+M)\, v_{AB}^2/R_G$

$\overrightarrow{V_{AB}}/R_L$(Vitesse absolue) = $\underline{\overrightarrow{V_G}/R_L}$(Vitesse d'entrainement) + $\overrightarrow{V_{AB}}/R_G$(Vitesse relative)

$\overrightarrow{V_{AB}}/R_G = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad E_c(AB)/R_G = 0$

c- Avant le choc :

E_c/R_G=½ $m\, v_A^2/R_G$+½ $M\, v_B^2/R_G$

Avec $\overrightarrow{V_A}/R_G$: vitesse de A dans R_G avant le choc.

$\overrightarrow{V_B}/R_G$: vitesse de B dans R_G avant le choc.

$\overrightarrow{V_A}/R_L = \overrightarrow{V_A}/R_G + \overrightarrow{V_G}/R_L \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V'_{AB}} = \overrightarrow{V_A}/R_G$

$\overrightarrow{V_B}/R_L(=\vec{0}) = \overrightarrow{V_B}/R_G + \overrightarrow{V_G}/R_L(=\overrightarrow{V'_{AB}}) \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{V_B}/R_G = -\overrightarrow{V'_{AB}}$

$E_c/R_G = \frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V'_{AB}}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\overrightarrow{V'_{AB}}\right)^2$

$= \frac{1}{2}mV_A^2 + \frac{1}{2}mV_{AB}'^{\,2} + \frac{1}{2}MV_{AB}'^{\,2} - m\overrightarrow{V_A}.\overrightarrow{V_{AB}'}$

$= \frac{1}{2}mV_A^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}V_A^2 - \frac{m^2}{m+M}V_A^2$

$= \frac{1}{2}mV_A^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}V_A^2 = \frac{1}{2}mV_A^2(1 - \frac{m}{m+M})$

$E_c/R_G = E^* = \frac{1}{2}mV_A^2\ \frac{M}{m+M}$

$$E^* = E_0\frac{M}{m+M} = -W$$

Exercice 2

1- G centre de masse de M_1 et M_2 : C'est le barycentre des points M_1 et M_2 affecté des coefficients m_1 et m_2.

$\Longrightarrow\ \ m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$

$m_1\overrightarrow{GO} + m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{GO} + m_2\overrightarrow{OM_2} = \vec{0}$

$\Longrightarrow\ (m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$

$(m_1 + m_2)\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}/R_L = m_1\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}/R_L + m_2\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}/R_L$

$(m_1 + m_2)\,\overrightarrow{V_G}/R_L = m_1\,\overrightarrow{V_{M_1}}/R_L + m_2\,\overrightarrow{V_{M_2}}/R_L$

$(m_1 + m_2)\overrightarrow{V_G} = m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2}$

Donc $\overrightarrow{V_G} = \frac{m_1\overrightarrow{V_1}+m_2\overrightarrow{V_2}}{(m_1+m_2)}$

2- R_G : Référentiel de centre de masse.

$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{V_{M_1}}/R_G$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{V_{M_2}}/R_G$

$\Longrightarrow\ \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{U_1}$ $\qquad\qquad$ $\Longrightarrow \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{U_2}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{U_1} = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}(\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}) \\ \overrightarrow{U_2} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}) \end{cases}$$

$\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{U_1} = \frac{\mu}{(m_1)}\overrightarrow{V_r} \\ \overrightarrow{U_2} = \frac{-\mu}{(m_2)}\overrightarrow{V_r} \end{cases}$$

Quantité de mouvement dans R_G :

$\overrightarrow{P_G} = m_1\overrightarrow{U_1} + m_2\overrightarrow{U_2} = \ \mu\overrightarrow{U_r} - \mu\overrightarrow{U_r} = \ \vec{0}$

$\Longrightarrow$ La quantité du mouvement total dans le référentiel du centre de masse est nulle.

3- Calcul de l'énergie cinétique total du système avant le choc.

a- Dans R_G :

$E_c/R_G = \frac{1}{2}\ m_1U_1^2 + \frac{1}{2}\ m_2U_2^2 = \ \frac{1}{2}\ \frac{\mu^2}{m_1}\ V_r^2 + \ \frac{1}{2}\ \frac{\mu^2}{m_2}\ V_r^2 = \frac{1}{2}\ \mu^2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)V_r^2 = \frac{1}{2}\ \frac{\mu^2}{\mu}\ V_r^2$

$\Longrightarrow\ \ E_c/R_G = \frac{1}{2}\ \mu\, V_r^2$

Cette énergie est égale à l'énergie cinétique d'une particule de masse μ et de vitesse V_r.

b- Dans R_L :

$E_c/R_L = \frac{1}{2}\, m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 V_2^2 = \frac{1}{2}\, m_1(\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{V_G})^2 + \frac{1}{2}\, m_2(\overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{V_G})^2$

$= \frac{1}{2}\, m_1 U_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 U_2^2 + \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)V_G^2 + m_1\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{V_G} + m_2\overrightarrow{U_2}.\overrightarrow{V_G}$

$= \frac{1}{2}\,\mu\, V_r^2 + \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)V_G^2 + \left\lfloor\left(m_1\overrightarrow{U_1} + m_2\overrightarrow{U_2}\right).\overrightarrow{V_G}\right\rfloor_{=0}$

$= \quad E_r \quad + \quad E_G$

Donc $E_c/R_L = E_r + E_G$

4- 1er cas : Collision élastique :

- ✓ Conservation de la quantité de mouvement (1).
- ✓ Conservation de l'énergie cinétique (2)

(1) : $m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2} = m_1\overrightarrow{V_1'} + m_2 + \overrightarrow{V_2'}$

$\Longrightarrow \frac{m_1\overrightarrow{V_1}+m_2\overrightarrow{V_2}}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1\overrightarrow{V_1'}+m_2\overrightarrow{V_2'}}{(m_1+m_2)}$

$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{V_G} \quad = \quad \overrightarrow{V_G'}$

(2) : $\frac{1}{2}\, m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 V_2^2 = \frac{1}{2}\, m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2}\, m_2 V_2'^2$

$\Longrightarrow \quad E_r + E_G = E_r' + E_G'$

Or d'après (1) $\overrightarrow{V_G} = \overrightarrow{V_G'} \quad \Longrightarrow \quad E_G = E_G' \quad \Longrightarrow \quad E_r = E_r'$

$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V_r'}$: Conservation de $\overrightarrow{V_r}$ lors d'un choc élastique.

2eme cas : Collision inélastique :

- ✓ Conservation de la quantité de mouvement $V_G = V_G'$.
- ✓ Pas de conservation de l'énergie cinétique $\Longrightarrow E_r \neq E_r' \quad \Longrightarrow \overrightarrow{V_r} \neq \overrightarrow{V_r'}$: il n'ya pas de conservation de $\overrightarrow{V_r}$.

Exercice 3

1- Vitesse du centre de masse dans (L) : $\overrightarrow{V_G} = \frac{m_1\overrightarrow{V_{1l}}+m_2\overrightarrow{V_{2l}}}{(m_1+m_2)}$

$\overrightarrow{V_G} = -2{,}79\vec{\imath} - 1{,}4\vec{\jmath}$

2- $\overrightarrow{V_{1l}} = \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{V_{1G}} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{V_{1G}} = \overrightarrow{V_{1l}} - \overrightarrow{V_G}$

$\overrightarrow{V_{1G}} = \left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\overrightarrow{V_{1l}} - \frac{m_2}{(m_1+m_2)}\overrightarrow{V_{2l}} = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}(\overrightarrow{V_{1l}} - \overrightarrow{V_{2l}})$

$\overrightarrow{V_{1G}} = 9{,}19\vec{\imath} + 1{,}4\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{V_{2l}} = \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{V_{2G}} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{V_{2G}} = \overrightarrow{V_{2l}} - \overrightarrow{V_G}$

$\overrightarrow{V_{2G}} = \left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\overrightarrow{V_{2l}} - \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\overrightarrow{V_{1l}} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}(\overrightarrow{V_{2l}} - \overrightarrow{V_{1l}})$

$\overrightarrow{V_{2G}} = -3{,}9\vec{\imath} - 0{,}59\vec{\jmath}$

3- La vitesse $\overrightarrow{V_{1l}'}$ de la masse M_1 après le choc.

$m_1\overrightarrow{V_{1l}} + m_2\overrightarrow{V_{2l}} = m_1\overrightarrow{V'_{1l}} + m_2\overrightarrow{V'_{2l}}$

$\overrightarrow{V'_{1l}} = \overrightarrow{V_{1l}} + \frac{m_2}{m_1}\left(\overrightarrow{V_{2l}} - \overrightarrow{V'_{2l}}\right)$

$\overrightarrow{V'_{1l}} = \vec{\imath} - 9{,}1\vec{\jmath}$

4- Vitesses relatives :

$\vec{W} = \overrightarrow{V_{1l}} - \overrightarrow{V_{2l}}$; $\vec{W} = 13{,}1\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{W'} = \overrightarrow{V'_{1l}} - \overrightarrow{V'_{2l}}$; $\overrightarrow{W'} = 5{,}4\vec{\imath} - 11\vec{\jmath}$

Le choc est inélastique puisqu'il n'y a pas conservation des vitesses relatives $\vec{W} \neq \overrightarrow{W'}$

Exercice 4

1-a- La variation de la quantité de mouvement de la balle (m_1) au cours de choc :

$$\overrightarrow{\wp_{m_1}} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F}\, d\tau = \delta\overrightarrow{P_{m_1}} = m_1\delta\overrightarrow{V_{m_1}} = m(\vec{V_r} - \vec{V_i})$$

On suppose que le choc a lieu sans frottement $\Rightarrow$ $\overrightarrow{\wp_{m_1}}$ est $\perp$ au plan de contact pendant la durée τ du choc.

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{\wp_{m_1}}/tengentielle = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\delta\overrightarrow{V_{m_1}}/tengentelle = \vec{0}$ $\Rightarrow$

$\vec{V_r}/tengentelle = \vec{V_i}/tengentelle$ $\Rightarrow$ $V_r \sin r = V_i \sin i$

Au cours du choc il ya conservation de l'énergie cinétique

$\Rightarrow$ $E_c(m_1) = E_c(m_2)$ $\Rightarrow$ $V_i = V_r$ d'où $\begin{cases} V_r = V_i \\ i = r \end{cases}$

b-

✓ *Définition* : soit une particule A animée d'une vitesse $\overrightarrow{V_{A_1}}$ qui rencontre une particule B animée d'une vitesse $\overrightarrow{V_{B_1}}$. Après le choc ces vitesses sont respectivement $\overrightarrow{V_{A_2}}$ et $\overrightarrow{V_{B_2}}$. on appelle coefficient de restitution ou d'élasticité e, le rapport :

$$e = -\frac{(V_{B_2})_n - (V_{A_2})_n}{(V_{B_1})_n - (V_{B_2})_n}$$

Choc élastique : $e=1$

Choc inélastique : $0<e<1$

Choc mou: $e=0$

✓ $e = -\frac{-(V_r)_n}{-(V_i)_n} = \frac{V_r \cos r}{V_i \cos i}$ $\Rightarrow$ $V_r \cos r = e\, V_i \cos i$

On a conservation des composantes tangentielles

$V_i \sin i = V_r \sin r$ $\Rightarrow$ $\mathrm{cotg}\, r = e\, \mathrm{cotg}\, i$

- Pour un choc élastique $e= 1$ $\Rightarrow$ $r = 30°$
- Pour un choc inélastique $e= 0{,}5$ $\Rightarrow$ $r = 41°$

2- Pendant la durée du choc τ, la force exercée par la masse m sur le sol est $\vec{F} = -\vec{R}$ d'après le principe de l'action et de la réaction ; $\vec{F} = -\frac{d\vec{P}}{dt} = -m_1\frac{\vec{V_r}-\vec{V_i}}{\tau}$

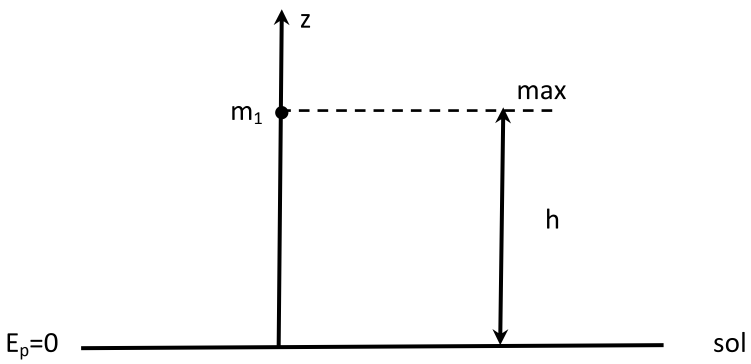
Or i=0 $\Longrightarrow$ *r=0 et* $V_r = V_i$ $\Longrightarrow$ $\vec{V_r} = -\vec{V_i} = V_r\vec{k}$

$\Longrightarrow \vec{F} = 2m\,\frac{\vec{V_i}}{\tau}$

$$<\vec{F}> = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}\vec{F}\,(t')dt' = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\vec{F}\,(t')dt' = \frac{\tau}{T}\vec{F}$$

$\Longrightarrow <\vec{F}> = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\vec{F}\,(t')dt' = \frac{\tau}{T}\vec{F}$

$<\vec{F}> = \frac{2m<\vec{V_i}>}{\tau}\,\frac{\tau}{T} \Longrightarrow <F> = \frac{2mV_i}{\tau}\,\frac{\tau}{T} \Longrightarrow <F> = \frac{2mV_i}{T}$



Conservation de l'énergie mécanique totale :

$mgh = \frac{1}{2}\,mV_i^2 \Longrightarrow V_i = \sqrt{2gh}$

La période de mouvement correspond à une durée $T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$ c'est un temps de durée de rebondissement.

$<F> = mg$: Ce qui correspond à une réaction par le sol égal au poids de la masse m.

3- pendant la durée τ du choc il y a N particules qui se dirige vers le piston.

$N = n.S.V_i.\tau$ = nombre de choc subit par la surface S du piston pendant la durée τ.

$\overrightarrow{F_N} = 2m\,\frac{\vec{V_i}}{\tau}\,N \quad \Longrightarrow F = 2n\,mV_i^2S$

$m = \frac{A}{\mathcal{N}} = \frac{40}{6.10^{23}}$ *AN :* F_N*= 2.13 Newton.*

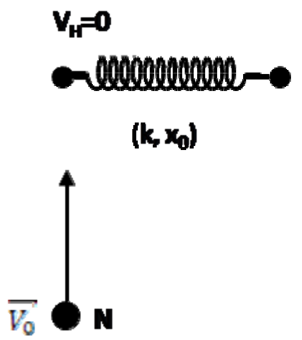
Exercice 5

1-a- Grandeurs physiques conserves lors du choc:

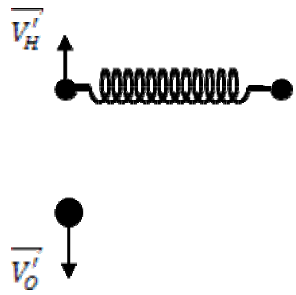
- ✓ Système isolé :Conservation de moment cinétique $\vec{L}$, quantité de mouvement $\vec{P}$ et l'énergie mécanique E.
- ✓ Choc élastique : Conservation de l'énergie cinétique E_c.

b-

Avant le choc



Juste après le choc



$m\overrightarrow{V'_O} + m\overrightarrow{V'_H} = m\overrightarrow{V_O}$

$\frac{1}{2}m\overrightarrow{V'_O}^2 + \frac{1}{2}m\overrightarrow{V'_H}^2 = \frac{1}{2}m\overrightarrow{V_O}^2$

$$\begin{cases} V'_O + V'_H = V_O \\ {V'_O}^2 + {V'_H}^2 = V_O^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V'_H = V_O - V'_O \\ {V'_H}^2 = \underbrace{(V_O + V'_O)}_{V'_H}(V_O - V'_O) \end{cases}$$

Donc $V'_H = V_O + V'_O = V_O - V'_O$ ce qui revient $V'_O = 0 \; et \; V'_H = V_O$.

2-a- Grandeurs physiques conservées dans ce cas :

Système isolé $\Longrightarrow$ Conservation de $\vec{L}, \; \vec{P} \; et \; E$

b- Vitesse de centre de masse :

$$\overrightarrow{V_G} = \frac{m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2}}{(m_1 + m_2)} = \frac{\overrightarrow{V_0}}{2}$$

$\vec{V}_{HG} = \overrightarrow{V_0} - \overrightarrow{V_G} \Longrightarrow \vec{V}_{HG} = \overrightarrow{V_0} - \frac{\overrightarrow{V_O}}{2} = \frac{\overrightarrow{V_O}}{2}$

$\vec{V}_{H'G} = \vec{0} - \frac{\overrightarrow{V_O}}{2} = -\frac{\overrightarrow{V_O}}{2}$

c- Soit $x = HH'$; $m_H = m_N$ $\Longrightarrow$ $|\overrightarrow{HG}| = |\overrightarrow{H'G}| = \frac{x}{2}$

- ✓ Juste après le choc : $x \simeq x_O$; $\overrightarrow{V_H} = \frac{\overrightarrow{V_0}}{2}$; $\overrightarrow{V_{H'}} = -\frac{\overrightarrow{V_0}}{2}$; $\overrightarrow{V_H} \perp x\vec{\imath}$

$et \; \overrightarrow{L_G} = m\left(-\frac{\overrightarrow{V_0}}{2}\right) \wedge \overrightarrow{H'G} + m\left(\frac{\overrightarrow{V_0}}{2}\right) \wedge \overrightarrow{HG}$

$L_G = \frac{1}{2} mV_0x_0$

$$E = \frac{1}{2}m(\frac{V_0}{2})^2 + \frac{1}{2}m(-\frac{V_0}{2})^2 + \underbrace{\frac{1}{2}k(0)^2}_{pas\ d'allongement\ de\ ressort} = \frac{1}{4}mV_0^2$$

- ✓ Lors de l'allongement max : $x = x_0 + a$

$\overrightarrow{V_H} = \overrightarrow{V'}$ et $\overrightarrow{V_{H'}} = -\overrightarrow{V'}$; $\overrightarrow{V'} \perp \vec{\imath}$

$L'_G = mV'(x_0 + a)$

$E' = \frac{1}{2}mV'^2 + \frac{1}{2}m(-V')^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = mV'^2 + \frac{1}{2}ka^2$

$$\begin{cases} E = E' \\ L = L' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}V_0^2 m = mV'^2 + \frac{1}{2}ka^2 \\ \frac{1}{2}V_0 x_0 = mV'(x_0 + a) \end{cases}$$

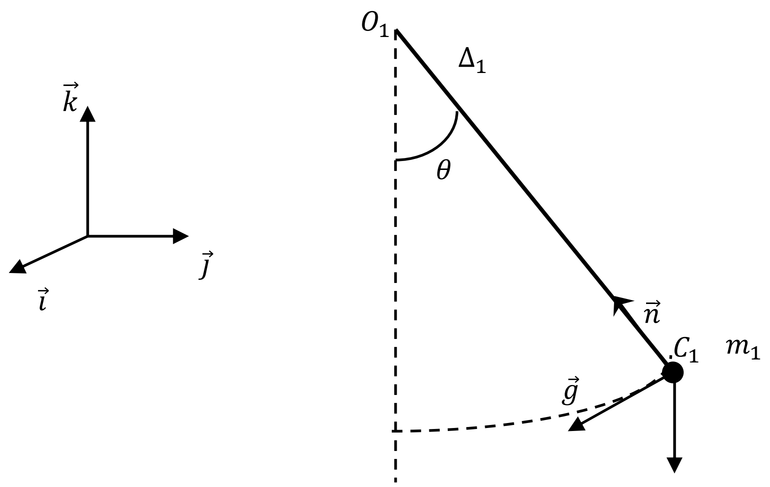
$$\Rightarrow \frac{1}{4}mV_0^2 = \frac{1}{4}mV_0^2 \frac{x_0^2}{(x_0 + a)^2} + \frac{1}{2}ka^2$$

$$mV_0^2[(x_0 + a)^2 - x_0^2] = 2ka^2(x_0 + a)^2 \text{ d'où } \frac{mV_0^2}{2kx_0^2} = \frac{a}{x_O}\frac{\left[1+\frac{a}{x_0}\right]^2}{2+\frac{a}{x_0}}$$

$mV_0^2 \ll 2kx_0^2 \Rightarrow \frac{a}{x_O}$ *tend vers zéro* $\Rightarrow a \simeq \frac{mV_0^2}{kx_O}$

$mV_0^2 \gg 2kx_0^2 \Rightarrow \frac{a}{x_O}$ *tend vers l'infinie* $\Rightarrow a \simeq V_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$

Exercice 6



1-a- mouvement de rotation de la masse m_1 autour de O_1. Théorème de moment cinétique par rapport à un axe Δ_1 passant par O_1 et normal au plan de la figure.

$\overrightarrow{L_{O_1}} = \overrightarrow{O_1C_1} \wedge m_1\vec{V}$

$L_{\Delta_1} = \left(\overrightarrow{O_1C_1} \wedge m_1\vec{V}\right).\vec{\imath}$

$\vec{\imath}$: Vecteur unitaire porté par Δ_1.

$(\vec{\tau}, \vec{r}, \vec{b})$ trièdre de Serret-Frenet. avec $\begin{cases} \vec{b} = -\vec{\imath} \\ \vec{n} = \cos\theta\ \vec{k} - \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{\tau} = -\sin\theta\,\vec{k} - \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$

$\overrightarrow{O_1C_1} = -l\,\vec{n} \qquad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O_1C_1}}{dt} = -l\,\frac{d\vec{x}}{dt} = -l\dot{\theta}\,\frac{d\vec{x}}{d\theta} = -l\dot{\theta}\,\vec{\tau}$

$L_{\Delta_1} = \dot{\theta}\,l^2 m_1(\vec{n} \wedge \vec{\tau}).\vec{\imath} = m_1 l^2\,\dot{\theta}$

$\frac{dL_{\Delta_1}}{dt} = \mathcal{M}_{\overrightarrow{F_{app}}/\Delta_1} = \left[\overrightarrow{O_1C_1}\wedge(\vec{P}+\vec{T})\right].\vec{\imath} = \left[\overrightarrow{O_1C_1}\wedge\vec{P}\right].\vec{\imath} = l\, m_1 g\left(\vec{n}\wedge\vec{k}\right).\vec{\imath} \ = l\, m_1 g \sin\theta$

$\Longrightarrow\ m_1 l^2 \ddot{\theta} = -l m_1 g \sin\theta$

θ: *faible* $\Longrightarrow\ \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$, *On pose* $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

On obtient $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

b- Si le rayon de la sphère n'est pas négligeable, puisque la sphère est en rotation autour de Δ_1. La loi fondamentale d'un solide en rotation autour d'un axe Δ_1 est :

$I_{\Delta_1}.\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathcal{M}_{\overrightarrow{F_{app}}/\Delta_1}$

où I_{Δ_1} est une quantité scalaire qui dépend que de la géométrie du solide, appelé moment d'inertie par rapport à Δ_1.

❖ *Théorème d' HUYGENS* :

Soit Δ un axe passant par le centre de masse et soit Δ' un autre axe parallèle à Δ dont il est distant de d

On a : $I_{\Delta'} = I_\Delta + Md^2$; $I_\Delta = \int R^2\, dm$ où R est la distance à l'axe Δ.

$I_{\Delta_1} = I_{\Delta c_1} + m_1 l^2$

I_{Δ_1} est le moment d'inertie de la sphère par rapport à son diamètre porté par $\vec{\imath}$. (La sphère est pleine et homogène)

$I_{\Delta c_1} = \frac{2}{5} m_1 r^2$

$\Longrightarrow\quad I_{\Delta_1}.\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathcal{M}\,\overrightarrow{F_{app}}/\Delta_1 \quad \Longrightarrow \left(m_1 l^2 + \frac{2}{5} m_1 r^2\right)\ddot{\theta} = -m_1 g\, l\, \theta$

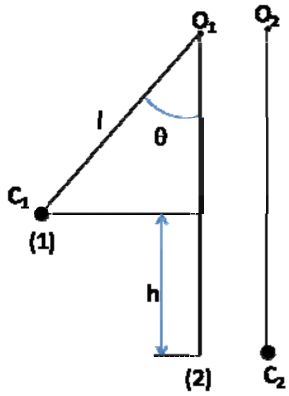
$\Longrightarrow\ l^2\left(1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}\right)\ddot{\theta} = -g\, l\, \theta$

$\Longrightarrow\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l\left(1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}\right)}\theta = 0$

On pose $\omega'^2 = \frac{g}{l\left(1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}\right)}$ donc $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}\right)}$

2-a- Vitesses avant le choc.

- Masses C_2 lié au pendule 2 est en équilibre. $V_{C2}=0$
- Masse C_1 lié au pendule 1 qui est écarté de sa position d'équilibre à une hauteur h.



Conservation de l'énergie mécanique entre (1) et (2) :

(2) : origine d'énergie potentielle

$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 \quad \Longrightarrow\ v_{c_1} = \sqrt{2gh}$

b- Quelque soit la nature du choc il y a conservation de la quantité de mouvement du système de deux pendules :

$m_1\overrightarrow{V_{C_1}} = m_1\overrightarrow{V'_{C_1}} + m_1\overrightarrow{V'_{C_2}} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}\left(\overrightarrow{V_{C_1}} - \overrightarrow{V'_{C_1}}\right) = \overrightarrow{V'_{C_2}}$ (1)

c- La conservation de l'énergie cinétique :

$\frac{1}{2}\, m_1 V_{C1}^2 = \frac{1}{2}\, m_1 V_{C1}'^2 + \frac{1}{2}\, m_2 V_{C2}'^2$ (2)

$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2}(V_{C1}^2 - V_{C1}'^2) = V_{C2}'^2$ (3)

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \vec{v}_{C_1} + \vec{v}'_{C_1} = \vec{v}'_{C_2}$ (3)

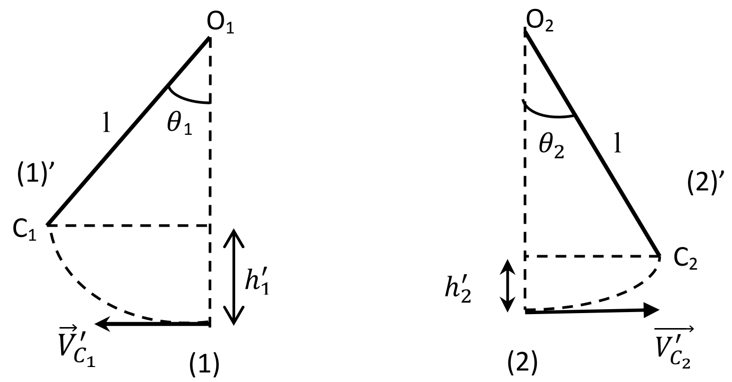
(3) dans (1) $\Rightarrow \vec{v}'_{C_1} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{C_1}$

En remplaçant $\vec{v}'_{C_1}$ par son expression dans (1)

$\vec{v}'_{C_2} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{C_1}$

Après le choc :

On détermine les valeurs de h'_1 et h'_2 en appliquant à chaque pendule le théorème de la conservation de l'énergie mécanique.



$E_1 = E'_1 \Rightarrow h'_1 = \frac{V'^2_{C_1}}{2g}$

$E_2 = E'_2 \Rightarrow h'_2 = \frac{V'^2_{C_2}}{2g}$

Cas $m_1 = m_2 \Rightarrow \overrightarrow{V'_{C_1}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{V'_{C_2}} = \overrightarrow{V_{C_1}} \Rightarrow$ $h'_1 = 0$, $h'_2 = h$.

d- $h'_2 = h \Rightarrow V'_{C_2} = \sqrt{2gh}$; $\overrightarrow{V'_{C_2}} = \overrightarrow{V_{C_1}}$

Conservation de la quantité de mouvement :

$m_1\overrightarrow{V_{C1}} = m_1\overrightarrow{V'_{C1}} + m_2\overrightarrow{V'_{C2}}$

$\overrightarrow{V'_{C_1}} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)\overrightarrow{V_{C_1}} \Rightarrow \overrightarrow{V'_{C_1}} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh}$

$h'_2 = \frac{V'^2_{C_1}}{2g} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)^2 h$

Perte d'énergie cinétique : $\Delta E_C = \frac{1}{2}\, m_1 V_{C1}^2 - \left(\frac{1}{2}\, m_1 V_{C1}'^2 + \frac{1}{2}\, m_2 V_{C2}'^2\right)$

$= m_1 g h - (m_1 g h'_1 + m_2 g h'_2)$

$= (m_1 - m_2)gh - m_1\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)^2 gh = (m_1 - m_2)gh\left[\left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1}\right)\right]$

$\Delta E_C = \frac{m_2}{m_1}(m_1 - m_2)gh$

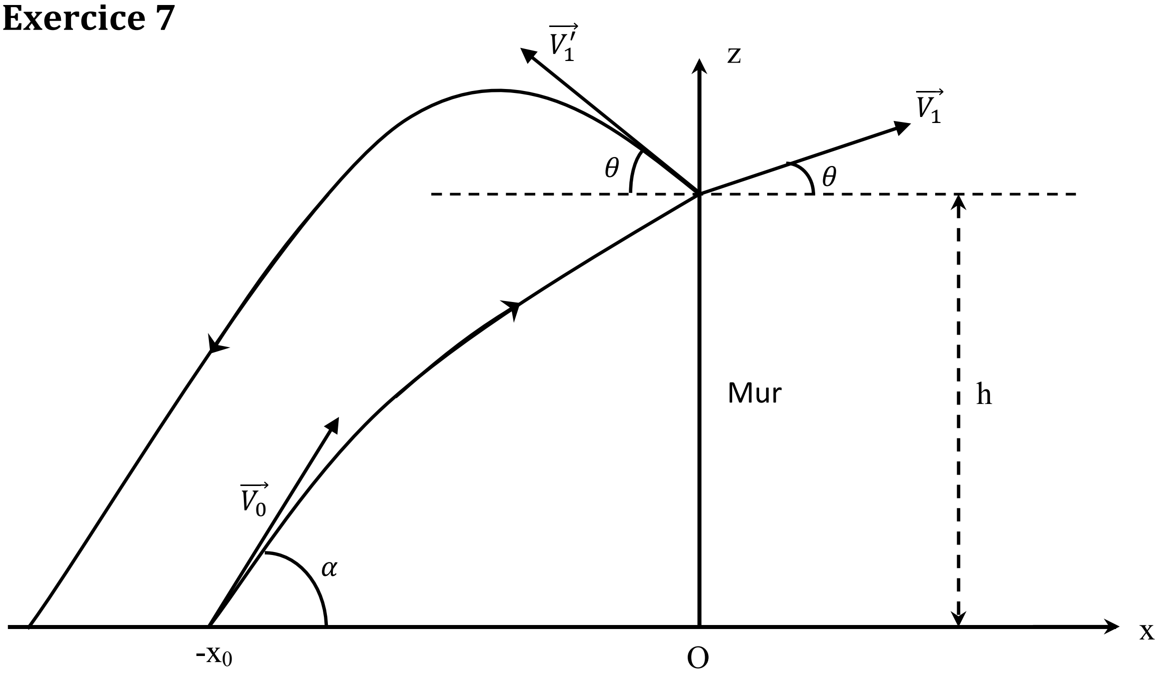
$m_1 = m_2 \implies \Delta E_C = 0$

e- Les périodes T des deux pendules sont égales car T est indépendante de la masse. Ils se rencontrent donc à nouveau à la verticale de O_1 et O_2 au bout de T/2, et les vitesses $\overrightarrow{V''_{C1}}$ *et* $\overrightarrow{V'_{C2}}$ seront identiques mais de sens opposés.

$\overrightarrow{V''_{C1}} = -\overrightarrow{V'_{C1}}$

$\overrightarrow{V''_{C2}} = -\overrightarrow{V'_{C2}}$

Exercice 7



I-1- Position de point d'impact :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = h \end{cases}$$

$m\vec{\gamma} = m\vec{g} \quad \implies \vec{\gamma} = \vec{g}\,;\, \vec{g} = -g\vec{k}$

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -g \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha t - x_0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha t \end{cases}$$

Le temps mis pour que le ballon atteigne le mur c-à-d: *x =0 =* $V_0 \cos\alpha t - x_0$

$\implies t_0 = \frac{x_0}{V_0 \cos\alpha}$; A.N : $t = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0{,}35\ s$

Hauteur atteinte $z(t_0) = h = -\frac{g}{2}\left(\frac{x_0}{V_0 \cos\alpha}\right)^2 + x_0\, tg\ \alpha$ A.N : h= 4,375 m

2- La vitesse avant le choc : c.à.d. au point *(0, 0, h)*

$$\overrightarrow{V_1} = \vec{V}(t_0) = \begin{cases} V_0 \cos\alpha \\ 0 \\ -g\left(\frac{x_0}{V_0 \cos\alpha}\right) + V_0 \sin\alpha \end{cases} = \begin{cases} \|\overrightarrow{V_1}\| \cos\alpha \\ 0 \\ \|\overrightarrow{V_1}\| \sin\alpha \end{cases}$$

$\|\overrightarrow{v_1}\|^2 = V_0^2 + \frac{g^2 x_0^2}{V_0^2 cos^2\alpha} - 2gx_0 tg\alpha$ A.N : $\|\overrightarrow{V_1}\| = 17{,}67\ m/s$

On trouve le même résultat si on applique la conservation de l'énergie totale entre z=0 et z=h

$\frac{1}{2}\, mV_0^2 = mgh + \frac{1}{2}\, mV_1^2$

- L'angle entre $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{V_1}$

$tg\ \theta = \frac{V_{1z}}{V_{1x}} = -\frac{gx_0}{V_0^2 cos^2\alpha} + tg\ \alpha$ A.N : $\theta = 36°96'$

3-a- Grandeurs physiques conservées lors de ce choc.

Système isolé :

- Conservation de la quantité de mouvement.
- Conservation de l'énergie totale.
- Conservation de moment cinétique.

Choc élastique :

- Conservation de l'énergie cinétique.

b- Après le choc :

- Conservation de la composante tangentielle.
- Inversion de la composante normale.

Donc $\overrightarrow{V_1'} = \begin{cases} -\|\overrightarrow{V_1}\| \cos\theta \\ 0 \\ \|\overrightarrow{V_1}\| \sin\theta \end{cases}$

4- Le chien reçois le ballon : à $z(t_0') = 0$

Coordonnées après le choc : $m\vec{\gamma} = m\vec{g}$

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -V_1 \cos\theta \\ \frac{dy}{dt} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = -gt + V_1 \sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = -V_1 \cos\theta\, t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_1 \sin\theta t + h \end{cases}$$

Donc $z(t_0') = 0 = -\frac{1}{2}g{t'}_0^2 + V_1 \sin\theta t_0' + h$

A.N : $-5{t'}_0^2 + 10{,}6\, t_0' + 4{,}375 = 0\,;$ $\Delta = 287{,}36$ $\Longrightarrow$ $\sqrt{\Delta} = 16{,}95$

$$t_1 = \frac{-10{,}6 + 16{,}95}{-10} < 0 \quad à\ rejeter, \qquad t_2 = \frac{-10{,}6 - 16{,}95}{-10} = 2{,}755\ s$$

Donc $x(t_2) = -V_1 \cos\theta t_2$ A.N : $x(t_2) = 38{,}949\ m$

II- 1- $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{\imath_1} + y_1\vec{\jmath_1} + z\vec{k}$

- $\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_{O'}}/_R + \vec{W} \wedge \overrightarrow{O'M}$, $\overrightarrow{V_{O'}}/_R = \vec{0}$

$\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \omega\vec{k}\wedge\left(x_1\vec{\imath_1} + y_1\vec{\jmath_1} + z\vec{k}\right)$

$= \omega(x_1\vec{\jmath_1} - y_1\vec{\imath_1})$

$\vec{V_e} = \omega(x_1\vec{\jmath_1} - y_1\vec{\imath_1})$

- $\vec{\gamma_e} = \underbrace{\overrightarrow{\gamma_{O'}}/_R}_{\vec{0}} + \underbrace{\frac{d\vec{W}_{R_1/R}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}}_{\vec{0}} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$

$\vec{\omega}\wedge[\omega(x_1\vec{\jmath_1} - y_1\vec{\imath_1})] = \omega^2(-x_1\vec{\imath_1} - y_1\vec{\jmath_1})$

$\vec{\gamma_e} = -\omega^2(-x_1\vec{\imath_1} - y_1\vec{\jmath_1})$.

- $\vec{\gamma_c} = 2\vec{\omega}\wedge \vec{V_M}/_{R_1}$

$\vec{V_M}/_{R_1} = \dot{x}_1\vec{\imath_1} + \dot{y}_1\vec{\jmath_1} + \dot{z}\vec{k}$

$\vec{\gamma_c} = 2\omega\vec{k}\wedge\left(\dot{x}_1\vec{\imath_1} + \dot{y}_1\vec{\jmath_1} + \dot{z}\vec{k}\right) = 2\omega(\dot{x}_1\vec{\jmath_1} - \dot{y}_1\vec{\imath_1})$

$\vec{\gamma_c} = 2\omega(\dot{x}_1\vec{\jmath_1} - \dot{y}_1\vec{\imath_1})$

2 – Direction de déviation subie par le ballon : Dans le repère relatif va subir l'effet des forces d'inerties et le poids.

$\vec{F_e} = -m\vec{\gamma_e} = \omega^2 m(x_1\vec{\imath_1} + y_1\vec{\jmath_1})$

$\vec{F_C} = -m\vec{\gamma_c} = 2\omega\, m(\dot{y}_1\vec{\imath_1} - \dot{x}_1\vec{\jmath_1})$

Le mouvement n'est plus dans le plan (Ox_1z) mais dans l'espace. Puisque $(\vec{F_e} + \vec{F_c})$ admet une composante suivant $\vec{\jmath_1}$ et une composante suivant $\vec{\imath_1}$. Donc le mouvement de M va subir deux modifications suivant Ox_1 et Oy_1.

2- a- P. F. D dans R_1 : $\vec{\gamma_c}$ négligeable $\Longrightarrow$ $\vec{F_C}$ négligeable.

$$m\vec{\gamma}/R_1 = \sum \overrightarrow{F_{réelles}} + \sum \overrightarrow{F_{fictives}}$$

- $\overrightarrow{F_{réelles}}$: Poids : $\vec{P} = -mg\vec{k}$
- $\overrightarrow{F_{fictives}}$: $\begin{cases} \vec{F_e} \\ \vec{F_C} : \text{négligeables} \end{cases}$

$m\vec{\gamma}/R_1 = -mg\vec{k} + \vec{F_e}$

b- Equations paramétriques de M :

$m\vec{\gamma}/R_1 = -mg\vec{k} + \vec{F_e}$

$$\begin{cases} m\,\frac{d^2x_1}{dt^2} = m\,\omega^2 x_1 \\ m\,\frac{d^2y_1}{dt^2} = m\,\omega^2 y_1 \\ m\,\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} - \omega^2 x_1 = 0 & (1) \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} - \omega^2 y_1 = 0 & (2) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -g & (3) \end{cases}$$

(3) $\Longrightarrow z(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + V_1\sin\theta\,t + h$

$(1) \Longrightarrow \frac{d^2x_1}{dt^2} - \omega^2 x_1 = 0 \quad \Longrightarrow x_1(t) = C_1 e^{Wt} + C_2 e^{-Wt}$

t= 0 $\Longrightarrow x_1(0) = 0 \qquad \Leftrightarrow$ $C_1 + C_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $C_1 = - C_2$

t= 0 $\Longrightarrow \dot{x_1}(0) = -V_1 \cos\theta \quad \Leftrightarrow (C_1\omega - C_2\omega) = -V_1 \cos\theta$

$C_1\omega = V_1 \cos\theta \quad \Longrightarrow C_1 = \frac{V_1}{\omega}\cos\theta$

$x_1(t) = \frac{2V_1}{\omega}\, sh\, \omega t$

$(2) \Longrightarrow \frac{d^2y_1}{dt^2} - \omega^2 y_1 = 0 \Longrightarrow y_1(t) = C_1' e^{\omega t} + C_2' e^{-\omega t}$

$y_1(0) = 0 \qquad \Leftrightarrow C_1' + C_2' = 0$

$\dot{y_1}(0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad (C_1'\omega - C_2'\omega) = 0$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{2V_1}{\omega}\, sh\, \omega t \\ y_1(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + V_1 \sin\theta\, t + h \end{cases}$$

Force Centrale

Exercice 1

Le potentiel de gravitation crée par une masse m à la distance r de son centre O a pour expression $U = -G\,\frac{m}{r}$.

1- Calculer les composantes de $\overrightarrow{grad}\,U$ correspondant à ce potentiel dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, en utilisant la relation reliant r à x, y , et z.

2- Calculer les composantes de champs de gravitation correspondant $G = -\overrightarrow{grad}\,U$, ainsi que son module.

3- Faire l'analogie avec la théorème de Gauss en électrostatique.

4- Déterminer les équations des équipotentielles ?

5- Déterminer l'expression du champ de pesanteur terrestre g. Calculer sa valeur au sol en assimilant la terre à une sphère.

Rayon de la terre : R=6400 km.

Masse : $\mathrm{M} = 6.10^{24}$ kg , $\mathrm{G} = 6{,}7.10^{-11}\mathrm{M.K.S}$

Exercice 2

Un satellite de masse m, supposé ponctuel est placé sur une orbite circulaire de centre O et de rayon R autour de la terre.

1- Détmontrer que sa vitesse v est constante et calculer v en fonction de *G, M, R*.

Donner la valeur numérique de v. que devient cette valeur si le satellite était en orbite autour de la lune. $M_L = \frac{M_T}{81{,}5}$ et $R_L = \frac{R_T}{3{,}6}$

2- En déduire la période de révolution T du satellite sur cette orbite (*3ème loi de Kepler*).

3- On creuse un tunnel traversant la terre suivant le diamètre qui joint la ligne des pôles. A partir d'un des pôles on laisse tomber dans le tunnel, sans vitesse initiale, une capsule de masse m supposé ponctuelle.

Expliquer quel va être son mouvement et calculer la période de ce mouvement. Comparer avec la période T calculée précédemment.

Exercice 3

La terre est supposée formée de couches sphériques homogènes. La masse volumique variant suivant la loi : $\rho(r) = \rho_0(1 - a\frac{r^2}{R^2})$.

1- Déterminer les constantes ρ_0 et a sachant que la masse volumique à la surface terrestre est $\rho(r) = 2{,}5\ g.cm^{-3}$ et la masse volumique moyenne de la terre est $\rho_m = 5{,}5\ g.cm^{-3}$.

2- Déterminer la force d'attraction sur la masse unité à la distance r du centre O (r < R).

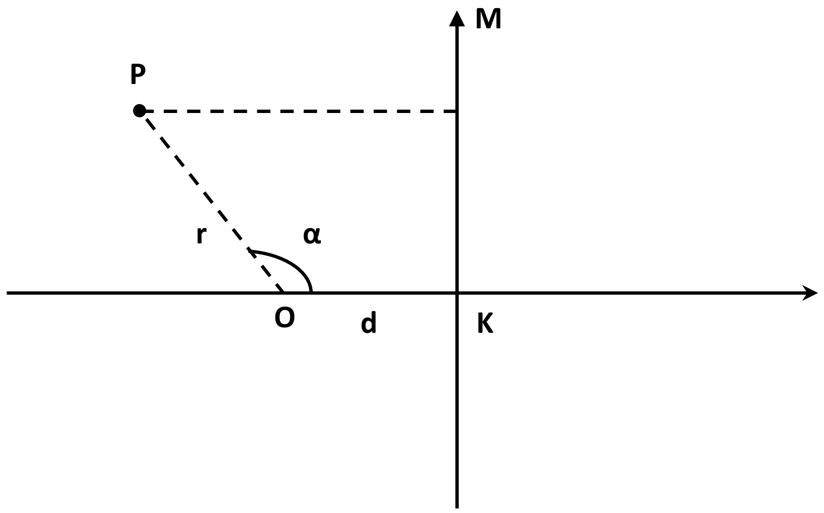
3- a- Calculer le rapport y de l'attraction maximale à l'attraction à la surface de la terre.

b- Calculer le rapport z de l'attraction à la profondeur h, au-dessous de la surface de la terre, à l'attraction à la surface.

c- Application : Quelle est dans un puits de mine de profondeur 352m ; l'augmentation relative de l'attraction de la pesanteur par rapport au sol.

Exercice 4

Rappel sur les coniques



P Є conique $\Leftrightarrow$ $r = \frac{ed}{1+ e\cos\alpha}$ *avec* $e = \frac{OP}{PM}$ *coefficient d'excentricité de la conique.*

e > 1 : hyperbole

e=1 : parabole

e <1 : ellipse.

La force qui s'exerce sur un point matériel P de masse m placé dans un champ gravitationnel crée par une masse M est de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{\epsilon\, m\, M}{r^2}\overrightarrow{U_r} \qquad (1)$$

1- Etude de la trajectoire :

a- En utilisant $\vec{F} = m\,\vec{\gamma}$, montrer que :

$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2\right] = -\frac{\epsilon\, m\, M}{r^2}$ (2) et $2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ (3)

En déduire que : $r^2\,\frac{d\theta}{dt} = cte = A$

b- Après avoir effectuer un changement de variable approprié ; montrer qu'on peut mettre l'expression précédente sous la forme :

$\frac{d^2U}{d\theta^2} + U = \frac{\varepsilon\, M}{A^2}$ (*Formule de Binet*) (4)

c- Vérifier que l'expression $U = \frac{\varepsilon\, M}{A^2}\,(1 + e\cos\,(\theta - \emptyset))$ (5) est une solution de l'équation différentielle (4). En déduire que : $r = \frac{A^2/_{\epsilon M}}{1+e\cos\,(\theta-\emptyset)}$ (6)

2- Détermination de l'excentricité e

Pour cela, on suppose que le système planète - particule est isolé.

$\overrightarrow{v_0} = v_0\vec{j}$ et $\overrightarrow{r_0} = r_0\vec{i}$ sont les données initiales.

a- Montrer d'abord que $\vec{F}$ dérive du potentiel U, qu'on calculera.

b- Montrer qu'on a conservation de l'énergie totale E du système. En déduire l'expression de E.

c- Calculer l'énergie totale au point initial P_0 et vérifier que E ne dépend ni de r, ni de θ.

En déduire que : $E = \frac{\epsilon^2 M^2 m}{2A^2}(e+1)(e-1)$ (7)

d- Discuter la nature de la conique en fonction du signe de l'énergie totale E. Quel est le signe de E pour le système soleil – terre.

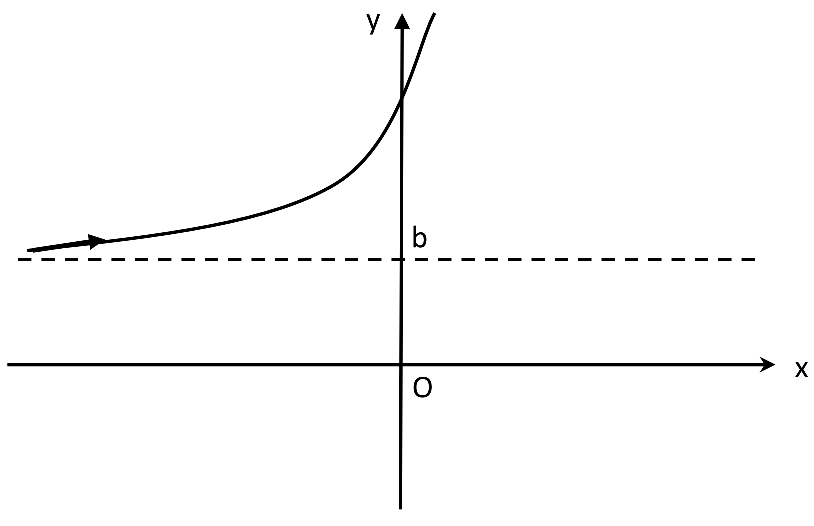
3- Après avoir déterminé la phase $\emptyset$ en appliquant les conditions initiales énoncées en 2°/, évaluer la période T de la particule (P). Calculer la longueur du grand axe de l'ellipse (faire θ =0 et θ = π dans l'équation (6)). Vérifier la troisième loi de Kepler

On donne : $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1+\alpha\cos x)^2} = \frac{\pi}{(1-\alpha^2)^{3/2}}$

Exercice 5

Un point matériel de masse m est soumis de la part de l'origine O d'un repère Galiléen à une force centrale de la forme : $\vec{F} = km\,\frac{\vec{r}}{r^3}$,où $\vec{r}$ est son rayon vecteur. La constante k est positive ou négative suivant que la force soit répulsive ou attractive.

A très grande distance de O, la particule se déplace vers O parallèlement à Ox et dans le sens positif de cet axe à une ordonnée positive b et à la vitesse v_0. On prendra l'axe Ox comme origine des angles polaires dans le plan xOy.



1- Déterminer les expressions de l'énergie mécanique de la particule et son moment cinétique par rapport à O et montrer s'ils sont des constantes de mouvement.

En déduire que le mouvement est plan et montrer que la constante des aires C a pour valeur : $v_0\,b$

2- Exprimer l'accélération de la particule en fonction de $U = \frac{1}{r}$ et de la constante des aires C.

3- Montrer que l'équation polaire de la trajectoire se met sous la forme :

$$r = \frac{P}{e\cos\ (\theta - \theta_0)\ \mp 1}$$

où P, e et θ_0 sont des constantes (P>0 et e>0).

On distinguera les deux cas : k>0 et k<0. Etudier, pour k>0 et k<0, le cas limite $\theta = \pi$.

4- Exprimer la dérivée temporelle de r et montrer qu'elle s'écrit :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-e\, V_0\, b \sin(\theta - \theta_0)}{P}$$

5- Déterminer les expressions de P, e et θ_0 en fonction de k, b et V_0.

Exercice 6

Une particule A de masse m est soumise à une force $\vec{F} = \frac{k}{r^3}\,\vec{u}$, k étant une constante, $\vec{r} = \overrightarrow{OA}\ et\ \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$

1- Donner l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$, sachant que pour r infini E_p est nul.

2- En calculant le moment cinétique en O, montrer que le mouvement est plan. On note Oxy ce plan. Exprimer en coordonnées polaires (r,θ) le moment cinétique $\overrightarrow{L_0}$ et l'énergie cinétique E_c.

3- Montrer que r satisfait à l'équation différentielle : $\frac{1}{2}\, m\, \dot{r}^2 + E_{pef} = E_m$

E_m étant l'énergie mécanique de A et E_{pef} un terme énergétique que l'on écrira sous la forme $E_{pef} = \frac{k'}{r^2}$, k' étant une constante que l'on déterminera en fonction de m, k et du carré du moment cinétique.

4- Les conditions initiales sont $r \neq 0\ \ et\ \ \dot{r}\ \neq 0$. Dans le cas où k'=0, quelle est la variation de r en fonction du temps.

5- On considère le cas général où $k' \neq 0$. Exprimer en fonction de $u=r^2$ l'équation différentielle précédente.

En déduire l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait u. quelle est alors la relation entre r et t en fonction de E_m, r_0 et $\dot{r_0}$?

6- Représenter graphiquement r en fonction de t pour $\dot{r} = 0$ dans les deux cas suivants :

a- L'état lié défini par E_m<0.

b- L'état libre défini par E_m >0.

Exercice 7

Soit O un point fixe d'un référentiel galiléen (R).

On note r la distance à O d'un point M quelconque de l'espace et on pose $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$.

Une particule de dimensions négligeables assimilée à un point matériel de masse m est animé dans R d'une vitesse $\vec{v}$. Elle subit en M la seule force.

$\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}$ (k constante positive)

I- 1- montrer que le moment cinétique en O du point matériel reste constant au cours du mouvement

En déduire que ce mouvement s'effectue dans un plan contenant le centre de forces O et qu'il s'effectue suivant la loi des aires.

2- Dans le plan de la trajectoire, On repèrera la position du point M à l'aide des coordonnées polaires (r, θ) d'origine O. On posera $r^2\frac{d\theta}{dt} = r^2\dot{\theta} = C$

En appliquant à M le principe fondamental de la dynamique et en tenant compte de la loi des aires, montrer que r considéré comme fonction de t est solution d'une équation différentielle du second ordre. Donner l'équation polaire de la trajectoire dans le cas général.

II- Etude énergétique :

3- Montrer que $\vec{f}$ dérive d'une énergie potentielle E_p. Etablir l'expression de cette énergie potentielle en la prenant nulle à l'infini.

4- Définir l'énergie mécanique du point matériel. Montrer que c'est une constante du mouvement.

5- Les conditions initiales du mouvement sont définies par :

$$r = r_0;\ \theta = \theta_0;\ \|\vec{v}\| = v_0;\ (\vec{u}, \vec{v}_0) = \alpha_0.$$

Exprimer E et C en fonction de k, m, r_0, v_0 et α_0 .

6- Montrer que l'énergie mécanique de la particule peut se mettre sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + E'(r) \quad avec \quad E'(r) = -\frac{k}{m} + \frac{m\,c^2}{2\,r^2}$$

7- Montrer que la fonction E'(r) admet un minimum E'_m pour $r = r_m$. Exprimer E_m en fonction de k, m, r_0, v_0 et α_0 . Tracer l'allure du graphe *E'(r).*

8- Définir la condition que doit satisfaire *E* pour que le point matériel reste prisonnier du centre des forces.

9- Quelle est, en fonction de k, m, r_0 la valeur minimale v_{0m} de v_0 pour que le point matériel échappe au centre des forces ?

10- Quelle est la nature du mouvement lorsque $E = E'_m$?

Exercices 8

Soit un satellite terrestre assimilé à un point matériel *M* de masse m, lancé du sol avec la vitesse initiale v_0 suivant une trajectoire elliptique (voir schéma).

Soit α l'angle entre la vitesse $\vec{v}_0$ et la verticale $\overrightarrow{Ox_0}$ avec *O* le centre de la terre, *R* son rayon et m_t sa masse.

Soit le repère $R_0\ \left(O,x_0,y_0,z_0\right)$ supposée galiléen de base orthonormée $\left(\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$. Soit un repère mobile $R\ \left(O,x,y,z_0\right)$ tel que $\overrightarrow{Ox}\ parallèle\ à\ \overrightarrow{OM}$, de base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit ρ et θ les coordonnées polaires de *M* dans le plan $\left(O,x_0,y_0\right)$.

Le système terre – satellite est considéré comme isolé.

1-a Montrer que l'accélération absolue est centrale.

1-b Ecrire la loi des aires pour M. En déduire l'expression de la constante des aires *C* en fonction de *R*, r_0 et $sin\alpha$.

1-c En appliquant le principe fondamentale de la dynamique, retrouver le résultat précèdent et l'équation différentielle du mouvement.

2-a Montrer que la force à laquelle est soumis le satellite dérive d'un potentiel scalaire *U*.

b- Montrer que $m\,\dfrac{v^2}{2}-U=h$, avec v la vitesse de *M* et h est une constante qu'on déterminera à partir des conditions initiales. Quelle est la signification physique de *h* ?

c- Retrouver l'équation différentielle du mouvement.

3-a Déterminer la vitesse minimale de libération v_l permettant au satellite d'échapper à l'attraction terrestre.

b- En déduire une expression simple de h en fonction de *m*, v_0 et v_l.

c- Quelle sont les trajectoires de *M* pour $v_0>v_l$, $v_0<v_l$ et $v_0=v_l$?

4- Dans la suite du problème, on considère uniquement le cas $v_0<v_l$

a- Moyennant un changement de variable, montrer que : $v^2=C^2\left(u^2+\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right)$

b- En admettant que $C=\sqrt{a\left(1-e^2\right)G\,m_t}$, déduire une nouvelle expression de *h* en fonction de *G*, m, m_t et *a*.

5-a Déterminer le carré de la vitesse du satellite en un point quelconque de la trajectoire en fonction de $G,\rho,\ m_t\ et\ a$

b- En déduire la vitesse v_s de *M* à l'apogée S de la trajectoire.

6-a Si à partir de *S*, le satellite décrivait un cercle de centre *O* et de rayon $\rho_s=a\ \left(1+e\right)$, quelle serait la vitesse *W* du satellite.

b- Calculer le supplément de vitesse Δv, à communiquer à *M* lorsqu'il est en *S*, pour le mettre sur l'orbite circulaire.

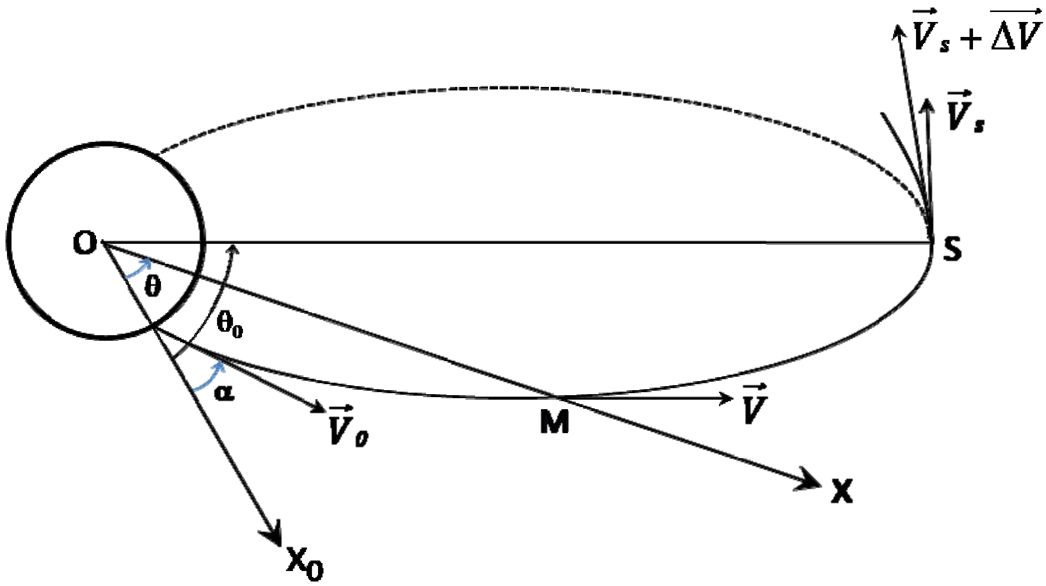
c- Dans la pratique, ce type de changement d'orbite est-il possible ? Comment ?

Remarques importantes :

Equation d'une conique : $\rho = OM = \dfrac{a\,(1-e)^2}{1-e\cos(\theta-\theta_0)}$

A l'apogée S, on a $\theta = \theta_0$ et $\rho_s = OS = a\,(1+e)$

e: excentricité; *a*: demi- grand axe.



Solution des exercices

Exercices 1

1- $U=-G\frac{m}{r}\,;\, r=\left(x^2+y^2+z^2\,\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\overrightarrow{grad}U=-mG\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(-2x)\vec{i}+(-2y)\vec{j}+(-2z)\vec{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=mG\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=mG\frac{\vec{r}}{r^3}$$

2- Champ de gravitation :

$\vec{G}=-mG\frac{\vec{r}}{r^3}\rightarrow\left\|\vec{G}\right\|=\frac{mG}{r^2}$

3- Analogie avec la théorie de Gauss en électrostatique :

Mécanique	Electrostatique
$U=-G\frac{m}{r}$	$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$
G,m	$\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0},\ q$
$\vec{G}=-mG\frac{\vec{r}}{r^3}$	$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$
$\oiint\vec{g}d\vec{S}=-4\pi Gm_{int}$	$\oiint\vec{E}d\vec{S}=\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

4- Equations des équipotentielles :

U= cte $\Rightarrow r=cte\Rightarrow$ sphère de centre O

5-Champ de pesanteur : $\vec{g}=-\frac{Gm}{r^2}\vec{u}_r=\left|\vec{g}\right|=\frac{Gm}{r^2}$

Au niveau de sol : $g=\frac{Gm}{R^2}$ *A.N : g =9,81 N /kg*

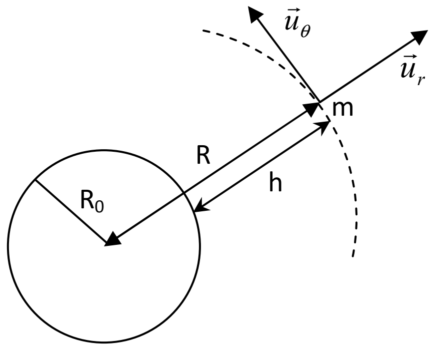
Exercice 2

1- Le satellite de masse m est soumis à la seule force de gravitation : $\vec{F}=-G\frac{Mm}{R^2}\vec{u}_x$

P.F.D :

$$\vec{F}=m\vec{\gamma}=m\left(\gamma_N\vec{u}_r+\gamma_t\vec{u}_\theta\right)$$

$$\begin{cases}\gamma_t=\dfrac{dv}{dt}=0\Rightarrow v=cte\\ \gamma_N=-\dfrac{v^2}{R}=-G\dfrac{M}{R^2}\Rightarrow v=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}=\sqrt{\dfrac{GM}{R_0+h}}\end{cases}$$



A.N : $R=R_T$

$$Terre:\quad v=\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}=7{,}9km/s$$

$$Lune:\quad v'=\sqrt{\frac{GM_L}{R_L}}=1{,}67km/s$$

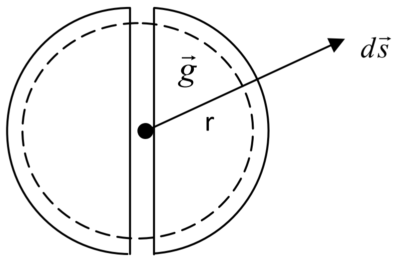
2-Période de révolution :

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\ ;\quad \omega=\frac{v}{R}\Rightarrow T=2\pi\frac{R}{v}\Rightarrow T=2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2R^3}{GM}$$

Loi de Kepler : $T^2\propto R^3$

3- La corpuscule tombe en chute libre avec une accélération g variable.

▪Calcul de $\vec{g}$ à l'intérieur de la terre (Théorème de Gauss).



Surface de Gauss = Sphère de centre O et de rayon r < R.

$$\oiint\vec{g}d\vec{s}=4\pi G\iiint\rho d\tau$$

On suppose que la masse volumique est constante.

$$-4\pi r^2 g=4\pi G\frac{4}{3}\pi r^3\frac{3M}{4\pi R^3}\Rightarrow \vec{g}=-\frac{GM}{R^3}r\vec{u}_r$$

• P.F.D : $\vec{F}=m\vec{g}=m\vec{\gamma}\Rightarrow\dfrac{GMm}{R^3}r=m\ddot{r}\Rightarrow\ddot{r}+\dfrac{GM}{R^3}r=0\Rightarrow\begin{cases}r=A\sin(\omega t+\varphi)\\ \dot{r}=A\omega\cos\ (\omega t+\varphi)\end{cases}$

Condition initiales : $t=0\rightarrow r=R\ et\ \dot{r}=0;\ \begin{cases}R=A\sin\varphi\\ 0=A\omega\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R=A\\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow r(t)=R\cos\sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}t$: Mouvement oscillatoire autour du centre de la terre sans que le capsule sorte de l'intérieur de la terre.

$T = \omega \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$ égale à la période de révolution du satellite sur une orbite circulaire de rayon R (rayon de la terre).

Exercice 3

1-a $\quad \rho = \rho_0\left(1 - a\frac{r^2}{R^2}\right)$; $\quad \rho(R) = \rho_0(1-a) = 2{,}5\,g/cm^3 \qquad (1)$

$$\rho_{moy} = \frac{Masse\ da\ la\ terre}{Volume\ de\ la\ terre} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$M = \iiint \rho\, d\tau = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho_0\left(1 - a\frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \rho_0 \frac{4\pi R^3}{3}\left(1 - \frac{3a}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \rho_{moy} = \rho_0\left(1 - \frac{3}{5}a\right) = 5{,}5\,g/cm^3 \qquad (2)$$

$$(1)\ et\ (2) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{4} \quad et \quad \rho_0 = 10\,g/cm^3$$

2- $\vec{F} = m\vec{g}$, masse unité $\quad \Rightarrow \vec{F} = \vec{g} \quad \Rightarrow \ F = g$

$$-\oiint g\,dS = -4\pi G \iiint \rho(r)\,dv$$

$$-4\pi r^2 g(r) = -4\pi G\, 4\pi\rho_0 \int_0^r \left(r^2 - a\frac{r^4}{R^2}\right) dr \ = -16\pi^2 G\rho_0\left[\frac{r^3}{3} - a\frac{r^5}{5R^2}\right]$$

$$= -16\pi^2 G\rho_0 r^3\left[\frac{1}{3} - \frac{a}{5}\frac{r^2}{R^2}\right]$$

$$r < R;\quad g(r) = 4\pi G\rho_0 r\left[\frac{1}{3} - \frac{a}{5}\frac{r^2}{R^2}\right]\ et\ F = 4\pi G\rho_0\, r\left[\frac{1}{3} - \frac{3}{20}\frac{r^2}{R^2}\right]$$

3-a- Attraction maximale correspond à g_{max}

$$\frac{dg}{dr} = 0 \ \Rightarrow\ 1 - \frac{9a}{5}\frac{r^2}{R^2} = 0 \ \Rightarrow \frac{r_m}{R} = \sqrt{\frac{5}{9a}} = 0{,}86$$

$$y = \frac{g_{max}}{g_{au\ sol}} = \frac{r_m}{R} = \frac{\left(1 - \frac{3a}{5}\frac{r_m^2}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{3a}{5}\right)} = 1{,}04$$

b- $$\frac{g(R-h)}{g(R)} = z = \frac{R-h}{R} = \frac{1 - \frac{3a}{5}\left(\frac{R-h}{R}\right)^2}{1 - \frac{3a}{5}} = \left(1 - \frac{h}{R}\right)\left(1 - \frac{3a}{5-3a}\left(\frac{h^2}{R^2} - \frac{2h}{R}\right)\right)$$

c- On cherche $\frac{\Delta g}{g}=\frac{g(R-h)-g(R)}{gR}=z(R-h)-z(R)$

h faible devant R : $\frac{h}{R}<<1\rightarrow\left(1-\frac{h}{R}\right)^2\simeq 1-\frac{2h}{R}$

$$z\approx\left(1-\frac{h}{R}\right)\left(1+\frac{6ah}{5-3aR}\right)\approx 1+\frac{h}{k}\left(\frac{9a-5}{5-3a}\right)=1+\frac{7}{11}\frac{h}{R}$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta g}{g}=\frac{7}{11}\frac{h}{R}=3,5.10^{-5}$$

Exercice 4

1- $\vec{F}=m\vec{\gamma}=-\frac{\varepsilon mM}{r^2}\vec{u}_r$

a- $\overrightarrow{OM}=r\vec{u}_r$

$$\vec{v}=\dot{r}\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\gamma}=\ddot{r}\vec{u}_r+\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta+\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta+r\ddot{\theta}\vec{u}_r-r\dot{\theta}^2\vec{u}_r=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{F}=m\vec{\gamma}=m\left[\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta\right]=-\frac{\varepsilon mM}{r^2}\overline{u}_r$$

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-\frac{\varepsilon mM}{r^2}$$

$$r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left[r^2\dot{\theta}\right]=\frac{1}{r}\left[r^2\ddot{\theta}+2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]=\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]=0$$

Donc $r^2\frac{d\theta}{dt}=cte=A$

b- $\gamma_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{\varepsilon M}{r^2}$

$$\ddot{r}=\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\right]=\frac{d}{d\theta}\left[\frac{dr}{dt}\right]\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{d\theta}\left[\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right]\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{d\theta}\left[-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\left(Au^2\right)\right]\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\frac{d}{d\theta}\left[-\frac{du}{d\theta}A\right]\left[Au^2\right]=-A^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$r\dot{\theta}^2\frac{1}{u}\left[A^2u^4\right]=A^2u^3$$

$$-A^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-Au^3=-\frac{\varepsilon M}{r^2}=-\varepsilon Mu^2\Rightarrow\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\varepsilon M}{A^2}$$

c- $u=\frac{\varepsilon M}{A^2}\left(1+e\cos(\theta-\phi)\right)\Rightarrow \frac{du}{d\theta}=-e\frac{\varepsilon M}{A^2}\sin(\theta-\phi)$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=-e\frac{\varepsilon M}{A^2}\cos(\theta-\phi)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-e\frac{\varepsilon M}{A^2}\cos(\theta-\phi)+\frac{\varepsilon M}{A^2}\left(1+e\cos(\theta-\phi)\right)=\frac{\varepsilon M}{A^2}$$

$$r=\frac{1}{u}=\frac{\frac{A^2}{\varepsilon M}}{1+e\cos(\theta-\phi)}$$

2- $\vec{r}=r_o\vec{i} \quad et \quad \vec{V}=v_o\vec{j}$

a-

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}=\vec{o};\; dU=-\vec{F}\overrightarrow{dr}=\frac{\varepsilon mM}{r^2}dr\Rightarrow U=\varepsilon mM\int\frac{dr}{r^2}=-\frac{\varepsilon mM}{r}+c \quad avec \quad \underline{\underline{c=\circ}}$$

$$U=-\frac{\varepsilon mM}{r}$$

b- Système isolé, l'énergie totale est conservée.

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{\varepsilon mM}{r}=\frac{1}{2}mA^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]+\frac{\varepsilon mM}{r}\;;\;\; \phi=o$$

$$=\frac{1}{2}mA^2\left[\frac{1+2e\cos\theta+e^2\cos^2\theta}{\frac{A^4}{\varepsilon^2M^2}}+\frac{e^2 som\theta}{\frac{A^4}{\varepsilon^2M^2}}\right]-\frac{\varepsilon^2mM^2}{A^2}(1+e\cos\theta)$$

$$\Rightarrow E=\frac{\varepsilon^2M^2m}{2A^2}(e+1)(e-1)$$

d-

e>1 : hyperbole E>0

e<1 : Ellipse E<0

e=1 : Parabole E=0

Système soleil-terre E<0 (Loi de Kepler)

3- $\phi=0;\; r^2\frac{d\theta}{dt}=A\Rightarrow \quad dt=r^2\frac{d\theta}{A}\Rightarrow dt=\frac{A^4/\varepsilon^2M^2\,d\theta}{A(1+e\cos\theta)^2}$

$$T=\frac{2A^3}{\varepsilon^2M^2}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}=\frac{2A^3}{\varepsilon^2M^2}\frac{\pi}{(1-e^2)^{3/2}}$$

$$\theta=0 \Rightarrow r_M=\frac{A^2/\varepsilon M}{1+e}$$

$$\theta=\pi \Rightarrow r_M=\frac{A^2/\varepsilon M}{1-e}$$

$$\frac{A^2}{\varepsilon M}\left(\frac{1}{1+e}+\frac{1}{1-e}\right)=\frac{A^2}{\varepsilon M}\left(\frac{1-e+1+e}{1-e^2}\right)=\frac{2A^2}{\varepsilon M\left(1-e^2\right)}=\frac{2A^2}{\varepsilon M\left(1-e^2\right)}=2a$$

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4A^6}{\varepsilon^4 M^4}\frac{\pi^2}{\left(1-e^2\right)^3}.\frac{\varepsilon^3 M^3\left(1-e^2\right)^3}{A^6}=\frac{4\pi^2}{\varepsilon M}=cste$$

Exercice 5

$$1-\vec{F}=km\,\frac{\vec{r}}{r^3}\Rightarrow E_p=\frac{km}{r}$$

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2 \quad avec \quad \vec{v}=\dot{r}\overrightarrow{u_r}+r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\Rightarrow E_c=\frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2-\left(r\dot{\theta}\right)^2\right]$$

Energie mécanique : $E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{km}{r}$

Moment cinétique :

$$\vec{L}=\vec{r}\wedge\vec{p}=\vec{r}\wedge m\left(\dot{r}\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right)=m\,r^2\dot{\theta}\vec{k}$$

$$\frac{\overrightarrow{dL}}{dt}=\vec{r}\wedge\vec{F}=\vec{o}\quad\Rightarrow\vec{L}=\overrightarrow{cste}\quad\Rightarrow mr^2\dot{\theta}=cste\ où\quad r^2\dot{\theta}=c$$

$$pour\ \theta=\pi,\qquad v=v_o\qquad et\qquad y=b\ \Rightarrow\ \vec{L}_o(\pi)=mv_o\vec{i}\wedge\left(b\vec{j}\right)=mv_ob\vec{k}$$

$$\Rightarrow L_o=mv_ob\qquad or\qquad c=\frac{L}{m}\Rightarrow\quad c=-V_ob$$

2- $\vec{\gamma}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta=\gamma_r\vec{u}_r+\gamma_\theta\vec{u}_\theta$ avec $\gamma_\theta=o$ $(force\ centrale)$

$$\gamma=\frac{d^2r}{dt^2}-r\dot{\theta}^2\ ;\ u=\frac{1}{r}\qquad\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{r}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-C.\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r}=\frac{d}{dt}\left(-C\frac{du}{d\theta}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(-C\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-C\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}=-C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{r^3} r^4 \dot{\theta}^2 = u^3 c^2$$

$$\Rightarrow \gamma_r = -c^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right)$$

3- P.F.D :

$$k\, m u^2 = -mc^2 u^2 \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2} \right)$$

$$ou \ \ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{k}{c^2}$$

Solution : $u = A\cos(\theta - \theta_o) - \frac{k}{c^2}$

- $k > 0 \ \Rightarrow \ r = \dfrac{1}{A\cos(\theta-\theta_o) - \dfrac{k}{C^2}} = \dfrac{c^2 / k}{\dfrac{Ac^2}{k}\cos(\theta-\theta_o) - 1}$

- $k < 0 \ \Rightarrow \ r = \dfrac{\dfrac{c^2}{k}}{\dfrac{-Ac^2}{k}\cos(\theta-\theta_o) + 1} = \dfrac{P}{e\cos(\theta-\theta_o) + 1}$

Avec $P = -\frac{C^2}{k}$ et $e = -\frac{AC^2}{k}$

* $\theta = \pi$ correspond à $r = \infty \ \rightarrow (Dénominateur = 0)$.

- $k \rangle 0 \ : \quad 1 + e\cos\theta = 0$
- $k \langle 0 \ : \quad 1 - e\cos\theta_o = 0$

$*\theta = \theta_o$

- $k \rangle 0 \ : \quad r = \dfrac{P}{e-1} = r_{\min}$
- $k \langle 0 \ : \quad r = \dfrac{P}{e+1} = r_{\min}$

Dans les deux cas, r est minimum pour $\theta = \theta_o \Rightarrow \theta_o$ correspond au point de la trajectoire pour lequel le point matériel est le plus proche de l'origine.

4-

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p\, e \sin(\theta-\theta_o).\dot{\theta}}{\left(e\cos(\theta-\theta_o)+1\right)^2} = \frac{r^2 \dot{\theta} p^2 e \sin(\theta-\theta_o)}{pr^2\left(e\cos(\theta-\theta_o)+1\right)^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{ev_0 b}{P}\sin(\theta-\theta_o)$$

5- pour $\theta = \pi$ le mouvement est rectiligne le long de Ox, avec $v = \frac{dr}{dt} = v_o$; soit dans $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$:

$\vec{v} = -v_o \vec{u}_r$

$$\frac{e}{P} v_o b \sin\theta_o = v_o \quad \Rightarrow \quad e\sin\theta_o = \frac{P}{b}$$

Soit $tg\,\theta_o = \dfrac{P}{b} = \dfrac{C^2}{kb} = \dfrac{v_o^2 b^2}{kb} = -\dfrac{bv_o^2}{k}$; $\qquad tg\theta_o = -\dfrac{bv_o^2}{k}$

d'autre part, $e^2\cos^2\theta + e^2\sin^2\theta = 1 + \dfrac{P^2}{b^2} = e^2 \Rightarrow e = \left[1 + \dfrac{b^2 V_o^4}{k^2}\right]^{\frac{1}{2}}$

Exercice 6

$$\vec{F} = \frac{k}{r^3}\vec{u}, \ k = cste, \ \vec{r} = \overrightarrow{OM}, \ \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

1- Il s'agit d'une force centrale $\Rightarrow \vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle.

$$dE_P = \vec{F} d\vec{r} = -\frac{k}{r^3} dr \quad \Rightarrow E_P = \frac{k}{2r^2} + C$$

$$E_P(\infty) = 0 \quad \Rightarrow C = 0 \quad \Rightarrow E_P = \frac{k}{2r^2}$$

2- $\overrightarrow{L_o} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \ \Rightarrow \ \dfrac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \vec{r} \wedge m\vec{\gamma}$: Théorème de moment cinétique.

$\dfrac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \vec{r} \wedge \dfrac{k\vec{r}}{r^4} = o \ \Rightarrow \overrightarrow{L_o} = \overrightarrow{cste} \Rightarrow$ Mouvement plan.

$$\overrightarrow{L_o} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr\vec{u}_r \wedge \left(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

3-

$$E_m = E_c + E_P = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2r^2} = cste$$

$E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{k}{2r^2} + \dfrac{L_o^2}{2mr^2} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{k'}{r^2} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{Pef}$ avec $k' = \dfrac{L_o^2}{2m} + \dfrac{k}{2}$

4- Dans le cas où $k' = 0$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}_o^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}_o^2 + \frac{k}{2r_o^2}$$

$$L_o = mr^2\dot{\theta} = mr_o^2\dot{\theta}_o^2 \Rightarrow k = -mr_o^4\dot{\theta}_o^2 \Rightarrow -mr_o^2\dot{\theta}_o^2 = \frac{k}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}_o^2 \Rightarrow \dot{r} = \dot{r}_o \Rightarrow r = \dot{r}_o t + C \quad \Rightarrow \quad r = \dot{r}_o t + r_o$$

5- $E_m = \frac{k'}{U} + \frac{1}{2}\frac{m\,\dot{U}^2}{U} \;\rightarrow \frac{m\,\dot{U}^2}{8} + k' = UE_m$

$\rightarrow \frac{2m}{8}\,\dot{U}\ddot{U} = \dot{U}E_m \;\rightarrow\; \ddot{U} = \frac{4\,E_m}{m}$

$\dot{U} = \frac{4\,E_m}{m}t + \dot{U}_0 \quad et \quad U(t) = \frac{2\,E_m}{m}t^2 + \dot{U}_0\,t + U_0 = r^2(t)$

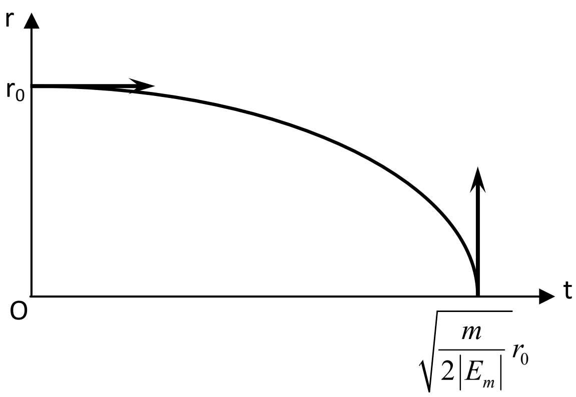
$$\Rightarrow r^2(t) = \frac{2E_m}{m}t^2 + 2r_o\dot{r}_o t + r_o^2$$

6- $\dot{r}_o = 0 \;\Rightarrow\; r^2(t) = \frac{2E_m}{m}t^2 + r_o^2$

a- $E_m < 0$

$$\Rightarrow \; r^2 + \frac{2|E_m|}{m}t^2 = r_o^2$$

Ellipse de grand axe $\sqrt{\frac{m}{2|E_m|}}\,r_0$ et de petit axe r_0.

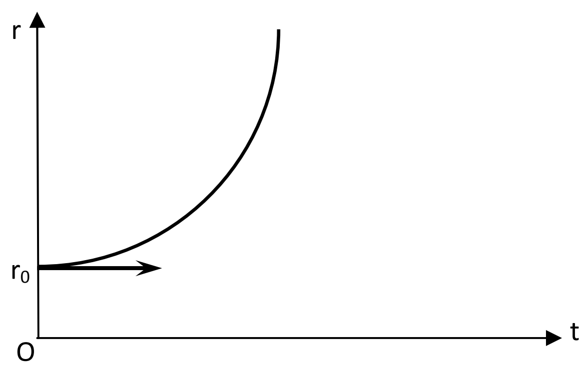


b- $E_m > 0$

$$r^2 - \frac{2E_m}{m}t^2 = r_o^2 \quad \Rightarrow r = \left[r_o^2 + \frac{2E_m}{m}t^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{t\,\frac{E_m}{m}}{\sqrt{r_o^2 + \frac{2E_m}{m}t^2}} > 0; \quad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

<u>Branche d'une parabole :</u>



Exercice 7

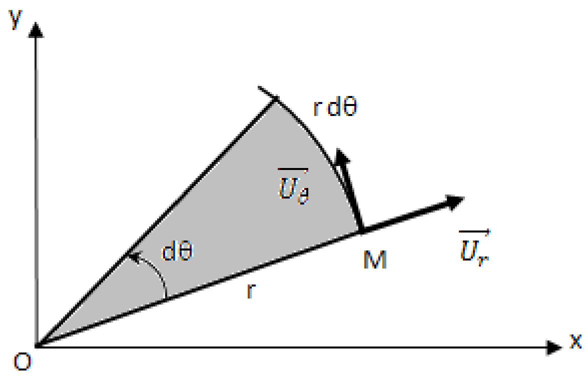
1- Par définition, le moment cinétique par rapport à O du point matériel.

$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$ dans $\Re$

Le référentiel $\Re$ étant galiléen $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$

ici $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \left(-k\frac{\overrightarrow{OM}}{r^3}\right) = \vec{O}$ $\Rightarrow$Le moment cinétique est donc constant.

- Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$ sont par définition, perpendiculaires à $\vec{L}$, vecteur constant, donc le point M appartient au plan perpendiculaire à $\vec{L}$ constant et passant par O.
- Loi des aires :



$$\vec{L}_o = r\vec{u}_r \wedge m\left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right) = m\,r^2\frac{d\theta}{dt}\vec{k} = m\,C\,\vec{k}$$

$C = cte$ Car $\vec{L}_0 = cte$

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{2}$$

Tel que $\begin{cases} dS : \text{Aire élémentaire balayé par le rayon vecteur } \overrightarrow{OM} \\ \frac{dS}{dt} : \text{Vitesse aréolaire} \\ C : \text{Constante des aires} \end{cases}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{2} = cte$$

2- Principe fondamental de la dynamique :

$\vec{F} = m\vec{\gamma}$ or $\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$\vec{\gamma} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \underbrace{\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)}_{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)}\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=\dfrac{km}{r^2} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0 \;\Rightarrow\; r^2\dot{\theta}=c \quad \Rightarrow \dot{\theta}=\dfrac{c}{r^2} \end{cases}$$

On pose $u=\dfrac{1}{r}$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r$$

$$r\dot{\theta}^2=\frac{c^2}{r^3}=C^2U^3$$

$$\ddot{r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}r\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\ddot{r}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{du}{d\theta}\frac{\dot{\theta}}{u^2}\right)=-C\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)=-C\frac{d^2u}{d^2\theta}\frac{d\theta}{dt}=-C\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}\Rightarrow \ddot{r}=-C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}=-c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)\vec{u}_r$$: Formule de Binet

$$\vec{F}=m\vec{\gamma}=-mc^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)\vec{u}_r=-\,ku^2\vec{u}_r \quad \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{k}{mC^2}=\frac{1}{P}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(u-\frac{1}{P}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d^2\left(u-\frac{1}{P}\right)}{d\theta^2}+\left(u-\frac{1}{P}\right)=0$$

$$\Rightarrow u-\frac{1}{P}=A\cos\left(\theta+\alpha\right)\Rightarrow u=\frac{1}{P}\left(1+AP\cos\left(\theta+\alpha\right)\right)$$

$$\Rightarrow r=\frac{P}{1+e\cos\left(\theta+\alpha\right)}$$ *: Equation générale d'une conique de paramètre P et d'excentricité e*

Tel que $P=\dfrac{mC^2}{k}$ *et* $e=A\dfrac{mC^2}{k}$

Remarque : La trajectoire est une : $\left\| \begin{array}{lll} Hyperbole & si & e>1 \\ Ellipse & si & e<1: \\ Parabole & si & e=1 \end{array} \right.$

3-

$$\vec{f}=-\frac{k}{r^2}\vec{u}_r; \quad \overrightarrow{rot}\vec{f}=\vec{o}; \quad \vec{f}=-\frac{k}{r^3}\,\overrightarrow{OM} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{f}=\vec{\nabla}\wedge\vec{f}=\left|\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} -\frac{k\,x}{r^3} \\ \frac{k\,y}{r^3} \\ -\frac{k\,z}{r^3} \end{array}\right.$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{\partial}{\partial y}\left(kz\,r^{-3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(kyr^{-3}\right) \\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(kx\,r^{-3}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(kyr^{-3}\right) \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(kyr^{-3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(kxr^{-3}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3kzyr^{-5}+3kyzr^{-5}=0 \\ -3kxzr^{-5}+3kzxr^{-5}=0 \\ -3kyxr^{-5}+3kxyr^{-5}=0 \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{f}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \exists \quad E_p \quad telque \quad \vec{f}=-\overrightarrow{grad}\varepsilon_p$$

$$\overrightarrow{grad}\varepsilon_p=\frac{\partial\varepsilon_p}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_p}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{\partial\varepsilon_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\varepsilon_p}{\partial r}=\frac{k}{r^2} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_p}{\partial\theta}=0 \\ \frac{\partial\varepsilon_p}{\partial z}=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \varepsilon_p=-\frac{k}{r} \ \text{ en prenant } \lim_{r\to\infty}\varepsilon_p=0$$

4- L'énergie mécanique $E=E_C+E_p=\frac{1}{2}mV^2-\frac{k}{r}$

Le point matériel n'est pas soumis à d'autres forces que celle prise en compte dans la définition de l'énergie mécanique $\Rightarrow$ L'énergie mécanique est une constante du mouvement.

5- Les conditions initiales du mouvement sont définies par :

$$r=r_0 \;\;;\;\; \theta=\theta_0 \;\;;\;\; \|\vec{V}\|=V_0 \;\;;\;\; \left(\widehat{\vec{u},\vec{V}_0}\right)=\alpha_0$$

$$E=cte\ \ du\ mouvement=E_0$$

$$E_0=\frac{1}{2}mV_0^2-\frac{k}{r_0}$$

$$\vec{V}_0=V_0\cos\alpha_0\,\vec{u}_r+V_0\sin\alpha_0\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{L}_0=m\,r_0\vec{u}_r\wedge\left(V_0\cos\alpha_0\,\vec{u}_r+V_0\sin\alpha_0\,\vec{u}_\theta\right)=mr_0v_0\sin\alpha_0\vec{k}=mC\vec{k}$$

$$\Rightarrow C=r_0v_0\sin\alpha_0$$

6 -

$$E=\frac{1}{2}mV^2-\frac{k}{r}=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-\frac{k}{r}=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\,r^2\frac{C^2}{r^4}-\frac{k}{r}$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{mC^2}{2r^2}-\frac{k}{r}=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+E'(r)$$

$$\Rightarrow E'(r)=-\frac{k}{r}+\frac{m\,C^2}{2r^2}$$

7- $E'(r)=-\frac{k}{r}+\frac{mC^2}{2r^2}\Rightarrow\frac{dE'(r)}{dr}=\frac{k}{r^2}-\frac{mC^2}{r^3}\Rightarrow\frac{dE'(r)}{dr}=0$ pour $r_m=\frac{mC^2}{k}$

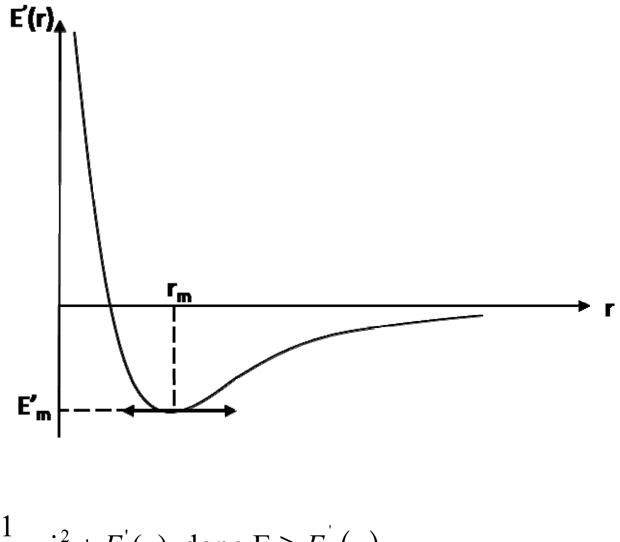
$$\Rightarrow \frac{d^2E^{'}(r)}{dr^2} = \frac{1}{r^2}(-2k + \frac{3mC^2}{r})$$

$$\frac{d^2E^{'}(r)}{dr^2} = 0 \ \text{ pour r} = \frac{3mC^2}{2k} \ \ et \ \ \left.\frac{d^2E^{'}(r)}{dr^2}\right|_{r=r_m} = \frac{k}{r_m^3} > 0$$

Il existe un minimum pour : $r = r_m = \dfrac{mC^2}{k}$

$$E_m^{'} = -\frac{k^2}{2mC^2} = -\frac{k^2}{2m(r_0\, v_0 \sin\alpha_0)^2}$$

r	**0**	$\frac{mc^2}{2k}$	$r_m = \frac{mc^2}{k}$	$3\frac{mc^2}{2k}$	∞
$\frac{d^2E^{'}}{dr^2}$				0	
$\frac{dE^{'}}{dr}$	$-\infty$	-	0	+	0
$E^{'}$	$+\infty$	0	$\frac{-k^2}{2mc^2}$		0



8- Rappelons que $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E^{'}(r)$ donc $E \geq E^{'}(r)$

Pour que le mobile puisse s'échapper de l'attraction du centre de force, il faut que r puisse devenir infini et donc que $E^{'}(r)$ puisse devenir nulle.

Il faut donc que E ≥0.

Au contraire, pour qu'il reste prisonnier il faut que E < 0.

9- Nous traduisons la condition E ≥ 0

$$\frac{1}{2}mV_0^2-\frac{k}{r_0}\geq 0 \Rightarrow \textit{la valeur minimale de la vitesse en norme est } V_{om}=\left(\frac{2k}{mr_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

10- Quand $E=E_m^{'}$; $\dot{r}=0 \Rightarrow r=cte$ *le muvement est circulaire.*

Exercice 8

1-a- $\vec{\gamma}_{R_0}(M)$ *est centrale* $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\vec{\gamma}_{R_0}(M)=\vec{0}$

Le mouvement se fait suivant Ox, et la seule force est la force de gravitation.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\gamma}(M)_{R_0}\,//\,\vec{F}\\ \vec{F}\,//\,\overrightarrow{OM}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\vec{\gamma}(M)_{R_0}=\vec{0}$$

b-Loi des aires :

$$\rho^2\dot{\theta}=C;\ pour\ t=0,\ \rho_0\rho_0\dot{\theta}_0=C,\ avec\begin{cases}\rho_0=R\\ \rho_0\dot{\theta}_0=V_0\sin\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho^2\dot{\theta}=RV_0\sin\alpha$$

c- En appliquant le P .F.D :

$$\overrightarrow{OM}=\rho\vec{i}\quad;\quad \mathrm{V}_{\mathrm{R}_0}(M)=\dot{\rho}\vec{i}+\rho\dot{\theta}\vec{j}$$

$$\vec{\gamma}_{R_0}(M)=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\right)\vec{i}+\left(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}\right)\vec{j}$$

P.F.D : $m\vec{\gamma}_{R_0}(M)=-G\dfrac{m_t m}{\rho^2}\vec{i}$

$$\begin{cases}2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}=0 & (1)\\ \ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2=-G\dfrac{m_t}{\rho^2} & (2)\end{cases}$$

$$(1)\quad\Rightarrow 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho^2\ddot{\theta}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right)=0\Rightarrow\rho^2\dot{\theta}=C$$

$$(2)\quad\Rightarrow\ddot{\rho}=\frac{R^2V_0^2\sin^2\alpha}{\rho^3}-\frac{Gm_t}{\rho^2}\qquad(3)$$

2-a- $\vec{F}$: est centrale $\Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F}=\vec{0}\Rightarrow\vec{F}=\overrightarrow{grad}U\Rightarrow U=G\dfrac{mm_t}{\rho}$

b-Détermination de h :

L'énergie : $E(t)=E_c-U=\dfrac{1}{2}mv^2-G\dfrac{mm_t}{\rho}$

à t=0 $E(t=0)=\dfrac{1}{2}mv_0^2-\dfrac{Gmm_t}{\rho}=h$

Système isolé $\Rightarrow$ conservation de E c- $\frac{1}{2}mv^2-\frac{Gmm_t}{\rho}=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{Gmm_t}{R}$

$v^2=v_0^2-\frac{2Gm_t}{R}+2\frac{Gm_t}{\rho}$ et d'autre part : $v^2=\dot{\rho}^2+\frac{R^2v_0^2\sin^2\alpha}{\rho^2}$

Soit $\dot{\rho}^2=-\frac{R^2v_0^2\sin^2\alpha}{\rho^2}+v_0^2-2Gm_t\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho}\right)$

En dérivant on trouve : $2\dot{\rho}\ddot{\rho}=\frac{2\dot{\rho}R^2v_0^2\sin^2\alpha}{\rho^3}-2\frac{Gm_t}{\rho^2}\dot{\rho}$

En simplifiant par $2\dot{\rho}$ on trouve l'équation (3) : $\ddot{\rho}=\frac{R^2v_0^2\sin^2\alpha}{\rho^3}-\frac{Gm_t}{\rho^2}$

3-a- Vitesse de libération minimale : c.à.d. $\rho\to\infty$ et $v_\infty=0$

D'après c- $v_\infty^2=v_l^2-\frac{2Gm_t}{R}+\frac{2Gm_t}{\rho}$ donc $0=v_l^2-\frac{2Gm_t}{\rho}\Rightarrow v_l=\sqrt{\frac{2Gm_t}{R}}$

b- Expression simple de h : $\Rightarrow h=E=\frac{1}{2}m\left(v_0^2-v_l^2\right)$

c- Trajectoire :

$v_0>v_l\Rightarrow E>0\Rightarrow Hyberbole$
$v_0=v_l\Rightarrow E=0\Rightarrow Parabole$
$v_0<v_l\Rightarrow E<0\Rightarrow Ellipse$

4-a- Changement de variable : $u=\frac{1}{\rho}$

$$\dot{\rho}=-\frac{\dot{u}}{u^2}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\dot{\rho}=-c\,\frac{du}{d\theta}\Rightarrow v^2=\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2c^2+c^2u^2\Rightarrow v^2=c^2[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\ ]\quad loi\ de\ Binet$$

$$b\text{-}\ \ c=\left[a\left(1\text{-}e^2\right)Gm_t\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow u=\frac{1-e\cos\left(\theta-\theta_0\right)}{a\left(1-e^2\right)}\Rightarrow\frac{du}{d\theta}=\frac{e\sin\left(\theta-\theta_0\right)}{a\left(1-e^2\right)}$$

$$\begin{cases}E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{Gmm_t}{\rho}\\ v^2=c^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]\end{cases}\ donne$$

$$E=\frac{1}{2}Gmm_t\frac{e^2\sin^2\left(\theta-\theta_0\right)+2e\cos\left(\theta-\theta_0\right)-2+\left[1-e\cos\left(\theta-\theta_0\right)\right]^2}{a\left(1-e^2\right)}\quad soit\ E=\text{-}\frac{Gmm_t}{2a}=h$$

$5-a$ *Carré de la vitesse en un point de la trajectoire*

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{Gmm_t}{\rho} + E = \frac{Gmm_t}{\rho} - \frac{Gmm_t}{2a} \text{ et par suite } v^2 = Gm_t\left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a}\right)$$

$$b - \text{pour } \theta = \theta_0 \Rightarrow \rho_s = a(1+e) \Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{Gmm_t}{2a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

6-a – Si M décrivant un cercle à partir de S

$$\vec{\gamma}_{R_0}(M) = -\frac{w^2}{\rho_s}\vec{i} + \dot{w}\vec{j} = \frac{Gm_t}{\rho_S^2}\vec{i} \Rightarrow W = \sqrt{\frac{Gm_t}{a}}\sqrt{\frac{1}{1+e}}$$

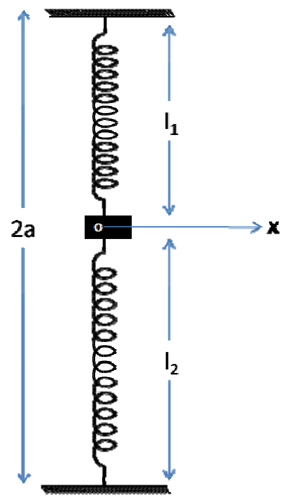
$$b - \Delta V = w - V_s = \sqrt{\frac{Gm_t}{a}}\frac{1}{\sqrt{1+e}}\left(1 - \sqrt{1-e}\right)$$

$c - $ *oui, ce type de changement d'orbite est possible.*

Oscillateur Harmonique

Exercice 1

Une masse m est reliée à deux ressorts identiques, placés verticalement. Les extrémités des ressorts sont distances de $2a$. Chaque ressort non tendu a une longueur $l_0 \langle a$; sa raideur est k.



1- Calculer à l'équilibre les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 des ressorts.

Montrer que si $mg \langle\langle 2ka$ on peut prendre $\ell_1 = \ell_2$.

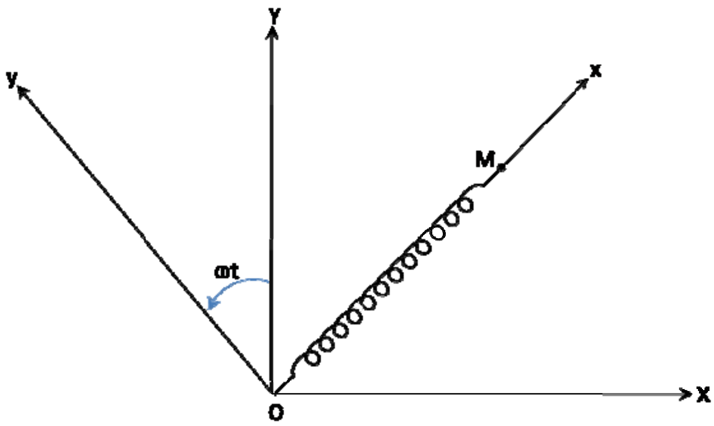
2- La masse m peut se déplacer horizontalement de x à partir de sa position d'équilibre.

Etablir l'équation complète de mouvement.

3- Résoudre cette équation en supposant $x \langle\langle a$

Exercice 2

Soit un repère fixe R (O, x, y, z) de base $\left(\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$ dont le plan XOY est matérialisé par un plateau. M est un point matériel de masse m reliée au point 0 par un ressort de constante de rigidité k et de longueur à vide ℓ_0. Le ressort est porté par l'axe Ox, de vecteur unitaire $\vec{i}$, tournant sur le plateau XOY autour de l'axe OZ avec la vitesse angulaire $\omega = constante$. Le mouvement du point M, astreint à se déplacer sur l'axe Ox, est gêné par une force de frottement $\vec{F}_f = -\eta\left(\frac{dx}{dt}\right)\vec{i}$ avec η coefficient de frottement. On donne $\left(\frac{k}{m}\right)\rangle \omega^2$.



1- Dans un premier temps, le système oscillant n'est pas forcé.

a- En appliquant le principe fondamental de la dynamique en M dans le repère (oxy), déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de M sur l'axe Ox.

b- Après avoir fait les changements de variables appropriés, montrer que cette équation peut se mettre sous la forme : $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha\omega_o \frac{du}{dt} + \omega_o^2 u = 0$

En déduire la pulsation propre de ce système oscillant en fonction de $\omega, k\; et\; m$ (la résolution de l'équation différentielle n'est pas demandée)

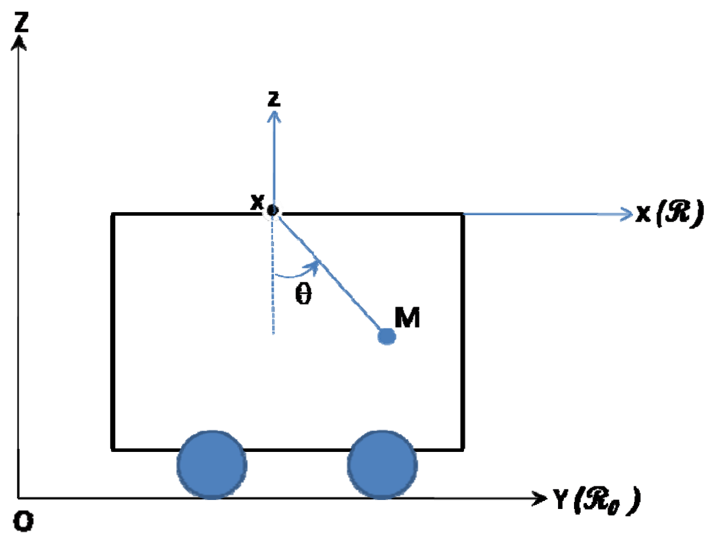
2- En un deuxième temps, le point M est soumis à une force excitatrice extérieure $\vec{F} = -kx_o \cos\Omega t\,\vec{i}$, qui lui impose sa pulsation. On se propose d'étudier le système lorsque le régime permanent s'établit. Alors, la vitesse relative de M est : $\frac{dx}{dt} = V_o \cos(\Omega t - \varphi)$

a- En utilisant la notation complexe, déterminer l'amplitude de la vitesse et sa phase.

b- Calculer l'impédance mécanique Z de ce système. Discuter Z en fonction de $\Omega\; et\; \eta$. Représenter $Z(\Omega)$ dans le cas ou le coefficient de frottement est nul.

Exercice 3

Un pendule de masse m et de longueur ℓ est suspendu en un point A du plafond d'un wagon qui est en mouvement sur une voie rectiligne horizontale (voir figure)



On suppose que le mouvement du pendule s'effectue dans le plan vertical (A, y, z) qui passe par le point A et qui contient l'axe OY de la voie. La position instantanée du pendule est repérée par l'angle $\theta = \left(\widehat{-\vec{k}, \overrightarrow{AM}}\right)$. Initialement, le pendule est écarté d'un angle θ_0, puis il est abandonné à lui même sans vitesse initiale.

I- Le mouvement du wagon par rapport au repère fixe R_0 est uniforme.

1- On ne considère pas les forces de frottement.

a- Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en appliquant le théorème du moment cinétique.

b- Ecrire la solution de cette équation différentielle pour les petits mouvements. En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 du mouvement du pendule et faire une représentation graphique de $\theta(t)$.

2- On tient compte du frottement et on va considérer uniquement la force exercée par le frottement du l'air sur le pendule et que l'on prend sous la forme $\vec{F}=-k.\vec{v}$ où k est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse relative du pendule par rapport au wagon.

a- Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule et montrer qu'elle se mettre sous la forme : $\ddot{\theta}+2\lambda\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$

Expliciter λ et ω_0 et donner leurs significations physiques.

b- Déterminer le degré d'amortissement qui est défini par $\alpha=\dfrac{\lambda}{\omega_0}$

c- On considère le cas d'un amortissement faible $(\alpha\langle 1)$

- Etablir la loi du mouvement du pendule
- Faire une représentation graphique de $\theta(t)$
- Déterminer la constante de temps $\tau=\dfrac{1}{\lambda}$ et préciser sa signification physique.
- Calculer le décrément logarithmique δ.
- Déterminer la pseudo-période $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ et l'exprimer en fonction de la période propre

$T_o=\dfrac{2\pi}{\omega_o}$ et δ. Que devient son expression lorsque λ est faible?

d- On considère le cas de l'amortissement critique $(\alpha=1)$ et le cas d'un amortissement fort $(\alpha\rangle 1)$.

- Ecrire la loi du mouvement du pendule dans chaque régime.
- Donner l'allure de $\theta(t)$ dans les deux cas.

II- Le wagon effectue un mouvement uniformément accéléré avec l'accélération $\vec{\gamma}=\gamma\vec{e}_y$.

On prend les nouvelles conditions initiales $\theta_0=0$ et $\dot{\theta}_0=0$ pour le mouvement du pendule.

On ne néglige pas le frottement de l'air.

1- Ecrire l'équation différentielle qui décrit le mouvement relatif du pendule. A quelle forme se réduira telle lorsque θ est faible?

2- Donner une solution de cette équation différentielle pour chaque régime et faire une représentation graphique de $\theta(t)$.

III- Le wagon effectue un mouvement sinusoïdal de pulsation Ω et dont l'amplitude est *a*.

On ne néglige pas le frottement de l'air.

1- Ecrire l'équation différentielle qui décrit le mouvement du pendule, on supposera que θ est faible.

2- La solution générale de cette équation différentielle fait intervenir deux régimes d'oscillations, libre et forcé. Au bout d'un certain temps, le régime libre disparait compte tenu de l'amortissement et seul subsiste le régime forcé. Dans ce régime, le mouvement du pendule est décrit par : $\theta(t) = C\sin(\Omega t + \varphi)$

Expliciter en fonction des données du problème l'amplitude *C* et le déphasage φ du mouvement du pendule.

3- Déterminer la pulsation et l'amplitude de résonance.

4- Donner les allures de l'amplitude *C* et du déphasage α en fonction de la pulsation Ω.

Exercice 4

On considère un ressort, de masse négligeable et de raideur *k*. l'extrémité supérieur de ce ressort est fixée à un bâti. A son extrémité inférieur est attaché une boule *P* de masse m. Au cours de son mouvement verticale, la boule est soumise à une force de frottement $\vec{f} = -\alpha v \ (\alpha > 0)$. On appelle x le déplacement vertical de la boule par rapport à sa position d'équilibre statique. On impose à la boule un mouvement sinusoïdal forcé grâce à une fore extérieur $\vec{F} = F_0 \cos \omega t \vec{e_x}$

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement de la boule *P*. On posera :

$$m\omega_0^2 = k; \ \alpha = 2\lambda m\omega_0; \ F_0 = ma$$

2. Le régime d'oscillation forcée correspondant à la solution :

$$x = x_0 \cos(\omega t - \beta) = A\sin \omega t + B\cos \omega t$$

A et B sont respectivement l'amplitude d'absorption et l'amplitude élastique.

a- Calculer A et B on fonction de ω est tracer leur graphes. Pour ceci on suppose que dans l'expression de A et B au voisinage de la résonance, les variation son presque entièrement dues au facteur $(\omega - \omega_0)^2$. On pourra donc remplacer $\omega \ par \ \omega_0$ sauf dans le terme $\omega - \omega_0$.

b- Montrer que la puissance moyenne absorbée par l'oscillateur est $\langle P \rangle = \frac{1}{2} m\omega A a$.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f(t) sur une période Test :

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ dt$$

c- Pour quelle valeur de ω , la puissance moyenne $\langle P \rangle$ est maximale ?

Pour quelles valeurs $\omega_1\ et\ \omega_2\ de\ \omega, a\ t-on \langle P \rangle = \frac{1}{2}\langle P \rangle_{\max}$?

Calculer $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ et vérifier que $\tau\Delta\omega = 1\ avec\ \tau = \frac{1}{2\lambda\omega_0}$. Interpréter ce résultat.

On rappel que $(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon\ \ pour\ \varepsilon << 1$

3-a- Transformer l'équation différentielle de la question (1) en une équation différentielle du second ordre avec la variable v.

b- En prenant une solution de type $v = v_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$ et en remplaçant $a\sin(\omega t)\ par\ ae^{i\varpi t}$, donner les expressions de $v_0\ et\ tg\varphi$. Etudier leurs variations en fonction de ω .

4- On désigne par Z l'impédance mécanique complexe du système par analogie à l'impédance électrique telle que : v*Z* = *ka*

a- Trouver l'expression de Z et $|Z|$ en fonction des données du problème. On pose $Z = |Z|e^{i\theta}$.

b- Etudier la fonction de ω , les variation de $|Z|$.

Montrer que la position de la courbe représentative de $|Z|$ par rapport à ses asymptotes permet de distinguer deux cas. Donner une interprétation par analogie à un circuit électrique.

Corrections des exercices

Exercice 1

1- Le ressort supérieur ayant la longeur l_1, l'équation d'équilbre est :

$$mg+k(l_2-l_0)-k(l_1-l_0)=0 \Leftrightarrow mg+k(l_2-l_1)=0$$

l_1 et l_2 sont donnés par le système d équations

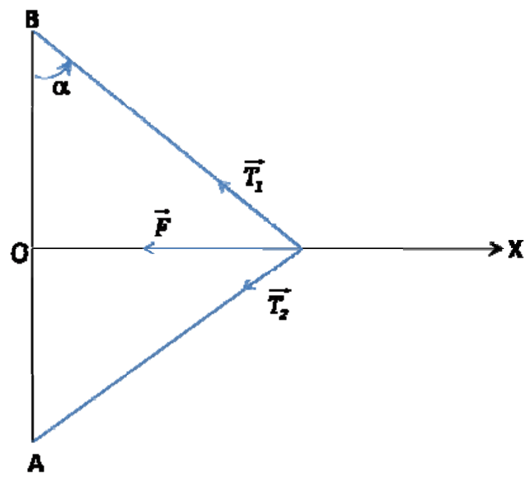
$$\begin{cases} l_1+l_2=2a \\ l_1-l_2=\dfrac{mg}{k} \end{cases} \quad d'où \quad \begin{cases} l_1=a+\dfrac{mg}{k} \\ l_2=a-\dfrac{mg}{k} \end{cases}$$

Si $mg \ll 2ka$, on peut prendre $l_1=l_2=a$, ce qui revient à négliger le poids de la masse devant les tensions des ressorts .

2- A l'équilibre , la tension de chaque ressort est $T_0=k\left(a-l_0\right)$

Lorsque la masse est déplacée horizontalement de x, les tensions deviennent en supposant encore $l_1=l_2$; $T_1=T_2=k\left(\sqrt{a^2+x^2}-l_0\right)$ et la force de rappel $\vec{F}$ à pour module .

$$\left\|\vec{F}\right\|=2k\left(\sqrt{a^2+x^2}-l_0\right)\sin\alpha \quad avec \quad sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$



L'équation de mouvement est donc :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-2k\left(\sqrt{a^2+x^2}-l_0\right)\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

qui peut s'écrire :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-2k\left(1-\frac{l_0}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)x$$

3-Si $x \ll a$, On peut prendre $\sqrt{a^2+x^2}\simeq a$

ce qui donne comme équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\left(\frac{a-l_0}{ma}\right)x=0$$

Qui est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω définie par : $\omega^2=2\dfrac{k}{m}\left(a-l_0\right)$

Exercice 2

1-a *PFD* dans le repère *(oxy)*

$$m\vec{\gamma}_r=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_f+\vec{T}+\vec{F}_c+\vec{F}_e$$

Forces réelles : poids $\vec{P}=-mg\vec{k}$; réaction $\vec{R}$; frottement $\vec{F}_f=-\eta\dfrac{dx}{dt}\vec{i}$ et la Tension $\vec{T}=-k\left(x-l_0\right)\vec{i}$

Forces fictives : entrainement $\vec{F}_e$ et Coriolis $\vec{F}_c$

- $\vec{F}_c=-2m\ \omega\vec{k}\wedge\vec{V}_{R_1}=-2m\omega\dfrac{dx}{dt}\vec{j}$
- $\vec{F}_e=-m\omega^2\vec{k}\wedge\left(\vec{k}\wedge x\vec{i}\right)=m\omega^2x\vec{i}$

Projection du P.F.D sur l'axe (Ox) : $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k\left(x-l_0\right)-\eta\dfrac{dx}{dt}+m\omega^2x$

soit $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{\eta}{m}\dfrac{dx}{dt}+\left[\dfrac{k}{m}\left(x-l_0\right)-\omega^2\right]x=0$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\eta}{m}\frac{dx}{dt}+\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)x-\frac{k}{m}l_0=0\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+2\alpha\omega_0\frac{dx}{dt}+\omega_0^{\,2}\left[x-\frac{k}{m}\frac{l_0}{\omega_0^{\,2}}\right]=0$$

tel que $\omega_0^{\,2}=\dfrac{k}{m}-\omega^2$ et $2\alpha\omega_0=\dfrac{\eta}{m}$

b- En posant $u=x-\dfrac{k}{m}\dfrac{l_0}{\omega_0^{\,2}}$ l'équation devient $\dfrac{d^2u}{dt^2}+2\alpha\omega_0\dfrac{du}{dt}+\omega_0^{\,2}u=0$

Pulsation propre $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}-\omega^2}$

2- l'équation s'écrit : $\dfrac{d^2u}{dt^2}+2\alpha\omega_0\dfrac{du}{dt}+\omega_0^{\,2}u=-\dfrac{kx_0}{m}\cos\Omega t$

a- Amplitude et phase de la vitesse :

$$\frac{dx}{dt}=V_0\cos(\Omega t-\varphi)\rightarrow\tilde{\dot{x}}=V_0e^{j(\Omega t-\varphi)};\quad\tilde{F}=-\frac{kx_0}{m}e^{j\Omega t}$$

$$\tilde{x}=-\frac{V_0}{j\Omega}e^{j(\Omega t-\varphi)}=-j\frac{V_0}{\Omega}e^{j(\Omega t-\varphi)}\Rightarrow\tilde{\ddot{x}}=j\Omega V_0e^{j(\Omega t-\varphi)}$$

d'où $V_0e^{j(\Omega t-\varphi)}\left[j\left(\Omega-\dfrac{\omega_0^{\,2}}{\Omega}\right)+2\alpha\omega_0\right]=-\dfrac{k\ x_0}{m}e^{j\Omega t}$

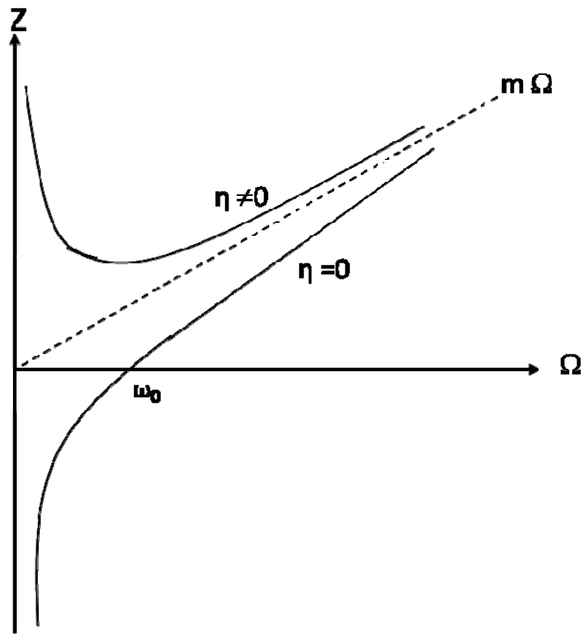
soit $V_0\left[j\left(\Omega-\dfrac{\omega_0^{\,2}}{\Omega}\right)+2\alpha\omega_0\right]e^{-j\varphi}=-\dfrac{kx_0}{m}\Rightarrow V_0^{\,2}\left[\left(\Omega-\dfrac{\omega_0^{\,2}}{\Omega}\right)^2+4\alpha^2\omega_0^{\,2}\right]=\dfrac{k^2x_0^{\,2}}{m^2}$

$$V_0=\frac{kx_0}{m}\sqrt{\frac{1}{\left(\Omega-\dfrac{\omega_0^{\,2}}{\Omega}\right)^2+4\alpha^2\omega_0^{\,2}}}$$

La phase :

$$\left[j\left(\Omega-\frac{\omega_0^2}{\Omega}\right)+2\alpha\omega_0\right](\cos\varphi-j\sin\varphi)=-\frac{kx_0}{m}+0j\Rightarrow\left(\Omega-\frac{\omega_0^2}{\Omega}\right)\cos\varphi-2\alpha\omega_0\sin\varphi=0$$

Donc $tg\varphi=\dfrac{\Omega-\dfrac{\omega_0^2}{\Omega}}{2\alpha\omega_0}$



b-Impédance mécanique Z :

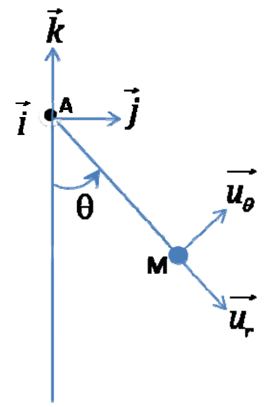
$$Z=\frac{Amplitude\ de\ \ F}{Amplitude\ de\ v}=\frac{kx_0}{V_0}$$

$$Z=\ m\sqrt{\left(\Omega-\frac{\omega_0^2}{\Omega}\right)^2+\eta^2}$$

Exercice 3

I- Le mouvement de wagon est uniforme :

1- On ne considère pas les forces de frottement



$$a-\frac{dL_\Delta}{dt}=\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{P}+\vec{F}_e+\vec{F}_c+\vec{T}\right)\ avec\ \Delta\ l'axe\ \overrightarrow{Ax}$$

$$L_\Delta=\vec{i}\ \vec{L}_A=\vec{i}\left(\overrightarrow{AM}\wedge m\vec{V}\right)=\vec{i}\left(l\vec{u}_r+ml\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right)\Rightarrow L_\Delta=ml^2\dot{\theta}$$

$$\vec{P}=-mg\vec{k}=mg\left(\cos\theta\vec{u}_r-\sin\theta\vec{u}_\theta\right)$$

$$\vec{T}=-T\vec{u}_r\ avec\ T=\left\|\vec{T}\right\|$$

$$\vec{F}_e=-m\vec{\gamma}_e=\vec{0}$$

$$\vec{F}_c=-m\vec{\gamma}_c=\vec{0}$$

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{P}+\vec{F}_e+\vec{F}_c+\vec{T}\right)=\vec{i}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\left(\vec{P}+\vec{T}\right)\right)=-mgl\sin\theta$$

$$donc\ :\ \frac{dL_\Delta}{dt}=ml^2\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0\qquad(1)$$

(1) : Equation différentielle décrivant le mouvement relatif du pendule.

b- Pour les petits mouvements, sin $\theta\simeq\theta$

$$(1)\ \Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0\quad(2)\Rightarrow\theta(t)=C\cos\left(\omega_0t+\varphi\right)$$

avec $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ *pulsation propre du mouvement du pendule.*

$$\begin{cases} \theta(t=0) = C\cos\varphi = \theta_0 \\ \dot{\theta}(t=0) = -C\sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = 0 \text{ et } C = \theta_0 \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos\omega_0 t \quad (3)$$

2- On tient compte du frottement et on va considérer uniquement la force exercée par l'air. Le pendule sera soumis, en plus des forces précédentes à l'action de cette force.

$a-\quad \vec{F} = -k\vec{v} = -kl\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}+\vec{F}_e+\vec{F}_c\right) = -mgl\sin\theta - kl^2\dot{\theta}$$

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - kl^2\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

Pour les petits mouvements ($(\theta : faible)$ et en posant $\frac{k}{m} = 2\lambda$, l'équation (4) s'écrit :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad (5)$$

$\lambda = \frac{k}{2m}$ est le coefficient d'amortissement

b- $\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{k}{2m}$ degré d'amortissement

c- $\alpha < 1 \quad (amortissement\ faible)$

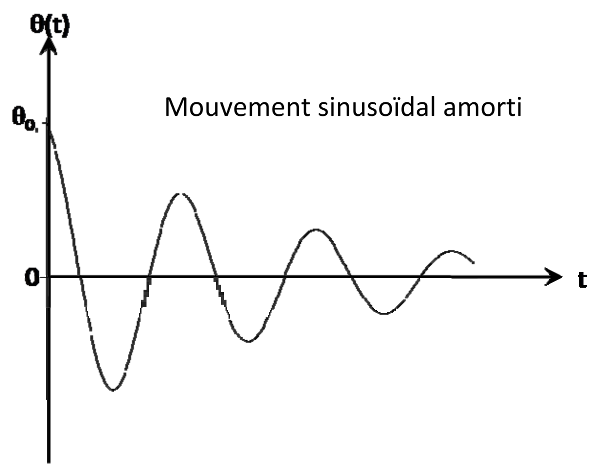
$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ Equation caractéristique

$r = -\lambda \pm i\omega$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$: pseudo-pulsation

$$\theta(t) = Be^{-\lambda t}\cos(\omega t - \varphi) = e^{-\lambda t}\left(C\cos\omega t + D\sin\omega t\right)$$

$$\theta(t=0) = \theta_0 \text{ et } \dot{\theta}(t=0) = 0 \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 e^{-\lambda t}\left(\cos\omega t + \frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t\right)$$

On peut écrire $\theta(t)$ sous la forme : $\theta(t) = \frac{\omega_0}{\omega}\theta_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t - \varphi)$ (6), avec $tg(\varphi) = \frac{\lambda}{\omega}$



• $\tau = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{2m}{k}$: constante du temps

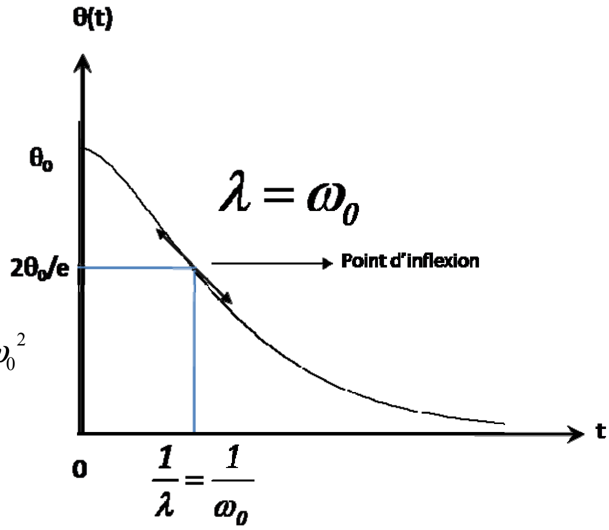
τ est le temps au bout duquel l'amplitude des oscillations est divisée par *e*.

• $\delta = \lambda T$ est le décrément logarithmique du mouvement. Il caractérise la décroissance des élongations maximales à chaque période. En pratique, la détermination de δ se fait à partir de la mesure des élongations maximales du mouvement.

$$\frac{\theta(t)}{\theta(\theta+nT)} = e^{n\lambda T} = e^{n\delta} \Rightarrow \delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+nT)}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = T_0\left(1+\frac{\delta^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ si } \delta << 1 \Rightarrow T \simeq T_0\left(1+\frac{\delta^2}{8\pi^2}\right)$$

d- $\alpha = 1$ Régime critique



$$\theta(t) = e^{-\lambda t}\left(C\ t + D\right)$$

$$\begin{cases}\theta(t=0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(t=0) = 0\end{cases} \Rightarrow C = \lambda\theta_0 \quad et \quad D = \theta_0$$

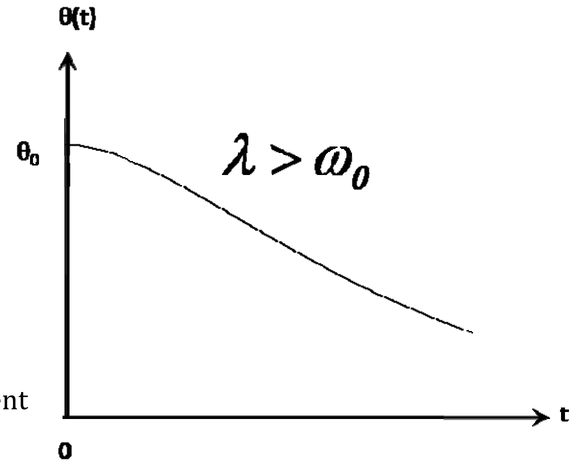
$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 e^{-\lambda t}\left(\lambda t + 1\right)$$

• $\alpha > 1$ Régime apériodique.

$$\theta(t) = e^{-\lambda t}\left(c\ ch\beta t + D\ sh\beta t\right)\ avec\ \beta^2 = \lambda^2 - \omega_0^2$$

$$\begin{cases}\theta(t=0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(t=0) = 0\end{cases} \Rightarrow C = \theta_0\ et\ D = \frac{\lambda}{\beta}\theta_0$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 e^{-\lambda t}\left(ch\beta t + \frac{\lambda}{\beta} sh\beta t\right)$$



• Dans les deux régimes, le retour à la position d'équilibre se fait sans oscillations.

• Le retour à la position d'équilibre se fait plus rapidement dans le régime critique que dans le régime apériodique.

II- Le wagon effectue un mouvement uniformément accéléré

$$\vec{\gamma} = \gamma \vec{e}_y$$

Nouvelles condition initiale : $\theta_0 = 0\ et\ \dot{\theta}_0 = 0$

1- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e = -m\gamma\vec{e}_y \Rightarrow \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{F}_e\right) = \vec{i}\left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}_e\right) = -ml\gamma\vec{i}\left(\vec{u}_r \wedge \vec{j}\right)$

Or $\vec{j} = \sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_\theta \Rightarrow \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{F}_e\right) = -ml\gamma\cos\theta$

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - kl^2\dot{\theta} - ml\gamma\cos\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{\gamma}{l}\cos\theta = 0 \qquad (6)$$

Pour θ faible, l'équation différentielle(6) se simplifie et s'écrit : $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^{\,2}\theta + \frac{\gamma}{l} = 0$

2-

- $\alpha > 1$

$$\theta(t) = -\theta_p e^{-\lambda t}\left(ch\xi t + \frac{\lambda}{\xi}sh\xi t\right) + \theta_P$$

$$\xi^2 = \lambda^2 - \omega_0^{\,2}$$

- $\alpha = 1$

$$\theta(t) = -\theta_p e^{-\lambda t}\left(\lambda t + 1\right) + \theta_p$$

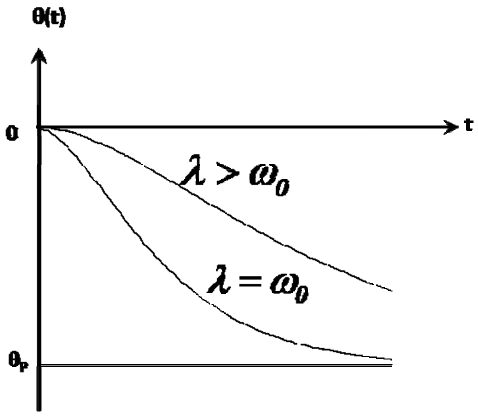
- $\alpha < 1$

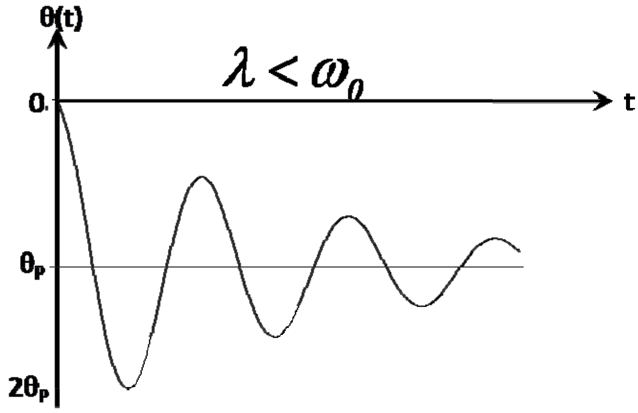
$$\theta(t) = -\theta_P\ e^{-\lambda t}\left(\cos\omega t + \frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t\right) + \theta_P$$

$$\omega^2 = \omega_0^{\,2} - \lambda^2$$

$\theta_P = -\dfrac{\gamma}{l\omega_0^{\,2}}$ solution particulière de l'équation différentielle.

θ(t) tend vers la valeur $\theta_P = -\dfrac{\gamma}{l\omega_0^{\,2}}$ de façon périodique ou apériodique suivant la valeur de α.





III- L e wagon effectue un mouvement sinusoïdal de pulsation Ω et d'amplitude a.

1- Les oscillations du pendule sont entretenues par la force d'inertie d'entrainement.

$$\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e = m\ \Omega^2 a\cos\Omega\ t\ \vec{e}_y$$

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}_e\right) = \vec{e}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{F}_e\right) = m\ a\ l\ \Omega^2\cos\Omega t\cos\theta$$

pour θ faible $\mathcal{M}\left(\vec{F}_e\right) = mal\Omega^2\cos\Omega t$ *et l'équation différentielle du mouvement s'écrit :*

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0{}^2\theta = \frac{a\ \Omega^2}{l}\cos\Omega t \qquad (8)$$

Régime forcé $\rightarrow \theta(t) = C\sin(\omega t + \varphi)$

Cherchons une solution complète de la forme $\rightarrow \tilde{\theta}(t) = Ce^{i(\omega t+\varphi)}$

En remplaçant $\cos(\Omega t)$ *par* $\exp(i\Omega t)$ *, on obtient*

$$Ce^{i\varphi}\left\{-\Omega^2 + 2i\lambda\Omega + \omega_0{}^2\right\} = a\frac{\Omega^2}{l}$$

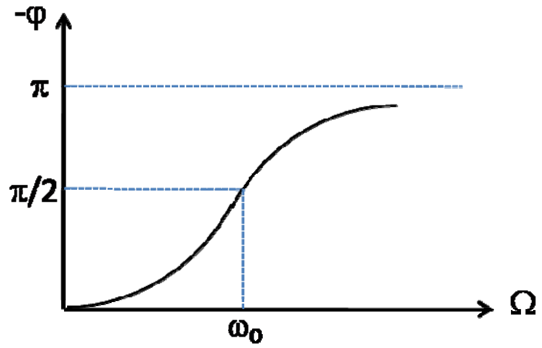
$$d'où\ C = \frac{a\Omega^2/l}{\left[\left(\omega_0{}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{l}\frac{\Omega^2/\omega_0{}^2}{\left[\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2 + 4\alpha^2\frac{\Omega^2}{\omega_0{}^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

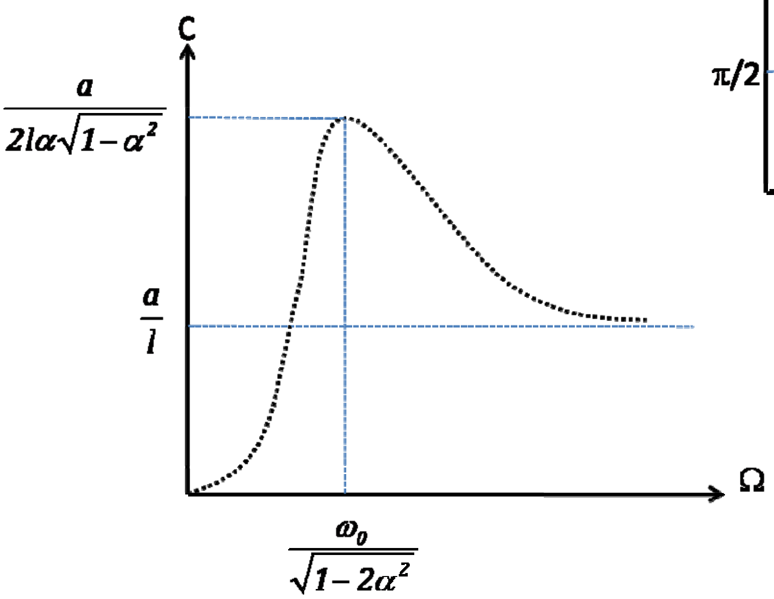
$$tg\varphi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega^2} = -\frac{2\alpha\omega_0\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega^2} = -\frac{2\alpha\frac{\Omega}{\omega_0}}{1-\frac{\Omega^2}{\omega_0{}^2}}$$

2- A la résonnance, l'amplitude est maximale.

$$\frac{dC}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \Omega^2 = \frac{\omega_0{}^2}{1-2\alpha^2} \Rightarrow \Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\alpha^2}}$$

$$C_{\max} = \frac{a}{l}\frac{1}{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$$





Exercice 4

1- $m\ddot{x}\vec{e}_x = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x - kx\vec{e}_x + F_0\cos\omega t\,\vec{e}_x$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

on pose : $\dfrac{\alpha}{m} = 2\lambda\omega_0 ; \dfrac{k}{m} = \omega_0^{\;2}$ *et* $\dfrac{F_0}{m} = a$

l'équation devient : $\ddot{x} + 2\lambda\omega_0\dot{x} + \omega_0^{\;2}x = a\cos\omega t$

2-a- Le régime d'oscillations forcées correspond à la solution :

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$\dot{x} = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin\omega t - \omega^2 B\cos\omega t$$

$$\left(-A\omega^2\sin\omega t - \omega^2 B\cos\omega t\right) + 2\lambda\omega_0(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t) + \omega_0^{\;2}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = a\cos\omega t$$

$$\left(-A\omega^2 - 2\lambda B\omega_0\omega + \omega_0^{\;2}A\right)\sin\omega t + \left(-B\omega^2 + 2\lambda A\omega_0\omega + \omega_0^{\;2}B\right)\cos\omega t = a\cos\omega t$$

donc

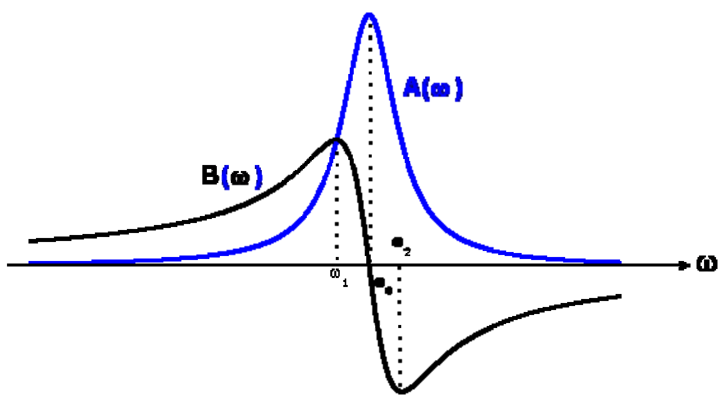
$$\begin{cases} -A\omega^2 - 2\lambda B\omega_0\omega + \omega_0^{\;2}A = 0 \\ -B\omega^2 + 2\lambda A\omega_0\omega + \omega_0^{\;2}B = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\omega_0^{\;2} - \omega^2\right)A - 2\lambda B\omega\omega_0 = 0 \\ 2\lambda A\omega_0\omega + \left(\omega_0^{\;2} - \omega^2\right)B = a \end{cases}$$

$$A = \frac{2\,\lambda\,a\,\omega_0\,\omega}{\left(\omega_0^{\;2} - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_0^{\;2}\omega^2} \quad ; \quad B = \frac{a\left(\omega_0^{\;2} - \omega^2\right)}{\left(\omega_0^{\;2} - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_0^{\;2}\omega^2}$$

Graphes A(ω) et de B(ω).

On remplace dans les expressions de A et B, ω par ω_0 sauf dans le terme $(\omega - \omega_0)$

$$A \simeq \frac{\lambda a}{2(\omega_0 - \omega)^2 + 2\lambda^2\omega_0^{\;4}} \quad ; \quad B \simeq \frac{a(\omega_0 - \omega)}{2\omega_0(\omega_0 - \omega)^2 + 2\lambda^2\omega_0^{\;3}}$$



b-La puissance absorbée par l'oscillateur est donnée par :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_0 \cos \omega t \left[A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t \right]$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{F_0 A\omega}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t \, dt - \frac{F_0 B\omega}{T}\int_0^T \cos \omega t \sin \omega t \, dt = \frac{F_0 A\omega}{T}$$

$$F_0 = ma \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{2} m\omega A a$$

$$-c \;\; \langle P \rangle = \langle P \rangle_{\max} \; pour \; \omega = \omega_0 \Rightarrow \langle P \rangle_{\max} = \frac{ma^2}{4\lambda\omega_0}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\langle P \rangle_{\max} \Rightarrow \frac{ma^2}{8\lambda\omega_0} = \frac{\lambda m a^2 \omega_0 \omega^2}{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_0^{\,2}\omega^2} \Rightarrow \omega^4 - 2\omega_0^{\,2}\left(2\lambda^2 + 1\right)\omega^2 + \omega_0^{\,2} = 0$$

les solutions sont

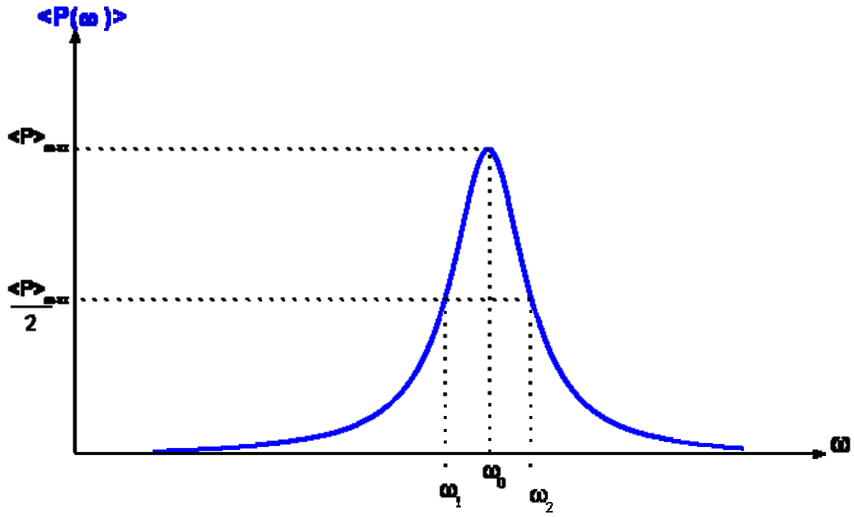
$$\omega^2 = \left(1 + 2\lambda^2\right)\omega_0^{\,2} \pm 2\omega_0^{\,2}\lambda\sqrt{\lambda^2 + 1}$$

$$\lambda \; est \; faible \;\; \Rightarrow \omega^2 \simeq \left(1 + 2\lambda^2\right)\omega_0^{\,2} \pm 2\omega_0^{\,2}\lambda\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) \simeq \omega_0^{\,2}\left(1 \pm 2\lambda\right)$$

$$\omega = \omega_0\left(1 \pm \lambda\right)$$

$$\Delta\omega = 2\lambda\omega_0 = \frac{1}{\tau} \;\; avec \; \tau \; le \;\; tepms \; d'amortissement \; des \; oscillations \; libres \; .$$

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$: Largeur de la bande passante



3-a- On dérive par rapport au temps l'équation différentielle précédente en x. On trouve

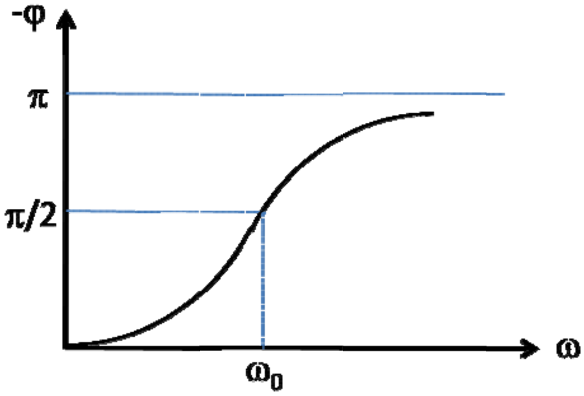
$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^{\,2} v = -a\omega \sin \omega t$$

b- On prend une solution de type $\overline{V} = V_0 e^{i(\omega t - \phi)}$ et on remplace $a\sin\left(\omega t\right)$ par $\overline{a} = ae^{i\omega t}$, à partir de l'équation en v on obtient :

$$v_0 e^{-i\phi} = \frac{-a\omega}{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right) + 2i\lambda\omega\omega_0}$$

$$tg\phi = \frac{2\lambda\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^{\,2}}$$

$$V_0 = \frac{a\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_0^{\,2}\omega^2}}$$



V_0 aura la même allure que A

$$\begin{cases} \omega \to 0 \\ \omega \to +\infty \end{cases} \Rightarrow V_0 \to 0 \;\; \textit{masse reste immobile}$$

4- Z impédance mécanique complexe de l'oscillateur $Z\overline{V} = k\overline{a}$

a- En remplaçant $\overline{V}$ *et* $\overline{a}$ par leurs expressions $V_0 e^{i(wt-\phi)}$ *et* ae^{iwt}, *on obtient*

$$Z = \frac{ka}{V} e^{i\phi} = \frac{m\,\omega_0^{\,2}}{\omega} \sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_0^{\,2}\omega^2}\, e^{i\phi}$$

$$|Z| = \frac{m\,\omega_0^{\,2}}{\omega} \sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_0^{\,2}\omega^2}$$

b- Etude de la variation de $|Z|$ en fonction de ω . $\dfrac{d|Z|}{d\omega} = -\dfrac{m\omega_0^{\,2}}{2} \dfrac{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)\left(\omega_0^{\,2} + \omega^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right) + 4\lambda^2\omega_0^{\,2}\omega^2}}$

$$\begin{cases} \omega \to 0 \\ \omega \to +\infty \end{cases} \Rightarrow |Z| \to +\infty$$ L'oscillateur est équivalent à un circuit électrique ouvert.

ω	0		ω_0		$+\infty$
$\frac{d\lvert Z\rvert}{dw}$		-	0	+	
$\lvert Z\rvert$	$+\infty$	↘	$2\lambda m\omega_0^3$	↗