CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

§1. Sự Chia Hết.

1.1 Định nghĩa: Cho *a* và *b* là hai số nguyên, ta nói *a* là *ước số* của *b* nếu tồn tại số nguyên *c* sao cho *b = c.a.*

Nếu *a* là ước số của *b* thì ta nói *b* là *bội số* của *a*. Kí hiệu

$$a|b \text{ hay } b \vdots a.$$

1.2 Thí dụ:

- 13|182 vì 182 = 14.13
- (-3)|12 vì 12 = (-4)(-3)
- 13|0 vì 0 = 0.13

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

1.3 Nhận xét:

$-\forall a \in \mathbb{Z}, 1|a.$

$-\forall a \in \mathbb{Z}, a|0.$

Đặc biệt: $0|0$

1.4 Mệnh đề. *Nếu a|b và b|c thì a|c.*

Chứng minh. Nếu $a|b$ và $b|c$ thì có e, f *sao cho*

$$b = ea, c = fb$$
$$\Rightarrow c = (fe)a$$
$$\Rightarrow a|c.$$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

1.5 Mệnh Đề. *Cho c|a và c|b. Khi đó với m, n là hai số nguyên ta có:*

$$c|(ma+nb).$$

Chứng minh.

$$a = ec, b = fc.$$
$$\Rightarrow ma + nb = (em + nf)c$$
$$\Rightarrow c|(ma+nb)$$

§2.Phép Chia Euclid.

2.1 Phép Chia Euclid: Cho hai số *m, n* với *n > 0.* Khi đó tồn tại duy nhất cặp *q, r* ∈ *Z* sao cho $0 \le r < n,$

$$m = qn + r$$

Trong biểu diễn này, *m* được gọi là *số bị chia, n* là *số chia, q* là *thương số* và *r* được gọi là *dư số.*

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

2.2 Thí dụ.

$$17 \;\underline{|5} \qquad\qquad -17 \;\underline{|5}$$
$$2 \quad 3 \qquad\qquad 3 \quad -4$$
$$\Rightarrow 17 = 3.5 + 2 \qquad \Rightarrow -17 = (-4).5 + 3$$

2.3 Mệnh đề: *Trong phép chia Euclid m = qn + r thì cặp số q và r được xác định duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử $m = q_1 n + r_1 = q_2 n + r_2$

$$\Rightarrow r_2 - r_1 = (q_1 - q_2)n \Rightarrow n \,\big|\, |r_2 - r_1|.$$

Mặt khác $\quad 0 \le r_1, r_2 < n \Rightarrow |r_2 - r_1| < n$

Do đó $\quad |r_2 - r_1| = 0 \Rightarrow r_2 = r_1$

$$\Rightarrow q_2 - q_1 = 0 \Rightarrow q_2 = q_1.$$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

§3. Hệ Cơ Số.

3.1 Các Hệ Cơ Số Thông Dụng.

- Hệ Cơ Số 2: Bao gồm các chữ số: 0, 1.
- Hệ Cơ Số 8: Bao gồm các chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
- Hệ Cơ Số 10: Bao gồm các chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Hệ Cơ Số 16: Bao gồm các chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A, B, C, D, E, F*. Giá trị các chữ số *A, B, C, D*, E, F trong hệ cơ số 16 tương ứng giá trị 10, 11, 12, 13, 14, 15 trong hệ cơ số 10.
- Trong hệ cơ số khác 10, các số được viết trong ngoặc đơn và giá trị cơ số được viết thấp xuống về bên phải.

3.2 Thí dụ: $(1472)_8$, $(100101100)_2$, $(A9B0F)_{16}$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

3.3 Chuyển đổi cơ số *b* sang cơ số 10.

giá trị của $\quad (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_b$

Trong cơ số 10 là: $\quad n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots a_1 b + a_0.$

3.4 Thí dụ.

- $(10011010)_2 = 1.2^7 + 0.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = 154.$
- $(5027)_8 = 5.8^3 + 0.8^2 + 2.8^1 + 7.8^0 = 2584.$
- $(A7FC)_{16} = 10.16^3 + 7.16^2 + 15.16^1 + 12.16^0 = 43004.$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

Thực hành. Chuyển các số sau sang cơ số 10

$$(110010111)_2; (507631)_8; (25BC7)_{16}$$

Đáp án:

$$(110010111)_2 = 407;$$
$$(507631)_8 = 167833;$$
$$(25BC7)_{16} = 154567.$$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

3.5 Chuyển cơ số 10 sang cơ số *b*.

Thuật toán: Cho n là số nguyên dương và b là cơ số cần chuyển đổi. Dùng thuật chia Euclid thực hiện các bước sau:

– $n = q_0 b + a_0,\ 0 \le a_0 \le b-1.$

– $q_0 = q_1 b + a_1,\ 0 \le a_1 \le b-1$

(Tiếp tục quá trình lấy thương số chia cho b cho tới khi thương số bằng 0)

…

…

$q_{k-2} = q_{k-1} b + a_{k-1},\ 0 \le a_{k-11} \le b-1$

$q_{k-1} = 0.b + a_k,\ 0 \le a_k \le b-1$

Khi đó $n = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_b$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

Thí dụ.

a) $213 = 106\times 2 + 1; 106 = 53\times 2 + 0; 53 = 26\times 2 + 1; 26 = 13\times 2 + 0;$
$13 = 6\times 2 + 1; 6 = 3\times 2 + 0; 3 = 1\times 2 + 1; 1 = 0\times 1 + 1.$
$\Rightarrow 213 = (11010101)_2$

b) $1572 = 196\times 8 + 4; 196 = 24\times 8 + 4; 24 = 3\times 8 + 0; 3 = 0\times 8 + 3.$
$\Rightarrow 1572 = (3044)_8$

c) $22574 = 1410\times 16 + 14; 1410 = 88\times 16 + 2; 88 = 5\times 16 + 8; 5 = 0\times 8 + 5.$
$\Rightarrow 22574 = (582E)_{16}.$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

Thực hành.

a) Chuyển số 572 sang cơ số 2.
b) Chuyển số 2312 sang cơ số 8.
c) Chuyển số 43709 sang cơ số 16.

Đáp án:

a) $(1000111100)_2$
b) $(4410)_8$
c) $(AABD)_{16}$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

3.6 Chuyển cơ số b_1 sang cơ số b_2.

Để chuyển một số từ cơ số b_1 sang cơ số b_2, đầu tiên ta lấy số trong cơ số b_1 chuyển sang cơ số 10, sau đó lấy số trong cơ số 10 chuyển sang cơ số b_2.

Thí dụ. Chuyển $(107)_8$ sang cơ số 2.

Giải. $(107)_8 = 8^2 + 7 = 71 = (1000111)_2$

Thực hành. Chuyển $(B2A7)_{16}$ sang cơ số 8.

Đáp án: $(131247)_8$.

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

§4. Ước số chung lớn nhất và Bội số chung nhỏ nhất.

4.1 Định nghĩa.

a) Số nguyên d được gọi là ước số chung lớn nhất của hai số nguyên a và b nếu d >0, d là một ước chung của a và b (nghĩa là d|a, d|b) và nếu số nguyên c là một ước chung của a và b thì c|d. Ta kí hiệu d = (a, b).

b) Số nguyên m được gọi là bội số chung nhỏ nhất của hai số nguyên a và b nếu m là một bội chung của a và b (nghĩa là a|m và b|m) và nếu số nguyên u là một bội số chung của a và b thì m|u. Ta kí hiệu m = [a, b].

4.2 Thí dụ: (65, 25) = 5, [65, 25] = 325.

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

4.3Mệnh đề. *Ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất của a và b tồn tại duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử d_1, d_2 là hai ước số chung lớn nhất của *a* và *b*. Khi đó,

$$\begin{cases} d_1 | d_2 \\ d_2 | d_1 \end{cases} \Rightarrow d_1 = d_2.$$

Chứng minh trường hợp bội số chung nhỏ nhất hoàn toàn tương tự.

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

4.4 Nhận xét:

a) $(a; b) = (\pm a; \pm b)$, tương tự: $[a; b] = [\pm a, \pm b]$. Do đó, từ đây trong tính toán hay chứng minh ta giả sử $a, b \geq 0$.

b) Nếu $a|b$ *thì* $(a,b) = a$, $[a, b] = b$.

4.5 Bổ đề: Cho *a* và *b* là hai số nguyên. Nếu $a = qb + r$ thì

$$(a,b) = (b,r).$$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

Chứng minh. Đặt $d_1 = (a,b), d_2 = (b,r)$. Khi đó

$$\begin{cases} d_1 | a \\ d_1 | b \end{cases} \Rightarrow d_1 | (a - qb) \Rightarrow \begin{cases} d_1 | r \\ d_1 | b \end{cases} \Rightarrow d_1 | d_2.$$

$$\begin{cases} d_2 | r \\ d_2 | b \end{cases} \Rightarrow d_2 | (qb + r) \Rightarrow \begin{cases} d_2 | a \\ d_2 | b \end{cases} \Rightarrow d_2 | d_1.$$

$$\Rightarrow d_1 = d_2.$$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

4.6 Thuật toán tìm USCLN *d* của *a, b*.

- Nếu *b* là ước của *a*, thì $d = b$;
- Ngược lại , ta lần lượt thực hiện các phép chia:

$a = q_1 b + r_1$, $0 \leq r_1 < b$

$b = q_2 r_1 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$,

$r_1 = q_3 r_2 + r_3$, $0 \leq r_3 \leq r_2$

…

Do $b > r_1 > r_2 > \ldots \geq 0$, phép chia như trên sẽ ngừng sau một số hữu hạn bước.

Gọi r_{n+1} là số dư đầu tiên bằng 0. Ta có:

$r_{n-2} = q_n . r_{n-1} + r_n$, $0 \leq r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = q_{n+1} . r_n + 0$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

4.7 Định lý. $r_n = (a, b)$.

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 4.5, ta có

$$(a,b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{n-1}, r_n) = (r_n, 0)$$

Từ $r_n | 0 \Rightarrow (r_n, 0) = r_n$ ta có $r_n = (a,b)$.

4.8 Thí dụ: Tính (- 435, 1251)

Giải.

$1251 = 2 \times 435 + 381; 435 = 1 \times 381 + 54; 381 = 7 \times 54 + 3; 54 = 18 \times 3 + 0$

$\Rightarrow (-435, 1251) = 3.$

Thực hành. Tính (3355, - 675).

Đáp án: 5.

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

4.9 Định lý. *Giả sử $d = (a, b)$. Khi đó tồn tại hai số nguyên m và n sao cho: $d = ma + nb$.*

4.10 Thí dụ: Tìm *m, n* sao cho $(-435, 1251) = m(-435) + n.1251$

Giải.

$1251 = 2 \times 435 + 381; 435 = 1 \times 381 + 54; 381 = 7 \times 54 + 3; 54 = 18 \times 3 + 0$

$\Rightarrow (-435, 1251) = 3.$

Theo biểu diễn trên, ta có

$$3 = 381 - 7 \times 54 = 381 - 7(435 - 1 \times 381) = -7 \times 435 + 8 \times 381$$
$$= -7 \times 435 + 8(1251 - 2 \times 435) = -23 \times 435 + 8 \times 1251 =$$
$$23(-435) + 8 \times 1251 \Rightarrow m = 23; n = 8.$$

Thực hành. Tìm *m, n* sao cho $(-123, 91) = m(-123) + n.91.$

Đáp án. $m = -37, n = -50.$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

4.11 Chú ý.

a) Cách Định lý 4.9 hoàn toàn giống như cách trình bày trong Thí dụ 4.10.

b) Trong tính toán tìm *m*, *n* nên dùng cách viết

$$a = qb + r$$

Thay cho cách viết $a = bq + r$ để tránh nhầm lẫn.

c) Hai số *m*, *n* trong Định lý 4.9 là không duy nhất

4.11Thí dụ.

$$1 = (4,3); 1 = 1\times 4 - 1\times 3 = -2\times 4 + 3\times 3.$$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

§5. Số nguyên tố và nguyên tố cùng nhau.

5.1 Định nghĩa.

a) Hai số nguyên dương *a, b* được gọi là *nguyên tố cùng nhau* nếu (*a, b*) = 1.

b) Một số nguyên *p* > 1 được gọi là *số nguyên tố* nếu *p* chỉ có đúng hai ước số dương là 1 và chính nó.

5.2 Thí dụ.

a) (4, 9) = 1, vì vậy 4 và 9 là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Các số 2, 3, 5, 7, 11, 13 … là các số nguyên tố

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

5.3 Mệnh đề. *Cho a, b, c là các số nguyên sao cho a là ước của bc và (a, b) = 1. Khi đó a là ước của c.*

Chứng minh: Theo Định lý 4.9, tồn tại hai số nguyên *m, n* sao cho:

$$ma + nb = 1 \Rightarrow mac + nbc = c.$$

$$a|bc \Rightarrow bc = ta \Rightarrow c = mac + nta = (mc + nt)a$$

$$\Rightarrow a|c.$$

5.4 Thí dụ.

$$15|(105\times 93);$$
$$(15,91) = 1.$$
$$\Rightarrow 15|105.$$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

5.5 Mệnh đề. *cho a, b, c là các số nguyên dương. Nếu (a, b) = 1 và (a, c) = 1 thì (a, bc) = 1.*

Chứng minh. Đặt *d* = (*a, bc*), *e* = (*d, b*). Khi đó

$$\begin{cases} e|d \\ e|b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e|a \\ e|b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e|(a,b) \\ (a,b)=1 \end{cases} \Rightarrow e|1 \Rightarrow e = 1$$

$$\begin{cases} (d,b)=1 \\ d|bc \\ d|a \end{cases} \xrightarrow{5.3} \begin{cases} d|c \\ d|a \end{cases} \to \begin{cases} d|(a,c) \\ (a,c)=1 \end{cases} \to d = 1.$$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

5.6 Mệnh đề. *Cho a, b, c là các số nguyên dương. Nếu a|c, b|c và (a, b) = 1 thì ab|c.*

Chứng minh. Ta viết *c* = *kb*. Do (*a, b*) = 1 và *a*|*kb* nên *a*|*k*. Viết *k* = *k'a*, ta có *c* = *k'.ab* Nghĩa là *ab*|*c*.

5.7 Mệnh đề: *Cho a, b, m, n là các số nguyên thỏa mãn* $ma + nb = 1$. *Khi đó,* $(a,b) = 1$.

Chứng minh. Đặt $d = (a,b)$. Khi đó

$$\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \to \begin{cases} d|ma \\ d|nb \end{cases} \to d|(ma+nb) \to d|1 \to d = 1.$$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

5.8 Bổ đề. $d = (a,b) \to (a/d, b/d) = 1.$

Chứng minh.

$$\exists m,n,\ ma + nb = d \to m\frac{a}{d} + n\frac{b}{d} = 1 \xrightarrow{5.7} \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

5.9 Định lý. *Cho a, b, là các số nguyên dương. Khi đó,*

$$[a,b](a,b) = ab.$$

Chứng minh. Đặt $d = (a,b), a = ud, b = vd$. Nếu *c* là một bội chung của *a* và *b* thì $c = ea = eud = fb = fvd, (u,v) = 1$. Ta có $a|uvd, b|uvd$

Hơn nữa

$$\begin{cases} u|c/d \\ v|c/d \end{cases} \xrightarrow{5.6} uv|c/d \to uvd|c$$

$$[a,b] = uvd = \frac{ab}{d} \to [a,b](a,b) = ab.$$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

5.10 Định lý căn bản của số học. *Mọi số nguyên dương đều được phân tích thành tích hữu hạn những thừa số nguyên tố. Hơn nữa, cách phân tích này là duy nhất, sai khác một phép hoán vị các thừa số nguyên tố.*

5.11 Thí dụ. $260 = 2^3.3^2.5$.

Thực hành. Phân tích 539000 thành tích các thừa số nguyên tố.

Đáp án. $2^3.5^3.7^2.11$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

5.12 Bổ đề. *Nếu* $x = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_n^{t_n}, y = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{t_n}$ *thì*

$$x \mid y \Leftrightarrow 0 \le t_i \le u_i, \forall i = 1,...,n$$

5.13 Định lý. *Cho hai số tự nhiên a, b với*

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n}, b = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_n^{s_n}, r_i, s_i \ge 0.$$

Khi đó

$$(a,b) = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_n^{t_n}, t_i = \min\{r_i, s_i\}$$

$$[a,b] = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}, u_i = \max\{r_i, s_i\}$$

Với mọi $i = 1,...,n.$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

Chứng minh. Hiển nhiên, $p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_n^{t_n}$ là ước số chung của a và b. *G*iả sử c là ước số chung của a và b, theo Bổ đề 5.12

$$c = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_n^{l_n}, l_i \le r_i, l_i \le s_i \, (\forall i = 1,\ldots n)$$

$$\to l_i \le \min\{r_i, s_i\} = t_i \to c \mid p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_n^{t_n}$$

$$\to p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_n^{t_n} = (a,b).$$

Hiển nhiên,$p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}$ là bội số chung của a và b. *G*iả sử m là bội số chung của a và b, theo Bổ đề 5.12

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}, r_i \le k_i, s_i \le k_i \, (\forall i = 1,\ldots n)$$

$$\to k_i \ge \max\{r_i, s_i\} = u_i \to p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n} \mid m,$$

$$\to p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n} = [a,b].$$

CHƯƠNG 1: TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN

5.14 Thí dụ. $a = 2^3.5^4.13^3.23^4, b = 3^5.5^2.11^4.13^5.$

$$(a,b) = 5^2.13^3; [a,b] = 2^3.5^4.11^4.13^5.23^4.$$

5.15 Mệnh đề. Cho $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_n^{t_n}$. Khi đó số ước dương của n *bằng*

$$(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n).$$

Chứng minh. Nếu m là một ước dương của n thì m có dạng

$$m = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}, 0 \le u_i \le t_i \, (\forall i = 1,\ldots,n)$$

Suy ra u_i có $(1 + t_i)$ cách chọn. Theo nguyên lý nhân số ước dương của n chính là $(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)$.

5.16 Hệ quả. Nếu $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_n^{t_n}, m = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}, m \mid n$ thì số ước dương của n chia hết cho n bằng

$$(1+t_1-u_1)(1+t_2-u_2)\cdots(1+t_n-u_n).$$