

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

A BÀI TẬP LÝ THUYẾT

Câu 1. Tìm các số nguyên dương m sao cho các biểu thức dưới đây là đúng.

- ① $27 \equiv 5 \pmod m;$

② $103 \equiv 6 \pmod m;$
- ③ $1000 \equiv 1 \pmod m;$

④ $1331 \equiv 0 \pmod m.$

Câu 2. Đồng hồ kim chỉ mấy giờ?

- a) 29 tiếng sau khi nó chỉ lúc 11 giờ;
- b) 100 tiếng sau khi nó chỉ 2 giờ;
- c) 50 tiếng trước khi nó chỉ 6 giờ.

Câu 3. Tìm số nguyên không âm nhỏ nhất là đồng dư của các số sau trong $\pmod{13}$.

- ① 22;

② 100;
- ③ 1001;

④ -1 ;
- ⑤ -100 ;

⑥ -1000 .

① 2^{32} ; ② 2^{47} ; ③ 2^{200} .

$$\textcircled{1} \ 3^{10} \bmod 11; \qquad \textcircled{2} \ 2^{12} \bmod 13; \qquad \textcircled{3} \ 5^{22} \bmod 23.$$

Câu 6. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất đồng dư với:

① $10! \mod 11;$

② $12! \mod 13;$

③ $16! \mod 17.$

Câu 7. Tìm phần tử khả nghịch của \overline{m} trong vành \mathbb{Z}_n . Với:

① $m = 4, n = 27;$

② $m = 15, n = 77;$

③ $m = 7, n = 1001.$

Câu 8. Giải các phương trình sau:

① $3x \equiv 2 \mod 7;$

② $6x \equiv 3 \mod 9;$

③ $17x \equiv 14 \mod 21;$

④ $15x \equiv 9 \mod 25;$

⑤ $128x \equiv 833 \mod 1001;$

⑥ $987x \equiv 610 \mod 1597.$

Câu 10. Tìm tất cả giá trị của x thoả mãn:

$$\textcircled{1} \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{11}; \\ x \equiv 3 \pmod{17}; \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{11} \\ x \equiv -1 \pmod{13}; \\ x \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}.$$

① $\phi(7)$;

② $\phi(10)$;

③ $\phi(1000);$

④ $\phi(13013)$

[illegible]

Câu 12. Tính:

① $\sigma(7)$;

② $\sigma(10)$;

③ $\sigma(1000)$;

④ $\sigma(13013)$

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

Câu 13. Tính:

① $\tau(7)$;

② $\tau(10)$;

③ $\tau(1000)$;

④ $\tau(13013)$

[illegible]

Câu 14. Rút gọn $8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \pmod{7}$.

.....

.....

.....

Câu 15. Rút gọn $2^{43210} \bmod 101$.

Câu 16. Hãy tìm 3 chữ số tận cùng của 7^{803} .

Câu 17. Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố thoả $a^p \equiv b^p \pmod{p}$. Chứng minh rằng: $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

Câu 18. Cho a, b là các số nguyên dương và p là số nguyên tố với $p \nmid a$, thì nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{p}$ là x thoả $x \equiv a^{p-2}b \pmod{p}$.

Áp dụng, giải các phương trình đồng dư sau:

① $7x \equiv 12 \pmod{17}$;

② $4x \equiv 11 \pmod{19}$

Câu 19. Cho p là một số nguyên tố lẻ, chứng minh rằng: $2(p-3)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Câu 20. Cho p và q là hai số nguyên tố phân biệt, chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$

a) $\tau(n)$ là một số nguyên lẻ nếu và chỉ nếu n là một số chính phương.

b) $\sigma(n)$ là một số nguyên lẻ nếu và chỉ nếu n là một số chính phương hoặc bằng hai lần một số chính phương.

[illegible]

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or typing. There are no margins, text, or other markings on the page.

[illegible]

Câu 26. Với mọi số nguyên dương n , chứng minh rằng:

① $\sum_{d|n} \sigma(d) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} \tau(d);$

② $\sum_{d|n} \frac{n}{d} \sigma(d) = \sum_{d|n} d \tau(d).$

Câu 27. Tìm cấp của các số nguyên 2, 3 và 5:

① mod 17;

② mod 19;

③ mod 23.

Câu 28. Chứng minh rằng $\phi(2^n - 1)$ là bội của n với mọi $n > 1$.

[illegible]

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or typing. There are no margins, text, or other markings on the page.

[illegible]

Câu 33.

- a) Tìm hai nghiệm nguyên thủy của 10;
- b) Biết rằng 3 là một nghiệm nguyên thủy của 17. Tìm 8 nghiệm nguyên thủy của 17.

Câu 34.

- a) Biết rằng 2 là một nghiệm nguyên thủy của 19. Tìm tất cả các thặng dư bình phương của 19;
b) Tìm các thặng dư của 29 và 31.

Câu 35. Tính các kí hiệu Legendre sau:

- ① $\left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 11 \end{smallmatrix} \right];$

② $\left[\begin{smallmatrix} 11 \\ 23 \end{smallmatrix} \right];$

③ $\left[\begin{smallmatrix} 6 \\ 31 \end{smallmatrix} \right];$

④ $\left[\begin{smallmatrix} 71 \\ 73 \end{smallmatrix} \right];$

⑤ $\left[\begin{smallmatrix} -219 \\ 383 \end{smallmatrix} \right];$

⑥ $\left[\begin{smallmatrix} 461 \\ 773 \end{smallmatrix} \right];$

⑦ $\left[\begin{smallmatrix} 1234 \\ 4567 \end{smallmatrix} \right];$

⑧ $\left[\begin{smallmatrix} 3658 \\ 12703 \end{smallmatrix} \right].$

Câu 36. Tính các kí hiệu Jacobi sau:

- ① $\left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 21 \end{smallmatrix} \right];$

② $\left[\begin{smallmatrix} 27 \\ 201 \end{smallmatrix} \right];$

③ $\left[\begin{smallmatrix} 21 \\ 221 \end{smallmatrix} \right];$

④ $\left[\begin{smallmatrix} 111 \\ 1001 \end{smallmatrix} \right];$

⑤ $\left[\begin{smallmatrix} 215 \\ 253 \end{smallmatrix} \right];$

⑥ $\left[\begin{smallmatrix} 1009 \\ 2307 \end{smallmatrix} \right].$

[illegible]
$$\sum_{a=1}^{(p-1)/2} \begin{bmatrix} a \\ p \end{bmatrix} = 0.$$
[illegible]

[]

Câu 40. Cho n là số nguyên dương lẻ. Chứng minh rằng: $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ |n| \end{bmatrix}$.

Câu 41. Chứng minh rằng: $\tau(n) = \tau(n+1) = \tau(n+2) = \tau(n+3)$ với $n = 3655$ và $n = 4503$.

Câu 42. Chứng minh rằng: $\sigma(n) = \sigma(n + 1)$ khi $n = 14,206,957$.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or typing. There are no margins, text, or other markings on the page.

This image shows a full page of dot grid paper. The dots are arranged in a precise, repeating pattern across the entire surface, providing a guide for writing or drawing without the prominence of solid lines.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

a) Với mọi số nguyên a , tính a^{37} trong mod 1729.

- b) Với mọi số nguyên a , tính a^{13} trong mod 2730.
- c) Với mọi số nguyên a , tính a^{33} trong mod 4080.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 47. Cho m, n là hai số nguyên tố cùng nhau, chứng minh rằng:

$$m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \mod mn.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 48. Chứng minh rằng 15 không có nghiệm nguyên thủy cấp 2, 4, 7, 8, 11, 13 và 14.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 49. Chứng minh rằng 3 là nghiệm nguyên thủy của mọi số nguyên có dạng 7^k và $2 \cdot 7^k$.

Câu 50. Tìm tất cả thăng dư bình phương của:

- ④ 19

Câu 51. Tính giá trị của kí hiệu Legendre của $\left[\begin{smallmatrix} j \\ 7 \end{smallmatrix} \right]$, với $j = \overline{1,6}$

Câu 52. Tính giá trị của các kí hiệu Legendre sau:

- ① $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 53 \end{smallmatrix} \right]$

② $[j7\&79 \]$

③ $\left[\begin{smallmatrix} 15 \\ 101 \end{smallmatrix} \right]$
- ④ $\left[\begin{smallmatrix} 31 \\ 641 \end{smallmatrix} \right]$

⑤ $\left[\begin{smallmatrix} 111 \\ 991 \end{smallmatrix} \right]$

⑥ $\left[\begin{smallmatrix} 105 \\ 1009 \end{smallmatrix} \right]$.

Câu 53. Với những giá trị nguyên dương nào của n nguyên tố cùng nhau với 15 thì $\left[\begin{smallmatrix} 15 \\ n \end{smallmatrix} \right] = 1$.

Câu 54. Cho $a \neq 0$, chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho $\left[\begin{smallmatrix} a \\ n \end{smallmatrix} \right] = -1$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 55. Cho a là số nguyên dương lẻ, chứng minh rằng: $\begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ |a| \end{bmatrix}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B BÀI TẬP THỰC HÀNH

Dưới đây là một số lưu ý khi nộp bài.

- ① Yêu cầu viết bằng Python 3. Khi nộp bài, chỉ nộp lại file có đuôi .py theo định dạng sau: "n_MSSV.py".
Trong đó, n là số thứ tự bài tập, MSSV là mã số sinh viên.
Ví dụ, bạn có MSSV là 1712000 làm câu 1, thì đặt tên file là: "1_1712000.py".
- ② Yêu cầu sử dụng thư viện **argv** để khai báo biến. Tức là, đầu mỗi file .py, các bạn thực hiện khai báo như dưới đây trước khi thực hành.

```
from sys import argv
script, input = argv
```

Câu 1. Viết chương trình thực hiện các yêu cầu sau:

- Đọc file input.txt với 10 bộ test, mỗi bộ test trên một dòng (theo thứ tự $a b c n$). Trong đó, các số trên là hệ số của phương trình đồng dư $ax + b \equiv c \pmod n$.
- Xuất ra file 1_MSSV.txt gồm 10 dòng mỗi dòng là các nghiệm của phương trình đồng dư trên trong \mathbb{Z}_n (theo thứ tự từ nhỏ đến lớn). Nếu vô nghiệm thì in ra x.
Ví dụ 1: Input: 12 44 10 92. Output: x
Ví dụ 2: Input: 15 -36 29 85. Output: 10,27,44,61,78

Câu 2. Viết chương trình thực hiện các yêu cầu sau:

- Đọc file input.txt với 10 bộ test, mỗi bộ test trên một dòng ((gồm 1 số n). Trong đó, n là một số tự nhiên.
- Xuất ra file 2_MSSV.txt gồm 10 dòng mỗi dòng lần lượt là giá trị của $\phi(n)$, $\sigma(n)$, $\tau(n)$.
Ví dụ: Input: 10. Output: 4,18,4

Câu 3. Viết chương trình thực hiện các yêu cầu sau:

- Đọc file input.txt với 10 bộ test, mỗi bộ test trên một dòng (theo thứ tự $a b$). Trong đó a, b là các số tự nhiên.
- Xuất ra file 3_MSSV.txt gồm 10 dòng mỗi dòng là kết quả của kí hiệu Jacobi $\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]$.
Ví dụ: Input: 37 1231. Output: -1