

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

A BÀI TẬP LÝ THUYẾT

Câu 1. Tìm các số nguyên dương  $m$  sao cho các biểu thức dưới đây là đúng.

- ①  $27 \equiv 5 \pmod m;$

②  $103 \equiv 6 \pmod m;$
- ③  $1000 \equiv 1 \pmod m;$

④  $1331 \equiv 0 \pmod m.$

Câu 2. Đồng hồ kim chỉ mấy giờ?

- a) 29 tiếng sau khi nó chỉ lúc 11 giờ;
- b) 100 tiếng sau khi nó chỉ 2 giờ;
- c) 50 tiếng trước khi nó chỉ 6 giờ.

Câu 3. Tìm số nguyên không âm nhỏ nhất là đồng dư của các số sau trong  $\pmod{13}$ .

- ① 22;

② 100;
- ③ 1001;

④  $-1$ ;
- ⑤  $-100$ ;

⑥  $-1000$ .

①  $2^{32}$ ;                      ②  $2^{47}$ ;                      ③  $2^{200}$ .

$$\textcircled{1} \ 3^{10} \bmod 11; \qquad \textcircled{2} \ 2^{12} \bmod 13; \qquad \textcircled{3} \ 5^{22} \bmod 23.$$

**Câu 6.** Tìm số nguyên dương nhỏ nhất đồng dư với:

①  $10! \mod 11;$

②  $12! \mod 13;$

③  $16! \mod 17.$

**Câu 7.** Tìm phần tử khả nghịch của  $\overline{m}$  trong vành  $\mathbb{Z}_n$ . Với:

①  $m = 4, n = 27;$

②  $m = 15, n = 77;$

③  $m = 7, n = 1001.$

**Câu 8.** Giải các phương trình sau:

①  $3x \equiv 2 \mod 7;$

②  $6x \equiv 3 \mod 9;$

③  $17x \equiv 14 \mod 21;$

④  $15x \equiv 9 \mod 25;$

⑤  $128x \equiv 833 \mod 1001;$

⑥  $987x \equiv 610 \mod 1597.$

**Câu 9.** Cho  $a_0$  là một phần tử khả nghịch của  $a$  trong  $\mathbb{Z}_n$ ,  $b_0$  là một phần tử khả nghịch của  $b$  trong  $\mathbb{Z}_n$ . Chứng minh rằng  $a_0 b_0$  là một phần tử khả nghịch của  $ab$  trong  $\mathbb{Z}_n$ .

**Câu 10.** Tìm tất cả giá trị của  $x$  thoả mãn:

$$\textcircled{1} \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod{17} \end{cases};$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{11} \\ x \equiv -1 \pmod{13} \\ x \equiv 1 \pmod{17} \end{cases};$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}.$$

**Câu 11.** Tính:

$$\textcircled{1} \phi(7);$$

$$\textcircled{2} \phi(10);$$

$$\textcircled{3} \phi(1000);$$

$$\textcircled{4} \phi(13013)$$

[illegible]

**Câu 12. Tính:**

①  $\sigma(7)$ ;

②  $\sigma(10)$ ;

③  $\sigma(1000)$ ;

④  $\sigma(13013)$

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

**Câu 13. Tính:**

①  $\tau(7)$ ;

②  $\tau(10)$ ;

③  $\tau(1000)$ ;

④  $\tau(13013)$

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or typing. There are no margins, text, or other markings on the page.

**Câu 14.** Rút gọn  $8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \pmod{7}$ .

.....

.....

.....

**Câu 15.** Rút gọn  $2^{43210} \bmod 101$ .

**Câu 16.** Hãy tìm 3 chữ số tận cùng của  $7^{803}$ .

**Câu 17.** Cho  $a, b$  là các số nguyên và  $p$  là số nguyên tố thoả  $a^p \equiv b^p \pmod{p}$ . Chứng minh rằng:  $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$ .

Áp dụng, giải các phương trình đồng dư sau:

②  $4x \equiv 11 \pmod{19}$

**Câu 19.** Cho  $p$  là một số nguyên tố lẻ, chứng minh rằng:  $2(p-3)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

**Câu 20.** Cho  $p$  và  $q$  là hai số nguyên tố phân biệt, chứng minh rằng:  $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$

**Câu 21.** Cho  $p$  là một số nguyên tố và  $a$  là một số nguyên thỏa  $p \nmid a$ . Chứng minh rằng:  $a^{p-2}$  là một phần tử khả nghịch của  $a$  trong  $\mathbb{Z}_p$ .

**Câu 22.** Chứng minh rằng:

- a)  $\tau(n)$  là một số nguyên lẻ nếu và chỉ nếu  $n$  là một số chính phương.
- b)  $\sigma(n)$  là một số nguyên lẻ nếu và chỉ nếu  $n$  là một số chính phương hoặc bằng hai lần một số chính phương.



[illegible]

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

**Câu 26.** Với mọi số nguyên dương  $n$ , chứng minh rằng:

①  $\sum_{d|n} \sigma(d) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} \tau(d);$

②  $\sum_{d|n} \frac{n}{d} \sigma(d) = \sum_{d|n} d \tau(d).$

**Câu 27.** Tìm cấp của các số nguyên 2, 3 và 5:

① mod 17;

② mod 19;

③ mod 23.

**Câu 28.** Chứng minh rằng  $\phi(2^n - 1)$  là bội của  $n$  với mọi  $n > 1$ .

[illegible]

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or typing. There are no margins, text, or other markings on the page.

[illegible]

.....

.....

.....

**Câu 32.** Gọi  $r$  là một nghiệm nguyên thủy của  $n$ . Chứng minh rằng  $r^k$  là nghiệm nguyên thủy của  $n$  nếu và chỉ nếu  $(k, \phi(n)) = 1$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 33.**

- a) Tìm hai nghiệm nguyên thủy của 10;
- b) Biết rằng 3 là một nghiệm nguyên thủy của 17. Tìm 8 nghiệm nguyên thủy của 17.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 34.**

- a) Biết rằng 2 là một nghiệm nguyên thủy của 19. Tìm tất cả các thặng dư bình phương của 19;
- b) Tìm các thặng dư của 29 và 31.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 35.** Tính các kí hiệu Legendre sau:

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix};$$

$$\textcircled{2} \begin{bmatrix} 11 \\ 23 \end{bmatrix};$$

$$\textcircled{3} \begin{bmatrix} 6 \\ 31 \end{bmatrix};$$

$$\textcircled{4} \begin{bmatrix} 71 \\ 73 \end{bmatrix};$$

⑤  $\begin{bmatrix} -219 \\ 383 \end{bmatrix}$ ;

⑥  $\begin{bmatrix} 461 \\ 773 \end{bmatrix}$ ;

⑦  $\begin{bmatrix} 1234 \\ 4567 \end{bmatrix}$ ;

⑧  $\begin{bmatrix} 3658 \\ 12703 \end{bmatrix}$ .

**Câu 36.** Tính các kí hiệu Jacobi sau:

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} 5 \\ 21 \end{bmatrix};$$

$$\textcircled{2} \begin{bmatrix} 27 \\ 201 \end{bmatrix};$$

$$\textcircled{3} \begin{bmatrix} 21 \\ 221 \end{bmatrix};$$

$$\textcircled{4} \begin{bmatrix} 111 \\ 1001 \end{bmatrix};$$

$$\textcircled{5} \begin{bmatrix} 215 \\ 253 \end{bmatrix};$$

⑥  $\begin{bmatrix} 1009 \\ 2307 \end{bmatrix}$ .

[illegible]
$$\sum_{a=1}^{(p-1)/2} \begin{bmatrix} a \\ p \end{bmatrix} = 0.$$

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or typing. There are no margins, text, or other markings on the page.

[illegible]

.....

.....

**Câu 40.** Cho  $n$  là số nguyên dương lẻ. Chứng minh rằng:  $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ |n| \end{bmatrix}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## B BÀI TẬP THỰC HÀNH

Dưới đây là một số lưu ý khi nộp bài.

- ① Yêu cầu viết bằng Python 3. Khi nộp bài, chỉ nộp lại file có đuôi .py theo định dạng sau: "n\_MSSV.py".  
Trong đó,  $n$  là số thứ tự bài tập, MSSV là mã số sinh viên.  
Ví dụ, bạn có MSSV là 1712000 làm câu 1, thì đặt tên file là: "1\_1712000.py".
- ② Yêu cầu sử dụng thư viện **argv** để khai báo biến. Tức là, đầu mỗi file .py, các bạn thực hiện khai báo như dưới đây trước khi thực hành.  

```
from sys import argv
script, input = argv
```

**Câu 1.** Viết chương trình thực hiện các yêu cầu sau:

- Đọc file input.txt với 10 bộ test, mỗi bộ test trên một dòng (theo thứ tự  $a b c n$ ). Trong đó, các số trên là hệ số của phương trình đồng dư  $ax + b \equiv c \pmod n$ .
- Xuất ra file 1\_MSSV.txt gồm 10 dòng mỗi dòng là các nghiệm của phương trình đồng dư trên trong  $\mathbb{Z}_n$  (theo thứ tự từ nhỏ đến lớn). Nếu vô nghiệm thì in ra x.  
*Ví dụ 1:* Input: 12 44 10 92. Output: x  
*Ví dụ 2:* Input: 15 -36 29 85. Output: 10,27,44,61,78

**Câu 2.** Viết chương trình thực hiện các yêu cầu sau:

- Đọc file input.txt với 10 bộ test, mỗi bộ test trên một dòng ((gồm 1 số  $n$ ). Trong đó,  $n$  là một số tự nhiên.
- Xuất ra file 2\_MSSV.txt gồm 10 dòng mỗi dòng lần lượt là giá trị của  $\phi(n)$ ,  $\sigma(n)$ ,  $\tau(n)$ .  
*Ví dụ:* Input: 10. Output: 4,18,4

**Câu 3.** Viết chương trình thực hiện các yêu cầu sau:

- Đọc file input.txt với 10 bộ test, mỗi bộ test trên một dòng (theo thứ tự  $a b$ ). Trong đó  $a, b$  là các số tự nhiên.
- Xuất ra file 3\_MSSV.txt gồm 10 dòng mỗi dòng là kết quả của kí hiệu Jacobi  $\left[ \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]$ .  
*Ví dụ:* Input: 37 1231. Output: -1