

Forelæsning 7: Ortonormale baser og ortogonale matricer

LinAlgDat 2019/2020

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk og henrikp@math.ku.dk

11. maj 2020 — Dias 1/35

Prikprodukt

Definition 4.1 (Prikprodukt)

Prikproduktet af to vektorer

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

i \mathbb{R}^n defineres som:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n \in \mathbb{R}.$$

Eksempel (Beregning af prikprodukt)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

Dias 3/35

Oversigt

- ❶ Prikprodukt og norm
- ❷ Ortogonal projektion
- ❸ Ortonormale baser
- ❹ Ortogonale matricer
- ❺ Ortogonale lineære transformationer

Dias 2/35

Regneregler for prikprodukt

For vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ og tal (skalar) $c \in \mathbb{R}$ gælder:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, og man har $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ netop hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Eksempel (Reduktion af udtryk)

Regnereglerne ovenfor giver fx, at der for $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gælder

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot 2\mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - 2\mathbf{v} \cdot 2\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 4(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Dias 4/35

Norm

Definition 4.2 (Norm)

Normen af en vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

defineres som:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

L^AT_EX: \| giver \|\

Eksempel (Beregning af norm)

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \simeq 3.74$$

Dias 5/35

Enhedsvektorer

Definition (Enhedsvektor)

En vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ kaldes en **enhedsvektor** hvis $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Eksempel (Normering til enhedsvektor)

For en vilkårlig vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ i \mathbb{R}^n er den **normerede** vektor

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

en enhedsvektor. For vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{bliver} \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.27 \\ 0.53 \\ 0.80 \end{pmatrix},$$

som er en enhedsvektor:

$$\|\mathbf{u}'\|^2 = 0.27^2 + 0.53^2 + 0.80^2 = 1.$$

Dias 7/35

Regneregler for norm

For vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og tal (skalar) $c \in \mathbb{R}$ gælder:

- $\|\mathbf{v}\| \geq 0$, og man har $\|\mathbf{v}\| = 0$ netop hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $\|c\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|$
- $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ (**Cauchy–Schwarz's ulighed**)
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (**Trekantsuligheden**)

Eksempel (Cauchy–Schwarz og trekantsuligheden)

For vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

checkes Cauchy–Schwarz's ulighed:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |32| = 32 \leq 32.83 \simeq \sqrt{14} \sqrt{77} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

og trekantsuligheden:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 9^2} \simeq 12.45 \leq 12.52 \simeq \sqrt{14} + \sqrt{77} = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Dias 8/35

Euklidisk afstand

Definition 4.3 (Euklidisk afstand)

Den (**Euklidiske**) afstand mellem to vektorer

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

i \mathbb{R}^n defineres som:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}.$$

Eksempel (Beregning af afstand)

$$d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(1-4)^2 + (2-5)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{27} \simeq 5.20$$

Dias 8/35

Vinklen mellem to vektorer

For $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ (eller \mathbb{R}^3) kan man vha. cosinusrelationerne vise

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

hvor θ er vinklen mellem \mathbf{u} og \mathbf{v} .

Samme formel bruges til at *definere* vinklen mellem vektorer i \mathbb{R}^n :

Definition 4.4 (Vinklen mellem to vektorer)

Vinklen θ mellem to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ defineres ved formelen:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Ortogonal vektorer og Pythagoras

For vinklen θ mellem to vektorer \mathbf{u} og \mathbf{v} har man:

$$\theta = 90^\circ \iff \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = 0 \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Definition 4.5 (Ortogonal vektorer)

To vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ kaldes **ortogonale** (vinkelrette) såfremt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. I dette tilfælde skriver man $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

L^AT_EX: \perp giver \perp

Theorem 4.2 (Pythagoras)

Betragt vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Hvis $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, så gælder

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

(Det omvendte gælder også.)

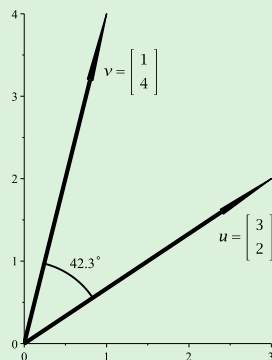
Eksempel (Bestemmelse af vinkel)

Vinklen θ mellem vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

beregnes således:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{11}{\sqrt{13} \sqrt{17}} \simeq 0.74 \implies \theta \simeq 42.3^\circ$$



Eksempel (Ortogonal vektorer og Pythagoras)

Vektorerne

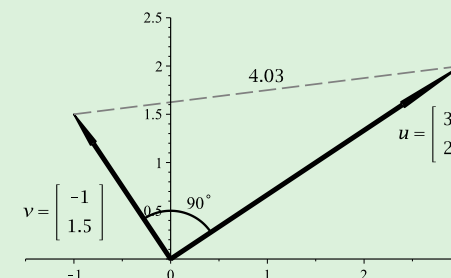
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

er ortogonale (vinkelrette) fordi

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1.5 = 0$$

Derfor gælder Pythagoras:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2^2 + 3.5^2 = 16.25 (\simeq 4.03^2) = 13 + 3.25 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$



Ortogonal projektion

Definition 4.6 (Projektion, komponent og spejling)

Lad $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ være en vektor i \mathbb{R}^n og lad $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}\}$ være underrummet udspændt af \mathbf{u} (altså linien gennem $\mathbf{0}$ med retningsvektor \mathbf{u}).

For enhver vektor \mathbf{v} i \mathbb{R}^n defineres nu:

- Den ortogonale **projektion** af \mathbf{v} på \mathcal{U} er givet ved:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}$$

- Komponenten** af \mathbf{v} ortogonal på \mathcal{U} er givet ved:

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}$$

- Spejlingen** af \mathbf{v} i \mathcal{U} er givet ved:

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = 2 \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v} = 2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

Pointe: $\mathbf{v} = \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) + \text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$ og $\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \perp \text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$.

Dias 13/35

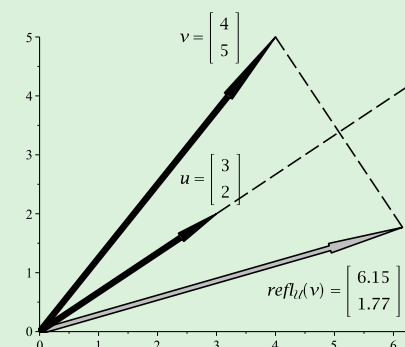
Eksempel (Projektion, komponent og spejling) 2/2

For vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gælder endvidere

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = 2 \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v} = 2 \begin{pmatrix} 5.08 \\ 3.38 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 6.15 \\ 1.77 \end{pmatrix}$$



Dias 15/35

Eksempel (Projektion, komponent og spejling) 1/2

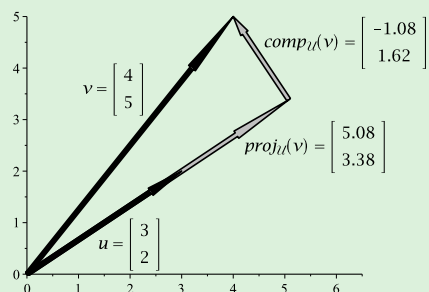
For vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gælder

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{3^2 + 2^2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 5.08 \\ 3.38 \end{pmatrix}$$

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5.08 \\ 3.38 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1.08 \\ 1.62 \end{pmatrix}$$



Dias 14/35

Projektionsmatricen

Lad $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ og sæt $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}\}$. Det er geometrisk klart, at

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(-), \text{comp}_{\mathcal{U}}(-), \text{refl}_{\mathcal{U}}(-): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

er lineære transformationer. Derfor findes $n \times n$ matricer

P – **projektionsmatricen** for \mathcal{U}

C – **komponentmatricen** for \mathcal{U}

R – **spejlingsmatricen** for \mathcal{U}

som for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ opfylder:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v}$$

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}\mathbf{v}$$

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

Spørgsmål. Hvordan ser matricerne **P**, **C** og **R** ud?

Dias 16/35

Formel for projektionsmatricen

Lad $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ være en vektor i \mathbb{R}^n og sæt $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}\}$. Matricerne

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I} = 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} - \mathbf{I}$$

(hvor \mathbf{I} er $n \times n$ enhedsmatricen) opfylder:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v}$$

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}\mathbf{v}$$

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Dias 17/35

Ortonormale baser

Definition 4.7 (Ortogonal og ortonormale sæt)

Et sæt af vektorer $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ i \mathbb{R}^n kaldes

- Parvist **ortogonale** hvis:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \text{ for alle } i \neq j.$$

- Parvist **ortonormale** hvis:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \text{ for alle } i \neq j \quad \text{og} \quad \|\mathbf{u}_i\| = 1 \text{ for alle } i.$$

Eksempel (Standardbasen er et ortonormalt sæt)

Standardbasisvektorerne i \mathbb{R}^3 , dvs.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er parvist ortonormale.

Dias 19/35

Eksempel (Bestemmelse af projektionsmatrix)

Betragt underrummet $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}\}$ af \mathbb{R}^2 hvor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi har

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}^T\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 13$$

Projektionsmatricen for \mathcal{U} er derfor givet ved:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.69 & 0.46 \\ 0.46 & 0.31 \end{pmatrix}.$$

For vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(gen)finder vi:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.69 & 0.46 \\ 0.46 & 0.31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5.08 \\ 3.38 \end{pmatrix}.$$

Dias 18/35

Eksempel (Et ortogonalt / ortonormalt sæt)

Følgende vektorer i \mathbb{R}^3 er parvist ortogonale:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

fordi $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$, idet fx

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 9 \cdot 12 + (-20) \cdot 15 + 12 \cdot 16 = 108 - 300 + 192 = 0$$

Ved normering fås et parvist ortonormalt sæt:

$$\mathbf{u}'_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.80 \\ 0.48 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.60 \\ 0.64 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.80 \\ 0.00 \\ 0.60 \end{pmatrix}$$

Dias 20/35

Theorem 4.3 (Et ortogonalt sæt er lineært uafhængigt)

Ethvert sæt $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ af parvist ortogonale ikke-nul vektorer i \mathbb{R}^n er lineært uafhængigt.

Definition 4.8 (Ortogonal / ortonormal basis)

En **ortogonal / ortonormal basis** for et underrum \mathcal{U} af \mathbb{R}^n er en basis \mathcal{B} for \mathcal{U} hvori vektorerne er parvist ortogonale / ortonormale.

Gram–Schmidt processen (næste forelæsning): En metode til at lave en ortonormal basis ud fra en (almindelig) basis.

Dias 21/35

Det er let at bestemme koordinater mht. en ortogonal basis:

Theorem 4.4 (Koordinater mht. en ortogonal basis)

Lad \mathcal{U} være et underrum af \mathbb{R}^n og lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ være en *ortogonal basis* for \mathcal{U} . For enhver vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ gælder da:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2} \mathbf{u}_k$$

Mao. koordinaterne for \mathbf{v} mht. \mathcal{B} er givet ved:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2} \end{pmatrix}$$

Pointe: Man behøver ikke løse ligninger, men blot prikke vektorer.

Dias 23/35

Eksempel (Standardbasen er en ortonormal basis)

Standardbasen \mathcal{E} for \mathbb{R}^3 er en **ortonormal basis**:

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eksempel (En ortogonal / ortonormal basis for \mathbb{R}^3)

Pga. det forrige Eksempel, Theorem 4.3 og $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ fås, at

- Følgende er en **ortogonal basis** for \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Følgende er en **ortonormal basis** for \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.80 \\ 0.48 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.60 \\ 0.64 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.80 \\ 0.00 \\ 0.60 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dias 22/35

Det er endnu lettere at finde koordinater mht. en ortonormal basis:

Theorem 4.5 (Koordinater mht. en ortonormal basis)

Lad \mathcal{U} være et underrum af \mathbb{R}^n og lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ være en *ortonormal basis* for \mathcal{U} . For enhver vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ gælder da:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k$$

Mao. koordinaterne for \mathbf{v} mht. \mathcal{B} er givet ved:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$$

Dias 24/35

Eksempel (Koordinater mht. en ortonormal basis)

Betragt følgende ortonormal basis for \mathbb{R}^3 :

$$B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.80 \\ 0.48 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.60 \\ 0.64 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.80 \\ 0.00 \\ 0.60 \end{pmatrix} \right\}.$$

Koordinaterne for vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mht. ortonormal basen B' er givet ved

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0.36 - 2 \cdot 0.80 + 3 \cdot 0.48 \\ 1 \cdot 0.48 + 2 \cdot 0.60 + 3 \cdot 0.64 \\ -1 \cdot 0.80 + 2 \cdot 0.00 + 3 \cdot 0.60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 3.6 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

Der gælder altså

$$\mathbf{v} = 0.2\mathbf{u}'_1 + 3.6\mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3$$

Dias 25/35

Definition 4.9 (Ortogonal matricer)

En kvadratisk (dvs. $n \times n$) matrix \mathbf{Q} kaldes **ortogonal** hvis søjlerne i \mathbf{Q} er parvist ortonormale, altså hvis $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

Den inverse til en ortogonal matrix

For en ortogonal matrix \mathbf{Q} gælder $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.

Eksempel (En ortogonal matrix og dens inverse)

(Permutations)matricen

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er oplagt ortogonal, og derfor gælder:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dias 27/35

Ortogonal matricer**Theorem 4.6 (Matricer med parvist ortonormale søjler)**

Lad \mathbf{A} være en $n \times k$ matrix. Søjlerne i \mathbf{A} parvist ortonormale hvis og kun hvis $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_k$ (dvs. \mathbf{A}^T er en venstre-invers til \mathbf{A}).

Eksempel (En matrix med parvist ortonormale søjler)

Søjlerne i følgende 3×2 matrix er parvist ortonormale:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}'_1 | \mathbf{u}'_2) = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 \\ -0.80 & 0.60 \\ 0.48 & 0.64 \end{pmatrix}$$

Følgende udregning bekræfter sætningen ovenfor:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.36 & -0.80 & 0.48 \\ 0.48 & 0.60 & 0.64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 \\ -0.80 & 0.60 \\ 0.48 & 0.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2$$

Derimod gælder *ikke* $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_3$.

Dias 26/35

Theorem 4.7 (Ortogonal matricer og prikprodukt)

En kvadratisk (dvs. $n \times n$) matrix \mathbf{Q} er ortogonal hvis og kun hvis

$$\mathbf{Q} \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{for alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Eksempel (En ortogonal matrix og prikprodukt)

Betragt den ortogonale matrix

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{u}'_1 | \mathbf{u}'_2 | \mathbf{u}'_3) = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.80 \\ -0.80 & 0.60 & 0.00 \\ 0.48 & 0.64 & 0.60 \end{pmatrix}$$

For vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{gælder} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 32.$$

For vektorerne

$$\mathbf{Q} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1.08 \\ 0.40 \\ 3.56 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{Q} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.96 \\ -0.20 \\ 8.72 \end{pmatrix} \quad \text{gælder} \quad \mathbf{Q} \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{v} = 32.$$

Dias 28/35

Ortogonal lineære transformationer

Definition af ortogonale lineære transformationer

En **ortogonal lineær transformation** er en lineær transformation

$$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{givet ved} \quad T(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x}$$

hvor \mathbf{Q} er en ortogonal matrix.

Theorem 4.7 giver, at en ortogonal lineær transformation T opfylder:

$$\|T(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{Q}\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2,$$

dvs. T bevarer norm/længde af vektorer, så T er en **isometri**.

Typiske eksempler: Rotationer og spejlinger.

Dias 29/35

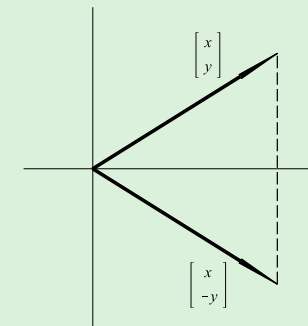
Eksempel (Spejling i førsteaksen)

Matricen for **spejling** i førsteaksen er givet ved

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Denne matrix er **ortogonal** idet

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Dias 31/35

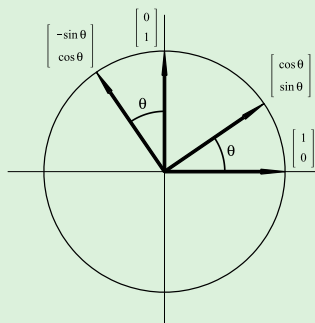
Eksempel (Rotation i planen)

Matricen for **rotation** med vinklen θ mod uret omkring origo er:

$$\mathbf{Q}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Denne matrix er **ortogonal** idet

$$\mathbf{Q}_\theta^T \mathbf{Q}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Dias 30/35

Eksempel (Rotation i rummet)

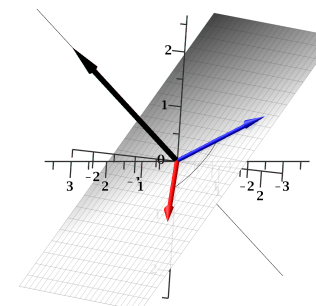
1/4

Betragt den ortogonale matrix fra tidligere eksempel:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.80 \\ -0.80 & 0.60 & 0.00 \\ 0.48 & 0.64 & 0.60 \end{pmatrix}.$$

Spørgsmål: Hvad gør transformationen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x}$?

Svar: For $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ er $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{x}$ den vektor som fås ved at rotere \mathbf{x} vinklen $\theta \simeq (-)74^\circ$ omkring linien med retningsvektor $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$.



Dias 32/35

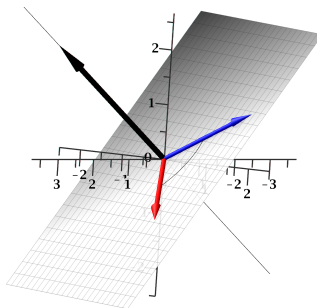
Lad os checke om T faktisk gør det påståede...

Eksempel (Rotation i rummet) 2/4

Ændres retningvektoren $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$ ved multiplikation med \mathbf{Q} ? Nej!

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.80 \\ -0.80 & 0.60 & 0.00 \\ 0.48 & 0.64 & 0.60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{v}$$

(Man siger, at \mathbf{v} er en **egenvektor** for \mathbf{Q} med **egenværdi** $\lambda = 1$)



Dias 33/35

Eksempel (Rotation i rummet) 4/4

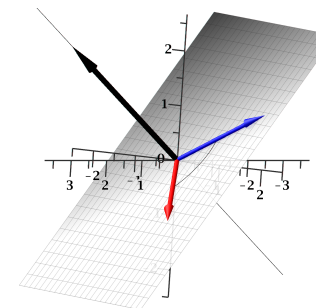
$$\mathbf{v} = (-1, 2, 2) \quad , \quad \mathbf{x} = (2, 1, 0) \quad , \quad \mathbf{y} = (1.2, -1.0, 1.6)$$

- Ja! Vektoren \mathbf{y} ligger i planen med normalvektor \mathbf{v} idet:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = -1 \cdot 1.2 + 2 \cdot (-1.0) + 2 \cdot 1.6 = 0.$$

- Ja! Vinklen mellem \mathbf{x} og \mathbf{y} er faktisk $\theta \simeq 74^\circ$ idet:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \frac{1.4}{\sqrt{5} \sqrt{5}} = 0.28 \quad \Rightarrow \quad \theta \simeq 74^\circ$$



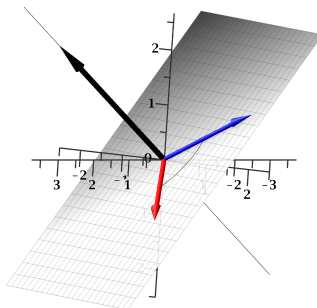
Dias 35/35

Eksempel (Rotation i rummet) 3/4

Vektoren $\mathbf{x} = (2, 1, 0)$ ligger i planen med normalvektor $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$ fordi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$. Vi har:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.80 \\ -0.80 & 0.60 & 0.00 \\ 0.48 & 0.64 & 0.60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -1.0 \\ 1.6 \end{pmatrix}.$$

- Ligger vektoren \mathbf{y} i planen med normalvektor \mathbf{v} ?
- Er vinklen mellem \mathbf{x} og \mathbf{y} faktisk $\theta \simeq 74^\circ$?



Dias 34/35