Forelæsning 9: Determinant og invers matrix

LinAlgDat 2019/2020

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk henrikp@math.ku.dk

Oversigt

1. Determinant
2. Produktregel, invers, Cramer's formel

Notation

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Matricen $\mathbf{A}_{ij}$ er den $(n-1) \times (n-1)$ matrix som fremkommer ved at slette i'te række og j'te søjle i $\mathbf{A}$.

Eksempel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Notation

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Matricen $\mathbf{A}_{ij}$ er den $(n-1) \times (n-1)$ matrix som fremkommer ved at slette i'te række og j'te søjle i $\mathbf{A}$.

Eksempel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Notation

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Matricen $\mathbf{A}_{ij}$ er den $(n-1) \times (n-1)$ matrix som fremkommer ved at slette i'te række og j'te søjle i $\mathbf{A}$.

Eksempel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

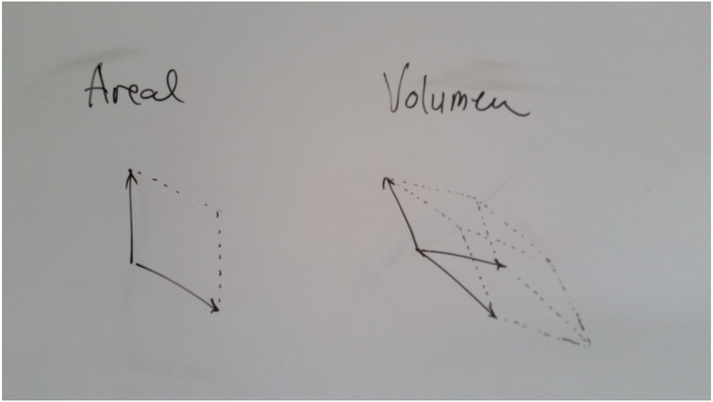
Definition 5.2: determinant (rekursiv definition)

1. Determinanten af en 1×1 matrix defineres som tallet i den.
2. Determinanten af en $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ (med elementer $\{a_{ij}\}$) defineres som

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \det \mathbf{A}_{1j}.$$

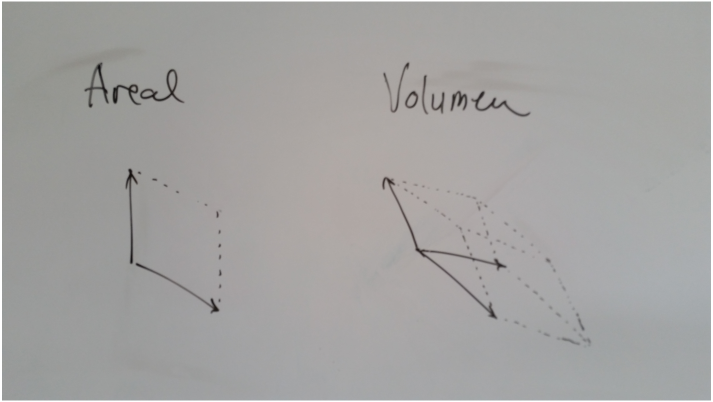
Hva' ka' determinanten?

- 2×2 matrix $\mathbf{A}$: $|\det \mathbf{A}|$ er arealet af det parallellogram, som søjlerne i $\mathbf{A}$ udspænder
- 3×3 matrix $\mathbf{A}$: $|\det \mathbf{A}|$ er volumenet af det parallellopipidum, som søjlerne i $\mathbf{A}$ udspænder



Hva' ka' determinanten?

- 2×2 matrix $\mathbf{A}$: $|\det \mathbf{A}|$ er arealet af det parallellogram, som søjlerne i $\mathbf{A}$ udspænder
- 3×3 matrix $\mathbf{A}$: $|\det \mathbf{A}|$ er volumenet af det parallellopipidum, som søjlerne i $\mathbf{A}$ udspænder



- Den kan bruges ved bestemmelse af egenværdier.

Bemærkning: determinant og permutationer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

$$S_n = \{\text{permutationer af } 1, \ldots, n\}$$

Brug af rekursiv definition

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \det \mathbf{A}_{1j}.$$

Determinant af 2×2 matrix

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{2} a_{1j}(-1)^{1+j} \det \mathbf{A}_{1j} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} \det[a_{22}] + (-1)^{1+2} a_{12} \det[a_{21}] \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

En nem huskeregel for 2×2 determinant

den gange den minus den gange den

Determinant af 3×3 matrix (eksempel)

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{3} a_{1j}(-1)^{1+j} \det \mathbf{A}_{1j} \\
&= a_{11}(-1)^{1+1} \det \mathbf{A}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} \det \mathbf{A}_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} \det \mathbf{A}_{13} \\
&= \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\
&= (45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = 0 \quad \text{(tilfældigvis!)}
\end{aligned}
$$

Determinant af 3×3 matrix (eksempel)

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{3} a_{1j}(-1)^{1+j} \det \mathbf{A}_{1j} \\
&= a_{11}(-1)^{1+1} \det \mathbf{A}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} \det \mathbf{A}_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} \det \mathbf{A}_{13} \\
&= \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\
&= (45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = 0 \quad \text{(tilfældigvis!)}
\end{aligned}
$$

En ikke så nem huskeregel for 3×3 determinant

$$
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =
$$

$$
a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})
$$

Huskeregler for større matricer?

Determinant af 4×4 matrix?

Huskeregler for større matricer?

Determinant af 4×4 matrix? Huskereglen fra 3×3 du'r ikke!

Huskeregler for større matricer?

Determinant af 4×4 matrix? Huskereglen fra 3×3 du'r ikke!
Determinant af 5×5 matrix?

Huskeregler for større matricer?

Determinant af 4×4 matrix? Huskereglen fra 3×3 du'r ikke!
Determinant af 5×5 matrix? ???

Huskeregler for større matricer?

Determinant af 4×4 matrix? Huskereglen fra 3×3 du'r ikke!
Determinant af 5×5 matrix? ???

Bemærkning til rekursiv definition

Udregning af 1 stk 5×5 determinant
$\rightsquigarrow$ Sum af 5 stk 4×4 determinanter
$\rightsquigarrow$ Sum af $20 = 5 \cdot 4$ stk 3×3 determinanter
$\rightsquigarrow$ Sum af $60 = 5 \cdot 4 \cdot 3$ stk 2×2 determinanter

Huskeregler for større matricer?

Determinant af 4×4 matrix? Huskereglen fra 3×3 du'r ikke!
Determinant af 5×5 matrix? ???

Bemærkning til rekursiv definition

Udregning af 1 stk 5×5 determinant
$\rightsquigarrow$ Sum af 5 stk 4×4 determinanter
$\rightsquigarrow$ Sum af $20 = 5 \cdot 4$ stk 3×3 determinanter
$\rightsquigarrow$ Sum af $60 = 5 \cdot 4 \cdot 3$ stk 2×2 determinanter

Morale

Der er vist behov for nogle flere metoder til at udregne determinanter!!!

Theorem 5.1: Udvikling efter given række eller søjle

Lad **A** være en $n \times n$ matrix med elementer $\{a_{ij}\}$. Da gælder

1. Udvikling efter en given fast række i:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}.$$

2. Udvikling efter en given fast søjle j:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}.$$

Eksempel: Example 3, p. 250

Udregn, at

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -15.$$

Eksempelgennemregning

Eksempel 3, p. 250

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{4} a_{3j}(-1)^{3+j}\det A_{3j} = 0 + 3\cdot(-1)^5\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 0 + 4(-1)^7\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= -3\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 4\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -3\cdot(-7) - 4\cdot 9 = 21 - 36 = -15$$

fordi

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (12 - 10 + 24) - (-16 + 45 + 4) = 26 - 33 = -7$$

og

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = (2 - 8 + 30) - (-5 + 12 + 8) = 24 - 15 = 9$$

Theorem 5.5: Determinant af trekantsmatrix

Lad **A** være en øvre/nedre trekantsmatrix. Da er $\det \mathbf{A}$ lig med produktet af diagonalelementerne!

Bevis: determinanten af en øvre trekantsmatrix udvikles efter første søjle!

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

I virkeligheden er det et induktionsbevis!

Theorem 5.2: Egenskaber ved determinanter

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Da gælder

1. $\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{A}$
2. Hvis $\mathbf{A}$ har en nulrække så er $\det \mathbf{A} = 0$
3. Hvis $\mathbf{A}$ har to ens rækker så er $\det \mathbf{A} = 0$
4. $\det(a\mathbf{A}) = a^n \det \mathbf{A}$

Theorem 5.2: Egenskaber ved determinanter

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Da gælder

1. $\det \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \det \mathbf{A}$
2. Hvis $\mathbf{A}$ har en nulrække så er $\det \mathbf{A} = 0$
3. Hvis $\mathbf{A}$ har to ens rækker så er $\det \mathbf{A} = 0$
4. $\det(a\mathbf{A}) = a^n \det \mathbf{A}$

Opgave

Bestem $\det \mathbf{L}$ hvor

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 10\pi & 10\pi & 10\pi & 10\pi \\ 10\log 2 & 10e^2 & 10\log 2 & 10e^2 \\ 10e^2 & 10\log 2 & 10e^2 & 10\log 2 \\ 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & 10\log 2 & 10\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Theorem 5.2: Egenskaber ved determinanter

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Da gælder

1. $\det \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \det \mathbf{A}$
2. Hvis $\mathbf{A}$ har en nulrække så er $\det \mathbf{A} = 0$
3. Hvis $\mathbf{A}$ har to ens rækker så er $\det \mathbf{A} = 0$
4. $\det(a\mathbf{A}) = a^n \det \mathbf{A}$

Opgave

Bestem $\det \mathbf{L}$ hvor

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 10\pi & 10\pi & 10\pi & 10\pi \\ 10\log 2 & 10e^2 & 10\log 2 & 10e^2 \\ 10e^2 & 10\log 2 & 10e^2 & 10\log 2 \\ 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & 10\log 2 & 10\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Opgaveløsning

Da søjle 2 og søjle 4 er ens har $\mathbf{L}^{\mathsf{T}}$ to ens rækker og da er $\det \mathbf{L} = 0$.

Theorem 5.3: Determinant og rækkeoperationer

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix og lad $a \neq 0$. Da gælder

1. Hvis $\mathbf{B}$ fremkommer fra $\mathbf{A}$ ved at foretage rækkeoperationen $\mathbf{r}_i + m\mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_i$ (for $i \neq j$) så gælder $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.
2. Hvis $\mathbf{B}$ fremkommer fra $\mathbf{A}$ ved at foretage rækkeombytningen $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j$ (for $i \neq j$) så gælder $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.
3. Hvis $\mathbf{B}$ fremkommer fra $\mathbf{A}$ ved at foretage rækkeoperationen $a\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i$ så gælder $\det \mathbf{B} = a \det \mathbf{A}$.

Theorem 5.3: Determinant og rækkeoperationer

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix og lad $a \neq 0$. Da gælder

1. Hvis $\mathbf{B}$ fremkommer fra $\mathbf{A}$ ved at foretage rækkeoperationen $\mathbf{r}_i + m\mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_i$ (for $i \neq j$) så gælder $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.
2. Hvis $\mathbf{B}$ fremkommer fra $\mathbf{A}$ ved at foretage rækkeombytningen $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j$ (for $i \neq j$) så gælder $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.
3. Hvis $\mathbf{B}$ fremkommer fra $\mathbf{A}$ ved at foretage rækkeoperationen $a\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i$ så gælder $\det \mathbf{B} = a \det \mathbf{A}$.

Example 4, p. 254

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = -(1 \cdot 6 \cdot 5) = -30$$

Strategi for udregning af determinant

Udregn determinanten ved at

1. lave rækkeoperationer indtil matricen er på øvre trekantsform,
2. udregne produktet af diagonalelementerne i den øvre trekantsmatrix, og
3. holde regnskab med hvordan de anvendte rækkeoperationer modificerer determinanten.

Opgaver

1. Efter tre rækkeombytninger, multiplikation af en række med 2, og fire rækkeoperationer på 7×7 matricen $\mathbf{A}$ fås en øvre trekantsmatrix med diagonalelementer $1, 3, -1, -2, 4, 2, 1/2$. Hvad er $\det \mathbf{A}$?
2. Bestem determinanten af matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Opgaver

1. Efter tre rækkeombytninger, multiplikation af en række med 2, og fire rækkeoperationer på 7×7 matricen $\mathbf{A}$ fås en øvre trekantsmatrix med diagonalelementer $1, 3, -1, -2, 4, 2, 1/2$. Hvad er $\det \mathbf{A}$?
2. Bestem determinanten af matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Opgaveløsning

1. Hvis $\mathbf{B}$ er den øvre trekantsmatrix så gælder
   - $\det \mathbf{B} =$ produktet af diagonalelementerne $= 24$
   - $\det \mathbf{B} = 2 \cdot (-1)^3 \cdot \det \mathbf{A}$, dvs $\det \mathbf{A} = -12$
2. Ved at lave *søjleoperationen* $-2\mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 \to \mathbf{s}_3$ (svarende til at lave en rækkeoperation på $\mathbf{A}^\mathsf{T}$) fås en nedre trekantsmatrix med diagonalelementer $2, 1, 1, 7$. Dermed er $\det \mathbf{A} = 14$.

Oversigt

Theorem 5.6: Invers matrix og determinant

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er invertibel hvis og kun hvis $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Theorem 5.6: Invers matrix og determinant

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er invertibel hvis og kun hvis $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Theorem 5.7: Produktreglen

Lad $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ være $n \times n$ matricer. Da gælder

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

Konsekvenser

- Hvis $\mathbf{A}$ er invertibel gælder $\det(\mathbf{A}^{-1}) \det \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = \det \mathbf{I} = 1$ og dermed:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbf{A}},$$

- Selvom der generelt gælder $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ har vi

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = \det \mathbf{BA}.$$

- $\det(\mathbf{A}^k) = (\det \mathbf{A})^k$.

Adjungeret matrix, kofaktorer

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix.

1. (i,j)-underdeterminanten *(eng. minor)* m_{ij} defineres ved $m_{ij} = \det \mathbf{A}_{ij}$.
2. (i,j)-kofaktoren *(eng. cofactor)* c_{ij} defineres ved $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.
3. Den adjungerede matrix er matricen

$$\mathrm{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Adjungeret matrix, kofaktorer

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix.

1. (i,j)-underdeterminanten *(eng. minor)* m_{ij} defineres ved $m_{ij} = \det \mathbf{A}_{ij}$.
2. (i,j)-kofaktoren *(eng. cofactor)* c_{ij} defineres ved $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.
3. Den adjungerede matrix er matricen

$$\text{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Danger: der skal transponeres!

Adjungeret matrix, kofaktorer

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix.

1. (i, j)-underdeterminanten *(eng. minor)* m_{ij} defineres ved $m_{ij} = \det \mathbf{A}_{ij}$.
2. (i, j)-kofaktoren *(eng. cofactor)* c_{ij} defineres ved $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.
3. Den adjungerede matrix er matricen

$$\mathrm{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Danger: der skal transponeres!

Theorem: Formel (5.23) for invers matrix

Lad $\mathbf{A}$ være en invertibel $n \times n$ matrix. Da gælder

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathrm{adj}\mathbf{A}.$$

Example 2 og 3, p. 260-261

- Lad $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Bestem $\mathbf{A}^{-1}$.

Example 2 og 3, p. 260-261

- Lad $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Bestem $\mathbf{A}^{-1}$.
- $\det \mathbf{A} = 5$ (hvem sagde huskeregel?)

Example 2 og 3, p. 260-261

- Lad $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Bestem $\mathbf{A}^{-1}$.
- $\det \mathbf{A} = 5$ (hvem sagde huskeregel?)
- Bestem den adjungerede $\mathrm{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$

Example 2 og 3, p. 260-261

- Lad $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Bestem $\mathbf{A}^{-1}$.
- $\det \mathbf{A} = 5$ (hvem sagde huskeregel?)
- Bestem den adjungerede $\mathrm{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$
- Udregn de 9 kofaktorer! Ex:

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \det \mathbf{A}_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -4$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \det \mathbf{A}_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -5$$

Example 2 og 3, p. 260-261

- Lad $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Bestem $\mathbf{A}^{-1}$.
- $\det \mathbf{A} = 5$ (hvem sagde huskeregel?)
- Bestem den adjungerede $\mathrm{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$
- Udregn de 9 kofaktorer! Ex:

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \det \mathbf{A}_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -4$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \det \mathbf{A}_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -5$$

- Resultat $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathrm{adj}\, \mathbf{A} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 & 8 & -5 \\ -5 & -5 & 5 \\ -4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$.

Theorem 5.8: Cramer's formel

Ligningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, hvor $\mathbf{A}$ er en invertibel $n \times n$ matrix, har netop en løsning $\mathbf{x}$ og der gælder

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \det \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \det \mathbf{A}_n \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{A}_j$ er den matrix, hvor den j'te søjle i $\mathbf{A}$ er erstattet af $\mathbf{b}$.

Example 4, p. 261

Brug Cramer's formel til at løse ligningen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Example 4, p. 261

Brug Cramer's formel til at løse ligningen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A}_1 = \frac{1}{5} \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{10}{5} = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A}_2 = \frac{1}{5} \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A}_3 = \frac{1}{5} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} = 0$$

Example 4, p. 261

Brug Cramer's formel til at løse ligningen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A}_1 = \frac{1}{5} \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{10}{5} = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A}_2 = \frac{1}{5} \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A}_3 = \frac{1}{5} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} = 0$$

(Er der andre måder at løse denne ligning på?)