Forelæsning 6: Koordinater, bestemmelse af baser, og lineære transformationer

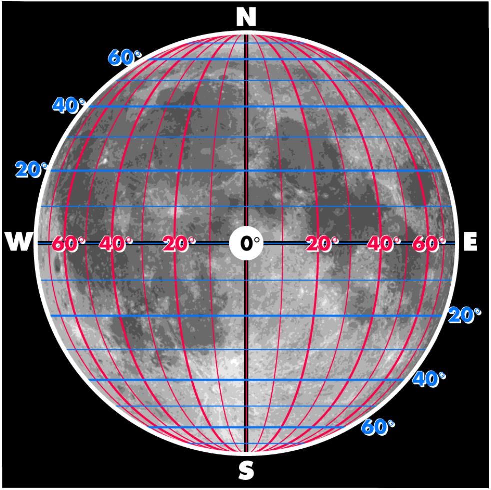
LinAlgDat 2019/2020

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk og henrikp@math.ku.dk

Oversigt

Oversigt

Koordinater



Selenografiske koordinater bruges til at bestemme steder på overfladen af Jordens måne.

Koordinater

Definition 3.7 og Theorem 3.8 (Koordinater)

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ være en (ordnet) basis for et underrum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Til hvert $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ findes entydigt bestemte tal $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ så

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_k\mathbf{b}_k\,.$$

Vektoren med disse tal kaldes koordinaterne for $\mathbf{v}$ mht. basen $\mathcal{B}$:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Koordinater mht. standardbasen)

Lad $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ være standardbasen $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$. For $\mathbf{v} = (3, 7)$ gælder

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dvs.} \qquad \mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$$

og derfor er

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Bestemmelse af koordinater) 1/2

Mængden

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

er pga. fx Theorem 3.10(a) en (ordnet) basis for $\mathbb{R}^3$ idet

$$(\mathbf{b}_1 \,|\, \mathbf{b}_2 \,|\, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss–Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}\,.$$

Betragt desuden vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vil bestemme koordinaterne for $\mathbf{v}$ mht. basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

Eksempel (Bestemmelse af koordinater) 2/2

Vi løser ligningen:

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{v} \iff x_1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

Dvs.

$$\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}$$

og derfor er

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

Øvelse

Betragt følgende (ordnede) basis og vektor i $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem koordinaterne for $\mathbf{e}_1$ mht. basen $\mathcal{B}$.

Øvelse

Betragt følgende (ordnede) basis og vektor i $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem koordinaterne for $\mathbf{e}_1$ mht. basen $\mathcal{B}$.

Løsning. Den reducerede rækkechelonform for $\left(\mathbf{b}_1 \middle| \mathbf{b}_2 \middle| \mathbf{e}_1\right)$ er

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{-\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Derfor er $\mathbf{e}_1 = 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2$ og dermed

$$[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Basisskift

§3.2.5 (Basisskift matricen)

Lad der være givet to forskellige (ordnede) baser,

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\} \quad \text{og} \quad \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k\}$$

for et og samme underrum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Basisskift matricen fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$ er, med notation fra (7.32), defineret ved

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} := \left([\mathbf{c}_1]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [\mathbf{c}_k]_{\mathcal{B}} \right),$$

og den opfylder

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} \qquad \text{for alle} \qquad \mathbf{v} \in \mathcal{U}.$$

Eksempel (Basisskift matrix) 1/3

Betragt følgende to (ordnede) baser for $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og}$$

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eksempel (Basisskift matrix) 1/3

Betragt følgende to (ordnede) baser for $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og}$$

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vi har

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_1 - 6\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_1 - 6\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \qquad - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$$

Eksempel (Basisskift matrix) 2/3

Idet

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1 &= \mathbf{b}_1 - 6\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3\\ \mathbf{c}_2 &= \mathbf{b}_1 - 6\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3\\ \mathbf{c}_3 &= 0\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3\end{aligned}$$

er basisskift matricen fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$ er givet ved

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \left([\mathbf{c}_1]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [\mathbf{c}_2]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [\mathbf{c}_3]_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Lad os checke om

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

gælder for fx vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Eksempel (Basisskift matrix) 3/3

Vi har

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = 4\mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 - 3\mathbf{c}_3$$

og dermed er

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}4\\-3\\-3\end{pmatrix}.$$

Og ganske rigtigt gælder

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-6 & -6 & -1\\5 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Øvelse

Betragt følgende (ordnede) baser for $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Benyt basisskift matricen

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

til at udtrykke $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ som en linearkombination af $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$.

Øvelse

Betragt følgende (ordnede) baser for $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Benyt basisskift matricen

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

til at udtrykke $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ som en linearkombination af $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$.

Løsning. Vi har

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

og dermed $\mathbf{v} = 9\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2$.

Den inverse til basisskift matricen

Lad der være givet to forskellige (ordnede) baser,

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\} \quad \text{og} \quad \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k\}$$

for et og samme underrum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Basisskift matricen $\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ er invertibel og om dens inverse gælder

$$(\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}})^{-1} = \mathbf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$$

Eksempel (Beregning af basisskift matrix som invers)

Betragt følgende (ordnede) baser for $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\} \quad \text{og} \quad \mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

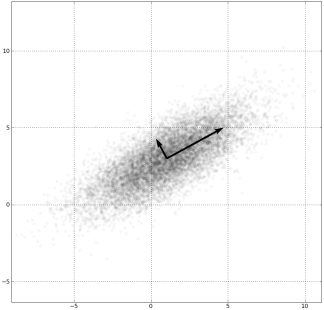
Vi har

$$\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \left([\mathbf{b}_1]_{\mathcal{E}} \,\middle|\, [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{E}} \right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix} \quad \text{og dermed}$$

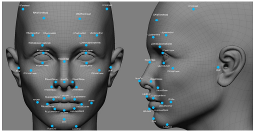
$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = (\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{pmatrix}.$$

Hvor anvendes basisskift?

Basisskift er essensen i *Principal Component Analysis*:

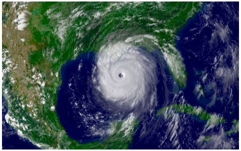


som bruges til at håndtere (*dimension reduction*) store datasæt i fx



Ansigtsgenkendelse

Signalbehandling



Meteorologi

Oversigt

Nulrum (eng. *null space*)

Null Space Labs is a hackerspace in downtown Los Angeles.

Nulrum

Definition 3.9 (Nulrum)

Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix. Nulrummet (*null space*) af $\mathbf{A}$ er

$$\operatorname{null}\mathbf{A} = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\}.$$

Faktum. For en $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er $\operatorname{null}\mathbf{A}$ er et *underrum* af $\mathbb{R}^n$ idet

- $\mathbf{0} \in \operatorname{null}\mathbf{A}$ idet $\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- Hvis $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \operatorname{null}\mathbf{A}$ da er $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \operatorname{null}\mathbf{A}$ idet $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}$.
- Hvis $s \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{x} \in \operatorname{null}\mathbf{A}$ da er $s\mathbf{x} \in \operatorname{null}\mathbf{A}$ idet $\mathbf{A}(s\mathbf{x}) = s\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Vi skal lære hvordan man bestemmer en basis for $\operatorname{null}\mathbf{A}$.

Eksempel (Basis for nulrum) 1/3

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Basis for nulrum) 1/3

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per definition er

$$\begin{aligned} \operatorname{null} \mathbf{A} &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & 5x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & 3x_5 & = & 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Eksempel (Basis for nulrum) 1/3

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per definition er

$$\begin{aligned} \operatorname{null} \mathbf{A} &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, \begin{array}{rcl} x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 \phantom{{}+5x_5} &=& 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+3x_4} + 5x_5 &=& 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 &=& 0 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+2x_3+3x_4} + 3x_5 &=& 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Den reducerede rækkeechelonform for **A** er

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eksempel (Basis for nulrum) 2/3

Fra den reducerede rækkeechelonform

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aflæses, at samtlige løsninger til ligningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{hvor} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Eksempel (Basis for nulrum) 2/3

Fra den reducerede rækkeechelonform

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aflæses, at samtlige løsninger til ligningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{hvor} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Ovenstående to vektorer udspænder altså null $\mathbf{A}$, dvs.

$$\text{null}\,\mathbf{A} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Eksempel (Basis for nulrum) 3/3

Placeringen af 0'er og 1'er i de to vektorer

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

viser, at de er lineært uafhængige, og vi konkluderer, at

En basis for null **A** er: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Eksempel (Basis for nulrum) 3/3

Placeringen af 0'er og 1'er i de to vektorer

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

viser, at de er lineært uafhængige, og vi konkluderer, at

En basis for null $\mathbf{A}$ er: $$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

For dimensionen af null $\mathbf{A}$ gælder altså:

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{null} \mathbf{A}) &= 2 \\ &= \text{antal frie variable i ligningssystemet } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \\ &= (\text{antal søjler i } \mathbf{A}) - (\operatorname{rank} \mathbf{A}) \quad [\,\text{dvs. } 5 - 3 = 2\,] \end{aligned}$$

Eksemplet illustrerer følgende generelle princip:

Theorem 3.11 (Basis for nulrum)

Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix. En basis for null $\mathbf{A}$ findes således:

- Benyt den reducerede rækkeechelonform for $\mathbf{A}$ til, på sædvanlig måde, at aflæse alle løsninger til ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_p\mathbf{v}_p \qquad (p = \text{antal frie variable})$$

- En basis for null $\mathbf{A}$ er da

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}.$$

Om dimensionen, p, af null $\mathbf{A}$ gælder:

$$p = \dim(\operatorname{null}\mathbf{A}) = n - \operatorname{rank}\mathbf{A}\,.$$

Nullity. Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix. Man definerer

$$\operatorname{nullity}\mathbf{A} := \dim(\operatorname{null}\mathbf{A})\,.$$

Sidste ligning i Theorem 3.11 kan derfor udtrykkes [se (3.38)]:

$$\operatorname{rank}\mathbf{A} + \operatorname{nullity}\mathbf{A} = n\,.$$

Øvelse

Betragt følgende matrix **A** og dens reducerede rækkeechelonform **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestem tallet nullity **A**.
- Bestem en basis for null **A**.

Øvelse

Betragt følgende matrix **A** og dens reducerede rækkeechelonform **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestem tallet nullity **A**.
- Bestem en basis for null **A**.

Løsning.

- Vi har

$$\operatorname{nullity} \mathbf{A} = 4 - \operatorname{rank} \mathbf{A} = 4 - 2 = 2\,.$$

Øvelse

Betragt følgende matrix **A** og dens reducerede rækkeechelonform **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestem tallet nullity **A**.
- Bestem en basis for null **A**.

Løsning.

- Vi har

$$\operatorname{nullity} \mathbf{A} = 4 - \operatorname{rank} \mathbf{A} = 4 - 2 = 2\,.$$

- En basis for null **A** er

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Oversigt

Søjlerum

Søjlerum

Definition 3.10 (Søjlerum)

Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix. Søjlerummet (*column space*) af $\mathbf{A}$ er

$$\operatorname{col} \mathbf{A} = \operatorname{span}\{ \text{alle } n \text{ søjlevektorer i } \mathbf{A} \}.$$

Faktum. Søjlerummet $\operatorname{col} \mathbf{A}$ er et *underrum* af $\mathbb{R}^m$ (det er et "span").

Da $\operatorname{col} \mathbf{A}$ er et "span", kan man i princippet benytte Udtyndings-algoritmen, Theorem 3.7(a), til at bestemme en basis for $\operatorname{col} \mathbf{A}$.

Vi skal lære en anden/bedre metode...

Eksempel (Basis for søjlerum) 1/3

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}_1 \middle| \mathbf{A}_2 \middle| \mathbf{A}_3 \middle| \mathbf{A}_4 \middle| \mathbf{A}_5\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Basis for søjlerum) 1/3

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}_1 \middle| \mathbf{A}_2 \middle| \mathbf{A}_3 \middle| \mathbf{A}_4 \middle| \mathbf{A}_5\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per definition er

$$\begin{aligned} \operatorname{col} \mathbf{A} &= \operatorname{span}\left\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Eksempel (Basis for søjlerum) 1/3

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}_1 \middle| \mathbf{A}_2 \middle| \mathbf{A}_3 \middle| \mathbf{A}_4 \middle| \mathbf{A}_5\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per definition er

$$\begin{aligned} \operatorname{col} \mathbf{A} &= \operatorname{span}\left\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Den reducerede rækkeechelonform for $\mathbf{A}$ er

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Basis for søjlerum) 2/3

Den reducerede rækkeechelonform for **A** er

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Med $x_3 = 1$ og $x_5 = 0$ fås:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff -\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \in \text{span}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\}$$

Med $x_3 = 0$ og $x_5 = 1$ fås:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff -2\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + 2\mathbf{A}_4 + \mathbf{A}_5 = \mathbf{0} \iff \mathbf{A}_5 = 2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - 2\mathbf{A}_4 \in \text{span}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\}$$

Eksempel (Basis for søjlerum) 3/3

Derfor vil søjlerne $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4$ udspænde søjlerummet for $\mathbf{A}$, dvs.

$$\operatorname{col}\mathbf{A} = \operatorname{span}\left\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Eksempel (Basis for søjlerum) 3/3

Derfor vil søjlerne $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4$ udspænde søjlerummet for $\mathbf{A}$, dvs.

$$\operatorname{col}\mathbf{A} = \operatorname{span}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Desuden er $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4$ lineært uafhængige fordi udregningen

$$(\mathbf{A}_1|\mathbf{A}_2|\mathbf{A}_4) = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cancel{1} & 1 & \cancel{0}\\ 2 & 1 & \cancel{1} & 0 & \cancel{5}\\ 3 & 1 & \cancel{2} & 3 & \cancel{1}\\ 1 & 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{3}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}-\text{Jordan}} \begin{pmatrix}1 & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{2}\\ 0 & 1 & \cancel{-1} & 0 & \cancel{1}\\ 0 & 0 & \cancel{0} & 1 & \cancel{-2}\\ 0 & 0 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0}\end{pmatrix}$$

viser, at $\operatorname{rank}(\mathbf{A}_1|\mathbf{A}_2|\mathbf{A}_4) = 3$.

Eksempel (Basis for søjlerum) 3/3

Derfor vil søjlerne $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4$ udspænde søjlerummet for $\mathbf{A}$, dvs.

$$\operatorname{col}\mathbf{A} = \operatorname{span}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Desuden er $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4$ lineært uafhængige fordi udregningen

$$(\mathbf{A}_1|\mathbf{A}_2|\mathbf{A}_4) = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cancel{1} & 1 & \cancel{0}\\ 2 & 1 & \cancel{1} & 0 & \cancel{5}\\ 3 & 1 & \cancel{2} & 3 & \cancel{1}\\ 1 & 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{3}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix}1 & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{2}\\ 0 & 1 & \cancel{-1} & 0 & \cancel{1}\\ 0 & 0 & \cancel{0} & 1 & \cancel{-2}\\ 0 & 0 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0}\end{pmatrix}$$

viser, at $\operatorname{rank}(\mathbf{A}_1|\mathbf{A}_2|\mathbf{A}_4) = 3$. Vi konkluderer:

$$\text{En basis for } \operatorname{col}\mathbf{A} \text{ er:} \quad \mathcal{B} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Det følger, at: $\dim(\operatorname{col}\mathbf{A}) = 3 = \operatorname{rank}\mathbf{A}$.

Eksemplet illustrerer følgende generelle princip:

Theorem 3.13 (Basis for søjlerum)

Lad $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 | \cdots | \mathbf{A}_n)$ være en $m \times n$ matrix. En basis for col $\mathbf{A}$ findes således:

- Find de søjlenumre $j_1, \ldots, j_r$ i den reducerede rækkeechelonform for $\mathbf{A}$ som har et pivot 1-tal (hvor $r = \operatorname{rank} \mathbf{A}$).
- En basis $\mathcal{B}$ for col $\mathbf{A}$ udgøres af de tilsvarende søjler i $\mathbf{A}$, dvs.

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{A}_{j_1}, \ldots, \mathbf{A}_{j_r}\}.$$

Om dimensionen af col $\mathbf{A}$ gælder:

$$\dim(\operatorname{col} \mathbf{A}) = \operatorname{rank} \mathbf{A}\,.$$

Øvelse

Betragt følgende matrix $\mathbf{A}$ og dens reducerede rækkeechelonform $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestem dimensionen af $\operatorname{col} \mathbf{A}$.
- Bestem en basis for $\operatorname{col} \mathbf{A}$.

Øvelse

Betragt følgende matrix **A** og dens reducerede rækkeechelonform **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestem dimensionen af $\operatorname{col}\mathbf{A}$.
- Bestem en basis for $\operatorname{col}\mathbf{A}$.

Løsning.

- Vi har

$$\dim(\operatorname{col}\mathbf{A}) = \operatorname{rank}\mathbf{A} = 2\,.$$

Øvelse

Betragt følgende matrix **A** og dens reducerede rækkeechelonform **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestem dimensionen af col **A**.
- Bestem en basis for col **A**.

Løsning.

- Vi har

$$\dim(\operatorname{col} \mathbf{A}) = \operatorname{rank} \mathbf{A} = 2\,.$$

- En basis for col **A** er

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Oversigt

Rækkerum

Rækkerum

Definition 3.11 (Rækkerum)

Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix. Rækkerummet (*row space*) af $\mathbf{A}$ er

$$\operatorname{row}\mathbf{A} = \operatorname{span}\{\text{ alle } m \text{ rækkevektorer i } \mathbf{A}\,\}.$$

Faktum. Rækkerummet row $\mathbf{A}$ er et *underrum* af $\mathbb{R}^n$.

Da row $\mathbf{A}$ er et “span”, kan man i princippet benytte Udtyndings-algoritmen, Theorem 3.7(a), til at bestemme en basis for row $\mathbf{A}$.

Vi skal lære en anden/bedre metode...

Eksempel (Basis for rækkerum) 1/3

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} {}_1\mathbf{A} \\ \hline {}_2\mathbf{A} \\ \hline {}_3\mathbf{A} \\ \hline {}_4\mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

I udregninger skrives rækkerne ${}_1\mathbf{A}, {}_2\mathbf{A}, {}_3\mathbf{A}, {}_4\mathbf{A}$ ofte som søjler(!)

Eksempel (Basis for rækkerum) 1/3

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} {}_1\mathbf{A} \\ \hline {}_2\mathbf{A} \\ \hline {}_3\mathbf{A} \\ \hline {}_4\mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

I udregninger skrives rækkerne ${}_1\mathbf{A}, {}_2\mathbf{A}, {}_3\mathbf{A}, {}_4\mathbf{A}$ ofte som søjler(!)

$$\begin{aligned} \operatorname{row} \mathbf{A} &= \operatorname{span}\left\{{}_1\mathbf{A}, {}_2\mathbf{A}, {}_3\mathbf{A}, {}_4\mathbf{A}\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5. \end{aligned}$$

Eksempel (Basis for rækkerum) 1/3

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} {}_1\mathbf{A} \\ \hline {}_2\mathbf{A} \\ \hline {}_3\mathbf{A} \\ \hline {}_4\mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

I udregninger skrives rækkerne ${}_1\mathbf{A}, {}_2\mathbf{A}, {}_3\mathbf{A}, {}_4\mathbf{A}$ ofte som søjler(!)

$$\begin{aligned} \operatorname{row} \mathbf{A} &= \operatorname{span}\left\{{}_1\mathbf{A}, {}_2\mathbf{A}, {}_3\mathbf{A}, {}_4\mathbf{A}\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5. \end{aligned}$$

Den reducerede rækkeechelonform for $\mathbf{A}$ er

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} {}_1\mathbf{B} \\ \hline {}_2\mathbf{B} \\ \hline {}_3\mathbf{B} \\ \hline {}_4\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Basis for rækkerum) 2/3

Der gælder $\operatorname{span}\left\{{}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B}\right\} \subseteq \operatorname{row}\mathbf{A}$ fordi:

$$\begin{aligned}
{}_1\mathbf{B} &= \tfrac{3}{2}({}_1\mathbf{A}) + \tfrac{1}{2}({}_2\mathbf{A}) - \tfrac{1}{2}({}_3\mathbf{A}) \\
{}_2\mathbf{B} &= -3({}_1\mathbf{A}) + ({}_3\mathbf{A}) \\
{}_3\mathbf{B} &= -\tfrac{1}{2}({}_1\mathbf{A}) - \tfrac{1}{2}({}_2\mathbf{A}) + \tfrac{1}{2}({}_3\mathbf{A})
\end{aligned}$$

Eksempel (Basis for rækkerum) 2/3

Der gælder span $\{{}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B}\} \subseteq \operatorname{row} \mathbf{A}$ fordi:

$$\begin{aligned}
{}_1\mathbf{B} &= \tfrac{3}{2}({}_1\mathbf{A}) + \tfrac{1}{2}({}_2\mathbf{A}) - \tfrac{1}{2}({}_3\mathbf{A}) \\
{}_2\mathbf{B} &= -3({}_1\mathbf{A}) + ({}_3\mathbf{A}) \\
{}_3\mathbf{B} &= -\tfrac{1}{2}({}_1\mathbf{A}) - \tfrac{1}{2}({}_2\mathbf{A}) + \tfrac{1}{2}({}_3\mathbf{A})
\end{aligned}$$

Der gælder span $\{{}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B}\} \supseteq \operatorname{row} \mathbf{A}$ fordi:

$$\begin{aligned}
{}_1\mathbf{A} &= ({}_1\mathbf{B}) + ({}_3\mathbf{B}) \\
{}_2\mathbf{A} &= 2({}_1\mathbf{B}) + ({}_2\mathbf{B}) \\
{}_3\mathbf{A} &= 3({}_1\mathbf{B}) + ({}_2\mathbf{B}) + 3({}_3\mathbf{B}) \\
{}_4\mathbf{A} &= ({}_1\mathbf{B}) + ({}_2\mathbf{B})
\end{aligned}$$

Eksempel (Basis for rækkerum) 2/3

Der gælder span $\{{}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B}\} \subseteq \operatorname{row} \mathbf{A}$ fordi:

$$\begin{aligned}
{}_1\mathbf{B} &= \tfrac{3}{2}({}_1\mathbf{A}) + \tfrac{1}{2}({}_2\mathbf{A}) - \tfrac{1}{2}({}_3\mathbf{A}) \\
{}_2\mathbf{B} &= -3({}_1\mathbf{A}) + ({}_3\mathbf{A}) \\
{}_3\mathbf{B} &= -\tfrac{1}{2}({}_1\mathbf{A}) - \tfrac{1}{2}({}_2\mathbf{A}) + \tfrac{1}{2}({}_3\mathbf{A})
\end{aligned}$$

Der gælder span $\{{}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B}\} \supseteq \operatorname{row} \mathbf{A}$ fordi:

$$\begin{aligned}
{}_1\mathbf{A} &= ({}_1\mathbf{B}) + ({}_3\mathbf{B}) \\
{}_2\mathbf{A} &= 2({}_1\mathbf{B}) + ({}_2\mathbf{B}) \\
{}_3\mathbf{A} &= 3({}_1\mathbf{B}) + ({}_2\mathbf{B}) + 3({}_3\mathbf{B}) \\
{}_4\mathbf{A} &= ({}_1\mathbf{B}) + ({}_2\mathbf{B})
\end{aligned}$$

Altså vil ikke-nulrækkerne ${}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B}$ i matricen $\mathbf{B}$ udspænde row $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{span}\{{}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B}\} = \operatorname{row} \mathbf{A}.$$

Eksempel (Basis for rækkerum) 3/3

Placeringen af 0'er og 1'er i vektorerne

$$ {}_1\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad {}_2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad {}_3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} $$

viser, at de er lineært uafhængige, og vi konkluderer, at

En basis for row **A** er: $\mathcal{B} = \{{}_1\mathbf{B}, {}_2\mathbf{B}, {}_3\mathbf{B}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

For dimensionen af row **A** gælder altså:

$$ \dim(\operatorname{row} \mathbf{A}) = 3 = \operatorname{rank} \mathbf{A} $$

Eksemplet illustrerer følgende generelle princip:

Theorem 3.14 (Basis for rækkerum)

Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix med reduceret rækkeechelonform

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} {}_1\mathbf{B} \\ \hline \vdots \\ \hline {}_r\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad (\text{hvor } r = \operatorname{rank} \mathbf{A})$$

En basis $\mathcal{B}$ for row $\mathbf{A}$ udgøres af ikke-nulrækkerne i $\mathbf{B}$, dvs.

$$\mathcal{B} = \{{}_1\mathbf{B}, \ldots, {}_r\mathbf{B}\}.$$

Om dimensionen af row $\mathbf{A}$ gælder:

$$\dim(\operatorname{row} \mathbf{A}) = \operatorname{rank} \mathbf{A}.$$

Øvelse

Betragt følgende matrix **A** og dens reducerede rækkeechelonform **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestem dimensionen af row **A**.
- Bestem en basis for row **A**.

Øvelse

Betragt følgende matrix **A** og dens reducerede rækkeechelonform **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestem dimensionen af row **A**.
- Bestem en basis for row **A**.

Løsning.

- Vi har

$$\dim(\operatorname{row} \mathbf{A}) = \operatorname{rank} \mathbf{A} = 2\,.$$

Øvelse

Betragt følgende matrix $\mathbf{A}$ og dens reducerede rækkeechelonform $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestem dimensionen af row $\mathbf{A}$.
- Bestem en basis for row $\mathbf{A}$.

Løsning.

- Vi har
$$\dim(\operatorname{row} \mathbf{A}) = \operatorname{rank} \mathbf{A} = 2\,.$$
- En basis for row $\mathbf{A}$ (skrevet som søjler) er
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

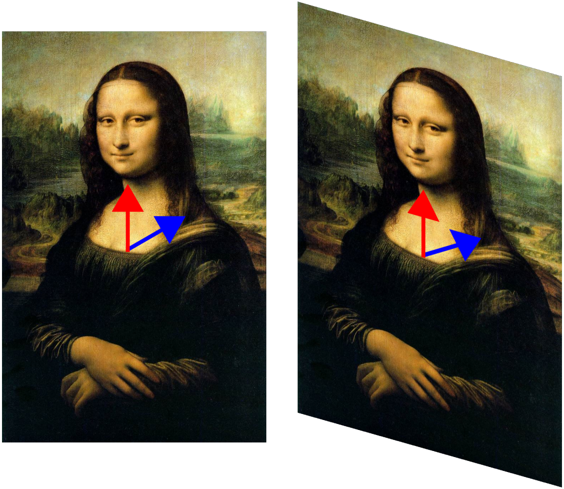
Theorem 3.15 (Rank og transponering)

Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix. Da er $\operatorname{rank} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \operatorname{rank} \mathbf{A}$.

Bevis. Vi har $\operatorname{rank} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \dim(\operatorname{col} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \dim(\operatorname{row} \mathbf{A}) = \operatorname{rank} \mathbf{A}$. □

Oversigt

Lineære transformationer



A shear transformation of the Mona Lisa.

Lineære transformationer

Definition 3.12 (Lineære transformationer)

En funktion $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som opfylder

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \qquad \text{og} \qquad T(s\mathbf{v}) = sT(\mathbf{v})$$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og $s \in \mathbb{R}$ kaldes en lineær transformation.

Lineære transformationer

Definition 3.12 (Lineære transformationer)

En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som opfylder

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \qquad \text{og} \qquad T(s\mathbf{v}) = sT(\mathbf{v})$$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og $s \in \mathbb{R}$ kaldes en lineær transformation.

Definition 3.13 (Matrixtransformationer)

Lad **A** være en $m \times n$ matrix. Funktionen

$$T_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \text{givet ved} \qquad T_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \;\; \text{for alle} \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

kaldes matrixtransformationen givet ved matricen **A**.

Lineære transformationer

Definition 3.12 (Lineære transformationer)

En funktion $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som opfylder

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \qquad \text{og} \qquad T(s\mathbf{v}) = sT(\mathbf{v})$$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og $s \in \mathbb{R}$ kaldes en lineær transformation.

Definition 3.13 (Matrixtransformationer)

Lad $\mathbf{A}$ være en $m \times n$ matrix. Funktionen

$$T_{\mathbf{A}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \text{givet ved} \qquad T_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \;\; \text{for alle} \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

kaldes matrixtransformationen givet ved matricen $\mathbf{A}$.

Theorem 3.17 (Matrixtransformationer er lineære)

Enhver matrixtransformation $T_{\mathbf{A}}$ er lineær.

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} = T_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) + T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})$$

$$T_{\mathbf{A}}(s\mathbf{v}) = \mathbf{A}(s\mathbf{v}) = s\mathbf{A}\mathbf{v} = sT_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})$$

Eksempel (Matrixtransformation)

Betragt 4×5 matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrixtransformationen givet ved $\mathbf{A}$ er funktionen $T_{\mathbf{A}}: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ hvor

$$T_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + 3x_5 \end{pmatrix}$$

Theorem 3.17 viser, at matrixtransformationer er eksempler på lineær transformationer. Faktisk er der ikke andre eksempler:

Theorem 3.18 ("Omvendt" til Theorem 3.17)

Enhver lineær transformation er en matrixtransformation:

Hvis $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en vilkårlig lineær transformation, da findes netop én $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$, nemlig

$$\mathbf{A} = \left(T(\mathbf{e}_1) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, T(\mathbf{e}_n) \right),$$

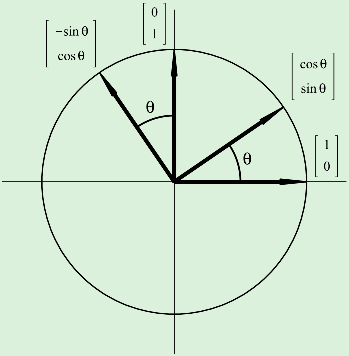
som opfylder $T = T_{\mathbf{A}}$, dvs. så $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Eksempel (Rotation i planen) 1/3

Lad θ være en vinkel og lad $R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være den funktion der roterer en vektor i planen vinklen θ mod uret omkring origo $(0,0)$.

Det er geomtrisk klart, at R_θ er en lineær transformation.

Eksempel (Rotation i planen) 2/3



Rotationsmatricen

$$\mathbf{A}_\theta = \left(R_\theta(\mathbf{e}_1) \,\middle|\, R_\theta(\mathbf{e}_2) \right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

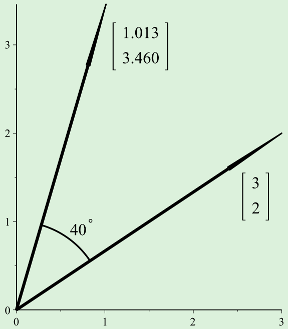
opfylder

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Rotation i planen) 3/3

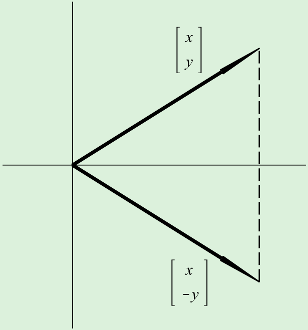
Ved fx at rotere $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vinklen $\theta = 40^\circ$ fås vektoren:

$$\begin{pmatrix} \cos 40^\circ & -\sin 40^\circ \\ \sin 40^\circ & \cos 40^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.766 & -0.643 \\ 0.643 & 0.766 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.013 \\ 3.460 \end{pmatrix}$$



Eksempel (Spejling i førsteaksen)

Lad $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være den funktion spejler et punkt i førsteaksen.



Det er geomtrisk klart, at S er en lineær transformation, og vi ser at

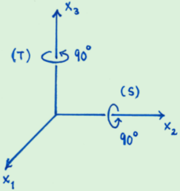
$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Rotation i rummet)

Betragt de lineære transformationer $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ givet ved:

$S =$ rotation 90° omkring x_2-aksen (se figur).
$T =$ rotation 90° omkring x_3-aksen (se figur).

(Rotationerne foregår i positiv omløbsretning.)



Vi vil bruge Theorem 3.18 til at bestemme matricer **A** og **B** så

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} \qquad \text{for alle} \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Det er geometrisk klart at

$$\begin{aligned} S(\mathbf{e}_1) &= -\mathbf{e}_3 \\ S(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_2 \\ S(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 \end{aligned} \qquad \text{og} \qquad \begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{e}_2) &= -\mathbf{e}_1 \\ T(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

og dermed er:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sammensætning af lineære transformationer

Lad der være givet to lineære transformationer

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}]{T} \mathbb{R}^m \xrightarrow[S(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{y}]{S} \mathbb{R}^k$$

Den sammensatte transformation $S \circ T$ er givet ved matricen **BA** idet

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) = S(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}.$$

Sammensætning af lineære transformationer

Lad der være givet to lineære transformationer

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}]{T} \mathbb{R}^m \xrightarrow[S(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{y}]{S} \mathbb{R}^k$$

Den sammensatte transformation $S \circ T$ er givet ved matricen **BA** idet

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) = S(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}.$$

Eksempel (Sammensætning af transformationer) 1/2

Vi betragter

- Rotation med vinklen 40° mod uret omkring origo:

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.766 & -0.643 \\ 0.643 & 0.766 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Spejling i førsteaksen:

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

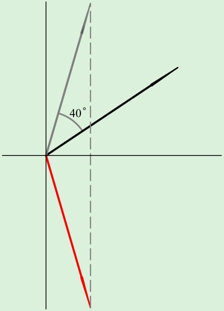
Eksempel (Sammensætning af transformationer) 2/2

- Først rotation 40° og dernæst spejling i førsteaksen:

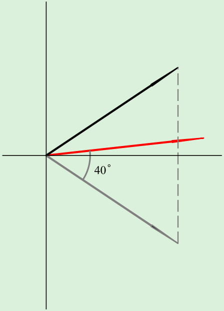
$$(S \circ R)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.766 & -0.643 \\ -0.643 & -0.766 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Først spejling i førsteaksen og dernæst rotation 40°:

$$(R \circ S)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.766 & 0.643 \\ 0.643 & -0.766 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$S \circ R$



$R \circ S$

Kerne (*kernel*) og billede (*range*)

Definition 3.14 (Kerne og billede)

Lad $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation. Man definerer

$$\ker T = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \,\} \qquad \text{(kernen / kernel af } T\text{)}$$

$$\operatorname{ran} T = \{\, T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\} \qquad \text{(billedet / range af } T\text{)}$$

Delmængderne ker T og ran T er underrum som vi allerede kender:

Observation efter Definition 3.14

Lad $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation givet ved en $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$, dvs.

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{for alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Da gælder:

$$\ker T = \operatorname{null} \mathbf{A}$$

$$\operatorname{ran} T = \operatorname{col} \mathbf{A} \;\; (= \operatorname{row} \mathbf{A}^{\mathsf{T}})$$

Eksempel (Kerne og billede)

For den lineære transformation $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ givet ved

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + 3x_5 \end{pmatrix}$$

gælder:

$$\ker T = \operatorname{null} \mathbf{A} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(som er en basis)}$$

$$\operatorname{ran} T = \operatorname{col} \mathbf{A} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(som er en basis)}$$

Injektivitet og surjektivitet

Definition 3.14 og 3.16 (Injektivitet og surjektivitet)

En lineær transformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaldes

- Injektiv (*one-to-one*) hvis: $\ker T = \{\mathbf{0}\}$.
- Surjektiv (*onto*) hvis: $\operatorname{ran} T = \mathbb{R}^m$.

Eksempel (Hverken injektiv eller surjektiv)

Den lineære transformation $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ i eksemplet fra forrige slide er *hverken* injektiv *eller* surjektiv.

Eksempel (Både injektiv og surjektiv) 1/2

Betragt rotation $R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med vinklen θ mod uret omkring origo:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Denne lineære transformation er *både* injektiv *og* surjektiv.

Eksempel (Både injektiv og surjektiv) 2/2

- **Injektivitet** ($\ker R_\theta = \operatorname{null} \mathbf{A}_\theta = \{\mathbf{0}\}$)

  Geometrisk forklaring: Den eneste vektor $\mathbf{x}$ som drejes over i nulvektoren $\mathbf{0}$ er $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Derfor er $\ker R_\theta = \{\mathbf{0}\}$.

  Udregninger: Vis selv $\operatorname{null} \mathbf{A}_\theta = \{\mathbf{0}\}$ ved de metoder vi har lært.

Eksempel (Både injektiv og surjektiv) 2/2

- **Injektivitet** (ker $R_\theta = \text{null}\, \mathbf{A}_\theta = \{\mathbf{0}\}$)

  Geometrisk forklaring: Den eneste vektor $\mathbf{x}$ som drejes over i nulvektoren $\mathbf{0}$ er $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Derfor er ker $R_\theta = \{\mathbf{0}\}$.

  Udregninger: Vis selv null $\mathbf{A}_\theta = \{\mathbf{0}\}$ ved de metoder vi har lært.

- **Surjektivitet** (ran $R_\theta = \text{col}\, \mathbf{A}_\theta = \mathbb{R}^2$)

  Geometrisk forklaring: Ethvert $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ har formen $\mathbf{y} = R_\theta(\mathbf{x})$ for et $\mathbf{x}$ (lad nemlig $\mathbf{x}$ være den vektor der fremkommer ved at rotere $\mathbf{y}$ vinklen $-\theta$). Derfor er ran $R_\theta = \mathbb{R}^2$.

  Udregninger: Vis selv col $\mathbf{A}_\theta = \mathbb{R}^2$ ved de metoder vi har lært.

Inverse lineære transformationer

Lad der være givet en lineær transformation

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad T \quad} \mathbb{R}^n$$

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

som både er injektiv og surjektiv (dvs. T er bijektiv). Dette svarer til, at matricen **A** er invertibel. Den inverse lineære transformation er:

$$\mathbb{R}^n \xleftarrow{\quad T^{-1} \quad} \mathbb{R}^n$$

$$T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

Eksempel (Invers lineær transformation) 1/2

Betragt rotation $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med vinklen θ mod uret omkring origo:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Eksempel (Invers lineær transformation) 2/2

Den inverse lineære transformation R_θ^{-1} er givet ved matricen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\theta^{-1} &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \frac{1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\ &\overset{(!)}{=} \begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}\\ &= \mathbf{A}_{-\theta}\end{aligned}$$

Derfor gælder

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$$

Med andre ord: Det inverse/modsatte af at rotere et punkt vinklen θ (effekten af R_θ) er at rotere punktet vinklen $-\theta$ (effekten af R_θ^{-1}).

Hvor anvendes lineære transformationer?

- Computergrafik (se også Projekt B)

- Kryptografi