LinAlgDat

2019/2020

Facit til Prøve I, torsdag d. 14/5 2020

Opgave 1

(a) Ved at foretage rækkeoperationerne $-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$, $5\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$ fås:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2a & a \\ 2 & -1 & 4 & -a \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2a & a \\ 0 & 0 & 4+8a & 4a-2 \end{bmatrix}.$$

Hvis $4+8a=0$ svarende til $a=-1/2$ har vi $4a-2=-4\neq 0$. Dermed er rangen af totalmatricen større end rangen af koefficientmatricen, så for $a=-1/2$ er løsningsmængden tom. For $a\neq -1/2$ har koefficientmatricen fuld rang 3, hvormed der er netop én løsning til systemet. Det er altså ikke muligt at ligningssystemet kan have uendeligt mange løsninger.

(b) Hvis $a=-1/2$ er

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9/2 & -9/2 \\ -2 & 2 & -5 \\ 10 & -1 & 16 \end{bmatrix}.$$

Totalmatricen bringes på reduceret række echelonform:

$$\begin{bmatrix} 0 & 9/2 & -9/2 & 3 \\ -2 & 2 & -5 & 1 \\ 10 & -1 & 16 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Heraf aflæses løsningerne:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opgave 2

(a) Vi har

$$S\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 3 & -1\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}}_{\mathbf{B}}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

Derfor gælder $(S \circ T)(\mathbf{y}) = (\mathbf{AB})\mathbf{y}$ for alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Fordi

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

er lig med enhedsmatricen fås altså $(S \circ T)(\mathbf{y}) = \mathbf{Iy} = \mathbf{y}$.

(b) Man har $(T \circ S)(\mathbf{x}) = \mathbf{Cx}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ hvor

$$\mathbf{C} := \mathbf{BA} = \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -4 & 2\\1 & 3 & -1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Der gælder derfor:

$$\ker(T \circ S) = \operatorname{null}\mathbf{C} \qquad (\text{nulrummet for } \mathbf{C}).$$

For at bestemme en basis for dette finder vi den reducerede rækkeechelonform for $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C}^* = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Heraf aflæses at (fx)

$$\text{En basis for } \ker(T \circ S) \text{ er (fx):} \qquad \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(c) Der gælder

$$\operatorname{ran}(T \circ S) = \operatorname{col}\mathbf{C} \qquad (\text{søjlerummet for } \mathbf{C}).$$

Pivot 1-tallerne i den reducerede rækkeechelonform $\mathbf{C}^*$ står i første og anden søjle, og de tilsvarende søjler i den oprindelige matrix $\mathbf{C}$ udgør derfor en basis for $\operatorname{col}\mathbf{C}$. Dvs.

$$\text{En basis for } \operatorname{ran}(T \circ S) \text{ er (fx):} \qquad \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Henrik Holm (holm@math.ku.dk)
Henrik Laurberg Pedersen (henrikp@math.ku.dk)