LinAlgDat

2019/2020

Prøve II, mandag d. 8. juni 2020 kl. 18:00–19:45

Deadline for aflevering er i dag mandag den 8/6 kl. 19:45. For sene afleveringer accepteres ikke.

I skriver jeres løsninger til opgaverne i Prøve I på papir med blyant eller kuglepen. Det er også helt i orden at skrive på Ipad eller anden tablet med elektronisk pen. Prøven laves individuelt men alle hjælpemidler er tilladt. Besvarelsen skal indeholde mellemregninger i rimeligt omfang.

I fotograferer eller scanner jeres håndskrevne løsninger (som billedfiler eller pdf-filer) og uploader disse til Absalon inden deadline. Det anbefales, om muligt, at konvertere evt. billeder til pdf-filer da disse fylder mindre. Har I skrevet på Ipad/tablet med elektronisk pen uploades den producerede fil i pdf format. ***Zip-filer må ikke uploades!***

Opgave 1 (50%)

Betragt underrummet $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ af $\mathbb{R}^3$ hvor

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem projektionsmatricen for $\mathcal{U}$, dvs. den matrix $\mathbf{P}$ så $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestem en basis for $\mathcal{U}^\perp$ (det ortogonale komplement til $\mathcal{U}$).

Opgave 2 (50%)

Betragt 3×3 matricen $\mathbf{A}$ givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$.

Det oplyses, at 0 og 5 er egenværdier for $\mathbf{A}$, samt, at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor hørende til $\lambda = 5$.

(b) Diagonalisér $\mathbf{A}$, dvs. bestem en invertibel matrix $\mathbf{P}$ og en diagonalmatrix $\mathbf{D}$ så $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

(c) Bestem en 3×3 matrix $\mathbf{Q}$ så der gælder

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$