Forelæsning 3: Invers matrix, elementærmatricer og anvendelser

LinAlgDat 2019/2020

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk henrikp@math.ku.dk

Oversigt

Kvadratiske matricer

Diagonalmatrix og enhedsmatrix

- En $n \times n$ matrix $\mathbf{D}$ er en diagonalmatrix hvis $d_{ij} = 0$ for $i \neq j$.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Enhedsmatricen $\mathbf{I}_n$ er denne $n \times n$ diagonalmatrix

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Enhedsmatricen opfylder $\mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$ for alle $n \times n$ matricer $\mathbf{A}$.

Matrixpotenser

- Når $\mathbf{A}$ er kvadratisk kan vi udregne $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}$.
- Induktion kan bruges når man skal eftervise et generelt udtryk for $\mathbf{A}^k$, fx

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 1-2^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

- Matrixprodukter og -potenser elektronisk

```
A<-matrix(1:4,2)
B<-matrix(c(1,0,0,1),2)
for (j in (1:20)) {B<-A%*%B}
B
```

Web og potenser

Potenser af nabomatricen for et web kan bruges til at bestemme på hvor mange måder kan vi komme fra en side til en anden i et web ved at bruge et givet antal links.

Induktion - repetition

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 1-2^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Induktionsstart: Gælder formlen for $k=1$? Ja!

Induktionsskridt: Antag at formlen gælder for k. Vis at den også gælder for $k+1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 1-2^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{matrixmultiplikation} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^k + (-1)\cdot 0 & 2(1-2^k) - 1\cdot 1 \\ 0\cdot 2^k + 1\cdot 0 & 0(1-2^k) + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 2-2^{k+1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 1-2^{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition 2.7: invers matrix

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er invertibel hvis der findes en $n \times n$ matrix $\mathbf{X}$ så

$$\mathbf{XA} = \mathbf{AX} = \mathbf{I}_n$$

Matricen $\mathbf{X}$ kaldes en invers til $\mathbf{A}$. En invertibel matrix $\mathbf{A}$ kaldes også regulær *(eng. non singular)*, ellers kaldes den singulær.

- Hvis både $\mathbf{X}_1$ og $\mathbf{X}_2$ er inverse til $\mathbf{A}$ så gælder

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{I}_n = \mathbf{X}_2(\mathbf{AX}_1) = (\mathbf{X}_2\mathbf{A})\mathbf{X}_1 = \mathbf{I}_n\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1.$$

Konklusion: den inverse er entydigt bestemt. Den betegnes $\mathbf{A}^{-1}$.

Theorem 2.9 Highlight I: n ligninger med n ubekendte

Hvis $\mathbf{A}$ er invertibel så har ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ netop en løsning $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

Bevis: Vi ganger med den inverse matrix *fra venstre*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{I}_n\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

Regning med inverse matricer

1. Hvis $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er invertible, så er $\mathbf{AB}$ også invertibel og der gælder

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

2. Hvis $\mathbf{A}$ er invertibel, så er $\mathbf{A}^T$ også invertibel og $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
3. Hvis $\mathbf{A}$ er invertibel, så er $\mathbf{A}^{-1}$ også invertibel og $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
4. Hvis $\mathbf{A}$ er invertibel, og $s \neq 0$ så er $s\mathbf{A}$ også invertibel og $(s\mathbf{A})^{-1} = s^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

To spørgsmål - og svar

- Hvordan afgør vi om en given matrix er invertibel?
- Hvis en matrix er invertibel, hvordan kan vi så bestemme den inverse?

- Bruge rækkeoperationer og rang
- Udvikle teori for determinant (Kapitel 5)

Illustration 2.2: Invers matrix og rækkeoperationer

Afgør, om

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

er invertibel og bestem i givet fald den inverse matrix.

- Bestem en matrix $\mathbf{X}$ sådan at $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ (højreinvers).
- Man kan vise, at $\mathbf{X}$ også opfylder at $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$ (venstreinvers).
- Dermed er $\mathbf{X}$ den inverse matrix til $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette svarer til tre ligningsystemer, fx

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Disse skal løses hver for sig ved rækkeoperationer

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{totalmatrix: } \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\2&1&2&0\\3&3&1&0\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{totalmatrix: } \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\2&1&2&1\\3&3&1&0\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{totalmatrix: } \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\2&1&2&0\\3&3&1&1\end{array}\right]$$

Smart at sætte dem sammen til en total totalmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\3&3&1&0&0&1\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5/2&-3/2&1/2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3/2&3/2&-1/2\end{array}\right]$$

Bestemmelse af invers ved rækkeoperationer

Computation, p. 78

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix og lad $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n$.

1. Opskriv matricen $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$.
2. Lav elementære rækkeoperationer på matricen $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ og bring den på reduceret rækkeechelonform.
3. Hvis den reducerede rækkeechelonform er $[\mathbf{I}|\mathbf{X}]$ da er $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}$, hvis ikke da er $\mathbf{A}$ ikke invertibel.

Theorem 2.5 og 2.6

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er invertibel hvis og kun hvis rank $\mathbf{A} = n$.

Opgave

Brug “Computation” til at vise

$$\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-7/8&3/8\\5/8&-1/8\end{bmatrix}.$$

Opgaveløsning

Opgave løsning

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\5&7&0&1\end{array}\right] -5r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&-8&-5&1\end{array}\right] \cdot -1/8 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&5/8&-1/8\end{array}\right] -3r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc}1&0&-7/8&3/8\\0&1&5/8&-1/8\end{array}\right]$$

Invers til 2×2 matrix, p. 80

Matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

har en invers netop hvis $\det \mathbf{A} = ad - bc \neq 0$ og der gælder da

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}.$$

Reglen er:

- divider med determinanten
- skift fortegn udenfor diagonalen
- byt om i diagonalen

Eksempel

$$\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 7 - 3\cdot 5}\begin{bmatrix}7&-3\\-5&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7/8&3/8\\5/8&-1/8\end{bmatrix}.$$

Definition 2.9

En matrix er en elementærmatrix hvis den er resultatet af at udføre netop en af tre nedenstående rækkeoperationer på enhedsmatricen.

- tal gange en række lægges til en anden række
- en række ganges med et tal, forskellig fra 0
- to rækker ombyttes

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{3\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2\leftrightarrow\mathbf{r}_3} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{5\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Multiplikation med elementærmatrix

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&\cdot&\cdot\\b&\cdot&\cdot\\c&\cdot&\cdot\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&\cdot&\cdot\\c&\cdot&\cdot\\b&\cdot&\cdot\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&\cdot&\cdot\\b&\cdot&\cdot\\c&\cdot&\cdot\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&\cdot&\cdot\\5b&\cdot&\cdot\\c&\cdot&\cdot\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&\cdot&\cdot\\b&\cdot&\cdot\\c&\cdot&\cdot\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&\cdot&\cdot\\b&\cdot&\cdot\\c+3a&\cdot&\cdot\end{bmatrix}$$

Theorem 2.7 (morale)

At lave en rækkeoperation på en matrix er det samme som at gange den tilsvarende elementærmatrix på matricen fra venstre.

Example 4, p. 82

Eksemplet viser, at flere rækkeoperationer efter hinanden svarer til at gange flere elementærmatricer på i den rigtige rækkefølge!

Eksempel 4 p.82

$A = \begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\end{bmatrix} \rightsquigarrow A^* = \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix} -4r_1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\end{bmatrix} -\tfrac{1}{3} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{bmatrix} -2r_2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

Theorem 2.8

Elementærmatricer er invertible

Hvorfor er det nu sådan?

- Har byttet om på to rækker, så byt om igen
- Har du ganget en række med $t \neq 0$, så gang den med $1/t$
- Har du lagt s gange række i til række j, så læg $-s$ gange række i til række j

Example 5, p. 83

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1/2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}$$

Opgave

1. Hvilke af følgende matricer er elementære?

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Hvilke af følgende matricer er invers til matricen $\mathbf{E}_1$?

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Illustration 2.3

Skriv $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ som et produkt af elementærmatricer.

Illustration 2.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot -1/8} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/8 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 A = I$$

$$A = (E_3 E_2 E_1)^{-1} I = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1} = E_3 E_2 E_1).$$

Produkter af elementærmatricer

1. Antag, at **A** er invertibel.
2. Lav rækkeoperationer (k stk i alt) sådan, at $[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \rightsquigarrow [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$.
3. Rækkeoperationerne svarer til $\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I}$.
4. Dette giver: $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdots \mathbf{E}_k^{-1}$.
5. Da er **A** et produkt af elementærmatricer.

Theorem 2.9 Highlight II

Lad **A** være en $n \times n$ matrix. Da er følgende betingelser ensbetydende:

1. **A** er invertibel
2. Ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har netop en løsning for hvert **b**
3. Ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
4. Rangen af **A** er lig n
5. Den reducerede rækkeechelonform af **A** er **I**
6. **A** er et produkt af elementære matricer

Højre- og venstreinverse

Theorem 2.9 Highlight III

Lad **A** være en $n \times n$ matrix. Da er følgende ensbetydende:

1. **A** er invertibel
2. **A** har en venstreinvers
3. **A** har en højreinvers

En ikke kvadratisk matrix kan ikke have nogen invers matrix. Der kan dog godt være højre- eller venstreinverse:

- **X** er en venstreinvers til $m \times n$ matricen **A** hvis $\mathbf{XA} = \mathbf{I}_n$
- **X** er en højreinvers til $m \times n$ matricen **A** hvis $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_m$

Theorem 2.10: generelle inverse

Lad **A** være en $m \times n$ matrix med rank $\mathbf{A} = r$. Da gælder

1. **A** har en højreinvers netop hvis $r = m \leq n$
2. **A** har en venstreinvers netop hvis $r = n \leq m$