Entydigt bestemte koordinater

Hvis $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ er en basis og

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_k\mathbf{b}_k$$

så er $x_1, \ldots, x_k$ entydigt bestemt:

Antag at

$$x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_k\mathbf{b}_k = \mathbf{v} = y_1\mathbf{b}_1 + \cdots + y_k\mathbf{b}_k.$$

Da gælder

$$(x_1 - y_1)\mathbf{b}_1 + \cdots + (x_k - y_k)\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$$

Da $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ er lineært uafhængige må der gælde

$$x_1 - y_1 = \cdots = x_k - y_k = 0$$

dvs

$$x_1 = y_1, \cdots, x_k = y_k.$$

Dagens innledningseksempel (I)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_5 = t; \quad x_4 - 2t = 0; \quad x_3 = s; \quad x_2 - s + t = 0; \quad x_1 + s + 2t = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \text{ så } Ax = 0 \qquad \text{(Slide 14)}$$

Velg $s = 1$ og $t = 0$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dvs $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Velg $s = 0$ og $t = 1$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dvs $A \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ (Slide 19)

Dagens yndlingseksempel (II)

Efter Slide 23

- Ex rækkeoperationen $r_2 - 2r_1 \to r_2$ på A betyder at den nye anden række i matricen er en linearkombination af den gamle række 2 og den gamle række 1. Dvs:

$$\text{ny-rk-2} \in \text{span}\{\text{gl-rk-1}, \text{gl-rk-2}\}$$