

# Forelæsning 5: Underrum af $\mathbb{R}^n$ , baser og dimension

LinAlgDat 2019/2020

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen  
Institut for Matematiske Fag  
[holm@math.ku.dk](mailto:holm@math.ku.dk) og [henrikp@math.ku.dk](mailto:henrikp@math.ku.dk)

# Oversigt

- ① Vektorrummet  $\mathbb{R}^n$
- ② Underrum
- ③ Span
- ④ Lineær (u)afhængighed
- ⑤ Baser
- ⑥ Dimension

# Oversigt

- ① Vektorrummet  $\mathbb{R}^n$
- ② Underrum
- ③ Span
- ④ Lineær (u)afhængighed
- ⑤ Baser
- ⑥ Dimension

# Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

## Definition 3.1 (Vektoraddition og skalarmultiplikation)

Lad  $\mathbb{R}^n$  være mængden af alle (søjle)vektorer

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$$

Vektoraddition/subtraktion og skalarmultiplikation defineres pladsvis:

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1 \pm v_1 \\ \vdots \\ u_n \pm v_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad s\mathbf{u} = s \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} su_1 \\ \vdots \\ su_n \end{pmatrix}$$

## Eksempel (Regning med vektorer)

I  $\mathbb{R}^2$  gælder fx

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

## Theorem 3.1 (Regneregler i $\mathbb{R}^n$ )

Nulvektoren i  $\mathbb{R}^n$  har per definition 0'er på alle  $n$  koordinater:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoraddition og skalarmultiplikation opfylder følgende regler:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
- $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
- $s(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = s\mathbf{u} + s\mathbf{v}$
- $(s + t)\mathbf{v} = s\mathbf{v} + t\mathbf{v}$
- $s(t\mathbf{v}) = (st)\mathbf{v}$
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

for alle vektorer  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  og alle tal (skalarer)  $s, t \in \mathbb{R}$ .

# Abstakte vektorrum

## Definition 7.1 (Vektorrum)

En mængde  $V$  (hvis elementer vi omtaler som “vektorer”) med

- Vektoraddition:  $V \times V \rightarrow V$ ,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$ , og
- Skalarmultiplikation:  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ ,  $(s, \mathbf{u}) \mapsto s\mathbf{u}$

som opfylder reglerne i Theorem 3.1 kaldes et (reelt) **vektorrum**.

# Abstakte vektorrum

## Definition 7.1 (Vektorrum)

En mængde  $V$  (hvis elementer vi omtaler som “vektorer”) med

- Vektoraddition:  $V \times V \rightarrow V$ ,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$ , og
- Skalarmultiplikation:  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ ,  $(s, \mathbf{u}) \mapsto s\mathbf{u}$

som opfylder reglerne i Theorem 3.1 kaldes et (reelt) **vektorrum**.

## Theorem 3.1 (reformulering)

Mængden  $V = \mathbb{R}^n$  er et (reelt) vektorrum.

# Abstrakte vektorrum

## Definition 7.1 (Vektorrum)

En mængde  $V$  (hvis elementer vi omtaler som “vektorer”) med

- Vektoraddition:  $V \times V \rightarrow V$ ,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$ , og
- Skalarmultiplikation:  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ ,  $(s, \mathbf{u}) \mapsto s\mathbf{u}$

som opfylder reglerne i Theorem 3.1 kaldes et (reelt) **vektorrum**.

## Theorem 3.1 (reformulering)

Mængden  $V = \mathbb{R}^n$  er et (reelt) vektorrum.

## Eksempel (Abstrakte vektorrum §7.1)

$$V = \mathbb{R}^{m \times n} = \{m \times n \text{ matricer med indgange fra } \mathbb{R}\}$$

$$V = \mathbf{F}(-\infty, \infty) = \{\text{funktioner } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$V = \mathbf{P}_n = \{\text{polynomier } p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \text{ hvor } a_i \in \mathbb{R}\}$$

# Vi holder os fra abstrakte vektorrum!

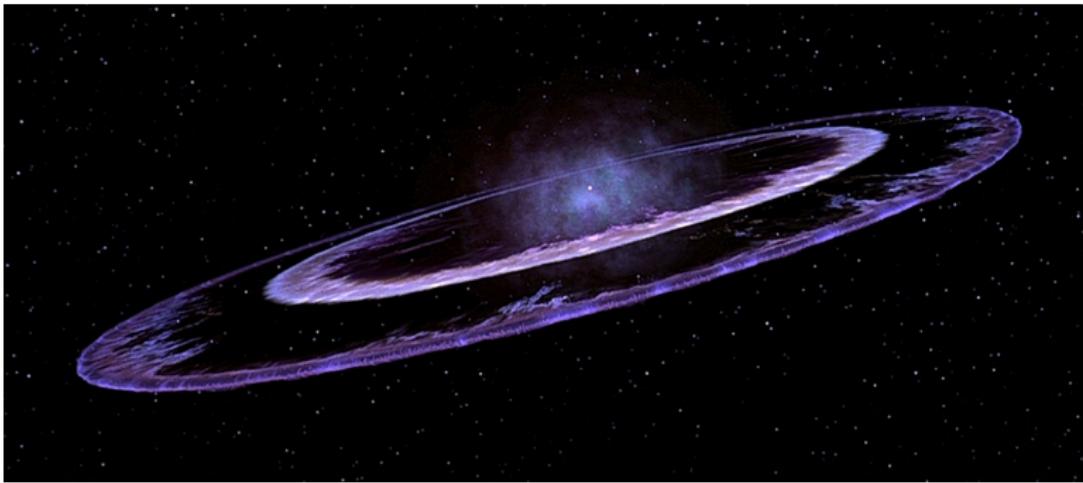
Vi vil udelukkende fokusere på vektorrummet  $V = \mathbb{R}^n$ .

Men alt hvad vi skal lære om  $\mathbb{R}^n$  (fx underrum, span, lineær uafhængighed, baser, ...) gælder også i et abstrakt vektorrum  $V$ .

# Oversigt

- 1 Vektorrummet  $\mathbb{R}^n$
- 2 Underrum
- 3 Span
- 4 Lineær (u)afhængighed
- 5 Baser
- 6 Dimension

# Underrum (*subspace*)



In 2293, the destruction of the Klingon moon Praxis produced a **subspace** shock wave (Star Trek VI: The Undiscovered Country; VOY: "Flashback")

# Underrum

Følgende begreb er helt centralet:

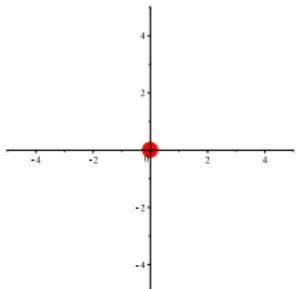
## Definition 3.2 (Underrum)

En delmængde  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  kaldes et **underrum** såfremt:

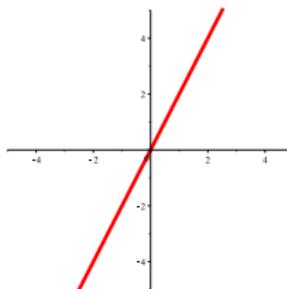
- $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$
- For alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$  gælder  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$
- For alle  $s \in \mathbb{R}$  og  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  gælder  $s\mathbf{u} \in \mathcal{U}$

# Illustrationer af underrum af $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$

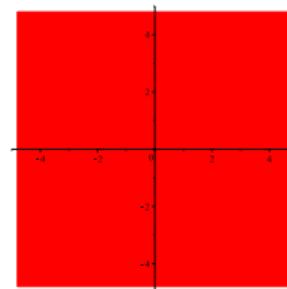
Der er tre typer underrum af  $\mathbb{R}^2$ :



$$\mathcal{U} = \{(0, 0)\}$$



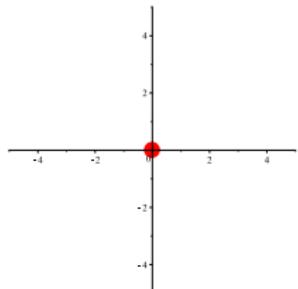
$$\mathcal{U} = \text{linje gennem } (0, 0)$$



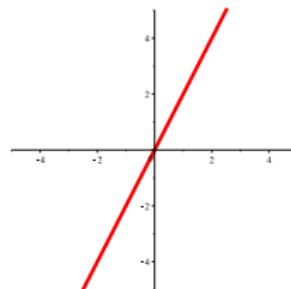
$$\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$$

# Illustrationer af underrum af $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$

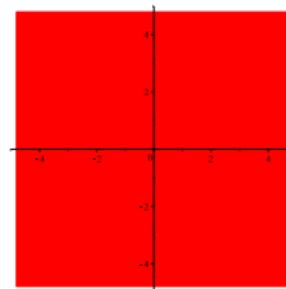
Der er tre typer underrum af  $\mathbb{R}^2$ :



$$\mathcal{U} = \{(0, 0)\}$$

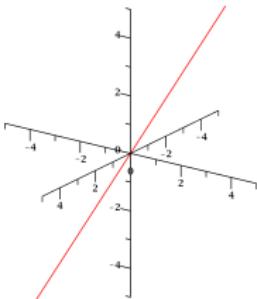


$$\mathcal{U} = \text{linje gennem } (0, 0)$$

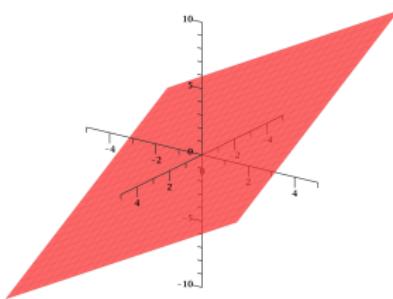


$$\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$$

Foruden  $\mathcal{U} = \{(0, 0, 0)\}$  og  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$  er der to typer underrum i  $\mathbb{R}^3$ :



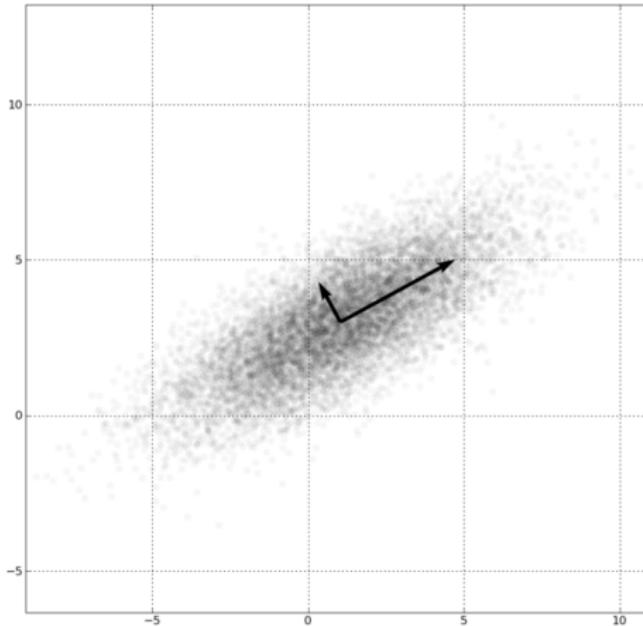
$$\mathcal{U} = \text{linje gennem } (0, 0, 0)$$



$$\mathcal{U} = \text{plan gennem } (0, 0, 0)$$

# Hvad kan man fx bruge underrum til?

I *Principal Component Analysis (PCA)* tilnærmer man et højdimensional datasæt med et lavdimensionalt underrum.



[http://en.wikipedia.org/wiki/Principal\\_component\\_analysis](http://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis)

## Eksempel (Et underrum af $\mathbb{R}^4$ )

Følgende delmængde af  $\mathbb{R}^4$  er et underrum:

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

## Eksempel (Et underrum af $\mathbb{R}^4$ )

Følgende delmængde af  $\mathbb{R}^4$  er et underrum:

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

En måde at indse dette på er ved at bemærke, at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

## Eksempel (Et underrum af $\mathbb{R}^4$ )

Følgende delmængde af  $\mathbb{R}^4$  er et underrum:

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

En måde at indse dette på er ved at bemærke, at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

- Da  $\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$  gælder  $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$ .

## Eksempel (Et underrum af $\mathbb{R}^4$ )

Følgende delmængde af  $\mathbb{R}^4$  er et underrum:

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

En måde at indse dette på er ved at bemærke, at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

- Da  $\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$  gælder  $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$ .
- Hvis  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$  gælder  $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$  og  $\mathbf{Av} = \mathbf{0}$ . Matrixregning giver

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

og dermed gælder  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ .

## Eksempel (Et underrum af $\mathbb{R}^4$ )

Følgende delmængde af  $\mathbb{R}^4$  er et underrum:

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

En måde at indse dette på er ved at bemærke, at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

- Da  $\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$  gælder  $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$ .
- Hvis  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$  gælder  $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$  og  $\mathbf{Av} = \mathbf{0}$ . Matrixregning giver

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

og dermed gælder  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ .

- Lad  $s \in \mathbb{R}$ . Hvis  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  gælder  $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$ . Matrixregning giver

$$\mathbf{A}(s\mathbf{u}) = s\mathbf{Au} = s\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

og dermed gælder  $s\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ .

## Øvelse

Betrægt følgende delmængder af  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1 \}$$

$$\mathcal{V} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2 \}$$

Hvilke af dem er underrum (begrund)?

## Øvelse

Betrægt følgende delmængder af  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1 \}$$

$$\mathcal{V} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2 \}$$

Hvilke af dem er underrum (begrund)?

## Løsning.

- $\mathcal{U}$  er et underrum (jfr. eksemplet ovenfor) fordi:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \iff (1 \ -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (0) \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}.$$

## Øvelse

Betrægt følgende delmængder af  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1 \}$$

$$\mathcal{V} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2 \}$$

Hvilke af dem er underrum (begrund)?

## Løsning.

- $\mathcal{U}$  er et underrum (jfr. eksemplet ovenfor) fordi:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \iff (1 \ -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (0) \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}.$$

- $\mathcal{V}$  er ikke et underrum fordi:

$$(-1, 1), (1, 1) \in \mathcal{V} \quad \text{men} \quad (-1, 1) + (1, 1) = (0, 2) \notin \mathcal{V}.$$

# Oversigt

- ① Vektorrummet  $\mathbb{R}^n$
- ② Underrum
- ③ Span
- ④ Lineær (u)afhængighed
- ⑤ Baser
- ⑥ Dimension

# Span

## Definition 3.3 (Span af vektorer)

Lad  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  være en mængde af vektorer i  $\mathbb{R}^n$ . Sæt

$$\text{span } \mathcal{S} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} := \{x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_k\mathbf{v}_k \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\},$$

dvs.  $\text{span } \mathcal{S}$  er mængden af alle **linearkombinationer** af  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ .

Man definerer  $\text{span } \emptyset = \{\mathbf{0}\}$ .

# Span

## Definition 3.3 (Span af vektorer)

Lad  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  være en mængde af vektorer i  $\mathbb{R}^n$ . Sæt

$$\text{span } \mathcal{S} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} := \{x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_k\mathbf{v}_k \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}\},$$

dvs.  $\text{span } \mathcal{S}$  er mængden af alle **linearkombinationer** af  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ .

Man definerer  $\text{span } \emptyset = \{\mathbf{0}\}$ .

## Eksempel (Span)

1/3

Betrægt i  $\mathbb{R}^3$  vektorerne

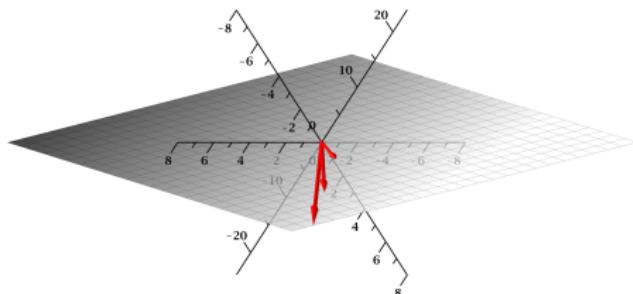
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Vi vil undersøge om vektorerne

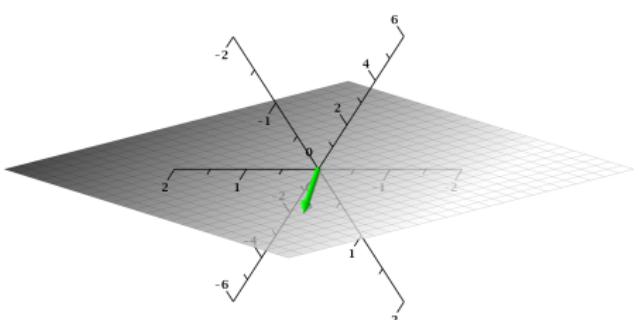
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tilhører mængden  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ .

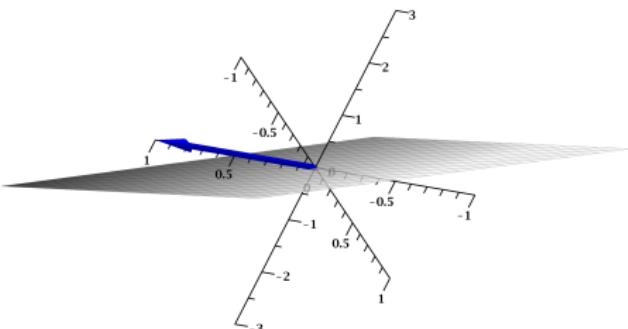
# Illustration af eksemplet



$$\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$



$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}$$



$$\mathbf{e}_1 \notin \mathcal{U}$$

## Eksempel (Span)

2/3

Vektoren  $\mathbf{u}$  tilhører  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  hvis der findes  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  så

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u} \quad \text{dvs.} \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Eksempel (Span)

2/3

Vektoren  $\mathbf{u}$  tilhører  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  hvis der findes  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  så

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u} \quad \text{dvs.} \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dette kan også skrives som

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Eksempel (Span)**

2/3

Vektoren  $\mathbf{u}$  tilhører  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  hvis der findes  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  så

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u} \quad \text{dvs.} \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dette kan også skrives som

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi undersøger om ligningssystemet kan løses:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

**Eksempel (Span)**

2/3

Vektoren  $\mathbf{u}$  tilhører  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  hvis der findes  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  så

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u} \quad \text{dvs.} \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dette kan også skrives som

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi undersøger om ligningssystemet kan løses:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Der gælder altså fx

$$-\frac{1}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}$$

**Konklusion:**  $\mathbf{u} \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  (endda er  $\mathbf{u} \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ).

## Eksempel (Span)

3/3

Tilsvarende undersøges om vektoren  $\mathbf{e}_1$  tilhører  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ligningssystemet kan altså *ikke* løses.

**Konklusion:**  $\mathbf{e}_1 \notin \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ .

**Eksempel (Span)**

3/3

Tilsvarende undersøges om vektoren  $\mathbf{e}_1$  tilhører  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ligningssystemet kan altså *ikke* løses.

**Konklusion:**  $\mathbf{e}_1 \notin \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ .

Eksemplet viser følgende:

**Metode til at afgøre om en vektor tilhører et span**

Lad  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  og sæt  $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_k)$ . For en vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  er følgende betingelser ækvivalente:

- (i)  $\mathbf{u}$  tilhører  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ .
- (ii) Ligningssystemet  $\mathbf{Ax} = \mathbf{u}$  har (mindst) en løsning.

Det nye (i) kan altså “oversættes” til det velkendte (ii).

## Øvelse

Betratg følgende tre vektorer i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ligger  $\mathbf{u}$  i  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ?

## Øvelse

Betrægt følgende tre vektorer i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ligger  $\mathbf{u}$  i  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ?

**Løsning.** Den reducerede rækkechelonform for  $(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{u})$  er

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2r_1 + r_2 \rightarrow r_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-r_2 + r_1 \rightarrow r_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Konklusion:  $\mathbf{u} = -2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ .

## Theorem 3.2 (Span er et underrum)

Lad  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  være en mængde af vektorer i  $\mathbb{R}^n$ . Mængden  $\text{span } \mathcal{S} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  er et **underrum** af  $\mathbb{R}^n$ .

## Definition 3.4

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$  og lad  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$  være en endelig delmængde. Man siger, at  $\mathcal{S}$  **udspænder**  $\mathcal{U}$  hvis  $\text{span } \mathcal{S} = \mathcal{U}$ .

## Theorem 3.2 (Span er et underrum)

Lad  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  være en mængde af vektorer i  $\mathbb{R}^n$ . Mængden  $\text{span } \mathcal{S} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  er et **underrum** af  $\mathbb{R}^n$ .

## Definition 3.4

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$  og lad  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$  være en endelig delmængde. Man siger, at  $\mathcal{S}$  **udspænder**  $\mathcal{U}$  hvis  $\text{span } \mathcal{S} = \mathcal{U}$ .

## Eksempel (Tre vektorer der udspænder $\mathbb{R}^3$ )

1/2

Vi har set, at vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ikke udspænder  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$  (de udspænder en plan), men det gør faktisk

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## Eksempel (Tre vektorer der udspænder $\mathbb{R}^3$ )

2/2

**Bevis:** Vi skal godtgøre, at uanset hvilket  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$  man vælger, så har ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

mindst en løsning.

**Eksempel (Tre vektorer der udspænder  $\mathbb{R}^3$ )**

2/2

**Bevis:** Vi skal godtgøre, at uanset hvilket  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$  man vælger, så har ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

mindst en løsning. Det har faktisk en entydig løsning:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & u_1 \\ 2 & 5 & 0 & u_2 \\ 3 & 6 & 0 & u_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2u_2 + \frac{5}{3}u_3 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 - \frac{2}{3}u_3 \\ 0 & 0 & 1 & u_1 - 2u_2 + u_3 \end{array} \right).$$

dvs.

$$x_1 = -2u_2 + \frac{5}{3}u_3, \quad x_2 = u_2 - \frac{2}{3}u_3, \quad x_3 = u_1 - 2u_2 + u_3$$

## Eksempel (Tre vektorer der udspænder $\mathbb{R}^3$ )

2/2

**Bevis:** Vi skal godtgøre, at uanset hvilket  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$  man vælger, så har ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

mindst en løsning. Det har faktisk en entydig løsning:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & u_1 \\ 2 & 5 & 0 & u_2 \\ 3 & 6 & 0 & u_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2u_2 + \frac{5}{3}u_3 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 - \frac{2}{3}u_3 \\ 0 & 0 & 1 & u_1 - 2u_2 + u_3 \end{array} \right).$$

dvs.

$$x_1 = -2u_2 + \frac{5}{3}u_3, \quad x_2 = u_2 - \frac{2}{3}u_3, \quad x_3 = u_1 - 2u_2 + u_3$$

**Bemærkning:** Vi har altså  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1\} = \mathbb{R}^3$ . Hvis  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  er en vilkårlig vektor, så gælder derfor også  $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{w}\} = \mathbb{R}^3$ .

# Oversigt

- ① Vektorrummet  $\mathbb{R}^n$
- ② Underrum
- ③ Span
- ④ Lineær (u)afhængighed
- ⑤ Baser
- ⑥ Dimension

# Lineær (u)afhængighed

AFHÆNGIGHED



Afhængig af facebook?

UAFHÆNGIGHED

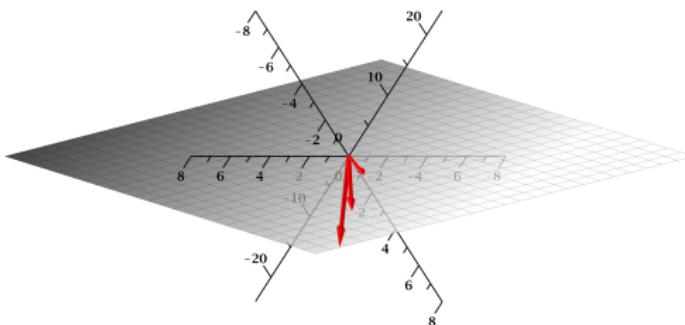


Uafhængighedserklæringen (4. juli 1776)

Vi har tidligere set, at de tre vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

udspænder en (“2-dimensional”) plan i  $\mathbb{R}^3$ :



Dette skyldes, at (fx)  $\mathbf{v}_3$  ligger i planen udspændt af  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , dvs.

$$\mathbf{v}_3 \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

I en vis forstand er  $\mathbf{v}_3$  altså “overflødig”. I denne situation siges vektorerne  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  at være **lineært afhængige**.

## Definition 3.5 (Lineær (u)afhængighed)

Et sæt  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  af vektorer i  $\mathbb{R}^n$  kaldes **lineært uafhængigt** hvis den eneste løsning til ligningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

er  $x_1 = \cdots = x_k = 0$ . I modsat fald kaldes  $S$  for **lineært afhængigt**.

## Definition 3.5 (Lineær (u)afhængighed)

Et sæt  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  af vektorer i  $\mathbb{R}^n$  kaldes **lineært uafhængigt** hvis den eneste løsning til ligningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

er  $x_1 = \cdots = x_k = 0$ . I modsat fald kaldes  $S$  for **lineært afhængigt**.

## Eksempel (Lineær (u)afhængighed)

1/3

Vi vil undersøge, om vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

er lineært (u)afhængige?

## Definition 3.5 (Lineær (u)afhængighed)

Et sæt  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  af vektorer i  $\mathbb{R}^n$  kaldes **lineært uafhængigt** hvis den eneste løsning til ligningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

er  $x_1 = \cdots = x_k = 0$ . I modsat fald kaldes  $S$  for **lineært afhængigt**.

## Eksempel (Lineær (u)afhængighed)

1/3

Vi vil undersøge, om vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

er lineært (u)afhængige? Vi skal altså interesse os for løsningerne  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  til ligningen:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad \text{dvs.} \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## Eksempel (Lineær (u)afhængighed)

2/3

Dette kan også skrives som

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## Eksempel (Lineær (u)afhængighed)

Dette kan også skrives som

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Udregningen

$$(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 | \mathbf{0}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

viser, at ligningen  $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$  har mange løsninger, fx

$$\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

**Konklusion:**  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  lineært afhængige.

## Eksempel (Lineær (u)afhængighed)

Dette kan også skrives som

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Udregningen

$$(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 | \mathbf{0}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

viser, at ligningen  $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$  har mange løsninger, fx

$$\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

**Konklusion:**  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  lineært afhængige.

**Bemærkning:** Hvis  $\mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$  er en vilkårlig vektor, da er  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  også lineært afhængige fordi

$$\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}.$$

## Eksempel (Lineær (u)afhængighed)

3/3

Vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

er lineært *uafhængige* fordi udregningen

$$(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{0}) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

viser, at ligningen  $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$  kun har løsningen  $x_1 = x_2 = 0$ .

## Eksempel (Lineær (u)afhængighed)

Vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

er lineært *uafhængige* fordi udregningen

$$(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{0}) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

viser, at ligningen  $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$  kun har løsningen  $x_1 = x_2 = 0$ .

Eksemplet viser følgende:

### Metode til at afgøre lineær (u)afhængighed

Lad  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  og sæt  $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_k)$  (en  $n \times k$  matrix).

Da er følgende betingelser ækvivalente:

- (i) Vektorerne  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  er lineært *uafhængige*.
- (ii) Ligningssystemet  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  har kun løsningen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

## Øvelse

Betratg følgende tre vektorer i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Er de lineært uafhængige eller lineært afhængige?

## Øvelse

Betratg følgende tre vektorer i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Er de lineært uafhængige eller lineært afhængige?

**Løsning.** Den reducerede rækkechelonform for  $(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3)$  er

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-2r_1 + r_2 \rightarrow r_2, -r_1 + r_3 \rightarrow r_3} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-r_2 + r_1 \rightarrow r_1} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Derfor er fx  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ , så de er lineært afhængige.

En alternativ formulering af metoden er følgende (pga. Theorem 1.6):

### Theorem 3.4 (Lineær uafhængighed og rank)

Lad  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  og sæt  $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \mid \dots \mid \mathbf{v}_k)$  (en  $n \times k$  matrix).

Da er følgende betingelser ækvivalente:

- (i) Vektorerne  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  er lineært *uafhængige*.
- (ii)  $\text{rank } \mathbf{A} = k$ .

En alternativ formulering af metoden er følgende (pga. Theorem 1.6):

### Theorem 3.4 (Lineær uafhængighed og rank)

Lad  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  og sæt  $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \mid \dots \mid \mathbf{v}_k)$  (en  $n \times k$  matrix).

Da er følgende betingelser ækvivalente:

- (i) Vektorerne  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  er lineært *uafhængige*.
- (ii)  $\text{rank } \mathbf{A} = k$ .

Følgende er en konsekvens af Theorem 3.4 (med  $k = n$ ):

### Theorem 3.5 (Lineær uafhængighed og invertibilitet)

Lad  $n \times n$  matrix er invertibel hvis og kun hvis søjlerne (eller rækkerne) er lineært *uafhængige*.

En alternativ formulering af metoden er følgende (pga. Theorem 1.6):

### Theorem 3.4 (Lineær uafhængighed og rank)

Lad  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  og sæt  $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_k)$  (en  $n \times k$  matrix).

Da er følgende betingelser ækvivalente:

- (i) Vektorerne  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  er lineært *uafhængige*.
- (ii)  $\text{rank } \mathbf{A} = k$ .

Følgende er en konsekvens af Theorem 3.4 (med  $k = n$ ):

### Theorem 3.5 (Lineær uafhængighed og invertibilitet)

Lad  $n \times n$  matrix er invertibel hvis og kun hvis søjlerne (eller rækkerne) er lineært *uafhængige*.

En anden konsekvens af Theorem 3.4 er:

### Theorem 3.6 (Antallet af lineært uafhængige vektorer)

Hvis  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  er lineært uafhængige, da er  $k \leq n$ .

## Eksempel (Lineær afhængighed)

Følgende 5 vektorer i  $\mathbb{R}^4$  må nødvendigvis være lineært afhængige:

$$\begin{pmatrix} 0.96 \\ 0.28 \\ 0.12 \\ 0.27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.56 \\ 0.80 \\ 0.65 \\ 0.96 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.02 \\ 0.35 \\ 0.57 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.62 \\ 0.75 \\ 0.68 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.42 \\ 0.85 \\ 0.19 \end{pmatrix}.$$

## Eksempel (Lineær afhængighed)

Følgende 5 vektorer i  $\mathbb{R}^4$  må nødvendigvis være lineært *afhængige*:

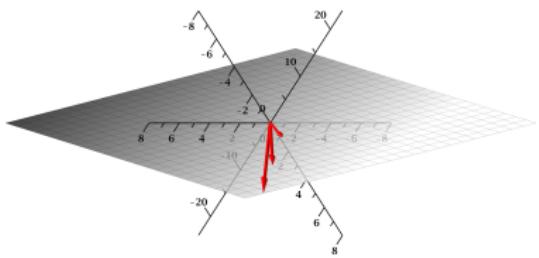
$$\begin{pmatrix} 0.96 \\ 0.28 \\ 0.12 \\ 0.27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.56 \\ 0.80 \\ 0.65 \\ 0.96 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.02 \\ 0.35 \\ 0.57 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.62 \\ 0.75 \\ 0.68 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.42 \\ 0.85 \\ 0.19 \end{pmatrix}.$$

En alternativ karakterisering af lineær (u)afhængighed:

### Theorem 3.3 (Lineær afhængighed og span)

Lad  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ . Da er følgende betingelser ækvivalente:

- (i) Vektorerne  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  er lineært *afhængige*.
- (ii) Der findes et index  $i$  så  $\mathbf{v}_i \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k\}$ .



$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

# Oversigt

- 1 Vektorrummet  $\mathbb{R}^n$
- 2 Underrum
- 3 Span
- 4 Lineær (u)afhængighed
- 5 Baser
- 6 Dimension

# Baser

## Definition 3.6 (Basis for underrum)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ . En endelig delmængde af  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$  kaldes en **basis** for  $\mathcal{U}$  hvis:

$\mathcal{B}$  er lineært uafhængig    og     $\text{span } \mathcal{B} = \mathcal{U}$ .

# Baser

## Definition 3.6 (Basis for underrum)

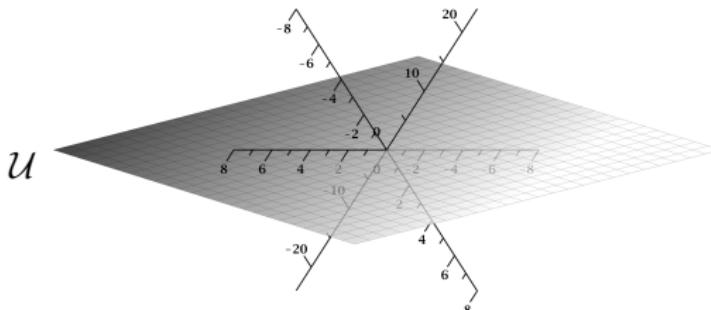
Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ . En endelig delmængde af  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$  kaldes en **basis** for  $\mathcal{U}$  hvis:

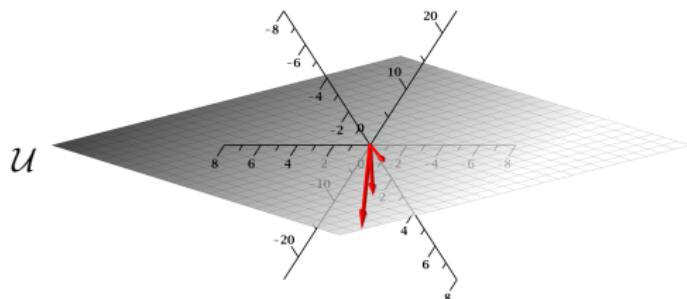
$$\mathcal{B} \text{ er lineært uafhængig} \quad \text{og} \quad \text{span } \mathcal{B} = \mathcal{U}.$$

Vi har tidligere set, at de tre vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

udspænder en plan  $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  i  $\mathbb{R}^3$ :

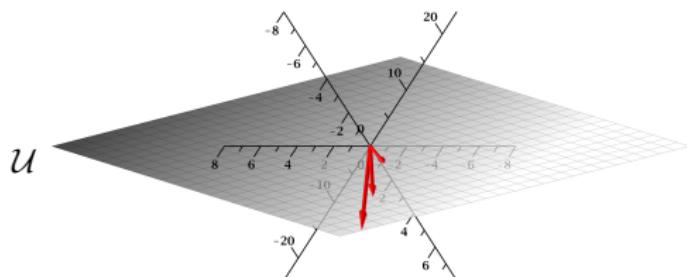




$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

Er  $\mathcal{B}$  linært uafh. ? Nej  
Er  $\text{span } \mathcal{B} = \mathcal{U}$  ? Ja

Er  $\mathcal{B}$  basis for  $\mathcal{U}$  ? **Nej**

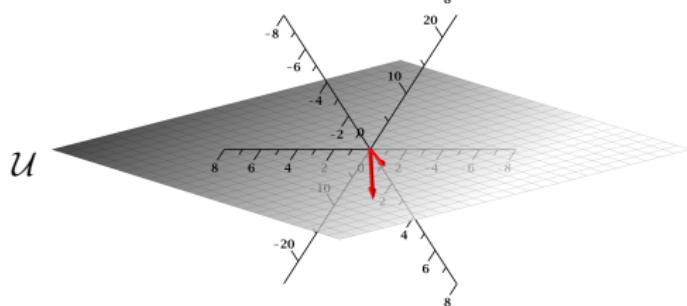


$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

Er  $\mathcal{B}$  linært uafh. ? Nej

Er  $\text{span } \mathcal{B} = \mathcal{U}$  ? Ja

Er  $\mathcal{B}$  basis for  $\mathcal{U}$  ? Nej

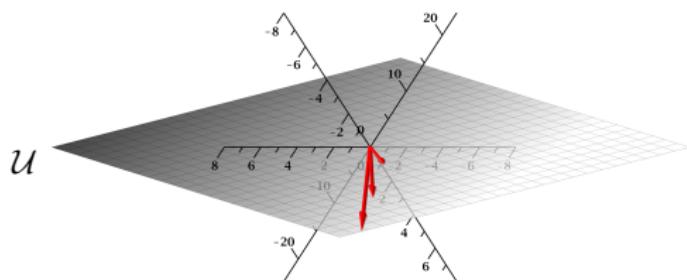


$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

Er  $\mathcal{B}$  linært uafh. ? Ja

Er  $\text{span } \mathcal{B} = \mathcal{U}$  ? Ja

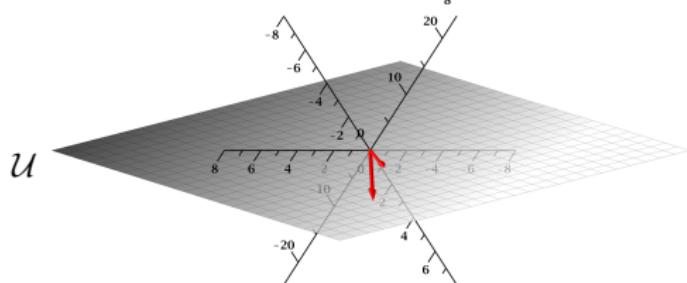
Er  $\mathcal{B}$  basis for  $\mathcal{U}$  ? Ja



$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

Er  $\mathcal{B}$  linært uafh. ? Nej  
Er  $\text{span } \mathcal{B} = \mathcal{U}$  ? Ja

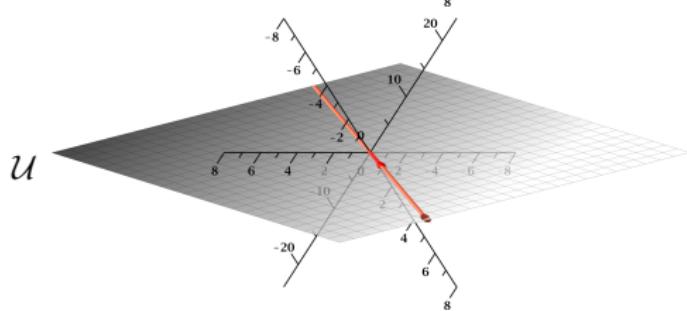
Er  $\mathcal{B}$  basis for  $\mathcal{U}$  ? Nej



$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

Er  $\mathcal{B}$  linært uafh. ? Ja  
Er  $\text{span } \mathcal{B} = \mathcal{U}$  ? Ja

Er  $\mathcal{B}$  basis for  $\mathcal{U}$  ? Ja



$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1\}$$

Er  $\mathcal{B}$  linært uafh. ? Ja  
Er  $\text{span } \mathcal{B} = \mathcal{U}$  ? Nej

Er  $\mathcal{B}$  basis for  $\mathcal{U}$  ? Nej

# Bemærkninger

## Hvad har vi lært?

Antag at vi har **givet** en endelig delmængde  $\mathcal{B}$  af et underrum  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Vi har lært metoder til at afgøre:

- Om  $\mathcal{B}$  er lineært uafhængig ?
- Om  $\text{span } \mathcal{B} = \mathcal{U}$  ?

Og vi kan derfor også afgøre:

- Om  $\mathcal{B}$  er en basis for  $\mathcal{U}$  ?

# Bemærkninger

## Hvad har vi lært?

Antag at vi har **givet** en endelig delmængde  $\mathcal{B}$  af et underrum  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Vi har lært metoder til at afgøre:

- Om  $\mathcal{B}$  er lineært uafhængig ?
- Om  $\text{span } \mathcal{B} = \mathcal{U}$  ?

Og vi kan derfor også afgøre:

- Om  $\mathcal{B}$  er en basis for  $\mathcal{U}$  ?

## Hvad mangler vi at lære?

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ .

- Kan vi være sikre på, at  $\mathcal{U}$  **har** en basis ?
- Hvordan **finder** vi i givet fald en basis  $\mathcal{B}$  for  $\mathcal{U}$  ?

# Standardbasen for $\mathbb{R}^n$

## Faktum (Eksistens af baser)

Ethvert underrum  $\mathcal{U}$  af  $\mathbb{R}^n$  har en basis.

Hvis  $\mathcal{U} \neq \{\mathbf{0}\}$ , så har  $\mathcal{U}$  endda uendeligt mange forskellige baser.

# Standardbasen for $\mathbb{R}^n$

## Faktum (Eksistens af baser)

Ethvert underrum  $\mathcal{U}$  af  $\mathbb{R}^n$  har en basis.

Hvis  $\mathcal{U} \neq \{\mathbf{0}\}$ , så har  $\mathcal{U}$  endda uendeligt mange forskellige baser.

Underrummet  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$  har en særlig påen basis:

## Definition (Standardbasen for $\mathbb{R}^n$ )

Standardbasen (som er en basis!) for  $\mathbb{R}^n$  er  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  hvor

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Standardbasen for $\mathbb{R}^n$

## Faktum (Eksistens af baser)

Ethvert underrum  $\mathcal{U}$  af  $\mathbb{R}^n$  har en basis.

Hvis  $\mathcal{U} \neq \{\mathbf{0}\}$ , så har  $\mathcal{U}$  endda uendeligt mange forskellige baser.

Underrummet  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$  har en særlig påen basis:

## Definition (Standardbasen for $\mathbb{R}^n$ )

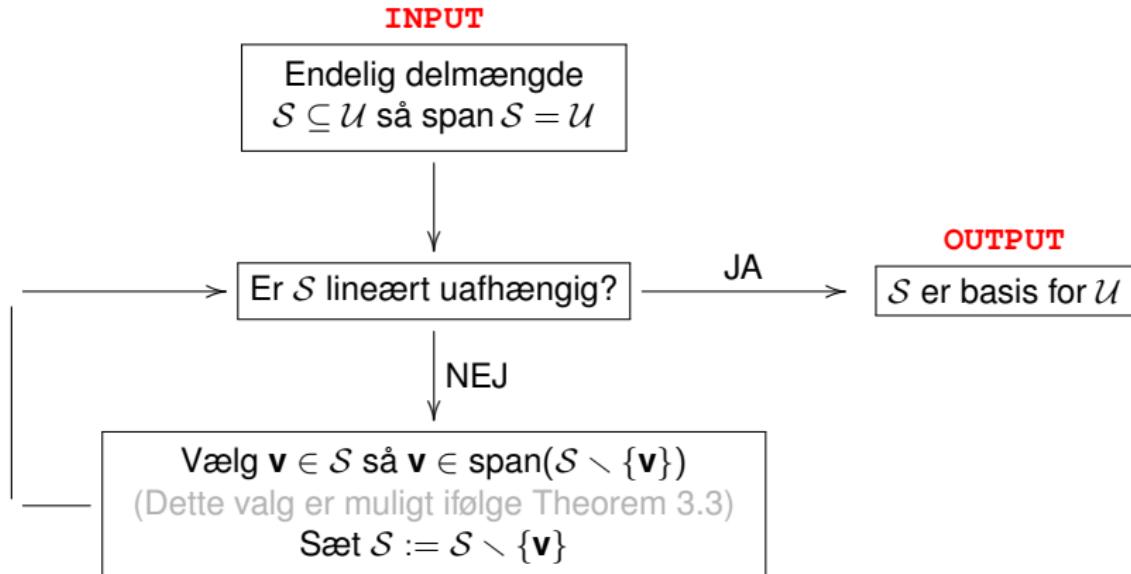
Standardbasen (som er en basis!) for  $\mathbb{R}^n$  er  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  hvor

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi skal senere lære hvordan man konkret finder baser for diverse typer af underrum af  $\mathbb{R}^n$ . Vi nævner her to generelle algoritmer, som vi dog ikke vil bruge ud over i denne forelæsning.

# Konstruktion af baser: Uddyndingsalgoritmen

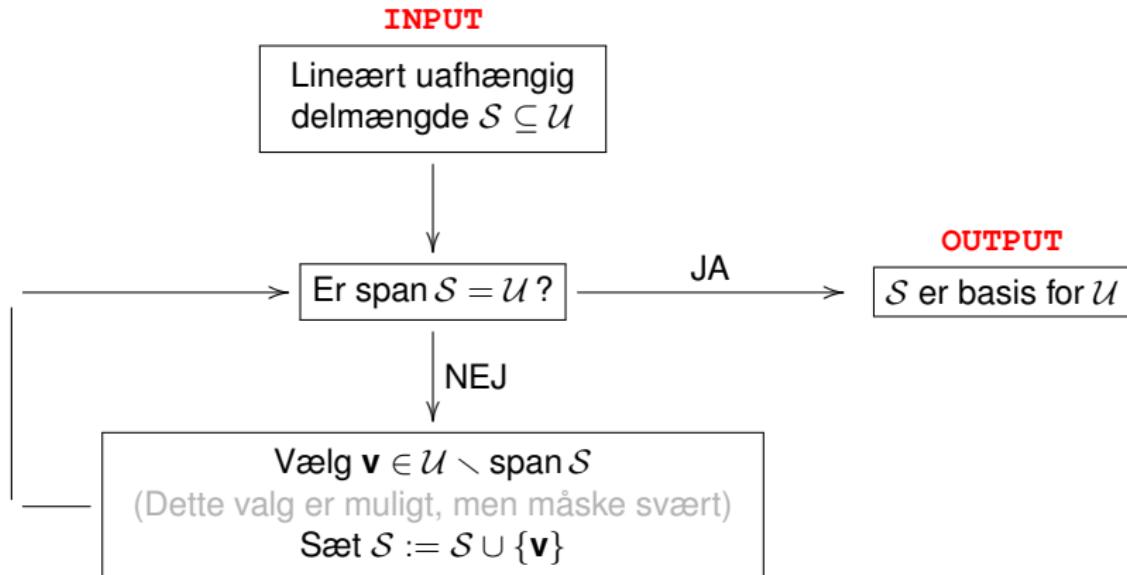
Indholdet af Theorem 3.7(a) er en algoritme til at udtynde en endelig udspændende mængde  $S$  for et underrum  $\mathcal{U}$  til en basis:



Vi vil **ikke bruge** Uddyndingsalgoritmen. Vi vil lære en anden og bedre algoritme til at konstruere en basis for **søjlerummet af en matrix**.

# Konstruktion af baser: Suppleringsalgoritmen

Indholdet af Theorem 3.7(b) er en algoritme til at supplere en lineært uafhængig delmængde  $S$  af et underrum  $\mathcal{U}$  til en basis:



Vi vil generelt **ikke bruge** Suppleringsalgoritmen. Vi giver dog alligevel et enkelt eksempel til at illustrere idéen i algoritmen.

## Eksempel (Suppleringsalgoritmen)

1/2

Vi har vist, at følgende er et underrum af  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

Vi vil bruge Suppleringsalgoritmen til at finde en basis for  $\mathcal{U}$ .

## Eksempel (Suppleringsalgoritmen)

1/2

Vi har vist, at følgende er et underrum af  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

Vi vil bruge Suppleringsalgoritmen til at finde en basis for  $\mathcal{U}$ .

- **INPUT:**  $S = \emptyset$  er en lineært uafhængig delmængde af  $\mathcal{U}$ .

## Eksempel (Suppleringsalgoritmen)

1/2

Vi har vist, at følgende er et underrum af  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

Vi vil bruge Suppleringsalgoritmen til at finde en basis for  $\mathcal{U}$ .

- **INPUT:**  $S = \emptyset$  er en lineært uafhængig delmængde af  $\mathcal{U}$ .
- Er  $\mathcal{U} = \text{span } \emptyset$ ?

NEJ:  $\text{span } \emptyset = \{\mathbf{0}\}$  og fx er  $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, 0) \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

## Eksempel (Suppleringsalgoritmen)

1/2

Vi har vist, at følgende er et underrum af  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

Vi vil bruge Suppleringsalgoritmen til at finde en basis for  $\mathcal{U}$ .

- **INPUT:**  $S = \emptyset$  er en lineært uafhængig delmængde af  $\mathcal{U}$ .
- Er  $\mathcal{U} = \text{span } \emptyset$ ?

NEJ:  $\text{span } \emptyset = \{\mathbf{0}\}$  og fx er  $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, 0) \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

- Sæt  $S = \emptyset \cup \{\mathbf{v}_1\} = \{(1, -1, 1, 0)\}$ .

Er  $\mathcal{U} = \text{span } \{(1, -1, 1, 0)\}$ ?

NEJ: Fx er  $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 1) \in \mathcal{U} \setminus \text{span } \{(1, -1, 1, 0)\}$ .

## Eksempel (Suppleringsalgoritmen)

1/2

Vi har vist, at følgende er et underrum af  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

Vi vil bruge Suppleringsalgoritmen til at finde en basis for  $\mathcal{U}$ .

- **INPUT:**  $S = \emptyset$  er en lineært uafhængig delmængde af  $\mathcal{U}$ .
- Er  $\mathcal{U} = \text{span } \emptyset$ ?

NEJ:  $\text{span } \emptyset = \{\mathbf{0}\}$  og fx er  $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, 0) \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

- Sæt  $S = \emptyset \cup \{\mathbf{v}_1\} = \{(1, -1, 1, 0)\}$ .  
Er  $\mathcal{U} = \text{span } \{(1, -1, 1, 0)\}$ ?  
NEJ: Fx er  $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 1) \in \mathcal{U} \setminus \text{span } \{(1, -1, 1, 0)\}$ .
- Sæt  $S = \{(1, -1, 1, 0)\} \cup \{\mathbf{v}_2\} = \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$ .  
Er  $\mathcal{U} = \text{span } \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$ ?  
JA: Forklaring følger...

**Eksempel (Suppleringsalgoritmen)****2/2**

Lad  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{U}$ , dvs. der gælder

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Udregningen

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

viser, at samtlige løsninger til ligningssystemet (\*) er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Derfor gælder

$$\mathcal{U} = \text{span} \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}.$$

**Eksempel (Suppleringsalgoritmen)**

2/2

Lad  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{U}$ , dvs. der gælder

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Udregningen

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

viser, at samtlige løsninger til ligningssystemet (\*) er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Derfor gælder

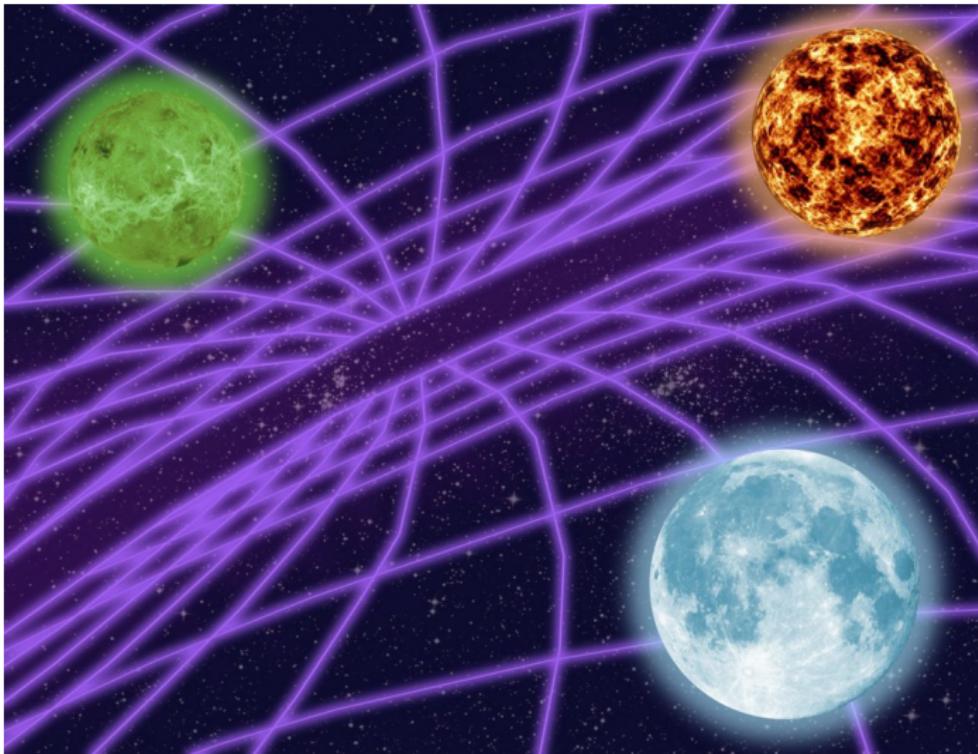
$$\mathcal{U} = \text{span} \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}.$$

- **OUTPUT:** Basis  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$  for  $\mathcal{U}$ .

# Oversigt

- ① Vektorrummet  $\mathbb{R}^n$
- ② Underrum
- ③ Span
- ④ Lineær (u)afhængighed
- ⑤ Baser
- ⑥ Dimension

# Dimension



# Dimension

Antallet af vektorer i en basis for et underrum er entydigt bestemt:

## Theorem 3.9 (Om antallet af vektorer i en basis)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ . Hvis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \quad \text{og} \quad \mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

begge er baser for  $\mathcal{U}$ , så er  $m = n$ .

# Dimension

Antallet af vektorer i en basis for et underrum er entydigt bestemt:

## Theorem 3.9 (Om antallet af vektorer i en basis)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ . Hvis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \quad \text{og} \quad \mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

begge er baser for  $\mathcal{U}$ , så er  $m = n$ .

...og dette antal vektorer er dimensionen af underrummet:

## Definition 3.8 (Dimension af underrum)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ . Antallet af vektorer i en basis for  $\mathcal{U}$  kaldes **dimensionen** af  $\mathcal{U}$  og skrives  $\dim \mathcal{U}$ . Vi definerer  $\dim \{\mathbf{0}\} = 0$ .

# Dimension

Antallet af vektorer i en basis for et underrum er entydigt bestemt:

## Theorem 3.9 (Om antallet af vektorer i en basis)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ . Hvis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \quad \text{og} \quad \mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

begge er baser for  $\mathcal{U}$ , så er  $m = n$ .

...og dette antal vektorer er dimensionen af underrummet:

## Definition 3.8 (Dimension af underrum)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ . Antallet af vektorer i en basis for  $\mathcal{U}$  kaldes **dimensionen** af  $\mathcal{U}$  og skrives  $\dim \mathcal{U}$ . Vi definerer  $\dim \{\mathbf{0}\} = 0$ .

## Eksempel (Dimensionen af $\mathbb{R}^n$ )

Vektorrummet  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$  har en basis med  $n$  vektorer, nemlig standardbasen  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , og derfor gælder  $\dim \mathbb{R}^n = n$ .

## Eksempel (Et 2-dimensionalt underrum af $\mathbb{R}^4$ )

Vi har tidligere vist, at

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$$

er en basis (blandt mange mulige) for underrummet

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}.$$

Da  $\mathcal{B}$  indeholder to vektorer, er

$$\dim \mathcal{U} = 2 \quad (\text{dvs. } \mathcal{U} \text{ er en } \textcolor{red}{\text{plan}} \text{ i } \mathbb{R}^4)$$

## Eksempel (Et 2-dimensionalt underrum af $\mathbb{R}^4$ )

Vi har tidligere vist, at

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$$

er en basis (blandt mange mulige) for underrummet

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}.$$

Da  $\mathcal{B}$  indeholder to vektorer, er

$$\dim \mathcal{U} = 2 \quad (\text{dvs. } \mathcal{U} \text{ er en plan i } \mathbb{R}^4)$$

Hvis dimensionen af et underrum  $\mathcal{U}$  er kendt, så er det lettere at afgøre, om en forelagt delmængde  $\mathcal{B}$  er en basis for  $\mathcal{U}$ .

### Theorem 3.10 (Kriterium for at være en basis)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$  med  $\dim \mathcal{U} = k$ . Lad  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  være en delmængde af  $\mathcal{U}$  indeholdende  $k$  vektorer.

## Eksempel (Et 2-dimensionalt underrum af $\mathbb{R}^4$ )

Vi har tidligere vist, at

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$$

er en basis (blandt mange mulige) for underrummet

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}.$$

Da  $\mathcal{B}$  indeholder to vektorer, er

$$\dim \mathcal{U} = 2 \quad (\text{dvs. } \mathcal{U} \text{ er en plan i } \mathbb{R}^4)$$

Hvis dimensionen af et underrum  $\mathcal{U}$  er kendt, så er det lettere at afgøre, om en forelagt delmængde  $\mathcal{B}$  er en basis for  $\mathcal{U}$ .

### Theorem 3.10 (Kriterium for at være en basis)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$  med  $\dim \mathcal{U} = k$ . Lad  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  være en delmængde af  $\mathcal{U}$  indeholdende  $k$  vektorer.

(a) Hvis  $\mathcal{B}$  er lineært uafhængigt, da er  $\mathcal{B}$  en basis for  $\mathcal{U}$ .

## Eksempel (Et 2-dimensionalt underrum af $\mathbb{R}^4$ )

Vi har tidligere vist, at

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$$

er en basis (blandt mange mulige) for underrummet

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}.$$

Da  $\mathcal{B}$  indeholder to vektorer, er

$$\dim \mathcal{U} = 2 \quad (\text{dvs. } \mathcal{U} \text{ er en plan i } \mathbb{R}^4)$$

Hvis dimensionen af et underrum  $\mathcal{U}$  er kendt, så er det lettere at afgøre, om en forelagt delmængde  $\mathcal{B}$  er en basis for  $\mathcal{U}$ .

### Theorem 3.10 (Kriterium for at være en basis)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$  med  $\dim \mathcal{U} = k$ . Lad  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  være en delmængde af  $\mathcal{U}$  indeholdende  $k$  vektorer.

- (a) Hvis  $\mathcal{B}$  er lineært uafhængigt, da er  $\mathcal{B}$  en basis for  $\mathcal{U}$ .
- (b) Hvis  $\text{span } \mathcal{B} = \mathcal{U}$ , da er  $\mathcal{B}$  en basis for  $\mathcal{U}$ .

## Eksempel (Check af basis vha. Theorem 3.10)

Vi har tidligere vist, at der for underrummet

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

gælder  $\dim \mathcal{U} = 2$ . Betragt følgende 2 vektorer:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}.$$

## Eksempel (Check af basis vha. Theorem 3.10)

Vi har tidligere vist, at der for underrummet

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

gælder  $\dim \mathcal{U} = 2$ . Betragt følgende 2 vektorer:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}.$$

For at afgøre om  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  er en basis for  $\mathcal{U}$ , er det ifølge Theorem 3.10 nok at checke, om  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$  er lineært uafhængige.

## Eksempel (Check af basis vha. Theorem 3.10)

Vi har tidligere vist, at der for underrummet

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ og } x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

gælder  $\dim \mathcal{U} = 2$ . Betragt følgende 2 vektorer:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}.$$

For at afgøre om  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  er en basis for  $\mathcal{U}$ , er det ifølge Theorem 3.10 nok at checke, om  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$  er lineært uafhængige.

Og det er de, fordi udregningen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

viser, at  $\text{rank } \mathbf{A} = 2$ , jfr. Theorem 3.4.