LinAlgDat

2018/2019

Facit til Prøve II, tirsdag d. 11/6 2019 kl. 18:00–19:15

Opgave 1

(a) Vi bruger Gram-Schmidt processen til at finde en ortonormal basis $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ for $\mathcal{V}$.

- Først udregnes:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{5^2+(-2)^2+(-4)^2+6^2}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Vi har $\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{q}_1 = 1$ så

$$\mathbf{q}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Da $\sqrt{4^2+2^2+(-5)^2+(-6)^2} = 9$ er $\|\mathbf{q}_2'\| = \frac{1}{9}\cdot 9 = 1$ og dermed

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{q}_2'}{\|\mathbf{q}_2'\|} = \mathbf{q}_2' = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(b) Sæt $\mathbf{x} = 9\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$. Vi har

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \bullet \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 + (\mathbf{x} \bullet \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2 = 9\mathbf{q}_1 - 9\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2

(a) Det karakteristiske polynomium er

$$\det(\lambda\mathbf{I} - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - (-4)(-3) = \lambda^2 - 3\lambda - 10.$$

(b) Egenværdierne er rødderne i dette polynomium:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ eller } \lambda = 5.$$

(c) Vi trækker $\lambda = 5$ fra i diagonalen og rækkereducerer totalmatricen

$$\left[\begin{array}{rr|r} -4 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Løsningsmængden til dette ligningssystem er

$$t\begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R},$$

og derfor udgør fx vektoren $\begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$ en basis for egenrummet hørende til egenværdien 5.

Henrik Holm (holm@math.ku.dk)
Henrik Laurberg Pedersen (henrikp@math.ku.dk)