Forelæsning 2: Rang, Google's page rank og Matrixmultiplikation

LinAlgDat 2019/2020

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk henrikp@math.ku.dk

Oversigt

Repetition og opgave: monstermatrix

1. Ligninger

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 7 \\ -x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 13x_4 + x_5 &= 17 \end{aligned}$$

2. Omformning af totalmatrix

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 13 & 1 & 17 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3. Spørgsmål:
   - Hvor er pivoterne (de ledende indgange)?
   - Er totalmatricen på reduceret rækkeechelonform?
   - Er der løsninger til ligningssystemet?
   - Er der frie variable?

Opgaveløsning: monstermatrix

1. Omformning af totalmatrix

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 13 & 1 & 17 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. Spørgsmål og svar:
   - Hvor er pivoterne (de ledende indgange)?
     Svar: de røde 1-taller
   - Er totalmatricen på reduceret rækkeechelonform?
     Svar: Ja, Ja og atter Ja: nulrækkerne er placeret i bunden, og ellers er der ledende 1-taller som rykker mod højre når vi går ned gennem rækkerne. Endeligt er der kun 0 over de ledende 1-taller.
   - Er der løsninger til ligningssystemet?
     Svar: ja, vi kan bestemme x_1,x_2 og x_4 udfra x_3 og x_5; fx giver indholdet i 3. linje af den omformede totalmatrix at $1x_4 - {}^1/_2 x_5 = {}^1/_2$
   - Er der frie variable?
     Svar: ja x_3 og x_5 kan vælges som frie da det er de tilsvarende søjler som ikke indeholder de røde 1-taller

Hvad er en $m \times n$ matrix?

totalmatricer, koefficientmatricer, ...

Definition: $m \times n$ matrix

- En $m \times n$ matrix er et talskema med m rækker og n søjler

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Elementet a_{ij} står i i'te række, j'te søjle.

Eksempel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Her er $a_{24} = 5$.

Definition 1.8: Rang

Rangen af en matrix **A** er antallet af ikke-nul-rækker i en echelonform af **A**. Rangen betegnes rank **A**.
(Man kan vise, at der altid vil være samme antal ikke-nul-rækker i forskellige echelonformer af **A**!)

Example 4, p. 26

Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da er

$$\text{rank}\,\mathbf{A} = 1 \quad \text{og} \quad \text{rank}\,\mathbf{B} = 2$$

Facts om rang

- Rangen af en matrix ændres ikke ved elementære rækkeoperationer.
- Lad **U** være en rækkeechelonform af **A**. Da er rank **A** lig antallet af pivot-søjler i **U** (og i **A**).
- Lad **R** være en reduceret rækkeechelonform af **A**. Da er rank **A** lig antallet af ledende 1-taller i **R**.
- Lad **A** være en $m \times n$ matrix. Da er rank $\mathbf{A} \leq \min(m, n)$.

Rang og ligningssystemer

Theorem 1.3: Rang og løsninger til ligningssystemer

Betragt ligningssystemet

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}\right\} (S)$$

Lad $\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ være den tilsvarende totalmatrix. Da gælder:

1. Hvis rank $\mathbf{A} <$ rank $\mathbf{M}$ så har (S) ingen løsninger
2. Hvis rank $\mathbf{A} =$ rank $\mathbf{M} = n$ så har (S) netop en løsning
3. Hvis rank $\mathbf{A} =$ rank $\mathbf{M} < n$ så har (S) uendeligt mange løsninger

Theorem 1.5: Kvadratiske ligningssystemer

Ethvert ligningssystem med n ligninger og n ubekendte hvis koefficientmatrix **A** har rang n har netop en løsning!

Rang og homogene ligningssystemer

Et ligningssystem (S) er homogent hvis det kan skrives på formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

(Ligningssystemet (S) har altså totalmatricen $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$.)

Theorem 1.6: homogene systemer

Lad (S) være et $m \times n$ homogent ligningssystem med koefficientmatrix **A**. Da gælder:

1. Hvis rank $\mathbf{A} = n$ så har (S) kun nul-løsningen.
2. Hvis $m < n$ så har (S) uendeligt mange løsninger.

Eksempler p. 28-29 og opgave

- I: $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
- II: $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
- III: $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & -12 & -6 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 30 & 3 \\ 0 & 1 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Udfyld skemaet (hvor der er m ligninger med n ubekendte)!

Ligningssystem	m	n	rank **A**	rank **M**	Løsninger?
I					
II					
III					

Opgaveløsning

- I: $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
- II: $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
- III: $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & -12 & -6 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 30 & 3 \\ 0 & 1 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Udfyldt skema (hvor der er m ligninger med n ubekendte)

Ligningssystem	m	n	rank **A**	rank **M**	Løsninger?
I	4	3	2	3	Nej ☹
II	4	2	2	2	Ja ☺
III	3	3	2	2	Ja ☺

Ny notation for ligningssystemer

Et ligningssystem skrives normalt på formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Vi vil skrive det som $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, hvor vi tænker på at koefficientmatricen **A** "ganges" med vektoren **x** (tallene $x_1, \ldots, x_n$ skrevet som en vektor) og hvor **b** er højresiden skrevet som en vektor.

Matrix gange vektor

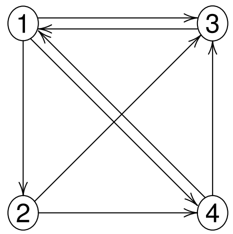
Reglen for multiplikation af en matrix og en vektor er:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

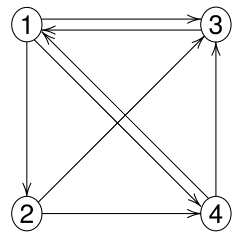
Google's page rank

(Dokument på Absalon)

Giv hver side i webbet en score, der fortæller hvor vigtig den er! Giv side k scoren x_k. Hvordan skal x_k udregnes?

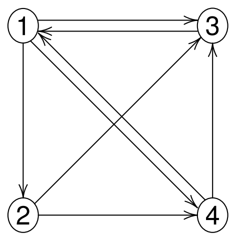


Mulighed 1 $x_k =$ antallet af sider der linker til side k. Dermed er $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ og $x_4 = 2$. Altså er side 3 den højst rangerende. Denne metode tager imidlertid ikke hensyn til at et link fra en vigtig side bør øge sidens vigtighed mere end et link fra en ikke så vigtig side.
Duer ikke



Mulighed 2 $x_k =$ summen af scorer for de sider der linker til side k. Dermed gælder fx $x_1 = x_3 + x_4$. Øvrige ligninger udtrykker x_2, x_3 og x_4 ved x_1, x_2, x_3 og x_4.
Et problem ved denne tilgang er, at en webside med mange udgående links får større indflydelse på de andre siders score end en side med få links.
Duer næsten

Mulighed 3 Den samlede score som en side kan give til andre sættes til 1 (normalisering): hvis side j indeholder et link til side k og N_j links i alt, så øger vi scoren for side k med x_j/N_j (i stedet for x_j).
Duer



- Tæl antal udgående links: $N_1 = 3$ (3 links udgår fra Side 1), $N_2 = 2$, $N_3 = 1$ og $N_4 = 2$.
- Ligninger for scorerne x_1, x_2, x_3 og x_4:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{N_3}x_3 + \tfrac{1}{N_4}x_4 = x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}x_1 \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_4 \\ x_4 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2. \end{aligned}$$

- Men er det ikke? Jo, det er!

- Ligningssystemet omskrives (alle x'er på venstre side af $=$)

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 &= 0 \\ -x_2 + \tfrac{1}{3}x_1 &= 0 \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 &= 0 \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

- Vi løser det med brug af totalmatrix og rækkeoperationer:

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

- Løsning:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2/3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Side 1 er den vigtigste, så 3, derefter 4 og endelig 2.

Omformning af totalmatricen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l}\cdot 2\\ \cdot 6\\ \cdot 6\\ \cdot 6\end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] +r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] -r_3$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -9 & 0 \end{array}\right] \cdot 2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -9 & 0 \end{array}\right] +r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -9 & 0 \end{array}\right] +r_3$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l}\cdot -1/2\\ \cdot -1/6\\ \cdot -1/6\\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} +r_3 \\ \boxed{1/3\, r_3} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_4 = t$ (fri variabel)

$x_3 = 3/2\, t$; $x_2 = 2/3\, t$; $x_1 = 2t$

☺ I made it!

KØBENHAVNS UNIVERSITET INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG

Linkmatricen for webbet

Ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{N_3}x_3 + \tfrac{1}{N_4}x_4 = x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}x_1 \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_4 \\ x_4 &= \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \end{aligned}$$

kan skrives som $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/N_3 & 1/N_4 \\ 1/N_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/N_1 & 1/N_2 & 0 & 1/N_4 \\ 1/N_1 & 1/N_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

KØBENHAVNS UNIVERSITET INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG

Generelt om web og linkmatricer

- Lad W være et web med n sider, som nummereres 1, 2,. . . , n.
- For $k \in \{1, \dots, n\}$ sætter vi

$$L_k = \{\text{de sidenumre, der indeholder et link til side } k\}.$$

- Lad N_j være det totale antal links som udgår fra side j. ($N_j > 0$ for alle $j \in L_k$, fordi der i hvert fald udgår et link til side k.)
- Scoren x_k for side k udregnes da vha formlerne

$$x_k = \sum_{j \in L_k} \frac{x_j}{N_j}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

- Disse ligninger kan skrives på matrixfom som $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, hvor $\mathbf{A}$ er en $n \times n$ matrix med elementerne

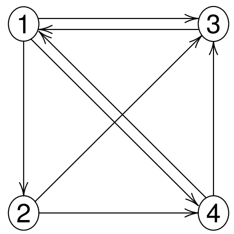
$$a_{ij} = \begin{cases} 1/N_j & \text{hvis der er et link fra side } j \text{ til side } i, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

- Matricen $\mathbf{A}$ kaldes linkmatricen for webbet.
- Ligningen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ er eksempel på et egenværdiproblem!

KØBENHAVNS UNIVERSITET INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG

Web med hængende sider

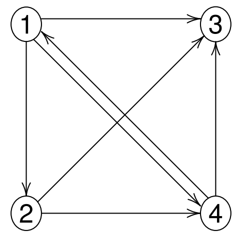
Vores gamle web:
Alle sider har udgående links



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ kan godt løses!

Vi fjerner et link fra 3 til 1:
Side 3 er en hængende side

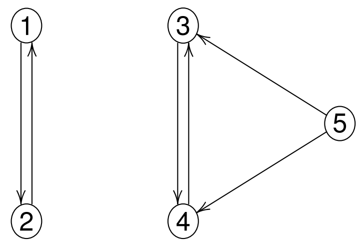


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ giver $\mathbf{x} = \mathbf{0}$!

Adskilte delweb

- Et adskilt web:



- Linkmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Rangordning: $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ kan godt løses, men giver ikke en god måde at rangordne siderne!

Egenværdier og -vektorer

Definition: Egenværdier og -vektorer

Et tal λ er en egenværdi for en $n \times n$ matrix **A** hvis der findes en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sådan, at

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

En sådan vektor **x** er en egenvektor hørende til egenværdien λ.

Google og egenvektorer: idé

Lad **A** være linkmatricen for et web.

- Rangordningen af siderne i webbet svarer til ordningen af koordinaterne i en egenvektor for **A** hørende til egenværdien $\lambda = 1$, dvs i en løsning til $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$.
- En sådan egenvektor **x** kan bestemmes ved at udregne $\mathbf{A}^k\mathbf{b}$ for store værdier af k og en "praktisk vektor" **b**. Læs mere i dokumentet "Google's page rank".

Opgave 1

Har ligningssystemet med den onde totalmatrix

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \pi & -7 & 1/3 & 0 & 2 & 4.2 \\ \sqrt{2} & 1 & -0.1 & 4 & 1 & e \\ \pi & -7 & 1/3 & 0 & 2 & 4.1 \end{array}\right]$$

nogen løsninger?

Opgave 2

Bestem for $a, b \in \mathbb{R}$ antallet af løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + ax_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 &= b \end{aligned}$$

Opgaveløsning 1

Ligningssystemet med den onde totalmatrix

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \pi & -7 & 1/3 & 0 & 2 & 4.2 \\ \sqrt{2} & 1 & -0.1 & 4 & 1 & e \\ \pi & -7 & 1/3 & 0 & 2 & 4.1 \end{array}\right]$$

har ikke nogen løsninger fordi der ved rækkeoperationen $-\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$ fremkommer en nulrække i koefficientmatricen som ikke er en nulrække i totalmatricen.

Opgaveløsning 2

Totalmatricen for ligningssystemet omformes ved rækkeoperationerne $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$ og derefter $-3\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a & b \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2-2a & b-2 \end{array}\right]$$

- Hvis $2-2a=0$ og $b-2 \neq 0$ (dvs $a=1$ og $b \neq 2$) er der ingen løsninger.
- Hvis $2-2a=0$ og $b-2=0$ (dvs $a=1$ og $b=2$) er der uendeligt mange løsninger (og x_3 kan vælges som en fri variabel).
- Hvis $2-2a \neq 0$ er der netop en løsning.

Definition 2.2 og 2.3: matrixaddition og skalarmultiplikation

- $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ udregnes plads for plads
- $t\mathbf{A}$ udregnes plads for plads

Example 2, p. 55

Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Da er

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 1+2 \\ 0-4 & 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Theorem 2.1: regneregler

Der er 8 vigtige regler (fx at $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$), som siger, at vi regner med matrixaddition (af matricer af samme størrelse) og multiplikation med skalar ganske som med almindelige tal.

Definition: Matrixmultiplikation

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix},$$

hvor (for $1 \le i \le m$ og $1 \le j \le p$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

det ij'te element i **AB** = i'te række i **A** "gange" j'te søjle i **B**

Hvordan gør man?

Definition: Matrixmultiplikation

Regel (skematisk)

	B
A	**AB**

Example 2, p. 59

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 48 \\ 10 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 14 \\ 21 & 6 & 39 \\ 22 & 2 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \text{No way!}$$

Matrix multiplikation

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad ☺ = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 13$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad ? = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot ???$$

$\div$

Er det ligesom at gange tal sammen?

Størrelserne skal passe sammen

- Hvis **A** er $m \times n$ og **B** er $n \times p$ så er **AB** defineret og af størrelse $m \times p$. Kort form: $(m \times n) \cdot (n \times p) \to m \times p$

Ikke alle "tal"-regneregler gælder

- $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ gælder (associativ regel)
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ gælder (distributiv regel)
- $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ gælder **IKKE** generelt (ingen kommutativ regel)
- $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ gælder **IKKE** generelt

Example 6 og 8, p. 61-62

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvad kan man bruge matrixmultiplikation til?

- openGL (open graphics library) styrer sammensætninger af skalering, rotation og translation ved at foretage matrixmultiplikation.
- Vintage spilmaskineeksempel med "Asteroids (Atari Inc, 1979)" kommer i Projekt B.

Lithium, Nikkel og Zink

- Tre selskaber C_1, C_2 og C_3 producerer Lithium, Nikkel og Zink
- Salgspriserne er angivet i euro pr kg

	C_1	C_2	C_3
Lithium	1.2	1.4	1.6
Nikkel	2.3	2.5	2.7
Zink	3.4	3.6	3.8

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.4 & 1.6 \\ 2.3 & 2.5 & 2.7 \\ 3.4 & 3.6 & 3.8 \end{bmatrix}$$

- Vi ønsker at undersøge salgspriserne for hvert selskab på forskellige to ordrer:
  - Ordre 1: 4 kg L, 5 kg N, 6 kg Z fx $(4, 5, 6)$ gange første søjle i **C**
  - Ordre 2: 7 kg L, 8 kg N, 9 kg Z fx $(7, 8, 9)$ gange tredje søjle i **C**

Lithium, Nikkel og Zink

- Ordrematrix:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- Priserne for begge ordrer:

$$\mathbf{OC} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 & 1.4 & 1.6 \\ 2.3 & 2.5 & 2.7 \\ 3.4 & 3.6 & 3.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.7 & 39.7 & 41.7 \\ 57.4 & 62.2 & 67.0 \end{bmatrix}$$

Tallet i i'te række og j'te søjle angiver prisen for ordre nummer i hos selskab j.

Transponering: definition og regneregler

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad \text{og} \quad (t\mathbf{A})^T = t\mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

Eksempel

Linkmatricen er den transponerede af en normaliseret version af nabomatricen for et web uden hængende sider

Definition 2.6: Symmetrisk matrix

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er symmetrisk hvis $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Øvre og nedre trekantsmatrix

- En $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er en øvre trekantsmatrix hvis $a_{ij} = 0$ for $i > j$. Hvis $m = n$ ser en øvre trekantsmatrix ud som følger

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  (Alle elementer under diagonalen skal være 0)
- En $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er en nedre trekantsmatrix hvis $\mathbf{A}^T$ er en øvre trekantsmatrix

TRUE eller FALSE

Hvis $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ begge er $n \times n$ øvre trekantsmatricer, så er $\mathbf{AB}$ også en øvre trekantsmatrix.

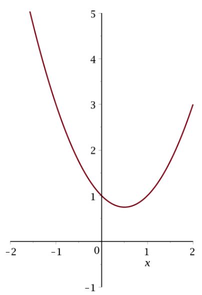
Polynomier

Polynomium

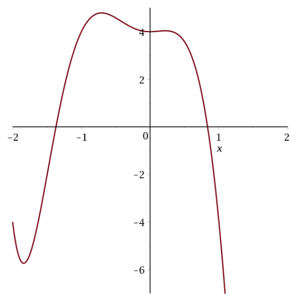
Et polynomium p af grad n er en funktion på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

hvor koefficienterne $a_n, \ldots, a_1, a_0$ er (reelle) tal og $a_n \neq 0$.



grad 2



grad 7

Interpolation med polynomier

Hvad vil vi?

- Givet m punkter i planen

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m).$$

  (Vi vil antage, at $x_1, \ldots, x_m$ er indbyrdes forskellige.)
- Vi vil bestemme et polynomium p som opfylder

$$p(x_j) = y_j \quad \text{for } j = 1, \ldots, m.$$

  (Interpolation.)
- Det er det samme som at bestemme et polynomium p hvis graf går gennem punkterne $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$.
- Nogle gange er der ikke noget polynomium, andre gange netop et, og atter andre gange uendeligt mange polynomier der går igennem de givne punkter. Svaret afhænger af hvilken grad vi forlanger polynomiet skal have.

Example 4, p. 44

- Lad $(x_1, y_1) = (0, 1)$ og $(x_2, y_2) = (1, 2)$.
- Bestem samtlige polynomier af grad højst 2 som interpolerer disse punkter.
- Betingelser:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ 1 = p(0) &= a_0 \\ 2 = p(1) &= a_2 + a_1 + a_0 \end{aligned}$$

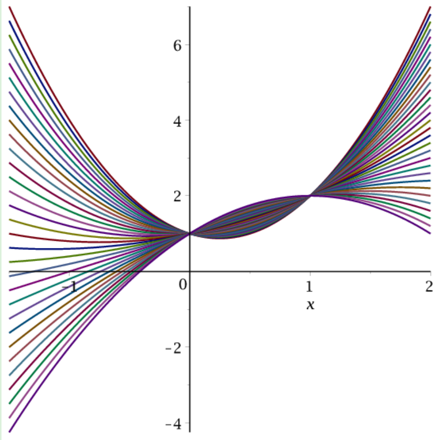
- Ligningssystem, totalmatrix og reduceret rækkeechelonform (første søjle svarer til a_2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Dvs $a_0 = 1$, $a_1 = t$ og $a_2 = 1 - t$.
- Løsning (for vilkårligt $t \in \mathbb{R}$): $p(x) = (1 - t)x^2 + tx + 1$.

Example 4, p. 44: grafer

$$p(x) = (1 - t)x^2 + tx + 1$$



Vandermondematricen

- Grafen for polynomiet $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ går igennem punkterne $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ netop når der gælder

$$\begin{aligned} p(x_1) &= a_nx_1^n + \cdots + a_1x_1 + a_0 = y_1 \\ p(x_2) &= a_nx_2^n + \cdots + a_1x_2 + a_0 = y_2 \\ &\vdots \\ p(x_m) &= a_nx_m^n + \cdots + a_1x_m + a_0 = y_m \end{aligned}$$

- Totalmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 & y_2 \\ & & & \vdots & & \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \cdots & x_m & 1 & y_m \end{array}\right]$$

- Totalforvirring: nu er *koefficienterne* $a_n, \ldots, a_0$ de ukendte!

Theorem 1.7

Lad punkterne $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ være givet (med forskellige x_j'er).

- Hvis $m < n + 1$ er der uendeligt mange polynomier af grad n som går igennem punkterne
- Hvis $m = n + 1$ er der netop et polynomium af grad n som går igennem punkterne
- Hvis $m > n + 1$ er der enten intet polynomium af grad n som går igennem punkterne eller også netop et polynomium af grad n.

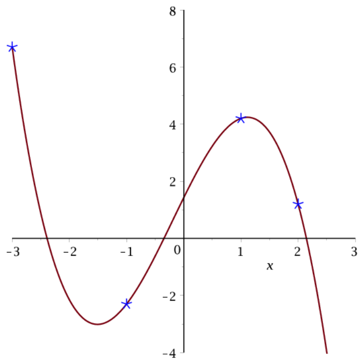
Eksempler

- Uendeligt mange andengradspolynomier igennem 2 punkter
- Netop 1 førstegradspolynomium igennem 2 punkter
- Netop 1 tredjegradspolynomium igennem 4 punkter
- Enten intet eller netop 1 førstegradspolynomium igennem 3 punkter

Example 5, p. 45

- Lad $(x_1, y_1) = (-3, 6.7)$, $(x_2, y_2) = (-1, 2.3)$, $(x_3, y_3) = (1, 4.2)$ og $(x_4, y_4) = (2, 1.2)$
- Løsning

$$p(x) = -0.8042x^3 - 0.4750x^2 + 4.0542x + 1.4250.$$



$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -27 & 9 & -3 & 1 & 6.7 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -2.3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4.2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1.2 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.8042 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.4750 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4.0542 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.4250 \end{array}\right]$$