LinAlgDat

2018/2019

Facit til Prøve I, tirsdag d. 21/5 2019 kl. 11:00–12:15

Opgave 1

(a) Ved at foretage rækkeoperationerne $-\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2$, $-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$ og $2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1$ fås:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & a & 0 \\ 2 & -4 & a & a-2 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2a+1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & a+1 & -1 \\ 0 & 0 & a & a & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Hvis $a = 0$ ses det, at rangen af koefficientmatricen er 2, mens rangen af totalmatricen er 3. Dermed er der ingen løsninger til ligningssystemet for $a = 0$.

Hvis $a \neq 0$ foretages yderligere rækkeoperationer:

$$1/a\,\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3, \quad -\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2, \quad -2\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1.$$

Derved finder man

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2a+1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & a+1 & -1 \\ 0 & 0 & a & a & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-1 & (4-a)/a \\ 0 & 1 & 0 & a & (2-a)/a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2/a \end{bmatrix}.$$

Heraf aflæses, at $t = x_4$ kan vælges som en fri variabel og det giver løsningerne:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4-a)/a \\ (2-a)/a \\ -2/a \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1-2a \\ -a \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) For $a = 0$ ser vi fra starten af (a), at der må gælde

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -4 & a & a-2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da udførelse af en serie rækkeoperationer på $\mathbf{A}$ svarer til at multiplicere $\mathbf{A}$ fra venstre med et produkt $\mathbf{X}$ af elementærmatricer har vi

$$\mathbf{XA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{X}$ er invertibel.

Opgave 2

(a) Hvis vi betragter matricen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

så gælder $T(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Ved rækkeoperationer fås:

$$(\mathbf{B}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{\text{reduceret} \\ \text{rækkeechelonform}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Derfor gælder:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Hvis vi betragter matricen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ så gælder $S(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y}$ for alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Derfor er

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = (\mathbf{AB})\mathbf{x} \qquad \text{hvor} \qquad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\mathrm{Ker}(S \circ T) = \mathrm{null}(\mathbf{AB})$ skal vi altså finde an basis for nulrummet for $\mathbf{AB}$. Den reducerede rækkeechelonform for $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ er $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, så vi aflæser:

$$\text{En basis for } \mathrm{Ker}(S \circ T) = \mathrm{null}(\mathbf{AB}) \text{ er (fx):} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Henrik Holm (holm@math.ku.dk)
Henrik Laurberg Pedersen (henrikp@math.ku.dk)