

# Forelæsning 8: Ortogonal komplement, ortogonal projektion og Gram–Schmidt processen

LinAlgDat 2019/2020

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen

Institut for Matematiske Fag

[holm@math.ku.dk](mailto:holm@math.ku.dk) og [henrikp@math.ku.dk](mailto:henrikp@math.ku.dk)

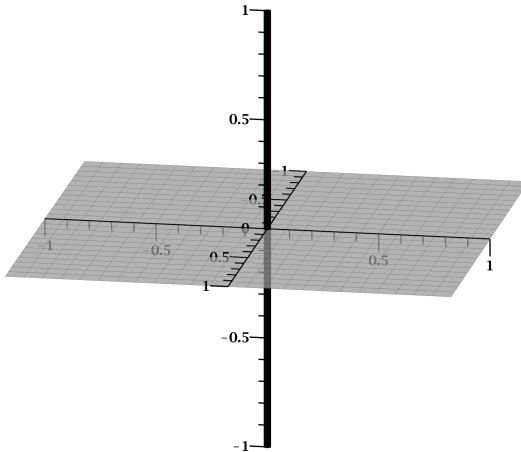
# Oversigt

- 1 Ortogonalt komplement
- 2 Ortogonal projektion
- 3 Gram–Schmidt processen og QR-faktorisering
- 4 Mindste kvadraters metode

# Oversigt

- 1 Ortogonalt komplement
- 2 Ortogonal projektion
- 3 Gram–Schmidt processen og QR-faktorisering
- 4 Mindste kvadraters metode

# Ortogonal komplement



# Ortogonal komplement

## Definition 4.10 (Ortogonale underrum)

To underrum  $\mathcal{U}$  og  $\mathcal{V}$  af  $\mathbb{R}^n$  kaldes **ortogonale** hvis enhver vektor i  $\mathcal{U}$  er ortogonal på enhver vektor i  $\mathcal{V}$ , dvs. hvis

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{for alle} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U} \text{ og } \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

I dette tilfælde skriver man  $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$ .

## Eksempel (Ortogonale underrum)

Følgende to underrum  $\mathcal{U}$  og  $\mathcal{V}$  af  $\mathbb{R}^3$  er ortogonale:

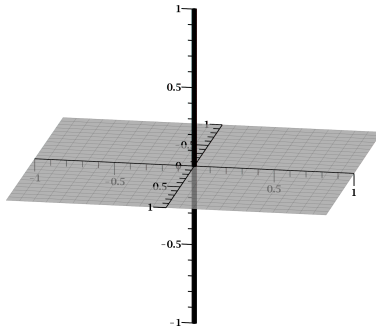
- $\mathcal{U} = x_1x_2$ -planen, dvs.

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

- $\mathcal{V}$  = linien med retningsvektor  $(0, 0, 1)$ , altså  $x_3$ -aksen:

$$\mathcal{V} = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Fordi for alle  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, 0) \in \mathcal{U}$  og  $\mathbf{v} = (0, 0, t) \in \mathcal{V}$  gælder  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ .



## Eksempel (Underrum som *ikke* er ortogonale)

Følgende to underrum  $\mathcal{U}$  og  $\mathcal{V}$  af  $\mathbb{R}^3$  er *ikke* ortogonale:

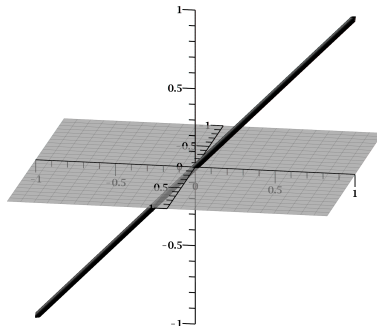
- $\mathcal{U} = x_1x_2$ -planen, dvs.

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

- $\mathcal{V}$  = linien med retningsvektor  $(0, 1, 1)$ , dvs.

$$\mathcal{V} = \{(0, t, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Fordi fx er  $\mathbf{u} = (0, 1, 0) \in \mathcal{U}$  og  $\mathbf{v} = (0, 1, 1) \in \mathcal{V}$  men  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \neq 0$ .



## Eksempel (Underrum som *ikke* er ortogonale)

Følgende to underrum  $\mathcal{U}$  og  $\mathcal{V}$  af  $\mathbb{R}^3$  er *ikke* ortogonale:

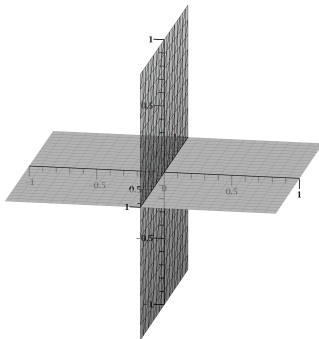
- $\mathcal{U} = x_1x_2$ -planen, dvs.

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

- $\mathcal{V} = x_1x_3$ -planen, dvs.

$$\mathcal{V} = \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Fordi fx er  $\mathbf{u} = (1, 0, 0) \in \mathcal{U}$  og  $\mathbf{v} = (1, 0, 0) \in \mathcal{V}$  men  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \neq 0$ .





**Theorem 4.8 (Ortogonalitet af “span-underrum”)**

Lad  $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$  og  $\mathcal{V} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$  være underrum af  $\mathbb{R}^n$ . Da gælder  $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$  netop hvis

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{for alle} \quad i = 1, \dots, p \text{ og } j = 1, \dots, q.$$

**I ord:** For at checke orthogonalitet af to underrum, er det nok at checke om de to frembringersæt er ortogonale på hinanden.

## Eksempel (Ortogonale “span-underrum”)

1/2

Betragt  $4 \times 5$  matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sidste uge lærte vi at bestemme baser for diverse typer af underrum:

## Eksempel (Ortogonale “span-underrum”)

1/2

Betragt  $4 \times 5$  matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sidste uge lærte vi at bestemme baser for diverse typer af underrum:

En basis for null  $\mathbf{A}$  er:  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

En basis for row  $\mathbf{A}$  er:  $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

## Eksempel (Ortogonale “span-underrum”)

2/2

Specielt gælder altså:

$$\text{null } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \quad \text{og} \quad \text{row } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}.$$

## Eksempel (Ortogonale “span-underrum”)

2/2

Specielt gælder altså:

$$\text{null } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \quad \text{og} \quad \text{row } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}.$$

Vi vil indse, at

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A}.$$

## Eksempel (Ortogonale “span-underrum”)

2/2

Specielt gælder altså:

$$\text{null } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \quad \text{og} \quad \text{row } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}.$$

Vi vil indse, at

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A}.$$

Ifølge Theorem 4.8 er det nok at undersøge, om

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = 0.$$

## Eksempel (Ortogonale “span-underrum”)

2/2

Specielt gælder altså:

$$\text{null } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \quad \text{og} \quad \text{row } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}.$$

Vi vil indse, at

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A}.$$

Ifølge Theorem 4.8 er det nok at undersøge, om

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = 0.$$

Og det checkes let; fx er

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{og}$$

## Eksempel (Ortogonale “span-underrum”)

2/2

Specielt gælder altså:

$$\text{null } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \quad \text{og} \quad \text{row } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}.$$

Vi vil indse, at

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A}.$$

Ifølge Theorem 4.8 er det nok at undersøge, om

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = 0.$$

Og det checkes let; fx er

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0.$$



## Eksempel (Ortogonale “span-underrum”)

2/2

Specielt gælder altså:

$$\text{null } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \quad \text{og} \quad \text{row } \mathbf{A} = \text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}.$$

Vi vil indse, at

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A}.$$

Ifølge Theorem 4.8 er det nok at undersøge, om

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = 0.$$

Og det checkes let; fx er

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0.$$

Eksemplet illustrerer følgende generelle fænomen:

## Ortogonalitet af nulrum og rækkerum

For enhver  $m \times n$  matrix  $\mathbf{A}$  gælder

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A}.$$

Det følger, at

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{col } \mathbf{A}^T \quad \text{og} \quad \text{null } \mathbf{A}^T \perp \text{col } \mathbf{A}.$$

## Ortogonalitet af nulrum og rækkerum

For enhver  $m \times n$  matrix  $\mathbf{A}$  gælder

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A}.$$

Det følger, at

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{col } \mathbf{A}^T \quad \text{og} \quad \text{null } \mathbf{A}^T \perp \text{col } \mathbf{A}.$$

### Definition 4.11 (Ortogonalt komplement)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underum af  $\mathbb{R}^n$ . Det **ortogonale komplement**  $\mathcal{U}^\perp$  til  $\mathcal{U}$  består af samtlige vektorer som er ortogonale på alle vektorer i  $\mathcal{U}$ , dvs

$$\mathcal{U}^\perp = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ for alle } \mathbf{u} \in \mathcal{U} \}.$$

## Ortogonalitet af nulrum og rækkerum

For enhver  $m \times n$  matrix  $\mathbf{A}$  gælder

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A}.$$

Det følger, at

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{col } \mathbf{A}^T \quad \text{og} \quad \text{null } \mathbf{A}^T \perp \text{col } \mathbf{A}.$$

## Definition 4.11 (Ortogonalt komplement)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ . Det **ortogonale komplement**  $\mathcal{U}^\perp$  til  $\mathcal{U}$  består af samtlige vektorer som er ortogonale på alle vektorer i  $\mathcal{U}$ , dvs

$$\mathcal{U}^\perp = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ for alle } \mathbf{u} \in \mathcal{U} \}.$$

## Thm. 4.9 (Egenskaber ved ortogonalt komplement)

For ethvert underrum  $\mathcal{U}$  af  $\mathbb{R}^n$  gælder:

- $\mathcal{U}^\perp$  er et underrum af  $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{U} = \{\mathbf{0}\}$ .
- $(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$ .

## Eksempel (Ortogonal komplement)

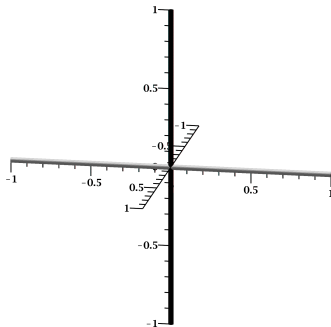
Betragt følgende tre underrum  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  og  $\mathcal{W}$  af  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{U} = \{(0, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \quad (x_3\text{-aksen})$$

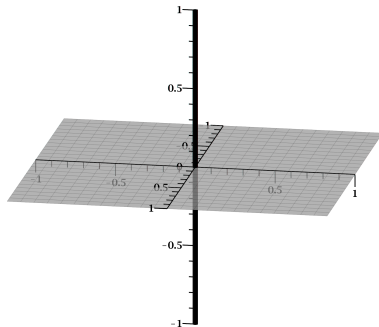
$$\mathcal{V} = \{(0, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in \mathbb{R}\} \quad (x_2\text{-aksen})$$

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \quad (x_1 x_2\text{-planen})$$

Da gælder:  $\mathcal{V} \perp \mathcal{U}$  men  $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}^\perp$  og  $\mathcal{W} = \mathcal{U}^\perp$ .



$$\mathcal{V} \perp \mathcal{U} \text{ men } \mathcal{V} \neq \mathcal{U}^\perp$$



$$\mathcal{W} = \mathcal{U}^\perp$$

Vi har set, at der for enhver matrix  $\mathbf{A}$  gælder:

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A} \quad [\text{og derfor vil } \text{null } \mathbf{A} \subseteq (\text{row } \mathbf{A})^\perp]$$

### **Theorem 4.10 (Formler for ortogonale komplement)**

For enhver matrix  $\mathbf{A}$  gælder

$$(\text{row } \mathbf{A})^\perp = \text{null } \mathbf{A}.$$

Det følger, at

$$(\text{col } \mathbf{A})^\perp = \text{null } \mathbf{A}^\top$$

$$(\text{null } \mathbf{A})^\perp = \text{row } \mathbf{A}$$

Vi har set, at der for enhver matrix  $\mathbf{A}$  gælder:

$$\text{null } \mathbf{A} \perp \text{row } \mathbf{A} \quad [\text{og derfor vil } \text{null } \mathbf{A} \subseteq (\text{row } \mathbf{A})^\perp]$$

### Theorem 4.10 (Formler for ortogonale komplement)

For enhver matrix  $\mathbf{A}$  gælder

$$(\text{row } \mathbf{A})^\perp = \text{null } \mathbf{A}.$$

Det følger, at

$$(\text{col } \mathbf{A})^\perp = \text{null } \mathbf{A}^\top$$

$$(\text{null } \mathbf{A})^\perp = \text{row } \mathbf{A}$$

**Bemærkning.** For enhver  $m \times n$  matrix  $\mathbf{A}$  gælder

$$\text{rank } \mathbf{A} + \text{nullity } \mathbf{A} = n \quad \text{dvs.} \quad \dim(\text{row } \mathbf{A}) + \dim((\text{row } \mathbf{A})^\perp) = n.$$

Vi skal senere se, at der for ethvert underum  $\mathcal{U}$  af  $\mathbb{R}^n$  gælder

$$\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{U}^\perp = n.$$

## Eksempel (Basis for ortogonalt komplement)

1/2

Betragt  $4 \times 5$  matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi betragter først rækkerummet:

$$\mathcal{U} = \text{row } \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^5.$$



## Eksempel (Basis for ortogonalt komplement)

1/2

Betragt  $4 \times 5$  matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi betragter først rækkerummet:

$$\mathcal{U} = \text{row } \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Vi har en beskrivelse af det ortogonale komplement:

$$\mathcal{U}^\perp = (\text{row } \mathbf{A})^\perp \stackrel{!}{=} \text{null } \mathbf{A}.$$

## Eksempel (Basis for ortogonalt komplement)

1/2

Betragt  $4 \times 5$  matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi betragter først rækkerummet:

$$\mathcal{U} = \text{row } \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Vi har en beskrivelse af det ortogonale komplement:

$$\mathcal{U}^\perp = (\text{row } \mathbf{A})^\perp \stackrel{!}{=} \text{null } \mathbf{A}.$$

Vores metode til bestemmelse af basis for nulrum giver derfor:

$$\text{En basis for } \mathcal{U}^\perp \text{ er: } \mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

## Eksempel (Basis for ortogonalt komplement)

2/2

Vi betragter dernæst søjlerummet:

$$\mathcal{V} = \text{col } \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^4 .$$

## Eksempel (Basis for ortogonalt komplement)

2/2

Vi betragter dernæst søjlerummet:

$$\mathcal{V} = \text{col } \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Vi har igen en beskrivelse af det ortogonale komplement:

$$\mathcal{V}^\perp = (\text{col } \mathbf{A})^\perp \stackrel{!}{=} \text{null } \mathbf{A}^\top.$$

**Eksempel (Basis for ortogonalt komplement)****2/2**

Vi betragter dernæst søjlerummet:

$$\mathcal{V} = \text{col } \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Vi har igen en beskrivelse af det ortogonale komplement:

$$\mathcal{V}^\perp = (\text{col } \mathbf{A})^\perp \stackrel{!}{=} \text{null } \mathbf{A}^\top.$$

Udregningen

$$\mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Eksempel (Basis for ortogonalt komplement)****2/2**

Vi betragter dernæst søjlerummet:

$$\mathcal{V} = \text{col } \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Vi har igen en beskrivelse af det ortogonale komplement:

$$\mathcal{V}^\perp = (\text{col } \mathbf{A})^\perp \stackrel{!}{=} \text{null } \mathbf{A}^\text{T}.$$

Udregningen

$$\mathbf{A}^\text{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og vores metode til bestemmelse af basis for nulrum giver derfor:

$$\text{En basis for } \mathcal{V}^\perp \text{ er: } \mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

## Øvelse

Betragt følgende underrum af  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestem en basis for  $\mathcal{U}^\perp$ .

## Øvelse

Betragt følgende underrum af  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestem en basis for  $\mathcal{U}^\perp$ .

**Løsning.** Matricen  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  opfylder

$$\mathcal{U} = \text{null } \mathbf{A}.$$



## Øvelse

Betragt følgende underrum af  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestem en basis for  $\mathcal{U}^\perp$ .

**Løsning.** Matricen  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  opfylder

$$\mathcal{U} = \text{null } \mathbf{A}.$$

Derfor er

$$\mathcal{U}^\perp = (\text{null } \mathbf{A})^\perp = \text{row } \mathbf{A} = \text{span} \{(1, 1, 1)\}.$$

## Øvelse

Betragt følgende underrum af  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestem en basis for  $\mathcal{U}^\perp$ .

**Løsning.** Matricen  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  opfylder

$$\mathcal{U} = \text{null } \mathbf{A}.$$

Derfor er

$$\mathcal{U}^\perp = (\text{null } \mathbf{A})^\perp = \text{row } \mathbf{A} = \text{span} \{(1, 1, 1)\}.$$

Så  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1)\}$  er en basis for  $\mathcal{U}^\perp$ .

## Øvelse

Betragt følgende underrum af  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestem en basis for  $\mathcal{U}^\perp$ .

**Løsning.** Matricen  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  opfylder

$$\mathcal{U} = \text{null } \mathbf{A}.$$

Derfor er

$$\mathcal{U}^\perp = (\text{null } \mathbf{A})^\perp = \text{row } \mathbf{A} = \text{span} \{(1, 1, 1)\}.$$

Så  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1)\}$  er en basis for  $\mathcal{U}^\perp$ .

**Bemærkning.**  $\mathcal{U}$  er en plan ned normalvektor  $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ .

**Theorem 4.11 (Dimension af ortogonalt komplement)**

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ . Så gælder:

$$\dim \mathcal{U}^\perp = n - \dim \mathcal{U}.$$

Ydermere gælder, at hvis

$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  er en basis for  $\mathcal{U}$

$\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\}$  er en basis for  $\mathcal{U}^\perp$  (hvor  $\ell = n - k$ )

da er

$$\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\} \text{ en basis for } \mathbb{R}^n.$$

**I ord:** Hvis man samler baserne for  $\mathcal{U}$  og  $\mathcal{U}^\perp$  så fås en basis for  $\mathbb{R}^n$ .

## Eksempel (Baser for ortogonale komplementer) 1/2

Betragt  $4 \times 5$  matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi har fundet:

En basis for null  $\mathbf{A}$  er:  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

En basis for row  $\mathbf{A}$  er:  $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

## Eksempel (Baser for ortogonale komplementer) 2/2

Da null **A** og row **A** er hinandens ortogonale komplementer vil

$$\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

ifølge Theorem 4.10 være en basis for  $\mathbb{R}^5$ .

## Eksempel (Baser for ortogonale komplement) 2/2

Da null **A** og row **A** er hinandens ortogonale komplement vil

$$B \cup C = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

ifølge Theorem 4.10 være en basis for  $\mathbb{R}^5$ .

**Check:**

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_5$$

# Oversigt

- 1 Ortogonalt komplement
- 2 Ortogonal projektion**
- 3 Gram–Schmidt processen og QR-faktorisering
- 4 Mindste kvadraters metode



# Ortogonal projektion



# Ortogonal projektion

**Vi kender:** Ortogonal projektion på et **1-dimensionalt** underrum:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \quad \text{hvor} \quad \mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}\}.$$

**Vi skal lære om:** Ortogonal projektion på et **generelt** underrum  $\mathcal{U}$ .

## Definition 4.12 (Ortogonal projektion – generelt)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$  og **antag at vi kender en ortogonal basis**  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  for  $\mathcal{U}$ . For enhver vektor  $\mathbf{v}$  i  $\mathbb{R}^n$  defineres nu:

- Den ortogonale **projektion** af  $\mathbf{v}$  på  $\mathcal{U}$  er givet ved:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2} \mathbf{u}_k \quad (\in \mathcal{U})$$

- **Komponenten** af  $\mathbf{v}$  ortogonal på  $\mathcal{U}$  er givet ved:

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \quad (\in \mathcal{U}^\perp)$$

- **Spejlingen** af  $\mathbf{v}$  i  $\mathcal{U}$  er givet ved:

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = 2 \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$$

(Faktisk er spejlingen ikke defineret i lærebogen.)

## Definition 4.12 (Ortogonal projektion – generelt)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$  og **antag at vi kender en ortogonal basis**  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  for  $\mathcal{U}$ . For enhver vektor  $\mathbf{v}$  i  $\mathbb{R}^n$  defineres nu:

- Den ortogonale **projektion** af  $\mathbf{v}$  på  $\mathcal{U}$  er givet ved:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2} \mathbf{u}_k \quad (\in \mathcal{U})$$

- **Komponenten** af  $\mathbf{v}$  ortogonal på  $\mathcal{U}$  er givet ved:

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \quad (\in \mathcal{U}^\perp)$$

- **Spejlingen** af  $\mathbf{v}$  i  $\mathcal{U}$  er givet ved:

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = 2 \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$$

(Faktisk er spejlingen ikke defineret i lærebogen.)

**Pointe:**  $\mathbf{v} = \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) + \text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$     og     $\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \perp \text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$ .

## Definition 4.12 (Ortogonal projektion – generelt)

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$  og **antag at vi kender en ortogonal basis**  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  for  $\mathcal{U}$ . For enhver vektor  $\mathbf{v}$  i  $\mathbb{R}^n$  defineres nu:

- Den ortogonale **projektion** af  $\mathbf{v}$  på  $\mathcal{U}$  er givet ved:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2} \mathbf{u}_k \quad (\in \mathcal{U})$$

- **Komponenten** af  $\mathbf{v}$  ortogonal på  $\mathcal{U}$  er givet ved:

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \quad (\in \mathcal{U}^\perp)$$

- **Spejlingen** af  $\mathbf{v}$  i  $\mathcal{U}$  er givet ved:

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = 2 \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$$

(Faktisk er spejlingen ikke defineret i lærebogen.)

**Pointe:**  $\mathbf{v} = \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) + \text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$  og  $\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) \perp \text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$ .

**Bemærkning.** Hvis  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  er en **ortonormal** basis for  $\mathcal{U}$  så er

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k$$

## Eksempel (Ortogonal projektion på en plan)

Betragt følgende vektorer i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sæt  $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ .

## Eksempel (Ortogonal projektion på en plan)

Betragt følgende vektorer i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sæt  $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ . Da  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  er en orthogonal basis for  $\mathcal{U}$  er:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 = \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Eksempel (Ortogonal projektion på en plan)

Betragt følgende vektorer i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sæt  $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ . Da  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  er en orthogonal basis for  $\mathcal{U}$  er:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 = \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

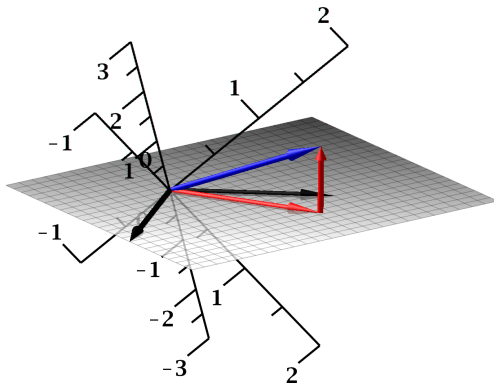
**Check:**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



## Illustration af eksemplet

$$\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Af illustrationen ovenfor fremgår, at  $\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$  er den vektor i  $\mathcal{U}$  som ligger tættest på (og derfor bedst tilnærmer)  $\mathbf{v}$ . Mere præcist:

### **Theorem 4.13 (Projektion som bedste tilnærmelse)**

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ . For  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  gælder uligheden

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| > \|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})\|$$

for enhver vektor  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  som er forskellig fra  $\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})$ .

# Projektionsmatricen

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ . Det er geometrisk klart, at

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(-), \text{comp}_{\mathcal{U}}(-), \text{refl}_{\mathcal{U}}(-): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

er lineære transformationer. Derfor findes  $n \times n$  matricer

**P** – projektionsmatricen for  $\mathcal{U}$

**C** – komponentmatricen for  $\mathcal{U}$

**R** – spejlingsmatricen for  $\mathcal{U}$

som for alle  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  opfylder:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v}$$

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}\mathbf{v}$$

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

**Spørgsmål.** *Hvordan ser matricerne **P**, **C** og **R** ud?*

## Formel for projektionsmatricen

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$  og **antag at vi kender en ortonormal basis**  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  for  $\mathcal{U}$ . Sæt

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{u}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_k)$$

Matricerne

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$$

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I}$$

(hvor  $\mathbf{I}$  er  $n \times n$  enhedsmatricen) opfylder:

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v}$$

$$\text{comp}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}\mathbf{v}$$

$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

for alle  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .

## Eksempel (Bestemmelse af projektionsmatrix)

1/2

Vi har tidligere set, at vektorerne

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

udgør en **ortogonal** basis for underrummet  $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  af  $\mathbb{R}^3$ .

**Eksempel (Bestemmelse af projektionsmatrix)****1/2**

Vi har tidligere set, at vektorerne

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

udgør en **ortogonal** basis for underrummet  $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  af  $\mathbb{R}^3$ .

Derfor vil de normerede vektorer

$$\mathbf{u}'_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.41 \\ -0.41 \\ 0.82 \end{pmatrix}, \quad \text{og}$$

$$\mathbf{u}'_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

udgøre en **ortonormal** basis for  $\mathcal{U}$ .

## Eksempel (Bestemmelse af projektionsmatrix)

2/2

Sæt

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{u}'_1 \mid \mathbf{u}'_2) \simeq \begin{pmatrix} 0.41 & 0.71 \\ -0.41 & 0.71 \\ 0.82 & 0.00 \end{pmatrix}.$$

## Eksempel (Bestemmelse af projektionsmatrix)

2/2

Sæt

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{u}'_1 \mid \mathbf{u}'_2) \simeq \begin{pmatrix} 0.41 & 0.71 \\ -0.41 & 0.71 \\ 0.82 & 0.00 \end{pmatrix}.$$

Projektionsmatricen  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$  for underrummet  $\mathcal{U}$  er nu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.41 & 0.71 \\ -0.41 & 0.71 \\ 0.82 & 0.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.41 & -0.41 & 0.82 \\ 0.71 & 0.71 & 0.00 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$



## Eksempel (Bestemmelse af projektionsmatrix)

2/2

Sæt

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{u}'_1 \mid \mathbf{u}'_2) \simeq \begin{pmatrix} 0.41 & 0.71 \\ -0.41 & 0.71 \\ 0.82 & 0.00 \end{pmatrix}.$$

Projektionsmatricen  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$  for underrummet  $\mathcal{U}$  er nu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.41 & 0.71 \\ -0.41 & 0.71 \\ 0.82 & 0.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.41 & -0.41 & 0.82 \\ 0.71 & 0.71 & 0.00 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

For vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(gen)finder vi

$$\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Øvelse

Betragt i  $\mathbb{R}^3$  underrummet

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \quad (x_1 x_2\text{-planen})$$

- Bestem projektionsmatricen  $\mathbf{P}$  for  $\mathcal{U}$ .
- Bestem den ortogonale projektion af  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  på  $\mathcal{U}$ .

## Øvelse

Betragt i  $\mathbb{R}^3$  underrummet

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \quad (x_1x_2\text{-planen})$$

- Bestem projektionsmatricen  $\mathbf{P}$  for  $\mathcal{U}$ .
- Bestem den ortogonale projektion af  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  på  $\mathcal{U}$ .

**Løsning.**

- Da  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  er en ortonormal basis for  $\mathcal{U}$  sættes  $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2)$ .

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Øvelse

Betragt i  $\mathbb{R}^3$  underrummet

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \quad (x_1x_2\text{-planen})$$

- Bestem projektionsmatricen  $\mathbf{P}$  for  $\mathcal{U}$ .
- Bestem den ortogonale projektion af  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  på  $\mathcal{U}$ .

### Løsning.

- Da  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  er en ortonormal basis for  $\mathcal{U}$  sættes  $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2)$ .

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\text{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

# Oversigt

- 1 Ortogonalt komplement
- 2 Ortogonal projektion
- 3 Gram–Schmidt processen og QR-faktorisering**
- 4 Mindste kvadraters metode

# Gram–Schmidt processen og QR-faktorisering



Jørgen Pedersen Gram  
(1850–1916)



Erhard Schmidt  
(1876–1959)

# Gram–Schmidt processen

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ .

# Gram–Schmidt processen

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ .

Hvis  $\mathcal{U}$  er af en bestemt type, fx row  $\mathbf{A}$ , col  $\mathbf{A}$  eller null  $\mathbf{A}$ , så har vi lært af bestemme en **basis** for  $\mathcal{U}$ .



# Gram–Schmidt processen

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ .

Hvis  $\mathcal{U}$  er af en bestemt type, fx row  $\mathbf{A}$ , col  $\mathbf{A}$  eller null  $\mathbf{A}$ , så har vi lært af bestemme en **basis** for  $\mathcal{U}$ .

For at beregne ortogonale projektioner på  $\mathcal{U}$  skal man bruge en **ortonormal basis** (eller en orthogonal basis) for  $\mathcal{U}$ .

# Gram–Schmidt processen

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ .

Hvis  $\mathcal{U}$  er af en bestemt type, fx row  $\mathbf{A}$ , col  $\mathbf{A}$  eller null  $\mathbf{A}$ , så har vi lært af bestemme en **basis** for  $\mathcal{U}$ .

For at beregne ortogonale projektioner på  $\mathcal{U}$  skal man bruge en **ortonormal basis** (eller en orthogonal basis) for  $\mathcal{U}$ .

**Spørgsmål.** Givet en (almindelig) basis for  $\mathcal{U}$ , er der så en metode til at konstruere en ortonormal basis for  $\mathcal{U}$ ?

# Gram–Schmidt processen

Lad  $\mathcal{U}$  være et underrum af  $\mathbb{R}^n$ .

Hvis  $\mathcal{U}$  er af en bestemt type, fx row  $\mathbf{A}$ , col  $\mathbf{A}$  eller null  $\mathbf{A}$ , så har vi lært af bestemme en **basis** for  $\mathcal{U}$ .

For at beregne ortogonale projektioner på  $\mathcal{U}$  skal man bruge en **ortonormal basis** (eller en orthogonal basis) for  $\mathcal{U}$ .

**Spørgsmål.** Givet en (almindelig) basis for  $\mathcal{U}$ , er der så en metode til at konstruere en ortonormal basis for  $\mathcal{U}$ ?

**Svar.** Ja! Brug Gram–Schmidt processen.

## Algoritme (4.52): Gram–Schmidt processen

Lad  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  være **lineært uafhængige** vektorer, og dermed en basis for underrummet  $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ . Definér vektorerne:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1\|}$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2}{\|\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2\|}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Normering af vektoren:

$$\mathbf{u}_1$$

$$\text{comp}_{\text{span}\{\mathbf{q}_1\}}(\mathbf{u}_2)$$

$$\text{comp}_{\text{span}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}}(\mathbf{u}_3)$$

Da er  $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\}$  en ortonormal basis for  $\mathcal{U}$ .

## Eksempel (Gram–Schmidt processen)

1/3

Betragt de lineært uafhængige vektorer

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gram–Schmidt processen giver:

## Eksempel (Gram–Schmidt processen)

1/3

Betragt de lineært uafhængige vektorer

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gram–Schmidt processen giver:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

## Eksempel (Gram–Schmidt processen)

1/3

Betragt de lineært uafhængige vektorer

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gram–Schmidt processen giver:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi beregner nu

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_2 &= \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Eksempel (Gram–Schmidt processen)

2/3

Dermed er

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{q}'_2}{\|\mathbf{q}'_2\|} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



## Eksempel (Gram–Schmidt processen)

2/3

Dermed er

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{q}'_2}{\|\mathbf{q}'_2\|} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Endelig beregnes

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_3 &= \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Eksempel (Gram–Schmidt processen)

2/3

Dermed er

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{q}'_2}{\|\mathbf{q}'_2\|} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Endelig beregnes

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_3 &= \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}'_3}{\|\mathbf{q}'_3\|} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Eksempel (Gram–Schmidt processen)

3/3

Vi konkluderer, at

$$\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

er en ortonormal basis for underrummet

$$\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

## Eksempel (Gram–Schmidt processen)

3/3

Vi konkluderer, at

$$\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

er en ortonormal basis for underrummet

$$\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Bemærkning.** Eksemplet viser hvordan Gram–Schmidt processen fungerer i praksis. Men faktisk er  $\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  hele  $\mathbb{R}^3$ , så

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

er en simple ortonormal basis for  $\mathcal{U}$ .

## Øvelse

Bestem resultatet  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$  af Gram–Schmidt processen på

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Øvelse

Bestem resultatet  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$  af Gram–Schmidt processen på

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Løsning.**

$$\bullet \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## Øvelse

Bestem resultatet  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$  af Gram–Schmidt processen på

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Løsning.**

- $\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$
- Vi har  $\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

## Øvelse

Bestem resultatet  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$  af Gram–Schmidt processen på

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Løsning.**

- $\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$
- Vi har  $\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$  Så

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



## QR-faktorisering

Ved at holde lidt nøjere regnskab med hvad der foregår i Gram–Schmidt processen kan man opnå følgende:

### QR-faktorisering

Lad  $\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 | \cdots | \mathbf{u}_n)$  være en  $m \times n$  matrix med  $\text{rank } \mathbf{A} = n$ .  
Brug Gram–Schmidt på søjlerne i  $\mathbf{A}$  og definér tallene  $r_{ij}$  som følger:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{\mathbf{u}_1}{r_{11}}$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1\|} = \frac{\mathbf{u}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1}{r_{22}}$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2}{\|\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2\|} = \frac{\mathbf{u}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2}{r_{33}}$$

$$\vdots$$

Dvs.

$$r_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}_j \quad \text{for } i < j$$

$$r_{jj} = \|\mathbf{u}_j - r_{1j}\mathbf{q}_1 - r_{2j}\mathbf{q}_2 - \cdots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1}\| =: \|\mathbf{q}'_j\|.$$

## QR-faktorisering (fortsat)

Da opnås følgende **QR-faktorisering** af **A**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \underbrace{(\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \cdots | \mathbf{q}_n)}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

hvor

- **Q** er en  $m \times n$  matrix med ortonormale søjler, og
- **R** er en invertibel  $n \times n$  øvre trekantsmatrix.

*Ved løsning af problemer som kræver lineær algebra kan det, i datalogiske sammenhænge, være ganske tidsbesparende at lave QR-faktoriseringer af de involverede matricer.*

## Eksempel (QR-faktorisering)

1/2

Betragt  $4 \times 3$  matricen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

## Eksempel (QR-faktorisering)

1/2

Betragt  $4 \times 3$  matricen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vi udregner (linje for linje):

$$r_{11} = \|\mathbf{u}_1\| \simeq 11.22 \qquad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{r_{11}} \simeq \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.27 \\ 0.53 \\ 0.80 \end{pmatrix}$$

## Eksempel (QR-faktorisering)

1/2

Betragt  $4 \times 3$  matricen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vi udregner (linje for linje):

$$r_{11} = \|\mathbf{u}_1\| \simeq 11.22 \quad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{r_{11}} \simeq \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.27 \\ 0.53 \\ 0.80 \end{pmatrix}$$

$$r_{12} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \simeq 12.83 \quad \mathbf{q}'_2 = \mathbf{u}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1 \simeq \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.57 \\ 0.14 \\ -0.29 \end{pmatrix}$$

# Eksempel (QR-faktorisering)

1/2

Betragt  $4 \times 3$  matricen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vi udregner (linje for linje):

$$r_{11} = \|\mathbf{u}_1\| \simeq 11.22 \quad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{r_{11}} \simeq \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.27 \\ 0.53 \\ 0.80 \end{pmatrix}$$

$$r_{12} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \simeq 12.83 \quad \mathbf{q}'_2 = \mathbf{u}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1 \simeq \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.57 \\ 0.14 \\ -0.29 \end{pmatrix}$$

$$r_{22} = \|\mathbf{q}'_2\| \simeq 1.20 \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{q}'_2}{r_{22}} \simeq \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.48 \\ 0.12 \\ -0.24 \end{pmatrix}$$

## Eksempel (QR-faktorisering)

2/2

$$r_{13} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_3 \simeq 13.63$$

$$r_{23} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \simeq 2.63$$

$$\mathbf{q}'_3 = \mathbf{u}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2 \simeq \begin{pmatrix} -0.20 \\ 0.10 \\ 0.40 \\ -0.30 \end{pmatrix}$$

## Eksempel (QR-faktorisering)

2/2

$$r_{13} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_3 \simeq 13.63$$

$$r_{23} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \simeq 2.63$$

$$\mathbf{q}'_3 = \mathbf{u}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2 \simeq \begin{pmatrix} -0.20 \\ 0.10 \\ 0.40 \\ -0.30 \end{pmatrix}$$

$$r_{33} = \|\mathbf{q}'_3\| \simeq 0.55$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}'_3}{r_{33}} \simeq \begin{pmatrix} -0.37 \\ 0.18 \\ 0.73 \\ -0.55 \end{pmatrix}.$$



## Eksempel (QR-faktorisering)

2/2

$$\begin{aligned}
 r_{13} &= \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_3 \simeq 13.63 \\
 r_{23} &= \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \simeq 2.63 \\
 \mathbf{q}'_3 &= \mathbf{u}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2 \simeq \begin{pmatrix} -0.20 \\ 0.10 \\ 0.40 \\ -0.30 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{33} &= \|\mathbf{q}'_3\| \simeq 0.55 \\
 \mathbf{q}_3 &= \frac{\mathbf{q}'_3}{r_{33}} \simeq \begin{pmatrix} -0.37 \\ 0.18 \\ 0.73 \\ -0.55 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Vi har nu

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \mathbf{q}_3) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

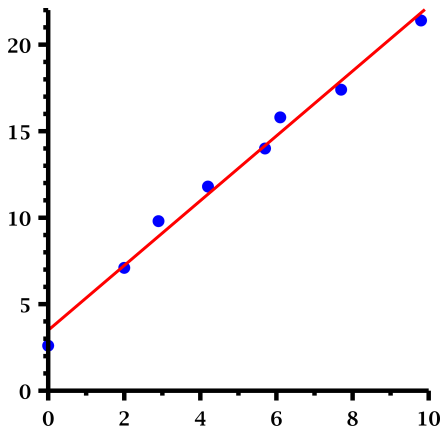
dvs.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.84 & -0.37 \\ 0.27 & 0.48 & 0.18 \\ 0.53 & 0.12 & 0.73 \\ 0.80 & -0.24 & -0.55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11.22 & 12.83 & 13.63 \\ 0 & 1.20 & 2.63 \\ 0 & 0 & 0.55 \end{pmatrix}.$$

# Oversigt

- 1 Ortogonalt komplement
- 2 Ortogonal projektion
- 3 Gram–Schmidt processen og QR-faktorisering
- 4 Mindste kvadraters metode**

# Mindste kvadraters metode



# Mindste kvadraters metode

For  $m \times n$  matrix **A** betragter vi et lineært ligningssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

# Mindste kvadraters metode

For  $m \times n$  matrix  $\mathbf{A}$  betragter vi et lineært ligningssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Hvis ligningssystemet er inkonsistent (dvs. det har ingen løsning), så efterspørger vi i stedet den vektor  $\mathbf{x}$  som gør størrelsen

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$$

mindst mulig.

# Mindste kvadraters metode

For  $m \times n$  matrix  $\mathbf{A}$  betragter vi et lineært ligningssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Hvis ligningssystemet er inkonsistent (dvs. det har ingen løsning), så efterspørger vi i stedet den vektor  $\mathbf{x}$  som gør størrelsen

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$$

mindst mulig. Theorem 4.13 viser, at vi skal vælge  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  hvor

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}).$$

## Mindste kvadraters metode

For  $m \times n$  matrix  $\mathbf{A}$  betragter vi et lineært ligningssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Hvis ligningssystemet er inkonsistent (dvs. det har ingen løsning), så efterspørger vi i stedet den vektor  $\mathbf{x}$  som gør størrelsen

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$$

mindst mulig. Theorem 4.13 viser, at vi skal vælge  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  hvor

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}).$$

For  $\bar{\mathbf{x}}$  gælder altså

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} - \text{proj}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}) = \text{comp}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}) \in (\text{col } \mathbf{A})^\perp = \text{null } \mathbf{A}^T$$

## Mindste kvadraters metode

For  $m \times n$  matrix  $\mathbf{A}$  betragter vi et lineært ligningssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Hvis ligningssystemet er inkonsistent (dvs. det har ingen løsning), så efterspørger vi i stedet den vektor  $\mathbf{x}$  som gør størrelsen

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$$

mindst mulig. Theorem 4.13 viser, at vi skal vælge  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  hvor

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}).$$

For  $\bar{\mathbf{x}}$  gælder altså

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} - \text{proj}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}) = \text{comp}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}) \in (\text{col } \mathbf{A})^\perp = \text{null } \mathbf{A}^\top$$

og dermed er

$$\mathbf{A}^\top(\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$



# Mindste kvadraters metode

For  $m \times n$  matrix  $\mathbf{A}$  betragter vi et lineært ligningssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Hvis ligningssystemet er inkonsistent (dvs. det har ingen løsning), så efterspørger vi i stedet den vektor  $\mathbf{x}$  som gør størrelsen

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$$

mindst mulig. Theorem 4.13 viser, at vi skal vælge  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  hvor

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}).$$

For  $\bar{\mathbf{x}}$  gælder altså

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} - \text{proj}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}) = \text{comp}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}) \in (\text{col } \mathbf{A})^\perp = \text{null } \mathbf{A}^\top$$

og dermed er

$$\mathbf{A}^\top(\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

Den søgte vektor  $\bar{\mathbf{x}}$  tilfredsstiller altså følgende ligningssystem:

**Normalligningerne (*Normal equations*)**

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$$

Men kan normalligningerne overhovedet løses?

## Normalligningerne (*Normal equations*)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Men kan normalligningerne overhovedet løses?

## Normalligningerne (*Normal equations*)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

I det oprindelige inkonsistente ligningsystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{hvor } \mathbf{A} \text{ er en } m \times n \text{ matrix})$$

er der typisk flere ligninger end ubekendte ( $m > n$ ) og  $\text{rank } \mathbf{A} = n$ .

Men kan normalligningerne overhovedet løses?

## Normalligningerne (*Normal equations*)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

I det oprindelige inkonsistente ligningsystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{hvor } \mathbf{A} \text{ er en } m \times n \text{ matrix})$$

er der typisk flere ligninger end ubekendte ( $m > n$ ) og  $\text{rank } \mathbf{A} = n$ .

### Theorem 4.16(a) (Løsning af normalligningerne)

Lad  $\mathbf{A}$  være en  $m \times n$  matrix. Hvis  $\text{rank } \mathbf{A} = n$  så er  $n \times n$  matricen  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  invertibel og derfor har normalligningerne

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

den entydigt bestemte løsning

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Dette  $\bar{\mathbf{x}}$  kaldes **mindste kvadraters løsning**.

Vi opsummerer:

## Mindste kvadraters metode (eller lineær regression)

Lad  $\mathbf{A}$  være en  $m \times n$  matrix med  $\text{rank } \mathbf{A} = n$ . Den bedste tilnærmede løsning til ligningssystemet

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

er **mindste kvadraters løsning**, dvs.

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}.$$

Vi opsummerer:

## Mindste kvadraters metode (eller lineær regression)

Lad  $\mathbf{A}$  være en  $m \times n$  matrix med  $\text{rank } \mathbf{A} = n$ . Den bedste tilnærmede løsning til ligningssystemet

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

er **mindste kvadraters løsning**, dvs.

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

**Bemærkning.** Lad  $\mathbf{A}$  være en  $m \times n$  matrix med  $\text{rank } \mathbf{A} = n$ . Vi har

$$\text{proj}_{\text{col } \mathbf{A}}(\mathbf{b}) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

og derfor er

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

projektionsmatricen for underrummet  $\mathcal{U} = \text{col } \mathbf{A}$ .

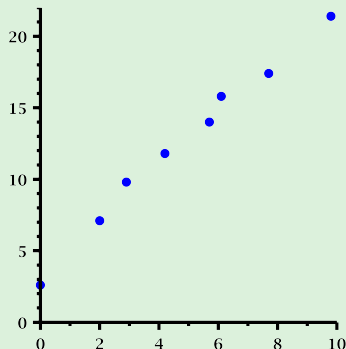
(Hvis  $\mathbf{A}$  er ortogonal, så er  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$  og vi genfinder formelen  $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ )

## Eksempel (Mindste kvadraters metode)

1/3

Vi har givet følgende målepunkter:

$x$	0.0	2.0	2.9	4.2	5.7	6.1	7.7	9.8
$y$	2.6	7.1	9.8	11.8	14.0	15.8	17.4	21.4



Vi vil finde den bedste rette linie  $y = ax + b$  gennem målepunkterne.

## Eksempel (Mindste kvadraters metode)

2/3

Vi skal altså finde den bedste tilnærmede løsning til ligningssystemet:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \cdot 0.0 + b = 2.6 \\ a \cdot 2.0 + b = 7.1 \\ a \cdot 2.9 + b = 9.8 \\ a \cdot 4.2 + b = 11.8 \\ a \cdot 5.7 + b = 14.0 \\ a \cdot 6.1 + b = 15.8 \\ a \cdot 7.7 + b = 17.4 \\ a \cdot 9.8 + b = 21.4 \end{array} \right. \quad \text{dvs.} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

hvor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1 \\ 2.0 & 1 \\ 2.9 & 1 \\ 4.2 & 1 \\ 5.7 & 1 \\ 6.1 & 1 \\ 7.7 & 1 \\ 9.8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 7.1 \\ 9.8 \\ 11.8 \\ 14.0 \\ 15.8 \\ 17.4 \\ 21.4 \end{pmatrix}.$$



## Eksempel (Mindste kvadraters metode)

3/3

Den bedste tilnærmede løsning til ligningen  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  er

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ &= \begin{pmatrix} 255.08 & 38.40 \\ 38.40 & 8.00 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.0 & 2.0 & 2.9 & 4.2 & 5.7 & 6.1 & 7.7 & 9.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.6 \\ 7.1 \\ 9.8 \\ 11.8 \\ 14.0 \\ 15.8 \\ 17.4 \\ 21.4 \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1.873 \\ 3.497 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

# Eksempel (Mindste kvadraters metode)

3/3

Den bedste tilnærmede løsning til ligningen  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  er

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ &= \begin{pmatrix} 255.08 & 38.40 \\ 38.40 & 8.00 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.0 & 2.0 & 2.9 & 4.2 & 5.7 & 6.1 & 7.7 & 9.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.6 \\ 7.1 \\ 9.8 \\ 11.8 \\ 14.0 \\ 15.8 \\ 17.4 \\ 21.4 \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1.873 \\ 3.497 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Og den bedste rette linie gennem målepunkterne er derfor

$$y = \bar{a}x + \bar{b} = 1.873x + 3.497$$

