LinAlgDat

2019/2020

Facit til Prøve II, mandag d. 8. juni 2020

Opgave 1

(a) Først bruges Gram-Schmidt processen til at finde en ortonormal basis $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ for $\mathcal{U}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+2^2+6^2}}\,\mathbf{u}_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}\\
\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{q}_1 &= \frac{1}{7}(0\cdot(-3)+2\cdot 2+(-3)\cdot 6) = -2\\
\mathbf{q}_2' &= \mathbf{u}_2-(\mathbf{u}_2\bullet\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 = \mathbf{u}_2+2\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}+2\cdot\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-6\\18\\-9\end{pmatrix} = -\frac{3}{7}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\\
\mathbf{q}_2 &= \frac{\mathbf{q}_2'}{\|\mathbf{q}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Herefter sætter vi:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1|\mathbf{q}_2) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -6\\ 6 & 3\end{pmatrix}.$$

Projektionsmatricen for $\mathcal{U}$ er så givet ved:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -6\\ 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2 & 6\\ 2 & -6 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix}13 & -18 & -12\\ -18 & 40 & -6\\ -12 & -6 & 45\end{pmatrix}.$$

(b) Med $\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2)$ gælder $\mathcal{U} = \operatorname{col}\mathbf{A}$ og dermed $\mathcal{U}^\perp = (\operatorname{col}\mathbf{A})^\perp = \operatorname{null}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$. For at bestemme en basis for $\operatorname{null}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ omformes matricen $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ på reduceret rækkeechelonform:

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix}-3 & 2 & 6\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix}-3 & 0 & 9\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2]{-\frac{1}{3}\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3/2\end{pmatrix}.$$

Heraf aflæses, at fx

$$\left\{\begin{pmatrix}3\\3/2\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad \text{eller fx} \qquad \left\{\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}\right\}$$

er en basis for $\mathcal{U}^\perp = \operatorname{null}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

Opgave 2

(a) Det karakteristiske polynomium er

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbf{I}-A) &= \det\begin{bmatrix}\lambda-3 & 2 & -4\\ -3 & \lambda+2 & -4\\ -3 & 2 & \lambda-4\end{bmatrix}\\ &= (\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda-4)+24+24-(12(\lambda+2)-6(\lambda-4)-8(\lambda-3))\\ &= \lambda^3-5\lambda^2.\end{aligned}$$

(b) Egenvektorer hørende til $\lambda = 0$: vi trækker 0 fra i diagonalen og rækkereducerer totalmatricen

$$\begin{bmatrix}3 & -2 & 4 & 0\\ 3 & -2 & 4 & 0\\ 3 & -2 & 4 & 0\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & -2/3 & 4/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Løsningsmængden til dette ligningssystem er

$$s\begin{bmatrix}2/3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-4/3\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Vektorerne $\begin{bmatrix}2/3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4/3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ udgør dermed en basis for egenrummet hørende til egenværdien 0, så

$$\begin{bmatrix}2/3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4/3\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

udgør dermed en basis af egenvektorer for $\mathbb{R}^3$. Dvs. med

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}2/3 & -4/3 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \qquad \text{og} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix},$$

gælder $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

(c) Vi sætter

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}2/3 & 1 & -4/3\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

og bemærker, at

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q})^2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 25 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Henrik Holm (holm@math.ku.dk)
Henrik Laurberg Pedersen (henrikp@math.ku.dk)