Lineær Algebra i datalogi
Project C opg.1-3

Pelle Rubin Galløe, hqr241, hold 2

08 Juni. 2021

Opgave 1

$$\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Samt formlerne fra Algoritme (4.52) (Gram-Smidt Processen)

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \quad (1)$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1\|} \quad (2)$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2}{\|\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2\|} \quad (3)$$

a

Vi bruger (1) og (2) til at udregne vores ortonomalbasis for U.

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 &= \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} && = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{q}_2^{'} &= \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \left(3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right) && = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{q}_2 &= \frac{\mathbf{q}_2^{'}}{\|\mathbf{q}_2^{'}\|} && = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vi har således fundet vores Ortonormalbasis for $\mathcal{U}$,

$$\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

b

Vi lader $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ være den ortonormale basis for $\mathcal{U}$ fundet i (a). Da er projekitionsmatricen $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$. Vi multiplicerer matricerne sammen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{14}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{-5}{15} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{14}{15} & \frac{-5}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{221}{225} & \frac{-4}{45} & \frac{-22}{225} \\ \frac{-4}{45} & \frac{5}{9} & \frac{-22}{45} \\ \frac{-22}{225} & \frac{-22}{45} & \frac{104}{225} \end{bmatrix}$$

c

Vi benytter P fra (b) og identiteterne

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \tag{4}$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{P} \tag{5}$$
$$\mathbf{R} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I} \tag{6}$$

, hvoraf vi finder spejlingen $\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{R}\mathbf{e}_2$,

$$\mathbf{R} = 2P - I = \begin{bmatrix} \frac{217}{225} & \frac{-8}{45} & \frac{-44}{225} \\ \frac{-8}{45} & \frac{1}{9} & \frac{-44}{45} \\ \frac{-44}{225} & \frac{-44}{45} & \frac{-17}{225} \end{bmatrix}$$
$$\text{refl}_{\mathcal{U}}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 44 \end{bmatrix}$$

d

Vi undersøger Matricen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ hvor $\mathcal{U} = \text{col}\mathbf{A}$, da ved vi fra Theorem 4.10 at $(\text{col}\mathbf{A})^\perp = \text{null}\mathbf{A}^T$. Vi opstiller derfor ligningssystemet og udfører rækkeoperationer:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 - 5r_1 \to r_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -11 & 10 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{(-\frac{1}{11})r_2 \to r_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{11} \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2 \to r_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{11} \end{bmatrix}$$

Hvoraf vi nu kan aflæse $(\text{col}\mathbf{A})^\perp = \text{null}\mathbf{A}^T = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -11 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_3$ og dermed basen for underrummet $\mathcal{U}^\perp$

Opgave 2

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & 10 \\ -1 & 5 & 13 & -6 \\ -4 & 6 & 10 & -24 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{r}_{11}} \tag{8}$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1\|} = \frac{\mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_{12}\mathbf{q}_1}{\mathbf{r}_{22}} \tag{9}$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2}{\|\mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2\|} = \frac{\mathbf{u}_3 - \mathbf{r}_{13}\mathbf{q}_1 - \mathbf{r}_{23}\mathbf{q}_2}{\mathbf{r}_{33}} \tag{10}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}, \mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n\}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} & \dots & \mathbf{r}_{1n} \\ 0 & \mathbf{r}_{22} & \dots & \mathbf{r}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{r}_{nn} \end{bmatrix} \tag{11}$$

a

Vi følger formlerne (8-10)[1] og det repeterende system for $\mathbf{q}_4, \mathbf{r}_{14}, \mathbf{r}_{24}, \mathbf{r}_{34}, \mathbf{r}_{44}$, og noterer $\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_{ij}$ for alle $i, j \in [1, 2, 3, 4]$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{11} = 7$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{12} = -7, \mathbf{r}_{22} = 7$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{13} = -7, \mathbf{r}_{23} = 14, \mathbf{r}_{33} = 7$$

$$\mathbf{q}_4 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{14} = 14, \mathbf{r}_{24} = 0, \mathbf{r}_{34} = -21, \mathbf{r}_{44} = 14$$

[1] Jeg vælger at undlade mellemregningerne da de er trivielle og ikke relevante for problemet. Desuden er en mere dybdegående gennemgang af formlerne gjort i opgave 1.a)

Vi opstiller vores $\mathbf{Q}$ og $\mathbf{R}$ matricer, og multiplicerer dem sammen for at tjekke at ligheden i (11) gælder.

$$\mathbf{QR} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -7 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & 10 \\ -1 & 5 & 13 & -6 \\ -4 & 6 & 10 & -24 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

b

Vi indsætter vores værdier i formelen for $\mathbf{R}^{-1}$ givet i opgavebeskrivelsen og finder:

$$\mathbf{R}^{-1}\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da $\mathbf{Q}$ er en ortonormal base gælder at $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Regner vi på vores udtryk $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ med disse informationer får vi følgende:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} && = \mathbf{QR} \\ \rightarrow&\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A} && = \mathbf{QI} \\ \rightarrow&\mathbf{IR}^{-1} && = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{QI} \\ \rightarrow&\mathbf{IR}^{-1}\mathbf{Q}^{-1} && = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{II} \\ \rightarrow&\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^{T} && = \mathbf{A}^{-1} \end{aligned}$$

Vi udregner derfor $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T$ og finder således:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{98}\begin{bmatrix} 4 & 32 & -22 & 17 \\ -12 & 30 & -32 & 26 \\ 4 & -10 & 20 & -11 \\ -2 & -2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Hvilket kan tjekkes vha. $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, hvilket er gældende for den funde invers.

c

d

Opgave 3

a

For $ln(y) = at + b$ opsætter vi ligninssytemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, hvor $\mathbf{b}$ er værdierne i tredje kolonne i Tabel 2 (i opgave beskrivelsen), $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ og $\mathbf{A}$ er en 8x2 matrix, med værdierne fra første kolonne i Tabel 2 som første kolonne i matricen (justeret efter startår 2009 som år 0), og 1 taller på anden kolonne i matricen. Vi har altså:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 7 & 1 \\ 9 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 35.104 \\ 35.481 \\ 36.891 \\ 37.331 \\ 38.061 \\ 39.071 \\ 39.345 \\ 40.568 \end{bmatrix}$$

Dernæst bruger vi Theorem 4.16(a) der slutteligt foreskriver $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$, hvor $\bar{\mathbf{x}}$ kaldes *mindste kvadraters løsning.* Vi udregner derfor:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b} = \frac{1}{879}\begin{bmatrix} 8 & -37 \\ -37 & 281 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 35.104 \\ 35.481 \\ 36.891 \\ 37.331 \\ 38.061 \\ 39.071 \\ 39.345 \\ 40.568 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4667531285 \\ 35.5727667804 \end{bmatrix}$$

Og finder derved konstanterne $a = 0.46675..., b = 35.57276...$, således at den linje der bedst beskriver punkterne er $ln(y) = 0.46675(t - 2009) + 35.57276$

b

Tager vi eksponentialfunktionen på begge sider af ligningen fra (a), får vi $y = e^{0.46675(t-2009)+35.57276}$, vi kan dele højresiden op i et produkt af eksponentialfunktioner således at potensen er uændret (i kraft a $x^a x^b = x^{a+b}$)

$$y = e^{35.57276}e^{0.46675(t-2009)} = 2.812265(\dots) \cdot 10^{15} \cdot e^{0.46675(t-2009)}$$

Hvilket netop er tilnærmelsen i (*) i opgavebeskrivelsen.

c

Vi indtaster simpelthen $t = 2000$ og $t = 2025$ i (*) og udregner resultatet:

$$y(2000) = 2.81 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.46675(2000-2009)} = 4.201134758 \cdot 10^{13}$$
$$y(2025) = 2.81 \cdot 10^{15} \cdot e^{0.46675(2025-2009)} = 4.940315545 \cdot 10^{18}$$