LinAlgDat

2019/2020

Prøve I, torsdag d. 14/5 2020 kl. 18:00–19:45

Deadline for aflevering er i dag torsdag den 14/5 kl. 19:45. For sene afleveringer accepteres ikke.

I skriver jeres løsninger til opgaverne i Prøve I på papir med blyant eller kuglepen. Det er også helt i orden at skrive på Ipad eller anden tablet med elektronisk pen. Prøven laves individuelt men alle hjælpemidler er tilladt. Besvarelsen skal indeholde mellemregninger i rimeligt omfang.

I fotograferer eller scanner jeres håndskrevne løsninger (som billedfiler eller pdf-filer) og uploader disse til Absalon inden deadline. Det anbefales, om muligt, at konvertere evt. billeder til pdf-filer da disse fylder mindre. Har I skrevet på Ipad/tablet med elektronisk pen uploades den producerede fil i pdf format.

Opgave 1 (50%)

Betragt ligningssystemet (med ukendt a):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_2 + 2ax_3 &= a \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= -a. \end{aligned}$$

(a) Bestem for hvilke værdier af a løsningsmængden til ligningssystemet

- er den tomme mængde;
- består af netop én vektor;
- består af uendeligt mange vektorer.

(b) Lad $a = -1/2$ og lad $\mathbf{A}$ betegne koefficientmatricen for ligningssystemet. Bestem samtlige løsninger til ligningssystemet

$$\mathbf{A}^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opgave 2 (50%)

Betragt de lineære transformationer $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ og $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ givet ved:

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

I spørgsmålene nedenfor betragtes både sammensætningen $S \circ T$ og $T \circ S$.

(a) Vis at $(S \circ T)(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ for alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bestem en basis for $\ker(T \circ S)$ (altså kernen af $T \circ S$).

(c) Bestem en basis for $\operatorname{ran}(T \circ S)$ (altså billedet af $T \circ S$).