Forelæsning 5: Underrum af $\mathbb{R}^n$, baser og dimension

LinAlgDat 2019/2020

Henrik Holm og Henrik L. Pedersen
Institut for Matematiske Fag
holm@math.ku.dk og henrikp@math.ku.dk

Oversigt

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

Definition 3.1 (Vektoraddition og skalarmultiplikation)

Lad $\mathbb{R}^n$ være mængden af alle (søjle)vektorer

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \text{hvor} \qquad u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$$

Vektoraddition/subtraktion og skalarmultiplikation defineres pladsvis:

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1 \pm v_1 \\ \vdots \\ u_n \pm v_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad s\mathbf{u} = s\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} su_1 \\ \vdots \\ su_n \end{pmatrix}$$

Eksempel (Regning med vektorer)

I $\mathbb{R}^2$ gælder fx

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad 7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Theorem 3.1 (Regneregler i $\mathbb{R}^n$)

Nulvektoren i $\mathbb{R}^n$ har per definition 0'er på alle n koordinater:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoraddition og skalarmultiplikation opfylder følgende regler:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
- $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
- $s(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = s\mathbf{u} + s\mathbf{v}$
- $(s + t)\mathbf{v} = s\mathbf{v} + t\mathbf{v}$
- $s(t\mathbf{v}) = (st)\mathbf{v}$
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

for alle vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ og alle tal (skalarer) $s, t \in \mathbb{R}$.

Abstakte vektorrum

Definition 7.1 (Vektorrum)

En mængde V (hvis elementer vi omtaler som "vektorer") med

- Vektoraddition: $V \times V \to V$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$, og
- Skalarmultiplikation: $\mathbb{R} \times V \to V$, $(s, \mathbf{u}) \mapsto s\mathbf{u}$

som opfylder reglerne i Theorem 3.1 kaldes et (reelt) vektorrum.

Theorem 3.1 (reformulering)

Mængden $V = \mathbb{R}^n$ er et (reelt) vektorrum.

Eksempel (Abstrakte vektorrum §7.1)

$$V = \mathbb{R}^{m \times n} = \{m \times n \text{ matricer med indgange fra } \mathbb{R}\}$$
$$V = \mathbf{F}(-\infty, \infty) = \{\text{funktioner } f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$
$$V = \mathbf{P}_n = \{\text{polynomier } p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \text{ hvor } a_i \in \mathbb{R}\}$$

Vi holder os fra abstakte vektorrum!

Vi vil udelukkende fokusere på vektorrummet $V = \mathbb{R}^n$.

Men alt hvad vi skal lære om $\mathbb{R}^n$ (fx underrum, span, lineær uafhængighed, baser, ...) gælder også i et abstrakt vektorrum V.

Underrum

Følgende begreb er helt centralt:

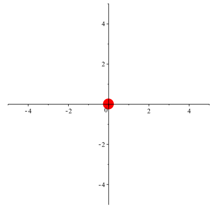
Definition 3.2 (Underrum)

En delmængde $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ kaldes et underrum såfremt:

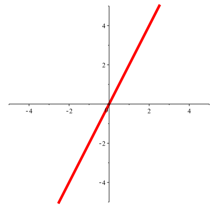
- $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$
- For alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ gælder $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$
- For alle $s \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ gælder $s\mathbf{u} \in \mathcal{U}$

Illustrationer af underrum af $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$

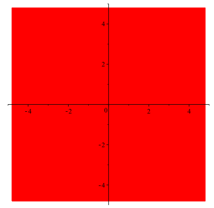
Der er tre typer underrum af $\mathbb{R}^2$:



$\mathcal{U} = \{(0,0)\}$

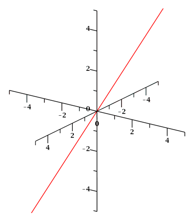


$\mathcal{U} =$ linie gennem $(0,0)$

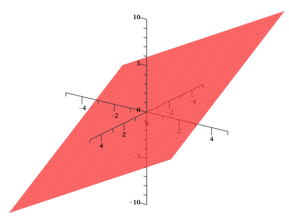


$\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$

Foruden $\mathcal{U} = \{(0,0,0)\}$ og $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$ er der to typer underrum i $\mathbb{R}^3$:



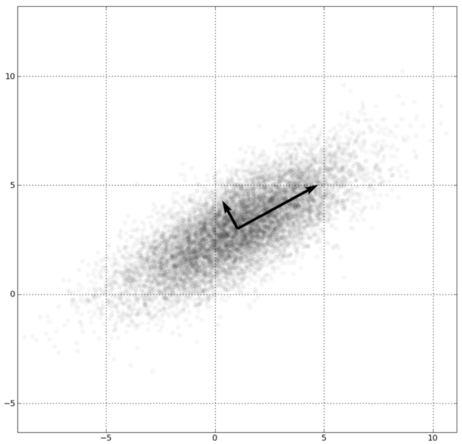
$\mathcal{U} =$ linie gennem $(0,0,0)$



$\mathcal{U} =$ plan gennem $(0,0,0)$

Hvad kan man fx bruge underrum til?

I *Principal Component Analysis (PCA)* tilnærmer man et højdimensional datasæt med et lavdimensionalt underrum.



http://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis

Eksempel (Et underrum af $\mathbb{R}^4$)

Følgende delmængde af $\mathbb{R}^4$ er et underrum:

$$\mathcal{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \;\text{ og }\; x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

En måde at indse dette på er ved at bemærke, at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

- Da $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$ gælder $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$.
- Hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ gælder $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$ og $\mathbf{Av} = \mathbf{0}$. Matrixregning giver
$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$
og dermed gælder $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$.
- Lad $s \in \mathbb{R}$. Hvis $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ gælder $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$. Matrixregning giver
$$\mathbf{A}(s\mathbf{u}) = s\mathbf{Au} = s\mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$
og dermed gælder $s\mathbf{u} \in \mathcal{U}$.

Span

Definition 3.3 (Span af vektorer)

Lad $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$. Sæt

$$\text{span}\,\mathcal{S} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} := \{\, x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k \mid x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R} \,\},$$

dvs. span $\mathcal{S}$ er mængden af alle linearkombinationer af $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.
Man definerer span $\emptyset = \{\mathbf{0}\}$.

Eksempel (Span) 1/3

Betragt i $\mathbb{R}^3$ vektorerne

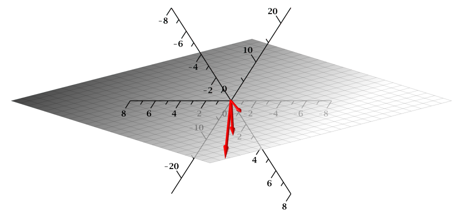
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Vi vil undersøge om vektorerne

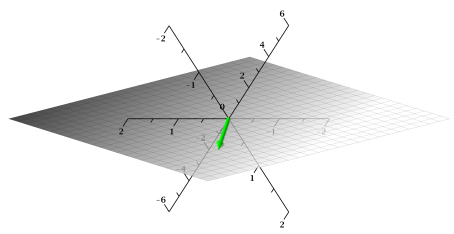
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tilhører mængden span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

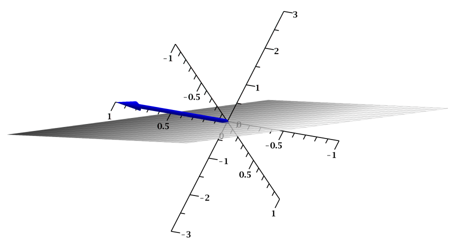
Illustration af eksemplet



$\mathcal{U} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$



$\mathbf{u} \in \mathcal{U}$



$\mathbf{e}_1 \notin \mathcal{U}$

Eksempel (Span) 2/3

Vektoren $\mathbf{u}$ tilhører span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ hvis der findes $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ så

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u} \quad \text{dvs.} \quad x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Dette kan også skrives som

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Vi undersøger om ligningssystemet kan løses:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 7 & 1\\2 & 5 & 8 & 1\\3 & 6 & 9 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -1/3\\0 & 1 & 2 & 1/3\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Der gælder altså fx

$$-\tfrac{1}{3}\mathbf{v}_1 + \tfrac{1}{3}\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}$$

Konklusion: $\mathbf{u} \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ (endda er $\mathbf{u} \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$).

Eksempel (Span) 3/3

Tilsvarende undersøges om vektoren $\mathbf{e}_1$ tilhører span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 7 & 1\\2 & 5 & 8 & 0\\3 & 6 & 9 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Ligningssystemet kan altså *ikke* løses.

Konklusion: $\mathbf{e}_1 \notin \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Eksemplet viser følgende:

Metode til at afgøre om en vektor tilhører et span

Lad $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ og sæt $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_k)$. For en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\mathbf{u}$ tilhører span$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

(ii) Ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u}$ har (mindst) en løsning.

Det nye (i) kan altså "oversættes" til det velkendte (ii).

Theorem 3.2 (Span er et underrum)

Lad $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$. Mængden span $\mathcal{S}$ = span$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er et underrrum af $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.4

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og lad $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ være en endelig delmængde. Man siger, at $\mathcal{S}$ udspænder $\mathcal{U}$ hvis span $\mathcal{S} = \mathcal{U}$.

Eksempel (Tre vektorer der udspænder $\mathbb{R}^3$) 1/2

Vi har set, at vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$$

ikke udspænder $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$ (de udspænder en plan), men det gør faktisk

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Eksempel (Tre vektorer der udspænder $\mathbb{R}^3$) 2/2

Bevis: Vi skal godtgøre, at uanset hvilket $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ man vælger, så har ligningssystemet

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\2 & 5 & 0\\3 & 6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}.$$

mindst en løsning. Det har faktisk en entydig løsning:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 1 & u_1\\2 & 5 & 0 & u_2\\3 & 6 & 0 & u_3\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|r}1 & 0 & 0 & -2u_2 + \frac{5}{3}u_3\\0 & 1 & 0 & u_2 - \frac{2}{3}u_3\\0 & 0 & 1 & u_1 - 2u_2 + u_3\end{array}\right).$$

dvs.

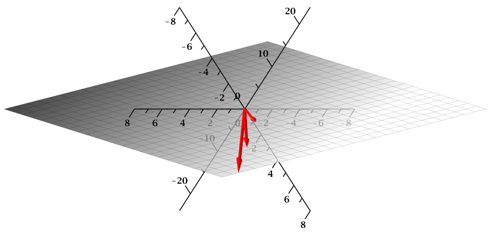
$$x_1 = -2u_2 + \tfrac{5}{3}u_3 \quad , \quad x_2 = u_2 - \tfrac{2}{3}u_3 \quad , \quad x_3 = u_1 - 2u_2 + u_3$$

Bemærkning: Vi har altså span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1\} = \mathbb{R}^3$. Hvis $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ er en vilkårlig vektor, så gælder derfor også span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{w}\} = \mathbb{R}^3$.

Vi har tidligere set, at de tre vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$$

udspænder en ("2-dimensional") plan i $\mathbb{R}^3$:



Dette skyldes, at (fx) $\mathbf{v}_3$ ligger i planen udspændt af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dvs.

$$\mathbf{v}_3 \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

I en vis forstand er $\mathbf{v}_3$ altså "overflødig". I denne situation siges vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ at være lineært afhængige.

Definition 3.5 (Lineær (u)afhængighed)

Et sæt $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ af vektorer i $\mathbb{R}^n$ kaldes lineært uafhængigt hvis den eneste løsning til ligningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

er $x_1 = \cdots = x_k = 0$. I modsat fald kaldes $\mathcal{S}$ for lineært afhængigt.

Eksempel (Lineær (u)afhængighed) 1/3

Vi vil undersøge, om vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$$

er lineært (u)afhængige? Vi skal altså interesse os for løsningerne $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ til ligningen:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad \text{dvs.} \quad x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Eksempel (Lineær (u)afhængighed) 2/3

Dette kan også skrives som

$$\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Udregningen

$$(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\2&5&8&0\\3&6&9&0\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

viser, at ligningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ har mange løsninger, fx

$$\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Konklusion: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ lineært *afhængige*.

Bemærkning: Hvis $\mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$ er en vilkårlig vektor, da er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ også lineært *afhængige* fordi

$$\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Eksempel (Lineær (u)afhængighed) 3/3

Vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

er lineært *uafhængige* fordi udregningen

$$(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c}1&4&0\\2&5&0\\3&6&0\end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

viser, at ligningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ kun har løsningen $x_1 = x_2 = 0$.

Eksemplet viser følgende:

Metode til at afgøre lineær (u)afhængighed

Lad $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ og sæt $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_k)$ (en $n \times k$ matrix). Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) Vektorerne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ er lineært *uafhængige*.

(ii) Ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

En alternativ formulering af metoden er følgende (pga. Theorem 1.6):

Theorem 3.4 (Lineær uafhængighed og rank)

Lad $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ og sæt $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_k)$ (en $n \times k$ matrix). Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) Vektorerne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ er lineært *uafhængige*.

(ii) $\operatorname{rank} \mathbf{A} = k$.

Følgende er en konsekvens af Theorem 3.4 (med $k = n$):

Theorem 3.5 (Lineær uafhængighed og invertibilitet)

Lad $n \times n$ matrix er invertibel hvis og kun hvis søjlerne (eller rækkerne) er lineært *uafhængige*.

En anden konsekvens af Theorem 3.4 er:

Theorem 3.6 (Antallet af lineært uafhængige vektorer)

Hvis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ er lineært uafhængige, da er $k \leqslant n$.

Eksempel (Lineær afhængighed)

Følgende 5 vektorer i $\mathbb{R}^4$ må nødvendigvis være lineært *afhængige*:

$$\begin{pmatrix} 0.96 \\ 0.28 \\ 0.12 \\ 0.27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.56 \\ 0.80 \\ 0.65 \\ 0.96 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.02 \\ 0.35 \\ 0.57 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.62 \\ 0.75 \\ 0.68 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.42 \\ 0.85 \\ 0.19 \end{pmatrix}.$$

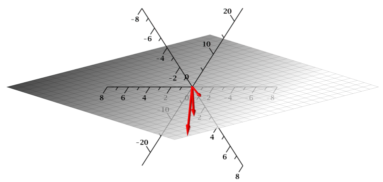
En alternativ karakterisering af lineær (u)afhængighed:

Theorem 3.3 (Lineær afhængighed og span)

Lad $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) Vektorerne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ er lineært *afhængige*.

(ii) Der findes et index i så $\mathbf{v}_i \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k\}$.



$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

Baser

Definition 3.6 (Basis for underrum)

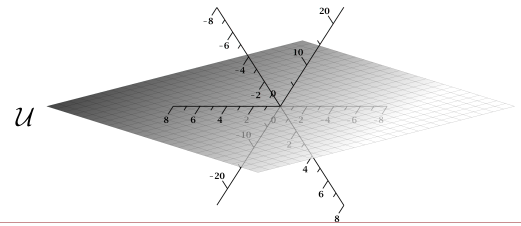
Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. En endelig delmængde af $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ kaldes en basis for $\mathcal{U}$ hvis:

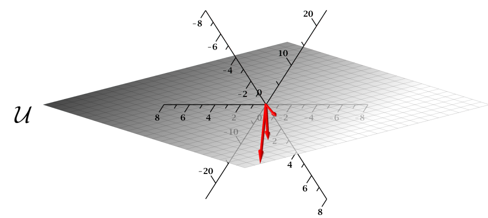
$\mathcal{B}$ er lineært uafhængig og $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathcal{U}$.

Vi har tidligere set, at de tre vektorer

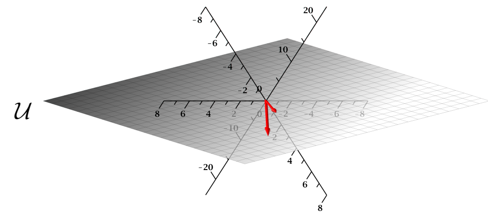
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

udspænder en plan $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ i $\mathbb{R}^3$:

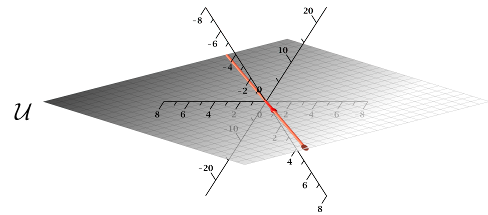




$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$	
Er $\mathcal{B}$ lineært uafh.?	Nej
Er $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathcal{U}$?	Ja
Er $\mathcal{B}$ basis for $\mathcal{U}$?	Nej



$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$	
Er $\mathcal{B}$ lineært uafh.?	Ja
Er $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathcal{U}$?	Ja
Er $\mathcal{B}$ basis for $\mathcal{U}$?	Ja



$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1\}$	
Er $\mathcal{B}$ lineært uafh.?	Ja
Er $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathcal{U}$?	Nej
Er $\mathcal{B}$ basis for $\mathcal{U}$?	Nej

Bemærkninger

Hvad har vi lært?

Antag at vi har givet en endelig delmængde $\mathcal{B}$ af et underrum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Vi har lært metoder til at afgøre:

- Om $\mathcal{B}$ er lineært uafhængig ?
- Om span $\mathcal{B} = \mathcal{U}$?

Og vi kan derfor også afgøre:

- Om $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathcal{U}$?

Hvad mangler vi at lære?

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$.

- Kan vi være sikre på, at $\mathcal{U}$ har en basis ?
- Hvordan finder vi i givet fald en basis $\mathcal{B}$ for $\mathcal{U}$?

Standardbasen for $\mathbb{R}^n$

Faktum (Eksistens af baser)

Ethvert underrum $\mathcal{U}$ af $\mathbb{R}^n$ har en basis.

Hvis $\mathcal{U} \neq \{\mathbf{0}\}$, så har $\mathcal{U}$ endda uendeligt mange forskellige baser.

Underrummet $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ har en særlig pæn basis:

Definition (Standardbasen for $\mathbb{R}^n$)

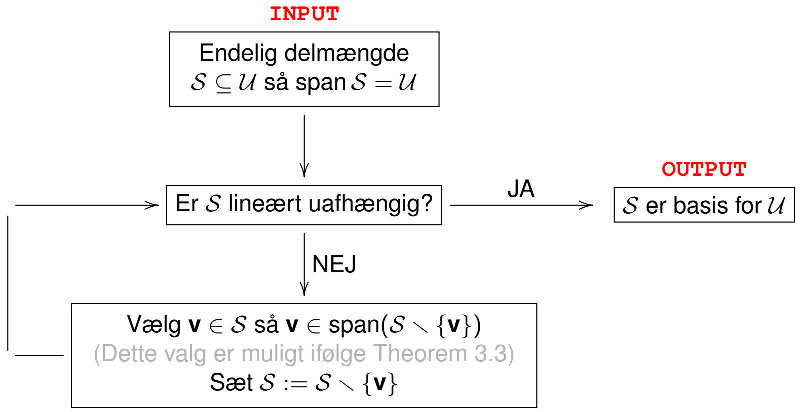
Standardbasen (som *er* en basis!) for $\mathbb{R}^n$ er $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ hvor

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi skal senere lære hvordan man konkret finder baser for diverse typer af underrum af $\mathbb{R}^n$. Vi nævner her to generelle algoritmer, som vi dog ikke vil bruge ud over i denne forelæsning.

Konstruktion af baser: Udtyndingsalgoritmen

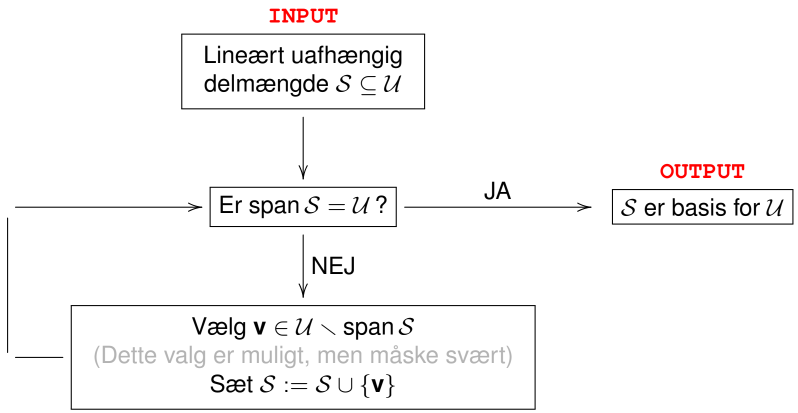
Indholdet af Theorem 3.7(a) er en algoritme til at udtynde en endelig udspændende mængde $\mathcal{S}$ for et underrum $\mathcal{U}$ til en basis:



Vi vil ikke bruge Udtyndingsalgoritmen. Vi vil lære en anden og bedre algoritme til at konstruere en basis for søjlerummet af en matrix.

Konstruktion af baser: Suppleringsalgoritmen

Indholdet af Theorem 3.7(b) er en algoritme til at supplere en lineært uafhængig delmængde $\mathcal{S}$ af et underrum $\mathcal{U}$ til en basis:



Vi vil generelt ikke bruge Suppleringsalgoritmen. Vi giver dog alligevel et enkelt eksempel til at illustrere idéen i algoritmen.

Eksempel (Suppleringsalgoritmen) 1/2

Vi har vist, at følgende er et underrum af $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{U} = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \ \text{ og } \ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \,\}$$

Vi vil bruge Suppleringsalgoritmen til at finde en basis for $\mathcal{U}$.

- **INPUT**: $\mathcal{S} = \emptyset$ er en lineært uafhængig delmængde af $\mathcal{U}$.
- Er $\mathcal{U} = \operatorname{span} \emptyset$?
  NEJ: $\operatorname{span} \emptyset = \{\mathbf{0}\}$ og fx er $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, 0) \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- Sæt $\mathcal{S} = \emptyset \cup \{\mathbf{v}_1\} = \{(1, -1, 1, 0)\}$.
  Er $\mathcal{U} = \operatorname{span} \{(1, -1, 1, 0)\}$?
  NEJ: Fx er $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 1) \in \mathcal{U} \setminus \operatorname{span} \{(1, -1, 1, 0)\}$.
- Sæt $\mathcal{S} = \{(1, -1, 1, 0)\} \cup \{\mathbf{v}_2\} = \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$.
  Er $\mathcal{U} = \operatorname{span} \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$?
  JA: Forklaring følger...

Eksempel (Suppleringsalgoritmen) 2/2

Lad $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{U}$, dvs. der gælder

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

Udregningen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

viser, at samtlige løsninger til ligningssystemet $(*)$ er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Derfor gælder

$$\mathcal{U} = \operatorname{span} \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}\,.$$

- **OUTPUT**: Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$ for $\mathcal{U}$.

Dimension

Antallet af vektorer i en basis for et underrum er entydigt bestemt:

Theorem 3.9 (Om antallet af vektorer i en basis)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Hvis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\} \qquad \text{og} \qquad \mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

begge er baser for $\mathcal{U}$, så er $m = n$.

...og dette antal vektorer er dimensionen af underrummet:

Definition 3.8 (Dimension af underrum)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Antallet af vektorer i en basis for $\mathcal{U}$ kaldes dimensionen af $\mathcal{U}$ og skrives $\dim \mathcal{U}$. Vi definerer $\dim \{\mathbf{0}\} = 0$.

Eksempel (Dimensionen af $\mathbb{R}^n$)

Vektorrummet $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ har en basis med n vektorer, nemlig standardbasen $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, og derfor gælder $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Eksempel (Et 2-dimensionalt underrum af $\mathbb{R}^4$)

Vi har tidligere vist, at

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$$

er en basis (blandt mange mulige) for underrummet

$$\mathcal{U} = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \ \text{ og } \ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \,\}.$$

Da $\mathcal{B}$ indeholder to vektorer, er

$$\dim \mathcal{U} = 2 \qquad (\text{dvs. } \mathcal{U} \text{ er en plan i } \mathbb{R}^4)$$

Hvis dimensionen af et underrum $\mathcal{U}$ er kendt, så er det lettere at afgøre, om en forelagt delmængde $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathcal{U}$.

Theorem 3.10 (Kriterium for at være en basis)

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ med $\dim \mathcal{U} = k$. Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ være en delmængde af $\mathcal{U}$ indeholdende k vektorer.

(a) Hvis $\mathcal{B}$ er lineært uafhængigt, da er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathcal{U}$.

(b) Hvis $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathcal{U}$, da er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathcal{U}$.

Eksempel (Check af basis vha. Theorem 3.10)

Vi har tidligere vist, at der for underrummet

$$\mathcal{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \;\text{ og }\; x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

gælder $\dim \mathcal{U} = 2$. Betragt følgende 2 vektorer:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}\,.$$

For at afgøre om $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er en basis for $\mathcal{U}$, er det ifølge Theorem 3.10 nok at checke, om $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er lineært uafhængige.

Og det er de, fordi udregningen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 \,|\, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}-\text{Jordan}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

viser, at $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 2$, jfr. Theorem 3.4.