高等数学一（II）期末考试答案与评分标准

一、 计算二重积分$\iint_D \frac{|y|}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$为圆环区域$1 \le x^2+y^2 \le 4$ （7 分）

解：使用极坐标变换（1 分），有

$$\iint_D \frac{|y|}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 \frac{|r\sin\theta|}{r^2}\cdot r\mathrm{d}r \text{（3 分）}$$

$$= \int_0^{2\pi}|\sin\theta|\mathrm{d}\theta\int_1^2 1\,\mathrm{d}r \text{(1 分)}$$

$$= 4\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\times r|_1^2 \text{(对称性，1 分)}$$

$$= 4\times 1\times 1 = 4 \text{(1 分)}$$

注：本题最有可能犯的错误即“滥用对称性导致本题积分为 0，或极坐标变换后不慎去掉绝对值导致结果为 0”，此类错误根据过程的准确度给予 2-5 分（如果进行了极坐标变换可给予更多分数）。

二、 计算第二型曲面积分$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$是曲面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧（7 分）

解：本题鼓励利用高斯公式简化计算的方法：因曲面S为球面，故记曲面及其内部闭区域为$\Omega = x^2+y^2+z^2 \le R^2$.然后由高斯公式，有

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_\Omega \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial(y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(z^3)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega 1+2y+3z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{（2 分）}$$

$$= \iiint_\Omega 1+3z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{（对称性，1 分）}$$

$$= \int_{-R}^{R}(1+3z^2)\cdot S_z\,\mathrm{d}z$$（这里用平面截割法，$z=z_0$时，截割部分为$x^2+y^2 \le R^2-z^2$,面积$\pi(R^2-z^2)$）

$$= \int_{-R}^{R}(1+3z^2)\cdot\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z \text{（2 分）}$$

$$= \pi\int_{-R}^{R}R^2+(3R^2-1)z^2-3z^4\,\mathrm{d}z$$

$$= \pi\left[R^2z+R^2z^3-\frac{1}{3}z^3-\frac{3}{5}z^5\right]\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3+\frac{4}{5}\pi R^5 \text{（2 分）}$$

注：(1)三重积分也可以用投影法，或将两部分分离，利用球的体积计算 1 的三重积分，可以根据正确情况对应给分，三重积分部分共 4 分。

(2)若考生没有使用高斯公式，那么三个部分的计算分别价值2,2,3分，可以根据考生实际运算情况给分。

三、 计算曲线积分$\int_L x\,\mathrm{d}s$，其中L为抛物线段$y=\frac{x^2}{2}, 0\le x\le 1$（7 分）

解： 本题可以直接进行求解，注意到抛物线段即$y=\frac{x^2}{2}, 0\le x\le 1$,满足

$\sqrt{1+y'^2(x)} = \sqrt{1+x^2}$（2 分）,故

$$\int_L x\,\mathrm{d}s = \int_0^1 x\cdot\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$ （2 分）

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}(1+x^2)$$ (1 分)

$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$ (1 分)

$$= \frac{1}{3}\times(2\sqrt{2}-1) = \frac{(2\sqrt{2}-1)}{3}$$ (1 分)

四、 已知微分方程$(x^3+ax^2y+xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+bx^2y)\mathrm{d}y=0$为全微分方程, 求$a,b$的值并求方程通积分 （7 分）

解：该方程为全微分方程当且仅当$\frac{\partial(x^3+ax^2y+xy^2)}{\partial y}=\frac{\partial(x^3+bx^2y)}{\partial x}$恒成立（2 分），即

$ax^2+2xy=3x^2+2bxy$,对应后易得$a=3,b=1$.（2 分, 两个值各 1 分）

原方程化为$(x^3+3x^2y+xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+x^2y)\mathrm{d}y=0$

使用简单凑微分方法，有

$$(x^3+3x^2y+xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+x^2y)\mathrm{d}y$$
$$= x^3\mathrm{d}x+(3x^2y\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y)+(xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y)$$
$$= \mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}+x^3y+\frac{x^2y^2}{2}\right)$$ (2 分, 部分错项的可扣 1 分）

因此，可得该全微分方程的通积分为:

$$\frac{x^4}{4}+x^3y+\frac{x^2y^2}{2}=C$$ （1 分）

注：(1)确定a,b后，原函数的获取还有两种不同的方法，可以根据对应步骤分配剩余的 3 分。

(2) 考生如果无法求出a,b而去硬算原函数的，根据其思想和过程可以给予不超过 4 分的总分数。

五、 求微分方程$y''-y=\mathrm{e}^{-x}+\sin x$的通解 (7 分)

解：先考虑对应齐次线性方程$y''-y=0$,其特征方程$\lambda^2-1=0$对应两个特征根$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$（1 分）

因此对应齐次方程的通解为$\tilde{y}=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$,（1 分）

考虑非齐次方程$y''-y=\mathrm{e}^{-x}$, 因为-1是特征根，其特解$y_1^*=Ax\mathrm{e}^{-x}$,（1 分）

代入该方程后有$y_1^{*}{}''-y_1^*=-2A\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$, 可得$A=-\frac{1}{2}$,故$y_1^*=-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}$. （1 分）

再考虑非齐次方程$y''-y=\sin x$，因为$\pm i$不是特征根，其特解为$y_2^*=B\cos x+C\sin x$,（1 分）

代入该方程后有$y_2^{*}{}''-y_2^*=-2B\cos x-2C\sin x=\sin x$，可得$B=0,C=-\frac{1}{2}$，故$y_2^*=-\frac{1}{2}\sin x$. （1 分）

综上，原微分方程通解$y=\tilde{y}+y_1^*+y_2^*=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$. （1 分）

六、 判断数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$的敛散性, 并指明其为绝对收敛还是条件收敛. (8 分)

解：本级数为交错级数，其通项绝对值$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$关于$n$单调递减（因为$\frac{1}{\sqrt{n}}$单调递减，$\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$单调递减）（2 分），

且$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$. （1 分）由莱布尼茨（或狄利克雷）判别法可证该级数收敛。（1 分）

另一方面，注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\left(令\frac{1}{\sqrt{n}}=u\right)=1$$ （2 分）

由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$同敛散性，故发散.（1 分）

因此，本题级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$条件收敛.（1 分）

注：本题的无穷小比阶的方法并不唯一，如果采用其他方法计算出极限亦可以获得满分。关于$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$的单调性，考生可以不做详细的论证。因为其单调性比较直接和浅显。

七、 证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$收敛，并利用该结论判断函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}(2-\frac{1}{nx})$在$x\in[1,+\infty)$的一致收敛性(8 分)

解：首先，因为$\sin n$的部分和序列$|\sum_{k=1}^{n}\sin k|\le\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$为有界序列（可以不详细论证，1 分），且$\frac{1}{n}$关于$n$单调下降并且趋于0（1 分）,由狄利克雷判别法，知数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$收敛（1 分），

因为其与x无关，因此作为函数项级数在$\in[1,+\infty)$一致收敛（1 分）

另一方面，注意到$\forall x\in[1,+\infty)$，$(2-\frac{1}{nx})$关于n单调递增，且$\left|2-\frac{1}{nx}\right|\le 2$，即$2-\frac{1}{nx}$在$x\in[1,+\infty)$单调且一致有界（2 分），由阿贝尔判别法，可得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}(2-\frac{1}{nx})$在$x\in[1,+\infty)$一致收敛（2 分）

注：（1）本题的证明核心为一致收敛性，因此在使用阿贝尔判别法前，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$关于$x\in[1,+\infty)$的一致收敛性与$2-\frac{1}{nx}$的一致有界性，需要强调“一致”的概念，未能确切强调一致性的可以酌情扣 1 分。

（2）作为非正函数的级数，是一定不可以使用比较判别法的，但凡通过比较判别法来说明函数项级数一致收敛的，本题总得分不得超过 5 分。

八、 计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n$的收敛域与和函数（8 分）

解：首先由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$$

知收敛半径$R=2$,（也可以通过直接计算$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^n}}{\frac{n+2}{2^{n+2}}}\right|=2$得到收敛半径$R=2$，2 分）

当$x=\pm2$时，级数一般项$\frac{n+1}{2^n}(\pm2)^n\nrightarrow 0$，因此级数发散，可得幂级数的收敛域为$x\in(-2,2)$（2 分）

注意到收敛区间内，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\right)'=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n-\frac{x}{2}-1\right)'\quad（2 分）$$

$$=2\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}-1\right)'=2\left(\frac{2}{2-x}-\frac{x}{2}-1\right)'\quad（1 分）$$

$$=\frac{4}{(2-x)^2}-1\quad（1 分）$$

注：本题的易错点是求导前漏掉减去一次项和常数项，如果仅犯这个错误本题可得 7 分。如果是仅出现求和过程中的倍数错误同样本题可以得到 7 分。

九、 计算$\ln(1-2x-3x^2)$ 在$x=0$处的幂级数展开式，并指出收敛域　（8 分）

解：首先注意到$\ln(1-2x-3x^2)$的定义域为$x\in(-1,\frac{1}{3})$,(可以不写这一步)

注意到 $\ln(1-2x-3x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-3x)$（2 分）

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-3x)^n \text{（2 分）}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}[1-(-3)^n]}{n}x^n \text{（1 分）}$$

对于两个泰勒展开式，$\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$收敛域为$x\in(-1,1]$

$\ln(1-2t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-3x)^n$收敛域为$-3x\in(-1,1]$，即$x\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

两个收敛域半径不同，故$\ln(1-2x-3x^2)$的收敛域为两者交集，即$x\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$（3 分）

注：(1)本题的收敛域当然也可以通过传统的幂级数收敛半径与端点处收敛情况确定，使用该方法如果出现端点开闭区间判断错误，每判断错一个端点将扣掉 1 分，收敛半径价值 1 分。
（2）幂级数的最终形式必须为$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,如果考生所求幂级数不是$x=0$处的幂级数，则本题得分不得超过 4 分。

十、 判断广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}\mathrm{d}x$的敛散性　（8 分）

解：本题目所述积分在$x=1$处显然为瑕点，因此需要分为两部分广义积分

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}\mathrm{d}x$与$\int_1^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}\mathrm{d}x$进行判别

对于$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}\mathrm{d}x$，因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}}{\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}}=1 \text{（2 分）}$$

故$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}\mathrm{d}x$与$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\mathrm{d}x$敛散性相同，故收敛（1 分）

而对于瑕积分$\int_1^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}\mathrm{d}x$,因为

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}}{\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}}=1 \text{（2 分）}$$

故$\int_1^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}\mathrm{d}x$与$\int_1^{2}\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x$敛散性相同,故收敛（1 分）

因为两部分广义积分均收敛，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}\mathrm{d}x$收敛（2 分）

十一、 求$g(y)=\int_{-y^2}^{e^y}\cos(y+x^2)\,dx, -\infty<y<+\infty$的导函数（8 分）

解： $g'(y)=\cos(y+(e^y)^2)\cdot(e^y)'-\cos(y+(-y^2)^2)\cdot(-y^2)'+\int_{-y^2}^{e^y}\frac{\partial\cos(y+x^2)}{\partial y}dx$ （2 分）

$=e^y\cdot\cos(y+e^{2y})+2y\cdot\cos(y+y^4)-\int_{-y^2}^{e^y}\sin(y+x^2)\,dx$

(6 分, 三项中的每一项各 2 分，如果每一项有符号错误或部分计算错误，相应项对应得 1 分)

注：（1）若考生直接写出本题答案，答案正确也可得到满分 8 分，如果出现错误，三项按照（2+3+3）进行分数分配，根据错误的程度给予实际得分）。

（2）若考生在得到最后一项变限积分后对其进行进一步的运算，不论步骤结果如何不扣分。

十二、 证明：含参瑕积分$g(y)=\int_0^1 x^y\,dx$在$y\in[-\frac{1}{2},0]$一致收敛，并利用此结论，计算积分$\int_0^1\frac{x-\sqrt{x}}{x\cdot\ln x}dx$（8 分）

证：注意到含参瑕积分$\int_0^1 x^y\,dx$的唯一瑕点为$x=0$

$\forall(x,y)\in(0,1]\times\left[-\frac{1}{2},0\right]$,$|x^y|\le x^{-\frac{1}{2}}$(1 分)，而$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$收敛(1 分)，由 M 判别法知$\int_0^1 x^y\,dx$在$y\in[-\frac{1}{2},0]$一致收敛.(1 分)

对于积分$\int_0^1\frac{x-\sqrt{x}}{x\cdot\ln x}dx$， $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-\sqrt{x}}{x\cdot\ln x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$,因此$x=1$不是瑕点，

但因为$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\sqrt{x}}{x\cdot\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=+\infty$,因此$x=0$为瑕点，但由$x$足够大时

$$\left|\frac{x-\sqrt{x}}{x\cdot\ln x}\right|\le\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

再由比较判别法，可证瑕积分是收敛的。（根据定理描述，这段橙色部分分析不写也不扣分）

注意到$\forall x\in(0,1)$,$\frac{x-\sqrt{x}}{x\cdot\ln x}=\frac{x^0-x^{-\frac{1}{2}}}{\ln x}=\int_{-\frac{1}{2}}^0 x^y\,dy$(1 分),

对于另一个积分方向，$\int_0^1 x^y\,dx$为含有参数$y\in[-\frac{1}{2},0]$的瑕积分，瑕点为$x=0$，显然x^y在$(0,1]\times\left[-\frac{1}{2},0\right]$连续,

且$\int_0^1 x^y\,dx$在$y\in[-\frac{1}{2},0]$一致收敛，故积分可以交换次序. (1 分)

然后有：

$$\int_0^1\frac{x-\sqrt{x}}{x\cdot\ln x}dx=\int_0^1\int_{-\frac{1}{2}}^0 x^y\,dy\,dx$$

$=\int_{-\frac{1}{2}}^0\int_0^1 x^y\,dx\,dy$（1 分） $=\int_{-\frac{1}{2}}^0\frac{1}{y+1}dy$（1 分）

$=\ln(y+1)|_{-\frac{1}{2}}^0=\ln 1-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$ （1 分）

注： （1）本题在交换次序前，除注明之前证明的一致收敛性结果外，也应注明x^y的连续性，没有注明连续性而直接交换积分次序的，可以扣掉 1 分。

（2）除交换积分次序的分析外，本题第二问计算推导过程总价值为 4 分。被积函数分析与化为二次积分 1 分，积分交换次序 1 分，内层积分计算 1 分，外层积分计算得到最终结果 1 分。

十三、　设函数$f(x)$以 2π为周期并满足$f(x)=\begin{cases}1, x\in[0,\pi]\\ x, x\in(-\pi,0)\end{cases}$，求出$f(x)$的傅里叶级数及其和函数。(9 分)

解：被积函数以2π为周期，记$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$，（1 分）

而后，有$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}1\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}x\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\pi}\left[\pi-\frac{\pi^2}{2}\right]=1-\frac{\pi}{2}$，（1 分）

$n>0$ 时，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}x\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x\right]$

$=\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\dfrac{x\cdot\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\dfrac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}\right]=\dfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$ （2 分）

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}x\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$

$=\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\dfrac{-x\cdot\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\dfrac{\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}\right]=\dfrac{1-(-1)^n-(-1)^n\cdot\pi}{n\pi}=\dfrac{1-(-1)^n(1+\pi)}{n\pi}$ （2 分）

故$f(x)\sim\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\dfrac{1-(-1)^n(1+\pi)}{n\pi}\sin nx$ （1 分）

因为周期函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$分段连续且分段单调，因此傅里叶级数在$(-\infty,+\infty)$点点收敛，注意到当$x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$处为$f(x)$间断点，函数收敛到$f(x)$的左右极限平均值，故

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{1-(-1)^n(1+\pi)}{n\pi}\sin nx=\begin{cases}f(x), & (k-1)\pi<x<k\pi\\ \frac{1}{2}, & x=2k\pi\\ \frac{1-\pi}{2}, & x=(2k+1)\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z},$$

（和函数共 2 分，其中每分析对一个间断点得 1 分，和函数表达式上面的文字分析可以不写）