中山大学本科生期末考试
考试科目:《高等量子力学》(A 卷)

学年学期:	2020 学年第 1 学期	姓　　名:	
学　　院:	物理学院	学　　号:	
考试方式:	闭卷	年级专业:	物理 18 级, 研 20 级等
考试时长:	120 分钟	班　　别:	

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:"考试作弊者,不授予学士学位."

————以下为试题区域,共三道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答————

一、选择与填空题 (共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分.)

1. Schrödinger 方程 $\mathrm{i}\hbar\partial\psi/\partial t = H\psi$ ① 只适用于非相对论量子力学. ② 可适用于一般微观体系,只是需要找到适当的 H.

2. 全同粒子无法区分,是因为 ① 它们本质上就是不可区分的. ② 目前的实验技术还不够精密.

3. 设矢量算符 $\boldsymbol{A}$ 与轨道角动量算符 $\boldsymbol{L}$ 满足对易关系 $[L_i, A_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}A_k$ (默认对重复指标求和). $\{\boldsymbol{L}^2, L_z\}$ 的共同本征态是 $|lm\rangle$,本征值是 $\{l(l+1)\hbar^2, m\hbar\}$,则 $A_z|lm\rangle$ ① 也是 ② 不是 L_z 的本征态,如果也是,则其本征值为 _______. $A_z|lm\rangle$ ① 也是 ② 不是 $\boldsymbol{L}^2$ 的本征态,如果也是,则其本征值为 _______.

4. 接上题,令 $A_\pm = A_x \pm \mathrm{i}A_y$,则 $A_\pm|lm\rangle$ ① 也是 ② 不是 L_z 的本征态,如果也是,则其本征值为 _______.

5. 设三维各向同性谐振子的初态为 Gauss 波包,则在随后的演化中, ① 波包的形状可能经历复杂的变化,但不会扩散. ② 如果初态波包的中心和宽度不恰当,则可能扩散.

6. 氢原子的 Coulomb 势为 $-e^2/r$,该体系比一般中心力场具有更高的对称性. 下列变化哪个会破坏这一对称性? ① 改变分母上 r 的幂次为 $r^{1+\delta}$,其中 $\delta \ll 1$. ② 改变系数 e^2 为 Ze^2,其中 $Z > 0$.

7. 静磁场中的 Schrödinger 方程是 $\mathrm{i}\hbar\partial\psi/\partial t = -(\hbar^2/2\mu)\left(\nabla - \mathrm{i}q\boldsymbol{A}/\hbar\right)^2\psi$. 使得方程形式保持不变的规范变换是 $\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\Lambda(\boldsymbol{x})/\hbar}\psi$ 以及 ① $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \nabla\Lambda(\boldsymbol{x})$ ② $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda(\boldsymbol{x})$.

8. 设 U_I 是空间反演算符,$\boldsymbol{L}$ 是轨道角动量算符,则 ① $U_\mathrm{I}\boldsymbol{L}U_\mathrm{I} = -\boldsymbol{L}$ ② $U_\mathrm{I}\boldsymbol{L}U_\mathrm{I} = \boldsymbol{L}$.

9. Dirac 方程与 Klein–Gordon 方程的关系是 ① Klein–Gordon 方程更基本. ② Dirac 方程更基本. ③ 两者描述不同自旋的粒子,其地位是平等的.

10. 在 Lorentz 变换 $x \to x' = ax$ 下,Dirac 场 $\psi(x)$ 的变换矩阵满足 $\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu$,如果 $a = \mathrm{diag}(1, -1, -1, 1)$,则 $\Lambda =$ __________.

二、计算题之一 (共 2 小题,各小题分数依次为 5、10 分,共 15 分.) 设粒子的 Hamilton 算符是 H,E_1 和 E_2 是其不同的本征值,相应的本征矢量是 φ_1 和 φ_2,均已归一化. F 是守恒量,即满足 $\partial F/\partial t = 0$ 和 $[F, H] = 0$. 态矢量 $\psi(t)$ 的初态是 $\psi(0) = 3\varphi_1 + 4\varphi_2$.

1. 试求出 $\psi(t)$.

2. 试求出 F 在 $\psi(t)$ 中的期望值，并写出 $F=H$ 时的结果.

三、计算题之二 (共 4 小题，各小题分数依次为 10、15、5、5 分，共 35 分.) 一体系的 Hamilton 算符为 $H=\varepsilon(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)+\varepsilon'(a_1^\dagger a_2^\dagger+a_1a_2)$，其中 a_1、a_2 为算符，$a_1^\dagger$、$a_2^\dagger$ 是其 Hermite 共轭，满足 $[a_i,a_j^\dagger]=\delta_{ij}\ \ (i,j=1,2)$，其余对易关系为 0，$\varepsilon$、$\varepsilon'$ 均为实数，$\varepsilon>0$，$|\varepsilon'|<\varepsilon$.

1. 作变换 $b_1=a_1\cosh\xi+a_2^\dagger\sinh\xi$，$b_2=a_1^\dagger\sinh\xi+a_2\cosh\xi$，其中 $\xi\in\mathbb{R}$ (Bogliubov 变换)，求 b_1、b_2、$b_1^\dagger$、$b_2^\dagger$ 间的对易关系.

2. 求出反变换，并将 H 用 b_1、b_2、$b_1^\dagger$、$b_2^\dagger$ 表出.

3. 求 ξ 使 H 只包含 $b_i^\dagger b_i$ 项，并给出化简后的 H (必须消去 ξ).

4. 给出该体系的能级.