SFET数理モデル - 詳細方程式系

1. 基礎方程式系

1.1 マントル流動の支配方程式

ナビエ・ストークス方程式（高粘性近似）

```
−∇p + μ∇²v + ρg(1 − αΔT) + F_tide + F_coriolis = 0
```

ここで：

- μ: 動粘性係数 (10^19 - 10^21 Pa·s)
- α: 熱膨張係数 (3×10^-5 K^-1)
- F_tide: 潮汐力 = -ρ∇Φ_tide
- F_coriolis: コリオリ力 = -2ρΩ×v

熱輸送方程式（放射性崩壊項付き）

```
∂T/∂t + v·∇T = κ∇²T + H/ρCp + Φ_viscous/ρCp
```

- H: 放射性発熱率 (U, Th, K崩壊)
- Φ_viscous: 粘性散逸 = τ:∇v

1.2 地殻の構成方程式

粘弾性構成則（Maxwell型）

```
σ = 2G(ε − εp) + λtr(ε)I
dεp/dt = (σ − σy)/η  (when |σ| > σy)
```

- G: 剛性率 (30-50 GPa)
- λ: ラメ定数
- σy: 降伏応力（深度・温度依存）
- η: 粘性係数（温度依存）

破壊条件（修正Coulomb則）

```
τ = c + μf(σn − pf)
```

- c: 粘着力
- μf: 摩擦係数
- pf: 間隙流体圧

2. 結合条件

2.1 地殻-マントル境界（モホ面）

運動学的条件

```
v_crust|_moho = v_mantle|_moho
```

力学的条件

```
σ_crust·n|_moho = σ_mantle·n|_moho
```

熱的条件

```
−k_crust∇T·n|_moho = −k_mantle∇T·n|_moho
q_moho = q_basal + L_latent(dm/dt)
```

2.2 表面境界条件

応力条件

```
σ·n|_surface = −p_atm − ρ_water g h_water (海底)
σ·n|_surface = −p_atm (陸上)
```

変位速度（GPS観測との整合）

```
v_surface = v_GPS + v_elastic + v_viscous
```

3. 外部駆動力の定式化

3.1 潮汐ポテンシャル

```
Φ_tide = Σ(Gm_i/r_i)[1 + Σ P_n(cos θ)(R/r_i)^n]
```

主要項：

- 月: 半日周期 M2 (12.42時間)
- 太陽: 半日周期 S2 (12.00時間)

3.2 自転効果

```
Ω_earth = 7.27×10^-5 rad/s
遠心力: F_centrifugal = ρΩ²r sin²θ
```

4. 特徴的無次元数

4.1 レイリー数（熱対流の強さ）

```
Ra = ρgαΔTD³/κμ ≈ 10^6 - 10^7
```

4.2 エクマン数（粘性/コリオリ力比）

```
Ek = ν/ΩD² ≈ 10^-13
```

4.3 プラントル数（動粘性/熱拡散比）

```
Pr = ν/κ ≈ 10^23
```

5. 数値解法スキーム

5.1 時間積分

- マントル流動: 陰的後退オイラー法

- 地殻変形: 適応的時間刻み陽解法

5.2 空間離散化

- 有限要素法（四面体/六面体要素）
- スペクトル要素法（高次精度）

5.3 並列化戦略

- 領域分割法
- マルチグリッド前処理

6. 観測量との対応

6.1 地表変位速度

```
v_obs = ∫∫∫ G(x,x') : σ(x') dV'
```

G: グリーン関数テンソル

6.2 重力異常

```
Δg = -∇Φ = -G∫∫∫ Δρ(x')/|x-x'| dV'
```

6.3 地震波速度構造

```
δv/v = ∂lnv/∂T · δT + ∂lnv/∂P · δP + ∂lnv/∂X · δX
```

7. 解析解（単純化モデル）

7.1 定常マントル流（2次元）

```
ψ = A sin(πx/L) sin(πz/D)
vx = ∂ψ/∂z, vz = -∂ψ/∂x
```

7.2 地殻の弾性変形

```
u = (F/4πGr)[1 + r/2L]exp(−r/L)
```

L: 弾性リソスフェア厚さ

8. パラメータ推定

ベイズ推定による逆問題：

```
P(m|d) ∝ P(d|m)P(m)
```

- m: モデルパラメータ
- d: 観測データ
- MCMC法による事後分布推定