Analyse Mathématique

Cours n°4

EPITA Cyber 1 2024-2025

1 Limite d'une suite :

1.1 Introduction et définition de la limite d'une suite :

- Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2.$$

On a donc, $u_{10} = 100 \quad ; \quad u_{100} = 10000 \quad ; \quad u_{1000} = 1000000 \quad ; \cdots ; \quad u_{10^k} = 10^{2k}$.
On remarque que u_n devient de plus en plus grand dès que n devient de plus en plus grand.

En fait, u_n est aussi grand qu'on veut dès que n est assez grand :
$u_n > 10000$ dès que $n \geq 101$. ($n \geq 101$, alors $n > 100$ par suite $n^2 > 10000$).

D'une manière générale, soit $A > 0$, un réel aussi grand qu'on veut.
$u_n > A$ dès que $n \geq [\sqrt{A}] + 1$ où $[\sqrt{A}]$ est la partie entière de $\sqrt{A}$ (le plus grand entier inférieur ou égale à $\sqrt{A}$).
En effet, si $n \geq [\sqrt{A}] + 1$ alors $n^2 \geq ([\sqrt{A}] + 1)^2 > A$.

- **Définition :**
On dit que la suite (u_n) tend vers l'infini, **diverge vers l'infini**, quand n tend vers l'infini si
pour tout réel $A > 0$, il existe un entier n_A tel que pour tout entier $n \geq n_A$ on a $u_n > A$

$$\forall A > 0 \quad , \quad \exists n_A \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_A \quad , \quad u_n > A.$$

Et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

(L'entier n_A dépend de A et de la suite u).

- D'après la définition précédente (pour $n_A = [\sqrt{A}] + 1$).

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$$

- Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -n^2.$$

  On a donc, $u_{10} = -100$; $u_{100} = -10000$; $u_{1000} = -1000000$;$\cdots$; $u_{10^k} = -10^{2k}$.

  On remarque que u_n devient de plus en plus grand **en valeur absolue** dès que n devient de plus en plus grand.

  En fait, u_n est aussi grand, en valeur absolue, qu'on veut dès que n est assez grand :

  $u_n < -10000$ dès que $n \geq 101$. ($n \geq 101$, alors $n > 100$ par suite $-n^2 < -10000$).

  D'une manière générale, soit $A > 0$, un réel aussi grand qu'on veut.

  $u_n < -A$ dès que $n \geq [\sqrt{A}] + 1$.

  En effet, si $n \geq [\sqrt{A}] + 1$ alors $n^2 \geq ([\sqrt{A}] + 1)^2 > A$. Par suite $-n^2 < -A$.

- **Définition :**

  On dit que la suite (u_n) tend vers moins l'infini, **diverge vers moins l'infini**, quand n tend vers l'infini

  si

  pour tout réel $A > 0$, il existe un entier n_A tel que pour tout entier $n \geq n_A$ on a $u_n < -A$

$$\forall A > 0 \quad , \quad \exists n_A \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_A \quad , \quad u_n < -A.$$

  Et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

- D'après la définition précédente (pour $n_A = [\sqrt{A}] + 1$).

$$\lim_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$$

- Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}.$$

  On a donc, $u_{10} = 0,1$; $u_{100} = 0,01$; $u_{1000} = 0,001$;$\cdots$; $u_{10^k} = 10^{-k}$.

  On remarque que u_n devient de plus en plus petit dès que n devient de plus en plus grand.

  En fait, u_n est aussi petit qu'on veut dès que n est assez grand :

  $u_n < 0,1$ dès que $n \geq 11$. ($n \geq 11$, alors $n > 10$ par suite $\frac{1}{n} < 0,1$).

  D'une manière générale, soit $\epsilon > 0$, un réel aussi petit qu'on veut.

  $u_n < \epsilon$ dès que $n \geq [\frac{1}{\epsilon}] + 1$.

  En effet, si $n \geq [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ alors $n > \frac{1}{\epsilon}$. Par suite $\frac{1}{n} < \epsilon$.

- **Définition :**

  On dit que la suite (u_n) tend vers zéro, **converge vers zéro**, quand n tend vers l'infini si

  pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier n_ϵ tel que pour tout entier $n \geq n_\epsilon$ on a $-\epsilon < u_n < \epsilon$

$$\forall \epsilon > 0 \quad , \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad , \quad -\epsilon < u_n < \epsilon.$$

  Et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

  (L'entier n_ϵ dépend de ϵ et de la suite u).

- Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3 + \frac{1}{n}.$$

  On a donc, $u_{10} = 3,1 \quad ; \quad u_{100} = 3,01 \quad ; \quad u_{1000} = 3,001 \quad ; \cdots ; \quad u_{10^k} = 3 + 10^{-k}$.
  D'où, $u_{10} - 3 = 0,1 \quad ; \quad u_{100} - 3 = 0,01 \quad ; \quad u_{1000} - 3 = 0,001 \quad ; \cdots ; \quad u_{10^k} - 3 = 10^{-k}$.
  On remarque que $u_n - 3$ devient de plus en plus petit dès que n devient de plus en plus grand.

  En fait, $u_n - 3$ est aussi petit qu'on veut dès que n est assez grand :
  $u_n - 3 < 0,1$ dès que $n \geq 11$.
  Car, $n \geq 11$, alors $n > 10$ par suite $\frac{1}{n} < 0,1$; d'où $u_n - 3 < 0,1$)

  D'une manière générale, soit $\epsilon > 0$, un réel aussi petit qu'on veut.
  $u_n < \epsilon$ dès que $n \geq [\frac{1}{\epsilon}] + 1$.
  En effet, si $n \geq [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ alors $n > \frac{1}{\epsilon}$. Par suite $\frac{1}{n} < \epsilon$. D'où $u_n - 3 < \epsilon$.

- **Définition :**

  Soit $l \in \mathbf{R}(=]-\infty, +\infty[)$.
  On dit que la suite (u_n) tend vers l, **converge vers** l, quand n tend vers l'infini si

  pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier n_ϵ tel que
  pour tout entier $n \geq n_\epsilon$ on a $-\epsilon < u_n - l < \epsilon$

$$\forall \epsilon > 0 \quad , \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad , \quad -\epsilon < u_n - l < \epsilon.$$

  Et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

- Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n.$$

On a donc, $u_{10} = 1 \quad ; \quad u_{11} = -1 \quad ; \quad u_{1000} = 1 \quad ; \quad u_{1001} = -1.$

Quand n devient de plus en plus grand, on ne pourra pas dire si u_n est égale à $+1$ ou -1 !

Donc, la suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

- **Définition :**

On dit que la suite (u_n) est **divergente** quand elle n'a pas de limite.

- **Remarque (Une précision) :**

On a des suites divergentes vers plus l'infini, des suites divergentes vers moins l'infini et des suites divergentes (sans limite).

1.2 Limite de suites de référence :

1.
$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

On pose :
$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = n.$$
On a donc, $u_{10} = 10 \quad ; \quad u_{100} = 100 \quad ; \quad u_{1000} = 1000 \quad ; \cdots ; \quad u_{10^k} = 10^k.$

On remarque u_n devient aussi grand qu'on veut dès que n est assez grand :
en effet, soit $A > 0$. Alors, il existe $n_A \in \mathbb{N}$; si $n \geq n_A$ alors $u_n > A$.
Il suffit de prendre $n_A = [A] + 1$.
En effet, si $n \geq n_A$. Comme $n_A > A$, alors $n > A$. D'où $u_n > A$.
Donc
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

2.
$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$$
Déjà vu précédemment ! $(n_A = [\sqrt{A}] + 1)$.

3.
$$\lim_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$$

On pose :
$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = n^3.$$

On a donc, $u_{10} = 1000 \quad ; \quad u_{100} = 1000000 \quad ; \quad u_{1000} = 1000000000 \quad ; \cdots ; \quad u_{10^k} = 10^{3k}$.

On remarque u_n devient aussi grand qu'on veut dès que n est assez grand.
Soit $A > 0$. Alors $\cdots n_A = [A^{\frac{1}{3}}] + 1$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\lim_{n \to +\infty} n^k = +\infty$$
$(n_A = [A^{\frac{1}{k}}] + 1)$.

5.
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

On pose :
$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \sqrt{n}.$$
On a donc, $u_{100} = 10 \quad ; \quad u_{10000} = 100 \quad ; \quad u_{1000000} = 1000 \quad ; \cdots ; \quad u_{10^k} = 10^{k/2}$.

On remarque u_n devient aussi grand qu'on veut dès que n est assez grand :
Soit $A > 0$. Alors, il existe $n_A \in \mathbb{N}$; si $n \geq n_A$ alors $u_n > A$.
Il suffit de prendre $n_A = [A^2] + 1$.
En effet, si $n \geq n_A$. Comme $n_A > A^2$, alors $n > A^2$. D'où $\sqrt{n} > A$.
Donc
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

6.
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$
Déjà vu précédemment ! $(n_\epsilon = [\frac{1}{\epsilon}] + 1)$.

7.
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$
$(n_\epsilon = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{2}}] + 1)$.

8.
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$
$(n_\epsilon = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{3}}] + 1)$.

9. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

$(n_\epsilon = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{k}}] + 1)$.

10.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$(n_\epsilon = [(\frac{1}{\epsilon})^2] + 1)$.

11.

$$\lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$$

$(n_A = [\ln(A)] + 1)$.

12.

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$$

$(n_A = [e^A] + 1)$.

- **Tableau des vitesses de divergences vers plus l'infini :**

  On rappelle que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

si et seulement si

pour tout réel $A > 0$, il existe un entier n_A tel que pour tout entier $n \geq n_A$ on a $u_n > A$

$$(\forall A > 0 \quad , \quad \exists n_A \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_A \quad , \quad u_n > A).$$

u_n	$\ln(n)$	$\sqrt{n}$	n	n^2	n^p	n^q	e^n
n_A	$[e^A]$	$[A^2]+1$	$[A]+1$	$[\sqrt{A}]+1$	$[A^{\frac{1}{p}}]+1$	$[A^{\frac{1}{q}}]+1$	$[\ln(A)]$

Pour A assez grand, on a :

$$[e^A] >> [A^2]+1 > [A]+1 > [\sqrt{A}]+1 > [A^{\frac{1}{p}}]+1 > [A^{\frac{1}{q}}]+1 >> [\ln(A)]$$

1. $u_n = \ln(n)$ diverge **beaucoup** moins vite vers l'infini que $v_n = \sqrt{n}$.

2. $u_n = \sqrt{n}$ diverge moins vite vers l'infini que $v_n = n$.

3. $u_n = n$ diverge moins vite vers l'infini que $v_n = n^2$.

4. D'une manière générale, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, avec $p < q$,
   $u_n = n^p$ diverge moins vite vers l'infini que $v_n = n^q$.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $u_n = n^k$ diverge **beaucoup** moins vite vers l'infini que $v_n = e^n$.

- **Tableau des vitesses de convergences vers zéro :**

  On rappelle que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

si et seulement si

pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier n_ϵ tel que pour tout entier $n \geq n_\epsilon$ on a $-\epsilon < u_n < \epsilon$

$$(\forall \epsilon > 0 \quad , \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad , \quad -\epsilon < u_n < \epsilon).$$

u_n	$1/\sqrt{n}$	$1/n$	$1/n^2$	$1/n^p$	$1/n^q$
n_ϵ	$[(\frac{1}{\epsilon})^2]+1$	$[\frac{1}{\epsilon}]+1$	$[(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{2}}]+1$	$[(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}]+1$	$[(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{q}}]+1$

Pour ϵ assez petit, on a :

$$[(\frac{1}{\epsilon})^2]+1 > [\frac{1}{\epsilon}]+1 > [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{2}}]+1 > [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}]+1 > [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{q}}]+1$$

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge moins vite vers zéro que $v_n = \frac{1}{n}$.

2. $u_n = \frac{1}{n}$ converge moins vite vers zéro que $v_n = \frac{1}{n^2}$.

3. D'une manière générale, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, avec $p < q$,
   $u_n = \frac{1}{n^p}$ converge moins vite vers zéro que $v_n = \frac{1}{n^q}$.

1.3 Quelques propriétés importantes :

- **Théorème : (Unicité de la limite)**

  Si une suite est convergente, alors sa limite est unique.

- **Preuve :**

  Supposons, par l'absurde, qu'une suite (u_n) converge vers deux limites distinctes l_1 et l_2 $(l_1 \neq l_2)$.
  Alors

$$\forall \epsilon > 0 \quad , \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_\epsilon$$
$$-\epsilon < u_n - l_1 < \epsilon \quad \text{et} \quad -\epsilon < u_n - l_2 < \epsilon$$

  c.à.d.

$$u_n \quad \in \quad]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\quad \text{et} \quad u_n \quad \in \quad]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[.$$

  Absurde !
  Car pour $\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$
  on a : $]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon \quad [\quad \cap \quad]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$.

- **Remarque :**

  Si une suite est bornée, elle n'est pas forcément convergente.

  ($u_n = (-1)^n$ est bornée mais elle n'est pas convergente).

  Par contre, si une suite est convergente alors elle est bornée :

- **Théorème :**

  Si une suite est convergente, alors elle est bornée.

- **Preuve :**

  Soit (u_n) une suite convergente.

  Alors $\exists l \in \mathbb{R}$;

$$\forall \epsilon > 0 \quad , \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad , \quad l - \epsilon < u_n < l + \epsilon.$$

  Pour $\epsilon = 1$, on a :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_1 \quad , \quad l - 1 < u_n < l + 1.$$

  On pose $m = min\{u_0, u_1, \cdots, u_{n_1 - 1}, l - 1\}$ et $M = max\{u_0, u_1, \cdots, u_{n_1 - 1}, l + 1\}$.

  on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.

  La suite est majorée et minorée. Elle est, alors, bornée.

- **Théorème :(À admettre)**
  1. Si une suite est croissant et majorée, alors elle est convergente.
  2. Si une suite est croissante et non-majorée, alors elle diverge vers plus l'infini.

- **Corollaire :**
  1. Si une suite est décroissant et minorée alors elle est convergente.
  2. Si une suite est décroissante et non-minorée alors elle diverge vers moins l'infini.

- **Exemples :**
  1. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \quad et \quad u_0 = 1.$$

     (a) On va montrer que la suite (u_n) est croissante. :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

     On pose $P(n)$: $u_n \leq u_{n+1}$.

       i. Étape 1 : Initialisation :
       Vérifier que $P(0)$ est vraie : $u_0 \leq u_1$?
       On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{2}$.
       On a donc $u_0 = 1 \leq \sqrt{2} = u_1$ c.a.d. $u_0 \leq u_1$.
       Donc $P(0)$ est vraie.

       ii. Étape 2 : Hérédité :
       Montrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
       Soit $n \in \mathbb{N}$; $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie

       c.a.d. si $u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

       $u_n \leq u_{n+1} \Longleftrightarrow u_n + 1 \leq u_{n+1} + 1 \Longleftrightarrow \sqrt{u_n + 1} \leq \sqrt{u_{n+1} + 1}$

       $\Longleftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

       $P(n+1)$ est alors vraie.

       iii. Étape 3 : Conclusion :
       Initialisation + Hérédité donnent :
       $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad P(n)$ est vraie
       c.a.d. $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \leq u_{n+1}$.
       Donc la suite est croissante.

(b) On va montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \leq 2$$

On pose $P(n) : u_n \leq 2$.

i. Étape 1 : Initialisation :
Vérifier que $P(0)$ est vraie car $u_0 = 1 \leq 2$

ii. Étape 2 : Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N} \quad ; \quad P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie
c.a.d. si $u_n \leq 2$ alors $u_{n+1} \leq 2$

$u_n \leq 2 \Longleftrightarrow u_n + 1 \leq 3 \Longleftrightarrow \sqrt{u_n + 1} \leq \sqrt{3} \Longleftrightarrow u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.
Or $\sqrt{3} \leq 2$, donc $u_{n+1} \leq 2$.

$P(n+1)$ est alors vraie.

iii. Étape 3 : Conclusion :
Initialisation + Hérédité donnent :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad P(n)$ est vraie
c.a.d. $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \leq 2$.

(c) On va montrer que la suite (u_n) est convergente.

Comme la suite est croissante (a) et majorée par 2 (b) alors la suite est convergente.

2. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \quad et \quad u_0 = 0.$$

(a) On va montrer que (u_n) est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$.
Or $2n + 1 \geq 0$. Donc $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite (u_n) est bien croissante.

(b) On va montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \geq n.$$

On a donc $P(n) : u_n \geq n$.

i. Étape 1 : Initialisation :
Vérifier que $P(0)$ est vraie : $u_0 \geq 0$?
On a $u_0 = 0 \geq 0$.
Donc $P(0)$ est vraie.

ii. Étape 2 : Hérédité :
Montrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N} \quad ; \quad P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie
c.a.d. si $u_n \geq n$ alors $u_{n+1} \geq n+1$.
$u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \geq n + 2n + 1 = n + 1 + 2n \geq n + 1$
car $n + 1 + 2n \geq n + 1$ et d'après l'hypothèse de récurrence $u_n \geq n$.
Par suite $P(n+1)$ est vraie.

iii. Étape 3 : Conclusion :
Initialisation + Hérédité donnent :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad P(n)$ est vraie
c.a.d. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \geq n$.

(c) On va déterminer $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

La suite (u_n) étant croissante (a) et non-majorée (b), alors elle diverge vers l'infini :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

1.4 Opérations sur les limites :

(a) **Addition :**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n+\lim_{n\to+\infty}v_n$$

i.
$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0+0=0$$

ii.
$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{n^2})=0-0=0$$

iii.
$$\lim_{n\to+\infty}((3+\frac{1}{n})+(-2+\frac{1}{n^2}))=\lim_{n\to+\infty}(3+\frac{1}{n})+\lim_{n\to+\infty}(-2+\frac{1}{n^2})=3-2=1$$

iv.
$$\lim_{n\to+\infty}(n+\frac{1}{n^2})=\lim_{n\to+\infty}n+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=+\infty+0=+\infty$$

v.
$$\lim_{n\to+\infty}(-n+\frac{1}{n^2})=\lim_{n\to+\infty}(-n)+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=-\infty+0=-\infty$$

vi.
$$\lim_{n\to+\infty}(n+(4+\frac{1}{n^2}))=\lim_{n\to+\infty}n+\lim_{n\to+\infty}(4+\frac{1}{n^2})=+\infty+4=+\infty$$

vii.
$$\lim_{n\to+\infty}(n+n^2)=\lim_{n\to+\infty}n+\lim_{n\to+\infty}n^2=+\infty+\infty=+\infty$$

viii.
$$\lim_{n\to+\infty}((-n)+(-n^2))=\lim_{n\to+\infty}(-n)+\lim_{n\to+\infty}(-n^2)=-\infty-\infty=-\infty$$

ix.
$$\lim_{n\to+\infty}(n+(-n^2))=\lim_{n\to+\infty}n+\lim_{n\to+\infty}(-n^2)=+\infty-\infty=\quad ?\quad !\quad \textbf{F.I.}$$

F.I. : Forme Intéterminée.

(b) **Multiplication :**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} v_n$$

i.
$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} \times \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \times 0 = 0$$

ii.
$$\lim_{n\to+\infty}((3+\frac{1}{n})\times(-2+\frac{1}{n^2})) = \lim_{n\to+\infty}(3+\frac{1}{n})\times\lim_{n\to+\infty}(-2+\frac{1}{n^2}) = 3\times(-2) = -6$$

iii.
$$\lim_{n\to+\infty}(n \times (4+\frac{1}{n^2})) = \lim_{n\to+\infty} n \times \lim_{n\to+\infty}(4+\frac{1}{n^2}) = +\infty \times 4 = +\infty$$

iv.
$$\lim_{n\to+\infty}(n \times n^2) = \lim_{n\to+\infty} n \times \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

v.
$$\lim_{n\to+\infty}(-n \times (-n^2)) = \lim_{n\to+\infty}(-n) \times \lim_{n\to+\infty}(-n^2) = -\infty \times (-\infty) = +\infty$$

vi.
$$\lim_{n\to+\infty}(n \times (-n^2)) = \lim_{n\to+\infty} n \times \lim_{n\to+\infty}(-n^2) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

vii.
$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n} \times n^2) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} \times \lim_{n\to+\infty} n^2 = 0 \times \infty = \quad ? \quad ! \quad \textbf{F.I.}$$

(c) **Quotient (Division) :**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{u_n}{v_n}) = \frac{\lim_{n\to+\infty} u_n}{\lim_{n\to+\infty} v_n}$$

i.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{-2+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{n}}{\lim_{n\to+\infty} -2+\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

ii.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to+\infty} n}{\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n^2}} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

iii.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{-2+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to+\infty} n}{\lim_{n\to+\infty} -2+\frac{1}{n^2}} = \frac{+\infty}{-2} = -\infty$$

iv.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to+\infty} \quad n} = \frac{2}{+\infty} = 0(=0^+)$$

v.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-2+\frac{1}{n^2}}{n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} -2+\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to+\infty} \quad n} = \frac{-2}{+\infty} = 0(=0^-)$$

vi.

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n+n^2}) = \frac{\lim_{n\to+\infty} \quad n}{\lim_{n\to+\infty} \quad n+n^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \quad ? \quad ! \quad \textbf{F.I.}$$

vii.

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1/n}{1/n^2}) = \frac{\lim_{n\to+\infty} \quad 1/n}{\lim_{n\to+\infty} \quad 1/n^2} = \frac{0}{0} = \quad ? \quad ! \quad \textbf{F.I.}$$

Remarque :
Les Formes Indéterminées sont :

$$+\infty - \infty$$

$$0\times\infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0}.$$

(d) **Compostion :**

Soient (u_n) une suite et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in [-\infty, +\infty]$

et $\lim_{x\to l} f(x) = L$ avec $L \in [-\infty, +\infty]$.

Alors
$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$$
c.à.d.
$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n)$$

Rappel :

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

Exemples :

(a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}$.

On a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x\to0} e^x = e^0 = 1$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$.

(b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} e^{n^2+n}$.

On a : $\lim_{n\to+\infty} n^2 + n = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} e^{n^2+n} = +\infty$.

(c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \ln(n)$.

On a : $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$.

(d) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \ln(\frac{1}{n^2+n})$.

On a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 0^+$ et $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(\frac{1}{n^2+n}) = -\infty$.

1.5 Méthodes pour lever les indéterminations (F.I.) :

1. $$\lim_{n\to+\infty}(n+(-n^2)) = \lim_{n\to+\infty} n + \lim_{n\to+\infty}(-n^2) = +\infty - \infty = \quad ? \quad ! \quad \textbf{F.I.}$$

   Pour lever l'indétermination, on procède de la manière suivante :

   $$\lim_{n\to+\infty}(n-n^2) = \lim_{n\to+\infty} n^2(\frac{1}{n}-1) = \lim_{n\to+\infty} n^2 \times \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}-1) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

2. $$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}\times n^2) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} \times \lim_{n\to+\infty} n^2 = 0 \times \infty = \quad ? \quad ! \quad \textbf{F.I.}$$

   Pour lever l'indétermination, on procède de la manière suivante :

   $$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}\times n^2) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

3. $$\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n+n^2}) = \frac{\lim_{n\to+\infty} \quad n}{\lim_{n\to+\infty} \quad n+n^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \quad ? \quad ! \quad \textbf{F.I.}$$

   Pour lever l'indétermination, on procède de la manière suivante :

   $$\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n+n^2}) = \lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n(1+n)}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n} = 0$$

4. $$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1/n}{1/n^2}) = \frac{\lim_{n\to+\infty} \quad 1/n}{\lim_{n\to+\infty} \quad 1/n^2} = \frac{0}{0} = \quad ? \quad ! \quad \textbf{F.I.}$$

   Pour lever l'indétermination, on procède de la manière suivante :

   $$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1/n}{1/n^2}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

- **Exercices 1 :**

  Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$:

  1) $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$.
  2) $u_n = -5\sqrt{n} - n^3$.
  3) $u_n = \frac{2}{3n+5}$.
  4) $u_n = n^2 + n - 5$.
  5) $u_n = n^2\sqrt{n} + 2$.
  6) $u_n = -\frac{1}{2n-5}$.
  7) $u_n = n^2 - n$.
  8) $u_n = \frac{4n^2}{n+1}$.
  9) $u_n = -n^3 + 2n^2$.
  10) $u_n = n^2 - 3n + 1$.
  11) $u_n = \frac{3n+1}{5n-1}$.
  12) $u_n = \frac{2n}{1-n^2}$.

- **Rappel :**

  $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^p e^x = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$

  $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x^p\ln(x) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$

- **Exercice 2 :**

  Déterminer la limite des suites suivantes :

  1) $u_n = e^{n^2-3n+5}$.
  2) $u_n = e^{-n^2+n-8}$.
  3) $u_n = \frac{e^{n^4}}{n^4}$.
  4) $u_n = \frac{e^{n^4}}{n^8}$.
  5) $u_n = \ln(n^3 + 2n + 1)$.
  6) $u_n = \ln(\frac{n^2+n+5}{n^3+n^2+7})$.
  7) $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$.
  8) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^5}$.

1.6 Limite par comparaison et par encadrement :

- **Théorème de Comparaison :**

  Soient (u_n) et (v_n) deux suites tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \leq v_n.$$

  1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
  2. Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

- **Preuve :**

  1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \leq v_n.$$

     Et supposons que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

     Montrons, alors, que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

     Soit $A > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\exists n_{A,u}$ t.q. $\forall n \geq n_{A,u}$ on a $u_n > A$.
     Or $v_n \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc $\forall n \geq n_{A,u}$, on a $v_n > A$
     c.à.d. $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
  2. Preuve analogue à celle de 1.
     Soient (u_n) et (v_n) deux suites tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \leq v_n.$$

     Et supposons que : $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

     Montrons, alors, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

     Soit $A > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\exists n_{A,v}$ t.q. $\forall n \geq n_{A,v}$ on a $v_n < -A$.
     Or $u_n \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc $\forall n \geq n_{A,u}$, on a $u_n < -A$
     c.à.d. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- **Exemple :**

  Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \quad et \quad u_0 = 0.$$

  On a déjà montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \geq n.$$

  Comme $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- **Théorème d'encadrement (des gendarmes) :**
  Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites tel que
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$
  Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$
  alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.

- **Preuve :**
  Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites tel que
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$
  Et supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$.
  Montrons que : $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$:
  $$\forall \epsilon > 0 \quad , \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad , \quad l - \epsilon < v_n < l + \epsilon.$$
  Soit $\epsilon > 0$.
  Comme (u_n) converge vers l , alors :
  $$\exists n_{\epsilon,u} \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_{\epsilon,u} \quad , \quad l - \epsilon < u_n < l + \epsilon.$$
  De même, comme (w_n) converge vers l , alors :
  $$\exists n_{\epsilon,w} \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_{\epsilon,w} \quad , \quad l - \epsilon < w_n < l + \epsilon.$$
  Or
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$
  On pose $n_\epsilon = max\{n_{\epsilon,u}, n_{\epsilon,w}\}$.
  Alors
  $$\forall n \geq n_\epsilon \quad , \quad l - \epsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \epsilon.$$
  Donc
  $$\forall n \geq n_\epsilon \quad , \quad l - \epsilon < v_n < l + \epsilon$$
  c.à.d. (v_n) converge vers l.

- **Exemple :**
  Soit (u_n) la suite définie par :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n}$$
  On va déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

  On a :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad 5 - \frac{1}{n} \leq 5 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 5 + \frac{1}{n}.$$
  Comme $\lim_{n\to+\infty} 5 - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 5 + \frac{1}{n} = 5$.

  Alors $\lim_{n\to+\infty} 5 + \frac{(-1)^n}{n} = 5$.

- **Exercices :**

  Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

  1) $u_n = n + 2\sin(n)$.

  2) $u_n = -n^2 - n + (-1)^n$.

  3) $u_n = -\sqrt{n} - \cos(2n)$.

  4) $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$.

  5) $u_n = -5 + \frac{\sin(n)}{n}$.