Analyse Mathématique

Cours n°5

EPITA Cyber 1 2024-2025

1 $\lim_{n\to+\infty} q^n$:

- **Théorème (Inégalité de Bernoulli) :**

$$\forall a > 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{on a :} \quad (1+a)^n \geq 1 + na.$$

- **Preuve :**

Soit $a > 0$.

On va montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{on a :} \quad (1+a)^n \geq 1 + na.$$

On pose $P(n) : (1+a)^n \geq 1 + na$.

1. Étape 1 : Initialisation :
   Vérifier que $P(0)$ est vraie : $(1+a)^0 = 1 + 0 \times a$?
   Or $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$.
   Donc $P(0)$ est vraie.

2. Étape 2 : Hérédité :
   Montrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N} \quad ; \quad P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie
   c.a.d. si $(1+a)^n \geq 1 + na$ alors $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$.

   $(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na)$

   $= 1 + na + a + na^2 \geq 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a.$

   car $(1+a)^n \geq 1 + na$ et d'après l'hypothèse de récurrence.

   Par suite $P(n+1)$ est vraie.

3. Étape 3 : Conclusion :
   Initialisation + Hérédité donnent :
   $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad P(n)$ est vraie
   c.a.d. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad (1+a)^n \geq 1 + na.$

- **Théorème :**

  1. Si $q = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$.
  2. Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
  3. Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
  4. Si $q \leq -1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas !

- **Preuve :**

  1. Si $q = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n = 1$.
     Donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$.

  2. Si $q > 1$, alors $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

     Doù, $q^n = (1 + a)^n$. D'après l'inégalité de Bernoulli, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

     Par suite $q^n \geq 1 + na$.

     Comme $\lim_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$, d'après le théorème de comparaison

     $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

  3. (a) Si $0 < q < 1$. On pose $p = \frac{1}{q}$ et alors $p > 1$.

        $\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{p})^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p^n} = 0$ (car $\lim_{n\to+\infty} p^n = +\infty$).

     (b) Si $-1 < q < 0$. On pose $s = -q$ et on a $0 < s < 1$.

        On a aussi $q^n = (-1)^n s^n$. Donc $-s^n \leq q^n \leq s^n$.

        Et on a $\lim_{n\to+\infty} s^n = 0$ (car $0 < s < 1$).

        D'après le théorème d'encadrement (des gendarmes) $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

- **Exemples :**

  1. $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ car $4 > 1$.

  2. $\lim_{n\to+\infty}(-3)^n$ n'existe pas car $-3 < -1$.

  3. $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{5})^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{5} < 1$.

  4. $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{3})^n = 0$ car $-1 < -\frac{1}{3} < 1$.

- **Exercice 1 :**

  Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

  1) $u_n = 3 \times 5^n$.

  2) $u_n = 7 \times (\frac{2}{5})^n$.

  3) $u_n = \frac{11 \times 7^n}{-2}$.

  4) $u_n = 3^n - 5^n$.

  5) $u_n = 7^n - 4^n$.

- **Exercice 2 :**

  Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 2$.

  1) Déterminer le terme général u_n en fonction de n

  2) Déterminer la limite de la suite (u_n).

  3) On pose

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

  Déterminer le terme général S_n en fonction de n.

  4) Déterminer la limite de la suite (S_n).

- **Exercice 3 :**

  Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{5}$ et de premier terme $u_0 = 7$.

  1) Déterminer le terme général u_n en fonction de n

  2) Déterminer la limite de la suite (u_n).

  3) On pose

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

  Déterminer le terme général S_n en fonction de n.

  4) Déterminer la limite de la suite (S_n).

2 Suites équivalentes :

- **Rappel :**

  On dit qu'une suite u ne s'annule pas à partir d'un certain rang si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \geq n_0 \quad , \quad u_n \neq 0.$$

- **Définition :**

  Étant donné deux suites u et v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang,

  On dit que u est **équivalente** à v si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

  On note alors $u \sim v$.

- **Exemples :**

  1. Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = n$
     et v la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = n + 1$.
     Alors $u \sim v$.
     En effet, u et v sont non nulles à partir d'un certain rang ($n_{0,u} = 1$ pour u et $n_{0,v} = 0$.)

     Et, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$.

     Dans la suite, on pourra noter $u_n \sim v_n$ tout en gardant à l'esprit que ce sont les suites qui sont équivalent ...

  2. Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = (-1)^n$
     et v la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = (-1)^{n+1}$.

     On n'a pas $u \sim v$,
     car $\frac{u_n}{v_n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} = -1$.

  3. Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

     et v la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad v_n = \frac{1}{n}$.

     Alors $u \sim v$ ($\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$).

     En effet, Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = n(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = 1 + \frac{1}{n}$.

     Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$

  4. Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = n^2 + n$
     et v la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = n^2$.
     Alors $u \sim v$ ($n^2 + n \sim n^2$).
     En effet, Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2+n}{n^2} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$.
     Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$

5. Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{3n}{n+1}$.

   On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{1+\frac{1}{n}} = 3$.

   Alors $u \sim v$ où v est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = 3$.

   En effet, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3n}{n+1}}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+1} = \frac{1}{3} \times 3 = 1$.

   On pourra noter, $\frac{3n}{n+1} \sim 3$.

6. Si u est une suite qui converge vers l avec $l \neq 0$ alors $u \sim l$,
   car $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{l} = \frac{1}{l} \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{l}{l} = 1$.

- **Exercice :**

  1. Montrer que : $(3n^7 + 4n^6 - 7n^5 + 8n^4 - 9n^3 + n^2 - 3n + 7) \sim 3n^7$.

  2. Montrer que $(\frac{5}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{8}{n^3} - \frac{4}{n^4}) \sim \frac{5}{n}$.

  3. Montrer que $(7n^4 + 3n - 6 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}) \sim 7n^4$.

- **Propriétés :**

  Soit u, v et w trois suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

  Alors :

  1. Réflexivité : $u \sim u$.
  2. Symétrie : Si $u \sim v$ alors $v \sim u$.
  3. Transitivité : Si $u \sim v$ et $v \sim w$ alors $u \sim w$.
     (La relation binaire $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang).

- **Preuve :**

  1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$.
     Donc $u \sim u$.
  2. Soit u et v deux suites t.q. $u \sim v$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
     On va montrer que $v \sim u$.
     On a $\frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} = \frac{v_n}{u_n}$.
     Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}} = \frac{1}{1} = 1$.
     Donc $v \sim u$.
     (Ce qui nous permettra de dire que les suites u et v sont équivalentes !).
  3. Soit u, v et w trois suites t.q. $u \sim v$ et $v \sim w$.
     Et montrons que $u \sim w$.
     On a $\frac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{w_n}{v_n}} = \frac{u_n}{w_n}$.
     Par suite $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}}{\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n}{v_n}} = \frac{1}{1} = 1$.
     Donc $u \sim w$.

- **Exemples :**

  1. $(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n} \sim (\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n})$.
     En effet, $\frac{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = n(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} + 1$.
     Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2} + 1) = 1$.
     Et $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1+n^2}{n^3}} = \frac{1}{n}(\frac{n^3}{1+n^2}) = \frac{n^2}{1+n^2} = \frac{n^2}{n^2(\frac{1}{n^2}+1)} = \frac{1}{\frac{1}{n^2}+1}$.
     Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+1} = 1$.

2. $(n^3+n^2+n) \sim (n^3+n^2)$, $(n^3+n^2) \sim n^3$ et $(n^3+n^2+n) \sim n^3$.

   (a) $(n^3+n^2+n) \sim (n^3+n^2)$

   car $\frac{n^3+n^2+n}{n^3+n^2} = \frac{n^3(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n})}{n^3(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$

   et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n^2+n}{n^3+n^2} = \lim_{n\to+\infty} = \frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$.

   (b) $(n^3+n^2) \sim n^3$

   car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$.

   (c) $(n^3+n^2+n) \sim n^3$.

   En effet, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n^2+n}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}) = 1$.

- **Proposition :**

  Soit u et v deux suites non nulles à partir d'un certains rang.

  On a l'équivalence suivante :

$$(u \sim v) \Longleftrightarrow (\text{il existe une suite} \quad w \quad ; \quad u = w \times v \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = 1).$$

- **Preuve :**

  - u et v deux suites non nulles à partir d'un certain rang, n_0, et supposons que $u \sim v$. On pose pour tout $n \geq n_0 \quad , \quad w_n = \frac{u_n}{v_n}$. On alors : $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\forall n \geq n_0, u_n = w_n \times v_n$.
  - Réciproquement, supposons que w est une suite tendant vers 1 et telle que $u = wv$. On a, pout tout $n \geq n_0, w_n = \frac{u_n}{v_n}$ (où n_0 est le rang à partir duquel v ne s'annule pas). D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} w_n = 1$. Par suite, $u \sim v$.

- **Exemple :**

  On a $(n^3+n^2) \sim n^3$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$.

  Et $n^3+n^2 = (1+\frac{1}{n})n^3$ avec $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$.

- **Proposition :**

  Soit u et v deux suites non nulles à partir d'un certain rang et t.q. $u \sim v$.

  Si la suite u admet une limite, **finie ou infinie**, alors v tend vers la même limite :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

- **Preuve :**

  Comme $u \sim v$ alors il existe une suite w telle que $u = w \times v$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = 1$.

  Par suite $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(w_n v_n) = (\lim_{n\to+\infty} w_n)(\lim_{n\to+\infty} v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

- **Exemples :**

  1. $u_n = n^3 + 2n^2 + 4$ et $v_n = n^3$.

     On a $u \sim v$, car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2n^2+4}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^3})}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^3}) = 1$.

     On a aussi $\lim_{n\to+\infty} n^3 + 2n^2 + 4 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.

  2. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}$.

     On a $u \sim v$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n^3})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = 1$.

     On a aussi $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4} = 0$.

- **Proposition :**

  Soit u, v, u' et v' des suites non nulles à partir d'un certain rang et t.q. $u \sim v$ et $u' \sim v'$. Alors :

  1. $u \times u' \sim v \times v'$.
  2. $\frac{u}{u'} \sim \frac{v}{v'}$.
  3. $\forall p \in \mathbb{Z} \quad , \quad u^p \sim v^p$.

- **Preuve :**

  1. Supposons que $u \sim v$ et $u' \sim v'$.

     Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\frac{u_n \times u'_n}{v_n \times v'_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{u'_n}{v'_n}$.

     Or $u \sim v$ et $u' \sim v'$ alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{u'_n}{v'_n} = 1$.

     Par suite $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n \times u'_n}{v_n \times v'_n} = (\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n})(\lim_{n \to +\infty} \frac{u'_n}{v'_n}) = 1$.
     Donc $uu' \sim vv'$.
  2. Supposons que $u \sim v$ et $u' \sim v'$.

     Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\frac{\frac{u_n}{u'_n}}{\frac{v_n}{v'_n}} = \frac{u_n}{u'_n}\frac{v'_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{v'_n}{u'_n}$.

     Or $u \sim v$ et $u' \sim v'$ (donc $v' \sim u'$) alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{v'_n}{u'_n} = 1$.

     Par suite, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{u_n}{u'_n}}{\frac{v_n}{v'_n}} = \lim_{n \to +\infty}(\frac{u_n}{v_n}\frac{v'_n}{u'_n}) = (\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n})(\lim_{n \to +\infty} \frac{v'_n}{u'_n}) = 1$.

     Donc $\frac{u}{u'} \sim \frac{v}{v'}$.
  3. Supposons que $u \sim v$

     Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout p entier relatif, $p \in \mathbb{Z}$, on a : $\frac{(u_n)^p}{(v_n)^p} = (\frac{u_n}{v_n})^p$.

     Comme $u \sim v$ alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

     Par suite, $\lim_{n \to +\infty} \frac{(u_n)^p}{(v_n)^p} = \lim_{n \to +\infty}(\frac{u_n}{v_n})^p = (\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n})^p = 1^p = 1$.

     Donc $\forall p \in \mathbb{Z} \quad , \quad u^p \sim v^p$.

- **Remarque :**

  On peut avoir $u \sim v$ et $u' \sim v'$ mais pas $(u+u') \sim (v+v')$.

  $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2 + 2n$ et $u'_n = v'_n = -n^2$.

  On a bien $u \sim v$

  car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n^2+2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1$.

  Mais $(u+u') \nsim (v+v')$.

  En effet, $u_n + u'_n = n$ et $v_n + v'_n = 2n$. Il est clair que $n \nsim 2n$.

- **Exemples :**

  1. $n^2 + n \sim n^2$ et $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$

     alors $(n^2+n)(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) \sim n^2 \times \frac{1}{n}$.
     En effet :

     (a) $n^2 + n \sim n^2$
     car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$.

     (b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$

     car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$.

     (c) $(n^2+n)(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) \sim n^2 \times \frac{1}{n}$

     $(n^2+n)(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = n + 1 + 1 + \frac{1}{n} = n + 2 + \frac{1}{n}$.

     Et $n^2 \times \frac{1}{n} = n$.

     On a bien $(n^2+n)(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) \sim n^2 \times \frac{1}{n}$

     car $n + 2 + \frac{1}{n} \sim n$.

     $(\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2+\frac{1}{n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n} = \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) = 1)$.

  2. $n^2 + n \sim n^2$ et $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$

     alors $\frac{n^2+n}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \sim \frac{n^2}{\frac{1}{n}}$.

     On sait déjà que : $n^2 + n \sim n^2$ et $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$.

     Il reste à monter que : $\frac{n^2+n}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \sim \frac{n^2}{\frac{1}{n}}$.

     $\frac{n^2+n}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})} = n^3$ et $\frac{n^2}{\frac{1}{n}} = n^3$. On a bien le résultat voulu.

3. $n^2+n \sim n^2$ alors $(n^2+n)^2 \sim (n^2)^2$.

   On sait déjà que : $n^2+n \sim n^2$ et montrons que : $(n^2+n)^2 \sim (n^2)^2$.

   $\frac{(n^2+n)^2}{(n^2)^2} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{n^4} = \frac{n^4(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^4} = 1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$.

   Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n)^2}{(n^2)^2} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}) = 1$.

   Par suite $(n^2+n)^2 \sim (n^2)^2$.

- **Exercices :**

  Déterminer un équivalent simple puis calculer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$:

  1) $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$.
  2) $u_n = -5\sqrt{n} - n^3$.
  3) $u_n = \frac{2}{3n+5}$.
  4) $u_n = n^2 + n - 5$.
  5) $u_n = n^2\sqrt{n} + 2$.
  6) $u_n = -\frac{1}{2n-5}$.
  7) $u_n = n^2 - n$.
  8) $u_n = \frac{4n^2}{n+1}$.
  9) $u_n = -n^3 + 2n^2$.
  10) $u_n = n^2 - 3n + 1$.
  11) $u_n = \frac{3n+1}{5n-1}$.
  12) $u_n = \frac{2n}{1-n^2}$.

- **Proposition :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, (u_n) une suite convergente vers l.
  Si f est dérivable en l avec $f'(l) \neq 0$ et $u_n \neq l$ à partir d'un certain rang.
  Alors
  $$f(u_n) - f(l) \sim f'(l)(u_n - l).$$
- **Preuve :**
  f étant dérivable en l, alors $\lim_{x\to l} \frac{f(x)-f(l)}{x-l} = f'(l)$.

  Comme $f'(l) \neq 0$ alors $\lim_{x\to l} \frac{f(x)-f(l)}{f'(l)(x-l)} = 1$.

  Or $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{x\to l} f(x) = f(l)$ (car f est dérivable en l, donc continue en l).

  Par suite, $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)-f(l)}{f'(l)(u_n-l)} = 1$.

  On a alors
  $$f(u_n) - f(l) \sim f'(l)(u_n - l).$$
- **Exemples :**
  1. $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$.

     La suite $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 et $u_n \neq 0$ à partir du rang $n_0 = 1$.

     La fonction $f(x) = e^x$ est dérivable en 0 et $f'(0) = e^0 = 1 \neq 0$.

     D'après la proposition précédente :
     $$f(u_n) - f(0) \sim f'(0)(u_n - 0).$$
     Donc $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$.

  2. $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$.

     La suite $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 et $u_n \neq 0$ à partir du rang $n_0 = 1$.

     La fonction $f(x) = \ln(1 + x)$, définie sur $]-1, +\infty[$ est dérivable en 0 et on a : $f'(0) = 1 \neq 0$ (car $f'(x) = \frac{1}{1+x}$).

     D'après la proposition précédente :
     $$f(u_n) - f(0) \sim f'(0)(u_n - 0).$$
     Donc $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$.

3. $(e^{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} - e^2) \sim e^2(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2})$

   La suite $u_n = 2 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}$ converge vers 2 et $u_n \neq 2$ à partir du rang $n_0 = 1$.

   La fonction $f(x) = e^x$ est dérivable en 2 et $f'(2) = e^2 \neq 0$.

   D'après la proposition précédente :

$$f(u_n) - f(2) \sim f'(2)(u_n - 2).$$

   Donc $(e^{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} - e^2) \sim e^2(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^3})$.

   On a aussi $e^2(e^{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} - 1) \sim e^2(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^3})$.

   Donc $(e^{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} - 1) \sim (\frac{1}{n} + \frac{3}{n^3})$.

4. $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$.

   On a $\ln[(1 + \frac{1}{n})^n] = n\ln(1 + \frac{1}{n})$.

   Or, d'après l'exemple précédent, $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. Donc $n\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim n\frac{1}{n}$.

   D'où, $\ln[(1 + \frac{1}{n})^n] \sim 1$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \ln[(1 + \frac{1}{n})^n] = 1$.

   Par suite $\lim_{n\to+\infty} e^{\ln[(1+\frac{1}{n})^n]} = e^1$.

   On a alors, $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$.

3 Suite négligeable, suite dominée :

- **Définition :**

  Soit u et v deux suites. Supposons que la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

  1. On dit que u est **dominée** par v si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée.

     On note alors $u = O(v)$ (lire u est un grand O de v).

  2. On dit que u est **négligeable** devant v si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 0..

     On note alors $u = o(v)$ (lire u est un petit o de v).

- **Remarque :**

  Comme toute suite convergente est bornée,
  alors : $[\quad u = o(v) \quad] \Longrightarrow [\quad u = O(v) \quad]$
  c.à.d. si u est négligeable devant v alors u est dominée par v.

- **Exemples :**

  1. $u_n = 2n$ et $v_n = n$.

     $\frac{u_n}{v_n} = \frac{2n}{n} = 2$.

     Donc la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée.
     On a alors $2n = O(n)$.

  2. $u_n = 2n + 1$ et $v_n = n$.

     $\frac{u_n}{v_n} = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$.

     Or $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$. Donc, $2 \leq 2 + \frac{1}{n} \leq 3$.

     Donc la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée.
     On a alors $2n + 1 = O(n)$.

  3. $\frac{n^2}{e^n} = O(n^2)$.

     $\frac{\frac{n^2}{e^n}}{n^2} = \frac{n^2 e^{-n}}{n^2} = e^{-n}$.

     On bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq e^{-n} \leq 1$ car $e^{-n} \leq e^0 = 1$.

4. $u_n = n$ et $v_n = n^2$.

   On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

   Donc $n = o(n^2)$.

5. $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

   On a $\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2}\frac{n}{1} = \frac{1}{n}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

   Donc $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$.

- **Remarques :**

1. (u est une suite bornée) $\Longleftrightarrow$ ($u = O(1)$)
   car si (u_n) est bornée alors $(\frac{u_n}{1})$ est bornée et réciproquement.

2. (u est une suite qui tend vers 0) $\Longleftrightarrow$ ($u = o(1)$)
   car si (u_n) tend vers 0 alors $(\frac{u_n}{1})$ tend vers 0 et réciproquement.

- **Exercice :**

1. Montrer que : $n = o(n^3)$ et $n^2 = o(n^3)$.

2. Montrer que : $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$ et $\frac{1}{n^3} = o(\frac{1}{n})$.

3. Montrer que : $n^6 = o(e^n)$.

4. Montrer que $\ln(n) = o(n^6)$.

- **Rappel :**

  $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^p e^x = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$

  $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x^p \ln(x) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$

- **Exercice :**

  1. Montre que : $\ln(n) = o(n)$.
  2. Montre que : $\ln(n) = o(n^2)$.
  3. Montre que : $\ln(n^2 + 3n + 6) = o(n^2 + 3n + 6)$.
  4. Montre que : $\ln(\frac{1}{n}) = o(n)$.
  5. Montre que : $\ln(\frac{1}{n}) = o(n^3)$.
  6. Montrer que : $n = o(e^n)$.
  7. Montrer que : $n^2 = o(e^n)$.
  8. Montrer que : $e^{-n} = o(n)$.
  9. Montrer que : $e^{-n} = o(n^4)$.

- **Proposition :**

  Soit u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

  On a alors :

  $$[\quad u \sim v \quad] \Longleftrightarrow [\quad u - v = o(v) \quad].$$

- **Preuve :**

  Soit n_0 le rang à partir duquel les deux suites ne s'annulent pas.

  Alors $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1$.

  Par suite $[\quad u \sim v \quad] \Longleftrightarrow [\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \quad] \Longleftrightarrow [\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} - 1 = 0 \quad]$
  $\Longleftrightarrow [\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n - v_n}{v_n} = 0 \quad] \Longleftrightarrow [\quad u - v = o(v) \quad]$.

- **Proposition :**

  Soit u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

  Si $v = o(u)$ alors $(u + v) \sim u$.

- **Preuve :**

  Supposons que $v = o(u)$ et montrons que $(u + v) \sim u$.

  D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que $[(u + v) - u] = o(u)$.

  Or $[(u + v) - u] = v$ et on par hypothèse que : $v = o(u)$.

- **Exemple :**

  1. Trouver un équivalent simple à $n + 1$.

     Il est clair que $1 = o(n)$ (car $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$).

     Donc $(n + 1) \sim n$.

  2. Trouver un équivalent simple à $n^2 + \frac{1}{n}$.

     On a $\frac{1}{n} = o(n^2)$

     car $\frac{\frac{1}{n}}{n^2} = \frac{1}{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3}$

     et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.

     D'après la proposition précédente, $(n^2 + \frac{1}{n}) \sim n^2$.

- **Exercice :**

1. On a : $\ln(n) = o(n)$, en déduire que : $(n + ln(n)) \sim n$.

2. On a : $\ln(n) = o(n^2)$, en déduire que : $(n^2 + \ln(n)) \sim n^2$.

3. On a $\ln(n^2 + 3n + 6) = o(n^2 + 3n + 6)$

   en déduire que : $(n^2 + 3n + 6 + \ln(n^2 + 3n + 6)) \sim n^2$.

4. On a : $\ln(\frac{1}{n}) = o(n)$, en déduire que : $(n + \ln(\frac{1}{n})) \sim n$.

5. On a : $\ln(\frac{1}{n}) = o(n^3)$, en déduire que $(n^3 + \ln(\frac{1}{n})) \sim n^3$

6. On a : $n = o(e^n)$, en déduire que : $(e^n + n) \sim e^n$.

7. On a : $n^2 = o(e^n)$, en déduire que : $(e^n + n^2) \sim e^n$

8. On a : $e^{-n} = o(n)$, en déduire que : $(n + e^{-n}) \sim n$.

9. On a : $e^{-n} = o(n^4)$, en déduire que : $(n^4 + e^{-n}) \sim n^4$.