FILTRAGE PASSIF

Cours 1-ère année

Bachelor Cybersécurité

EPITA

Sommaire

Objectif du cours

AAVS	CRITÈRES	LE P'TIT TRUC EN PLUS	COMPÉTENT	EN COURS D'ACQUISITION	DÉBUTANT
Décrire le comportement et le type d'un circuit de filtrage du 1er ordre		Etre capable d'ajuster les paramètres de filtres	• Relier les dimensions mathématique et physique du problème afin de prédire le fonctionnement du circuit en dressant La représentation de bode ou on définit la courbe de gain et la courbe de phase • Déterminer le type de montage (passe bas, passe haut ou passe bande…) • Catégoriser le type de filtre (1er ordre, 2eme ordre…) • identifier certaines paramètres spécifique aux filtre (fréquence de coupure, résonnance…)	• Définir les deux fonctions de la pulsation w : >le gain qui correspond au module de la fonction de tranfert >la phase qui correspond à l'argument de la fonction de transfert	• Identifier les différents élements du montage (entrée, sortie, contre reaction, alimentation, etc). • Déterminer l'impédance des différents blocs constitutifs.

QCM (rappel des pré-requis)

L'impédance complexe d'une inductance est :

- ☐ $L\omega$
- ☐ $jL\omega$
- ☐ $-jL\omega$

L'admittance complexe d'un condensateur est :

- ☐ $jC\omega$
- ☐ $-jC\omega$
- ☐ $\frac{1}{jCw}$

L'impédance complexe de R et L en série est :

- ☐ $R + jL\omega$
- ☐ $R + L\omega$
- ☐ $\frac{jRLw}{(R+jLw)}$

L'impédance complexe de R et C en parallèle est :

- ☐ $\frac{1}{R+Cw}$
- ☐ $\frac{R}{(1+jRCw)}$
- ☐ $\frac{1}{R-jCw}$

3.Impédance Complexe

Pour un dipôle D , parcouru par le courant *i*(t) et aux bornes duquel on mesure la tension *u*(t), l'*impédance complexe* est définie comme étant le rapport de la représentation complexe de *u*(t) par celle de *i*(t) :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$$

3.1 Impédance de la résistance

Aux bornes d'une résistance, u = R i.
Donc

$$\boxed{\underline{Z_R} = R}$$

3.2 Impédance de l'inductance

Aux bornes d'une inductance, $u = L\dfrac{di}{dt}$.

Si $\underline{I} = I.e^{j(\omega t + \varphi)}$, alors $\underline{U} = L.j\omega.\underline{I}$
Donc

$$\boxed{\underline{Z_L} = jL\omega}$$

3.3 Impédance du condensateur

Aux bornes d'un condensateur, $i = C\dfrac{du}{dt}$.

Si $\underline{U} = U.e^{j(\omega t + \varphi)}$, alors $\underline{I} = C.j\omega.\underline{U}$
Donc

$$\boxed{\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}}$$

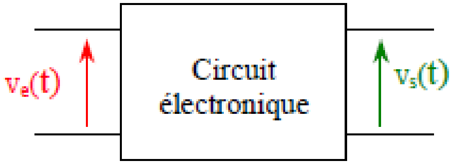
<u>Remarques :</u>

- L'impédance dépend de la fréquence
- Une impédance qui a une partie imaginaire négative est de type *capacitif*
- Une impédance qui a une partie imaginaire positive est de type *inductif*.
- La partie réelle d'une impédance est de type *résistif* et est toujours positive.
- Le condensateur déphase le courant par rapport à la tension de – 90° => *i(t)* est en avance sur *u(t)*.
- La bobine déphase le courant par rapport à la tension de + 90° => *i(t)* est en retard sur *u(t)*.

5.Notion de fonction de transfert

L'impédance de certains éléments de base de l'électrocinétique est variable avec la pulsation de la source d'alimentation. Cette propriété est utilisée dans les fonctions électroniques où interviennent des signaux à fréquence variable. Les circuits électroniques sont alors décrits par leur *fonction de transfert*. Elle traduit le rapport entre la grandeur de sortie et celle d'entrée et son étude permet de décrire les propriétés du circuit associé. En régime sinusoïdal, c'est une fonction complexe de la variable *fréquence*. C'est donc la vision fréquentielle des signaux qui sera étudiée, se substituant à la vision temporelle. Les amplitudes et phases relatives des signaux en fonction de la fréquence constitueront le centre des études.

On représente un circuit électronique sous la forme d'une "boîte noire" et on considère l'entrée et la sortie sous leur représentation complexe.



$$v_e(t) = V_e \cos(\omega t + \varphi_e) \;\Rightarrow\; \underline{V_e} = V_e \, e^{j(\omega t + \varphi_e)}$$

$$v_s(t) = V_s \cos(\omega t + \varphi_s) \;\Rightarrow\; \underline{V_s} = V_s \, e^{j(\omega t + \varphi_s)}$$

d'où

$$\boxed{H(jw) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{V_s}{V_e} \, e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}}$$

On définit alors les deux fonctions de la pulsation ω :

- le **gain** du circuit qui est le module de la fonction de transfert : $\boxed{H(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right|}$
- la **phase** du circuit qui est l'argument de la fonction de transfert : $\boxed{\varphi = \arg\left[\underline{H}(j\omega)\right] = \varphi_e - \varphi_s}$

6.Représentation de Bode

L'analyse purement algébrique de l'évolution du gain et de la phase de la fonction de transfert d'un circuit devient souvent très vite complexe et fastidieuse. Aussi, on préfère utiliser une représentation graphique : **les diagrammes de Bode**. On définit :

- La courbe de gain : $G_{dB} = 20\log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = 20\log H(\omega)$ qui s'exprime en *décibel* (**dB**)
- La courbe de phase : $\varphi = \arg\left[\underline{H}(j\omega)\right] = \varphi_e - \varphi_s$

Remarques :
L'axe des fréquences est en échelle *logarithmique* (graduée par décade), ce qui permet une représentation sur une plus large plage de valeurs (compression d'échelle).

Les diagrammes de Bode peuvent se représenter sous forme de courbe réelles ou de diagrammes asymptotiques :

- **courbes réelles :** c'est la représentation graphique des fonctions G_{dB} et φ en fonction de f ou de ω.
- **diagramme asymptotique :** c'est la représentation graphique simplifiée des fonctions à l'aide de leurs équivalents aux bornes du domaine de définition ($\omega \to 0$, $\omega \to \infty$ et $\omega \to \omega_c$).

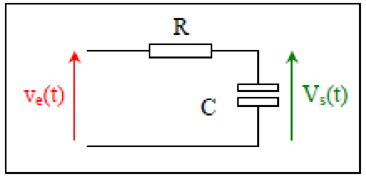
Note importante sur les commodités d'écriture

$s = j\omega = j\,2\,\pi\,f \qquad (\omega = 2\pi f) \qquad$ ou $\qquad p = j\omega$

$\omega_0 = 2\,\pi\,f_0 = 1/\tau \qquad f_0$: fréquence de coupure $\qquad \tau$: constante de temps

6.Représentation de Bode

Exemple : *Etude d'un circuit RC*



La fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

si on pose ω_c=1/RC, la fonction de transfert devient : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$

D'où : $\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$

$\varphi = -\text{Arctan}\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$

Si $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{V}s \rightarrow \underline{V}e = \underline{V}s$ max

Si $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{V}s \rightarrow$ 0 V = $\underline{V}s$ min

- La tension de sortie est fortement atténuée pour les hautes fréquences et fortement favorisée pour les basses fréquences . Donc , c'est un passe bas .

Calcul du module de H

$$\underline{H} = \frac{1}{\left(1 + j\frac{W}{Wc}\right)} = \frac{1 + j\,0}{\left(1 + j\frac{W}{Wc}\right)}$$

$$|\underline{H}| = \left\|\frac{1 + j\,0}{\left(1 + j\frac{W}{Wc}\right)}\right\| = \frac{\|1 + j\,0\|}{\left\|\left(1 + j\frac{W}{Wc}\right)\right\|}$$

$$|\underline{H}| = \frac{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}}{\sqrt{(1)^2 + \left(\frac{W}{Wc}\right)^2}}$$

$$\boxed{|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{W}{Wc}\right)^2}}}$$

Calcul de l'argument de H

$$\underline{H} = \frac{1}{\left[1 + j\frac{W}{W_0}\right]}$$

$$\underline{H} = \frac{1 + j\,0}{\left[1 + j\frac{W}{Wc}\right]}$$

$$\varphi = \frac{\text{Arctag}\,(0\,/\,1)}{\text{Arctag}\,[(W\,/\,Wc)\,/\,1]}$$

$$\varphi = \frac{\text{Arctag}\,(0)}{\text{Arctag}\,(W\,/\,Wc)}$$

$$\varphi = 0 - \text{Arctag}\,(W\,/\,Wc)$$

$$\boxed{\varphi = -\,\text{Arctag}\,(W\,/\,Wc)}$$

φ : degré

6.Représentation de Bode

Etude du module :

$$G_{dB} = 20\log\left|\underline{H}(j\omega)\right| = -10\log\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]$$

- aux basses fréquences, $\omega \to 0$ donc $G_{dB} \to 0$
- aux hautes fréquences, $\omega \to +\infty$ donc $G_{dB} \to 20\log\omega_c - 20\log\omega$
- pour $\omega=\omega_c$, $G_{dB} = -10\log 2 =$ -3dB

- calcul de la pente aux hautes fréquences :
  - sur $[\omega_c, 2\omega_c]$, $G_{dB} = [20\log\omega_c - 20\log\omega_c] - [20\log\omega_c - 20\log 2.\omega_c] = -20\log 2 =$ -6dB
  - sur $[\omega_c, 10\omega_c]$, $G_{dB} = [20\log\omega_c - 20\log\omega_c] - [20\log\omega_c - 20\log 10.\omega_c] = -20\log 10 =$ -20dB

La représentation asymptotique de Bode est donc composée de 2 asymptotes :

- ✔ 1 asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour $\omega<\omega_c$ (G_{dB} = 0dB)
- ✔ 1 asymptote oblique de pente –6dB/octave ou –20dB/décade pour $\omega>\omega_c$
- ✔ le point d'intersection entre les 2 asymptotes est le point où $\omega=\omega_c$, c'est la **pulsation de coupure**

Etude de l'argument :

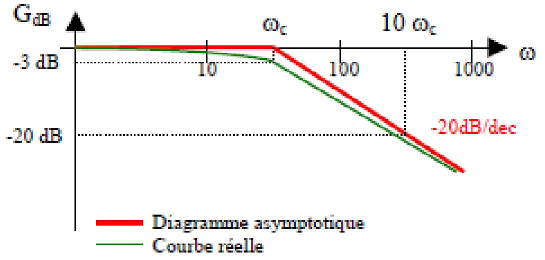
$$\varphi = -\mathrm{Arctan}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

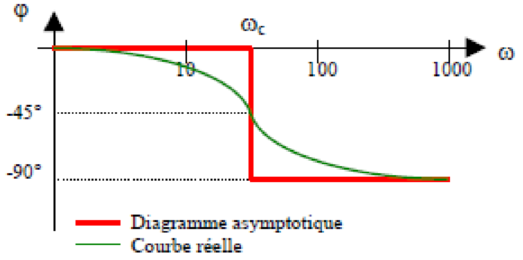
- aux basses fréquences, $\omega \to 0$ donc $\varphi \to 0°$
- aux hautes fréquences, $\omega \to +\infty$ donc $\varphi \to -90°$
- pour $\omega=\omega_c$, $G_{dB} = -\mathrm{Arctan}\ 1 = -45°$

La représentation asymptotique de Bode est donc composée de 2 asymptotes :

- ✔ 1 asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour $\omega<\omega_c$ ($\varphi = 0°$)
- ✔ 1 asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour $\omega>\omega_c$ ($\varphi = -90°$)
- ✔ le point d'intersection entre les 2 asymptotes est le point où $\omega=\omega_c$ ($\varphi = -45°$)

Courbes de Bode :





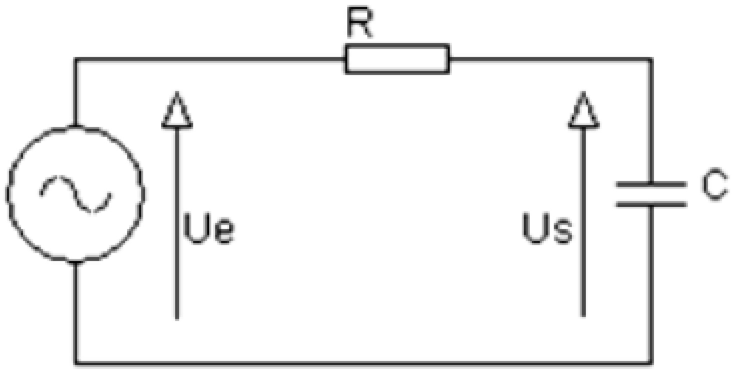
Remarques :

La pente à ±20dB/décade (ou ±6dB/décade) est typique d'un système du 1^ier^ ordre en ω.
Le déphase de ±90° est typique d'un système du 1^ier^ ordre en ω.
Un système d'ordre **n** apportera des pentes et des déphasages **n** fois plus grand.

Exercices

Exercice 1

Soit le filtre suivant :

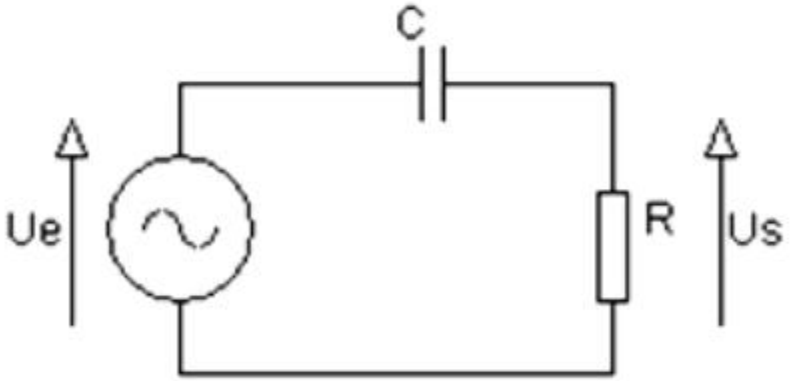


Ue = 10V R = 1k C = 20nF

1. Exprimer sa fonction de transfert Av en fonction de f et fc.
2. Quelle est la fréquence de coupure du circuit?
3. Que valent Us, G(dB) = 20log|Av| et le déphasage φ à la fréquence de coupure?
4. Que valent Us, Av (dB) et φ à fc/10, fc/2, 2 x fc et 10 x fc?
5. Déterminer les équations des asymptotes et tracer les diagrammes de Bode de la phase et de l'amplitude.

Exercice 2

Soit le filtre RC suivant :



1. Exprimer la fonction de transfert Av (Av = tension de sortie / tension d'entrée) en fonction de R et C.
2. Quel est le type de ce filtre et quel son ordre ?
3. Exprimer la fréquence de coupure fc en fonction de R et C.
4. Calculer la valeur du condensateur ainsi que la valeur de la tension de sortie du filtre pour fc = 627kHz, R = 6,8kΩ et Ue = 2V

Exercice 3

1. Donner le schéma d'un filtre RL passe-haut 1er ordre.
2. Exprimer sa fonction de transfert Av en fonction de R et L.
3. La résistance R est de 10kΩ et la fréquence de coupure fc est de 3,5kHz, calculer la valeur de la bobine
4. Une tension de 1,6V est mesurée à la sortie du filtre lorsqu'un signal de 7kHz est appliqué à l'entrée ; calculer la valeur de la tension à l'entrée du filtre.
5. Déterminer les équations des asymptotes et tracer les diagrammes de Bode de la phase et de l'amplitude.

Exercice 4

1. Donner le schéma d'un filtre RL passe-bas 1er ordre
2. Exprimer sa fonction de transfert Av en fonction de R et L.
3. La résistance R est de 820 Ω et la fréquence de coupure fc est de 10kHz.
4. Une tension de 1,91V est mesurée à la sortie du filtre lorsqu'un signal de 1kHz est appliqué à l'entrée. Calculer la valeur de la bobine ainsi que la valeur de la tension à l'entrée du filtre.

Annexes

Rappel des fonctions de transfert des filtres du premier ordre

On définit la fonction de transfert Av par le rapport : tension de sortie / tension d'entrée.

Pour étudier un filtre, on étudie le module et la de sa fonction de transfert.

$Av = |Av| \underline{/\varphi}$ $|Av|$: module φ : phase

Le gain en décibel est définit par : $G(dB) = 20\log|Av|$

Pour des commodités d'écriture, certains auteurs posent :

$s = j\omega = j\,2\,\pi\,f$ $(\omega = 2\pi f)$ ou $p = j\omega$

$\omega_o = 2\,\pi\,f_o = 1 / \tau$ f_o : fréquence de coupure τ : constante de temps

Gm : gain maximal

Rappel des fonctions de transfert des filtres du premier ordre

Passe-bas :

$$Av = Gm\frac{1}{s\tau\ + 1} = Gm\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|Av| = Gm\ \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\varphi = -\ Arctg\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$G(dB) = 20\log Gm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Rappel des fonctions de transfert des filtres du premier ordre

Passe-haut :

□

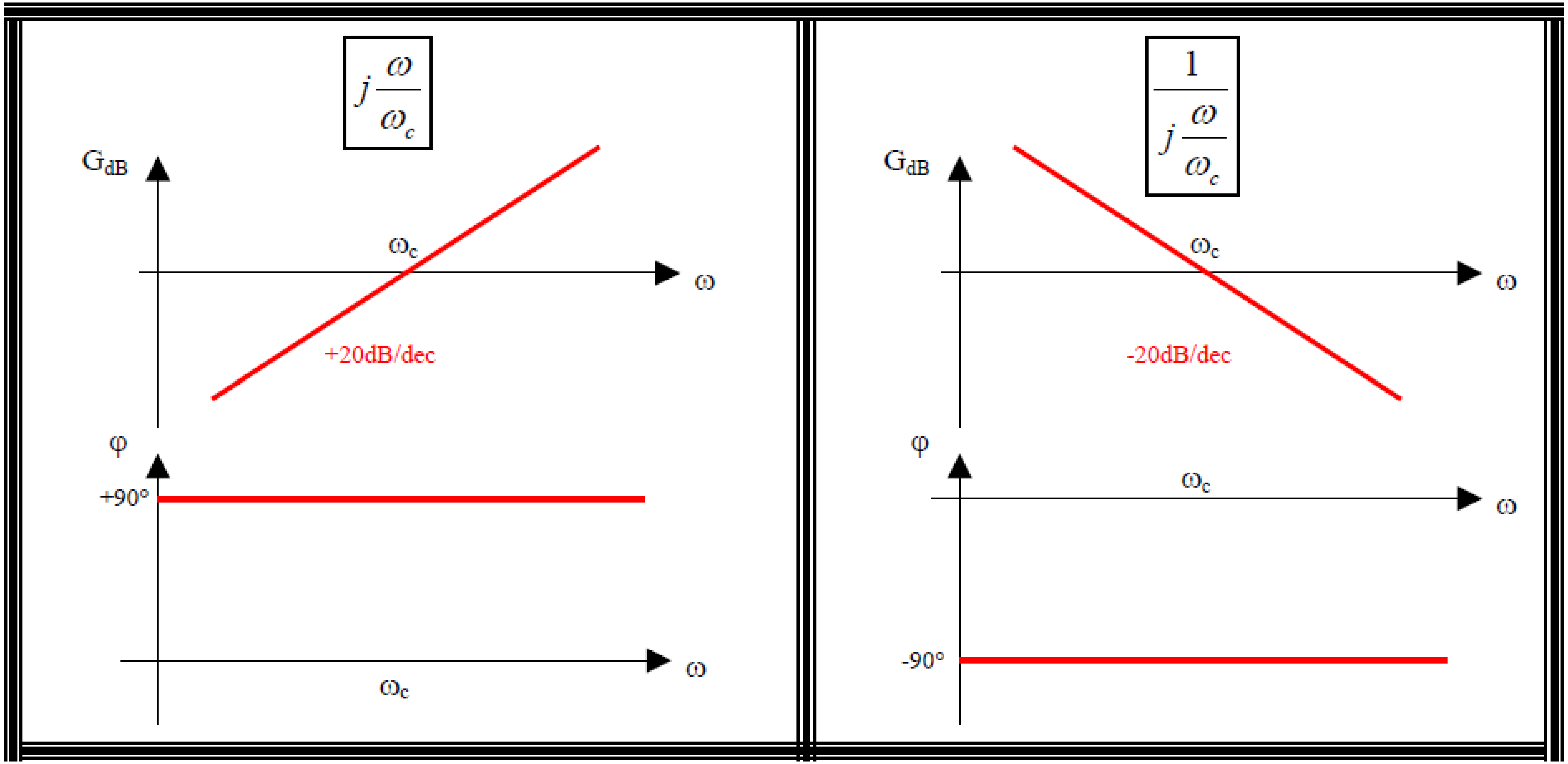
$$Av = Gm\frac{s\tau}{s\tau + 1} = Gm\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|Av| = Gm\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

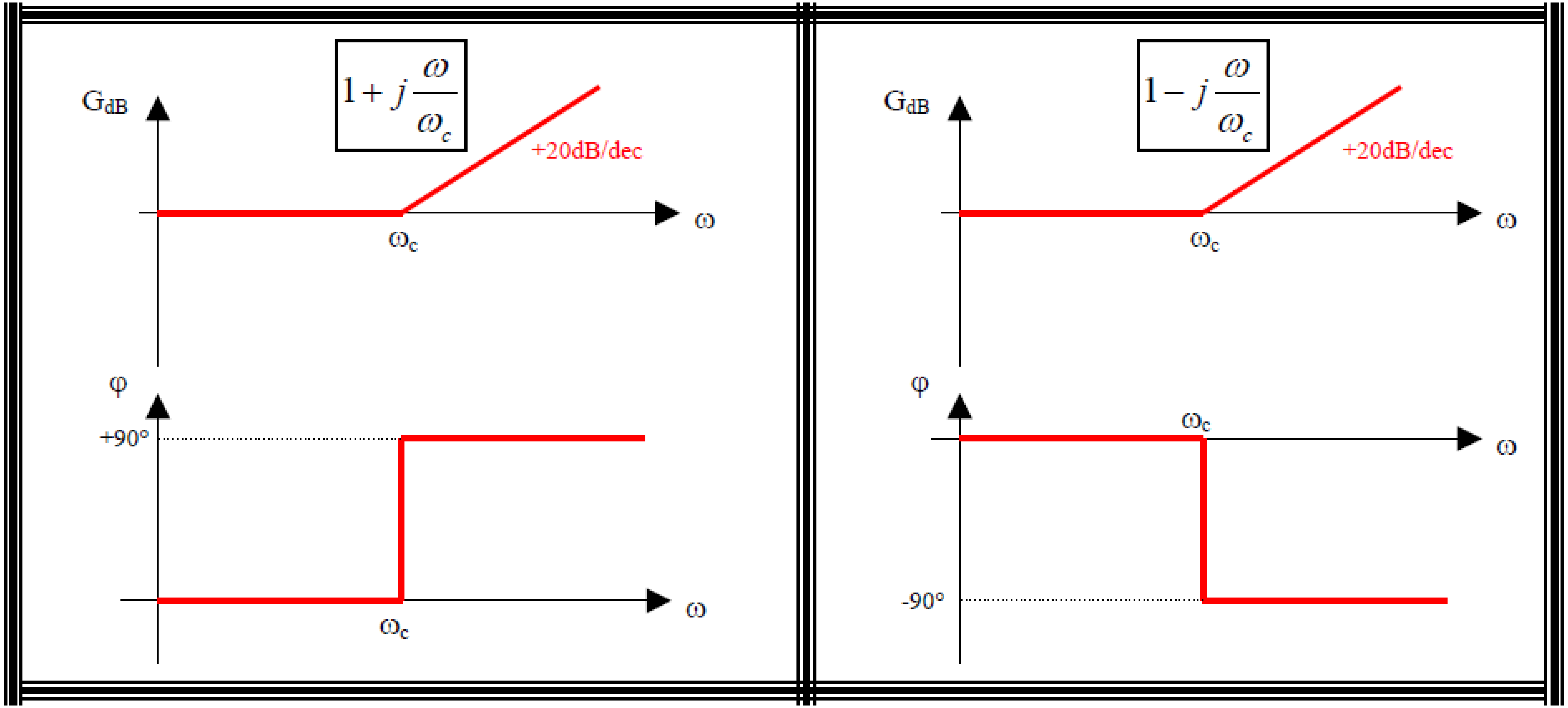
$$\varphi = 90° - \mathrm{Arctg}\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$G(dB) = 20\log Gm\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Annexe 1 : Diagramme asymptotique de Bode



Annexe 1 : Diagramme asymptotique de Bode



Annexe 1 : Diagramme asymptotique de Bode