Analyse Mathématique

Cours n°3: Atelier

EPITA Cyber 1 2024-2025

Exercice 1 :
Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

1. On suppose que $u_0 = 4$.
   (a) Représenter la suite (u_n) dans le plan.
   Que remarquez-vous (variation, minorée, majorée ?).
   (b) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
   En déduire que la suite (u_n) est minorée.
   (c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 3.$$
   En déduire que la suite (u_n) n'est pas majorée.
2. On suppose que $u_0 = 2$.
   (a) Représenter la suite (u_n) dans le plan.
   Que remarquez-vous (variation, minorée, majorée ?).
   (b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   En déduire que la suite (u_n) est majorée.
   (c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2^n + 3.$$
   En déduire que la suite (u_n) n'est pas minorée.

Exercice 2 :
Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \quad et \quad u_0 = 0.$$

Montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \geq n.$$

Exercice 3 :
Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 7} \quad et \quad u_0 = 10.$$

Montrez que la suite (u_n) est strictement décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n > u_{n+1}.$$

Exercice 4 :
Montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

en posant : $P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 5 :
Montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

en posant : $P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 6 :

1. Calculer la somme finie :
$$1 + 2 + \cdots + 2025.$$
2. Calculer la somme finie :
$$1936 + 1937 + \cdots + 2025.$$
3. On pose
$$S = 1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^4.$$
Déterminer $S - \frac{1}{3}S$. Puis, en déduire S.

4. Montrer que : $1/2 = 1 - 1/2$, $1/6 = 1/2 - 1/3$, $1/12 = 1/3 - 1/4$, $1/20 = 1/4 - 1/5$.
En déduire la somme finie : $1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20$

5. Calculer la somme finie :
$$\sum_{p=1}^{p=13} \ln(\frac{p+1}{p}).$$

Exercice 7 : (u_n) est une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 4 \times 3^n + 6n + 7.$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

Déterminer S_n.

Exercice 8 :
Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 2n + 1.$$

1. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique (on précisera sa raison r et son premier terme u_0).

Répondre de deux manières différentes à chacune des deux questions suivantes :

2. On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23}.
3. On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14}.

Exercice 9 :
Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = u_n + 3.$$

1. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique (on précisera sa raison r.).

Répondre aux deux questions suivantes sachant que $u_3 = 9$:

2. On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23}.
3. On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14}.

Exercice 10 :
Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 5 \times 3^n.$$

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique (on précisera sa raison q et son premier terme u_0).

Répondre de deux manières différentes à chacune des deux questions suivantes :

2. On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23}.
3. On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14}.

Exercice 11 :
Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = 3u_n.$$

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique (on précisera sa raison q).

Répondre aux deux questions suivantes sachant que $u_3 = 27$:

2. On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23}.
3. On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14}.

Exercice 12 :
Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4} \quad et \quad u_0 = 0.$$

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = \frac{1}{u_n+1}$.
   Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique (on précisera sa raison r et son premier terme v_0).
2. Déterminer l'expression du terme général v_n en fonction de n.
   En déduire l'expression du terme général u_n.

Exercice 13 :
Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = 3u_n + 4 \quad et \quad u_0 = 0.$$

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = u_n + 2$.
   Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique (on précisera sa raison q et son premier terme v_0).
2. Déterminer l'expression du terme général v_n en fonction de n.
   En déduire l'expression du terme général u_n.
3. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

   Déterminer S_n.

Exercice 14 :
Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 6}{u_n + 4} \quad et \quad u_0 = 0.$$

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = \frac{u_n+3}{u_n-2}$.
   Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique (on précisera sa raison q et son premier terme v_0).
2. Déterminer l'expression du terme général v_n en fonction de n.
   En déduire l'expression du terme général u_n.