



# LLIURAMENT D'INTRODUCCIÓ A L'ASTROFÍSICA: UNDERSTANDING ANALEMMAS

Facultat de ciències

Introducció a l'Astrofísica

Reina Delgado, Airan (1670808)

## ABSTRACT

AGajkdcl

## EXERCICI 1

Un analema és la corba que descriu el Sol al cel si s'observa des d'un lloc fix, a la mateixa hora del dia, cada dia de l'any. L'analema forma una corba que, aproximadament sol ser, una forma de vuit o lemniscata. Es poden observar analemes en altres planetes del Sistema Solar, però tenen una forma diferent de la que s'observa a la Terra, podent arribar a ser corbes diferents d'un vuit (a Mart és molt semblant a una gota d'aigua), tot i que tenen com a característica comuna que sempre són tancades [1]. Un exemple d'analema és el que es pot observar a la figura 1.

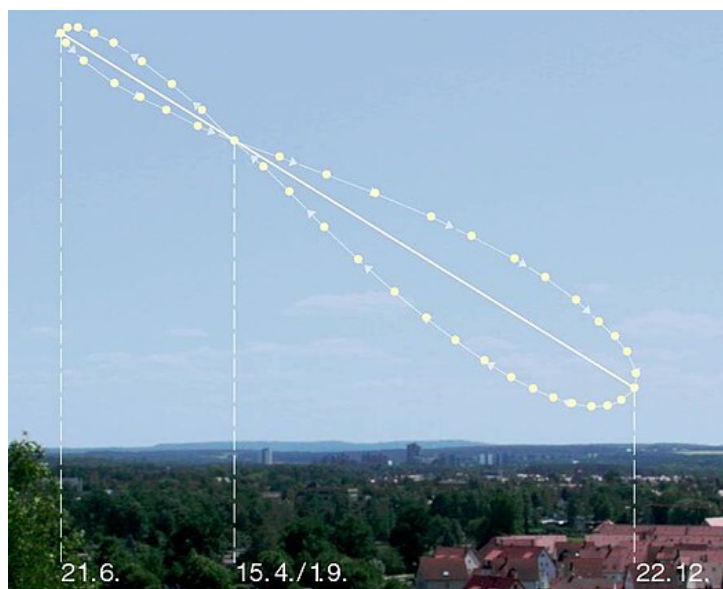


Figura 1: Analema solar per un observador a l'hemisfèri nord. Font: Wikipedia [1].

---

## EXERCICI 2

En coordenades equatorials, un objecte en la bòveda celeste es pot localitzar amb les coordenades "ascensió recta" ( $\alpha$  o *ra*) i "declinació" ( $\delta$  o *dec*). El pla des d'on es defineixen les coordenades és l'equador celestial, que és el pla perpendicular a l'eix de rotació de la Terra coincident amb l'equador terrestre. La declinació és l'angle entre l'equador i el cos celeste i, l'ascensió recta, és l'angle (En hores) del cos al voltant de l'equador celestial. El moviment vertical aparent del Sol en l'analema prové del canvi en la declinació solar al llarg de l'any degut a que la Terra orbita al voltant del Sol amb l'eix de rotació inclinat uns 23.5 graus respecte al pla de l'òrbita [2].

---

## EXERCICI 3

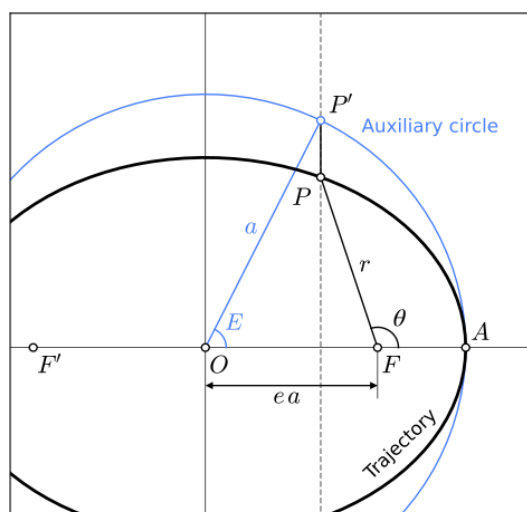
El moviment transversal (Est-Oest) aparent del Sol en l'analema prové del canvi no uniforme de l'ascensió recta solar al llarg de l'any degut als efectes combinats de la inclinació de l'eix de rotació de la Terra i l'eccentricitat de l'òrbita terrestre (Que genera una variació de la velocitat

orbital de la Terra al llarg de l'any) [2]. Aquests dos efectes generen una desigualtat en el moviment aparent del Sol al llarg de l'equador celeste, de manera que el Sol no arriba cada dia al meridià a la mateixa hora segons un rellotge mitjà. Aquest desfasament es quantifica mitjançant l'equació del temps, que expressa la diferència entre el temps solar veritable (Marcat per la posició real del Sol) i el temps solar mitjà (Definit per un moviment solar fictici uniforme) [3].

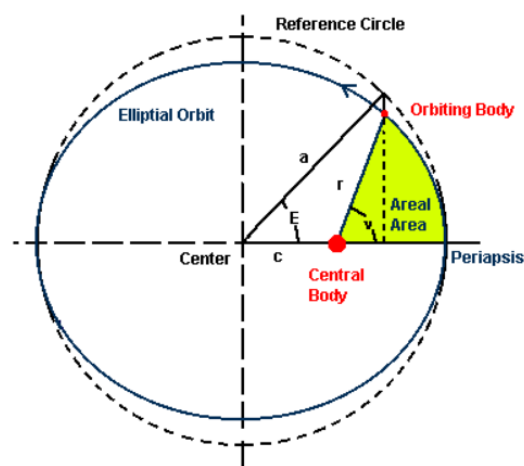
## EXERCICI 4

Per resoldre aquest apartat es necessiten unes matemàtiques complexes i, com s'ha esmentat a l'enunciat de l'entrega, es pot fer us de IA i recursos web. En aquest cas, s'ha emprat com a guia els enllaços [4], [5] i [6], encara que els càlculs intermitjos són pròpis.

Començem, doncs, per entendre i definir els paràmetres de les òrbites en moviments Keplerians. La posició d'un objecte celeste en el sistema solar es pot definir mitjançant la anomàlia veritable  $\nu$  (L'angle que escombra la recta que uneix el focus amb l'objecte des del periheli fins a la posició en la òrbita real), la anomàlia mitja  $M$  (L'angle escombrat si l'objecte estigués en una òrbita circular de radi  $a$ , el semieix major de la elipse) o la anomàlia excèntrica  $E$  (L'angle escombrat en la circumferència hipotètica si la coordenada  $x$  és la real). Per trobar les relacions entre  $M$  i  $\nu$ , serà interessant trobar primer les relacions d'ambdós paràmetres amb  $E$ , per després relacionar-les entre sí. Un diagrama dels paràmetres restants es troba en la figura de l'esquerra de 2.



(a) Esquema visual per entendre els paràmetres. Font: Wikipedia [5].



(b) Esquema visual per entendre les diferents àrees necessàries en la demostració. Font: Bogan [6].

Figura 2: Esquemes necessaris per entendre la demostració

Per definició d' $E$ ,  $\cos(E) = \frac{x}{a}$ . Sabem també que l'equació de la elipse és  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  i, com que el primer terme és  $\cos^2(E)$ , el segon ha de ser  $\sin^2(E)$  per complir l'igualtat trigonomètrica. Aquestes dos relacions amb la definició d'excentricitat  $e$  ens donen 3 relacions importants:

$$\boxed{\cos(E) = \frac{x}{a}} \quad \boxed{\sin(E) = \frac{y}{b}} \quad \boxed{\epsilon \equiv \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \quad (1)$$

Amb aquestes relacions, podem trobar una expressió que ens relacioni  $E$  i  $\nu$  per començar. Sabem que  $\cos(E) = \frac{x}{a} = \frac{\epsilon a + r \cos(\nu)}{a}$ , anem doncs a trobar una expressió per  $r$  (Amb arguments geomètrics):

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (\epsilon a - x)^2 = b^2 \sin^2(E) + (\epsilon a - a \cos(E))^2 = \dots \\ &\quad \left[ \epsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \implies b^2 = a^2(1 - \epsilon^2) \right] \\ \dots &= a^2[(1 - \epsilon^2)(1 - \cos^2(E)) + (\epsilon - \cos(E))^2] = \\ &= a^2[1 - \cos^2(E) - \epsilon^2 + \epsilon^2 \cos^2(E) + \epsilon^2 + \cos^2(E) - 2\epsilon \cos(E)] = \\ &= a^2[1 - 2\epsilon \cos(E) + \epsilon^2 \cos^2(E)] = a^2[1 - \epsilon \cos(E)]^2 \end{aligned}$$

Tenint doncs una expressió per  $r$ , seguim amb el càlcul que estàvem fent abans i, després, per trobar una expressió  $\sin(E)$  en funció de  $\nu$ , apliquem la identitat trigonomètrica:

$$\begin{aligned} \cos(E) &= \frac{\epsilon a + [a(1 - \epsilon \cos(E))] \cos(\nu)}{a} = \epsilon + \cos(\nu) - \epsilon \cos(E) \cos(\nu) \\ \cos(E)[1 + \epsilon \cos(\nu)] &= \epsilon + \cos(\nu) \implies \cos(E) = \frac{\epsilon + \cos(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(E) &= \sqrt{1 - \cos^2(E)} = \frac{\sqrt{[1 + \epsilon \cos(\nu)]^2 - [\epsilon + \cos(\nu)]^2}}{1 + \epsilon \cos(\nu)} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2(\nu) - \epsilon^2 - \cos^2(\nu)}}{1 + \epsilon \cos(\nu)} = \frac{\sqrt{[1 - \cos^2(\nu)][1 - \epsilon^2]}}{1 + \epsilon \cos(\nu)} \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\cos(E) = \frac{\epsilon + \cos(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)}} \quad \boxed{\sin(E) = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)}} \quad (2)$$

Ara que tenim les relacions  $E(\nu)$ , anem a trobar la relació  $M(E)$ . Aquesta relació es troba directament de la segona llei de Kepler. La segona llei de Kepler ens diu que "El segment que uneix un planeta amb el Sol escombra àrees iguals per temps iguals". Per intentar trobar la relació  $M(E)$ , necessitem definir 3 àrees diferents i aplicar la segona llei de Kepler. Si observem la imatge de la dreta de la figura 2, definim l'àrea de referència ( $A_{ref}$ ) com l'àrea que escombra el radi de la circumferència hipotètica que forma un angle  $E$ ; definim l'àrea auxiliar ( $A_{aux}$ ) com l'àrea escombrada en l'elipse pel segment que uneix el centre amb l'objecte real; finalment, definim l'àrea real ( $A_{real}$ ) com l'àrea escombrada en l'elipse pel segment que uneix el focus amb l'objecte real (Es veu sombread en verd en la imatge esmentada). Definint aquestes àrees, tenim:

$$\begin{aligned}
A_{ref} &= (\text{Fracció Angular}) \cdot A_{cercle} = \frac{E}{2\pi} \pi a^2 = E \frac{a^2}{2} \\
A_{aux} &= A_{ref} \frac{b}{a} = A_{ref} \sqrt{1 - \epsilon^2} = E \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} \\
\left[ A_{aux} - A_{real} = A_{triangle} \frac{b}{a} = \frac{[base][altura] b}{2} \frac{b}{a} = \frac{[a][a\epsilon \sin(E)]}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} \right] \\
A_{real} &= A_{aux} - A_{triangle} = \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} [E - \epsilon \sin(E)]
\end{aligned}$$

La segona llei de Kepler ens diu que  $\frac{A}{t} = ct \implies A = Kt \forall t$ , en especial és vàlid per  $t = T$ , que és l'àrea de l'elipse sencera,  $A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = KT$ . Per tant, podem escriure:

$$\begin{aligned}
KT &= \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} \implies K = \frac{\pi a^2}{T} \sqrt{1 - \epsilon^2} \\
Kt &= \frac{\pi a^2}{T} \sqrt{1 - \epsilon^2} t = \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} [E - \epsilon \sin(E)] \implies \frac{2\pi t}{T} = E - \epsilon \sin(E)
\end{aligned}$$

Com sabem,  $M$  és la posició hipotètica en l'òrbita circular. Com l'òrbita és circular, per la primera llei de Kepler sabem que el Sol s'ha de trobar al centre i, per tant, la velocitat angular és constant. Per aquesta raó, podem definir  $M$  com l'angle escombrat en el temps  $t$ , és a dir,  $M \equiv 2\pi \frac{t}{T}$ , per tant:

$$\boxed{M(E) = E - \epsilon \sin(E)} \quad (3)$$

Ara, ja tenim totes les relacions necessàries per trobar  $M(\nu)$ . Per trobar aquesta relació, només hem de substituir la relació  $E(\nu)$  (Eq. 2) del  $\sin(E)$  en la relació  $M(E)$  (Eq. 3). Un cop fet això, trobem la relació no transcendental següent:

$$\boxed{M(\nu) = \arcsin \left[ \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)} \right] - \epsilon \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)}} \quad (4)$$

Com es pot observar, trobar la relació inversa  $\nu(M)$  es complica bastant. En el moviment Keplerià, les coordenades del cos celeste es repeteixen de manera periòdica en cada òrbita, fet que permet descriure-les mitjançant sèries periòdiques en funció de variables angulars creixents. L'anomalia mitjana  $M$ , que creix linealment amb el temps, és especialment útil perquè permet expressar altres variables orbitals en funció del temps. L'anomalia veritable  $\nu$ , tot i ser analítica respecte de  $M$ , no és una funció entera i té un radi de convergència limitat si s'expressa com a sèrie de potències. Tanmateix, com a funció periòdica, es pot representar per una sèrie de Fourier que convergeix globalment. Els coeficients d'aquesta sèrie depenen d' $\epsilon$  i s'expressen mitjançant funcions de Bessel del primer tipus. De forma genèrica, la sèrie que aproxima la funció  $\nu(M)$  és:

$$\nu(M) = M + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left[ J_s(s\epsilon) + \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p} [1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}]^p [J_{s-p}(s\epsilon) - J_{s+p}(s\epsilon)] \right] \sin(sM)$$

Si expandim cadascuna de les funcions de Bessel i aproximem per  $\epsilon \rightarrow 0$  (Que és bona aproximació considerant que per la Terra  $\epsilon \approx 0.0167$ ), podem trobar una aproximació de la funció  $\nu(M)$  que és vàlida per a qualsevol valor de  $M$ . Aquesta aproximació queda com:

$$\boxed{\nu(M) \simeq M + 2\epsilon \sin(M) + \frac{5}{4}\epsilon^2 \sin(2M)} \quad (5)$$

Ón hem aproximat per sota d'ordre  $\epsilon^3$ . L'explicació de la versió aproximada de  $\nu(M)$  és bastant complexe i requereix matemàtiques extenses y avançades. Com s'ha dit a l'inici d'aquest exercici, s'han emprat diversos recursos com a guia. En específic, per aquesta part final, s'ha emprat la referència [4] de la Wikipedia. Per trobar una expressió de major ordre, es poden trobar els termes d'ordre superior en la referència esmentada.

Finalment, per completitud, cal esmentar que la diferència  $\nu - M$  és la quantitat anomenada "Equació de centre". Amb l'aproximació feta, l'equació de centre és  $C(M) \simeq 2\epsilon \sin(M) + \frac{5}{4}\epsilon^2 \sin(2M)$ . Aquesta quantitat és un paràmetre clau a l'hora de trobar la "Equació de temps", que ens permetrà graficar l'analema solar en exercicis propers.

## EXERCICI 5

L'equació del temps descriu la discrepància entre dos tipus de temps solar. Aquests dos temps són el temps solar aparent, que segueix directament el moviment del Sol, i el temps solar mitjà, que segueix un Sol teòric amb un moviment uniforme al llarg de l'equador celeste. El temps solar aparent es pot obtenir mesurant la posició actual (angle horari) del Sol, tal com indica (amb precisió limitada) un rellotge de sol. El temps solar mitjà, per al mateix lloc, seria el temps indicat per un rellotge regular ajustat de manera que, al llarg de l'any, les seves diferències respecte al temps solar aparent tinguin una mitjana de zero.

L'equació del temps presenta dues oscil·lacions amb forma d'ona sinusoidal perquè hi ha dues causes físiques independents que afecten el moviment aparent del Sol respecte al temps solar mitjà. La primera és l'excentricitat de l'òrbita terrestre: com que l'òrbita de la Terra és el·líptica, la seva velocitat orbital varia al llarg de l'any. Aquesta variació provoca una desviació periòdica en la posició del Sol aparent, amb una ona sinusoidal de període anual. La segona causa és la inclinació de l'eix de rotació de la Terra respecte al pla de la seva òrbita (la eclíptica). Aquest angle d'uns  $\sim 23.5^\circ$  fa que el moviment aparent del Sol al llarg de l'equador celeste no sigui uniforme, i això introdueix una segona variació també de tipus sinusoidal, però amb el doble de freqüència angular. El efecte de la doble freqüència prové de que, en projectar el sol sobre el pla eclíptic celeste, ens dona una expressió de la forma  $\tan(\alpha) = \cos(\sim 23.5^\circ) \tan(\lambda)$ , on  $\alpha$  és l'ascensió recta i  $\lambda$  és la longitud eclíptica. Quan expandim la funció  $\alpha(\lambda)$  en aquesta expressió, trobem que s'aproxima a una serie de Fourier truncada de forma que queda  $\alpha(\lambda) = \lambda - C \sin(2\lambda) + \dots$ , ón  $A$  és una constant.

La forma general de l'equació, trobada teòricament, és  $\Delta t_{AM} \approx A \sin(\omega t) + B \sin(2\omega t)$ . En la literatura es troba una expressió on s'han aproximat experimentalment els valors de  $A$ ,  $B$  i  $\omega$ , que és [3]:

$$\boxed{\Delta t_{AM}(y, d) = -7.659 \sin[D(y, d)] + 9.863 \sin[2D(y, d) + 3.5932] \text{ [minuts]}} \quad \text{tal que:} \quad (6)$$

$$D(y, d) = 6.24004077 + 0.01720197[365(y - 2000) + d] \quad (\text{On } d \text{ és el dia de l'any } y)$$

Aquesta expressió es pot avaluar per l'any 2025 si substituïm aquest valor en la funció auxiliar  $D(y, d)$ . Aquesta funció auxiliar queda doncs com:

$$D(2025, d) \equiv D(d) = 163.3155293 + 0.01720197d \quad (7)$$

És interessant observar com l'equació del temps està relacionada directament amb el temps sideral aparent o, simplement, el temps sideral ( $T_{sideral}$ ). Mentre que el temps solar es basa en la rotació de la Terra en relació amb el Sol, el temps sideral es basa en la rotació de la Terra respecte a les estrelles fixes del cel. Un dia sideral té una durada de 23 hores, 56 minuts i 4 segons, mentre que un dia solar, que és el temps que mesuren els rellotges habituals, té una durada de 24 hores. Aquesta diferència es deu al fet que la Terra, a mesura que rota sobre el seu eix, també es mou una mica en la seva òrbita al voltant del Sol, i per tant necessita fer una mica més de rotació per tornar a situar el Sol en la mateixa posició al cel. Es pot demostrar que  $T_{aparent} = T_{sideral} + \alpha$  [3], on  $\alpha$  és l'ascensió recta del Sol.

## EXERCICI 6

Per realitzar aquest exercici, s'ha escrit un script de Python que es pot trobar en el Github del treball. L'arxiu de l'script es diu analema.py. El codi et calcula la posició del Sol [(dec,ra) i la (alt,az)], et calcula la diferència entre el temps solar mitjà i el temps solar aparent a partir de l'equació del temps i, finalment, et ploteja l'analema solar vist des de Bellaterra. La imatge generada es pot veure en la figura 3.

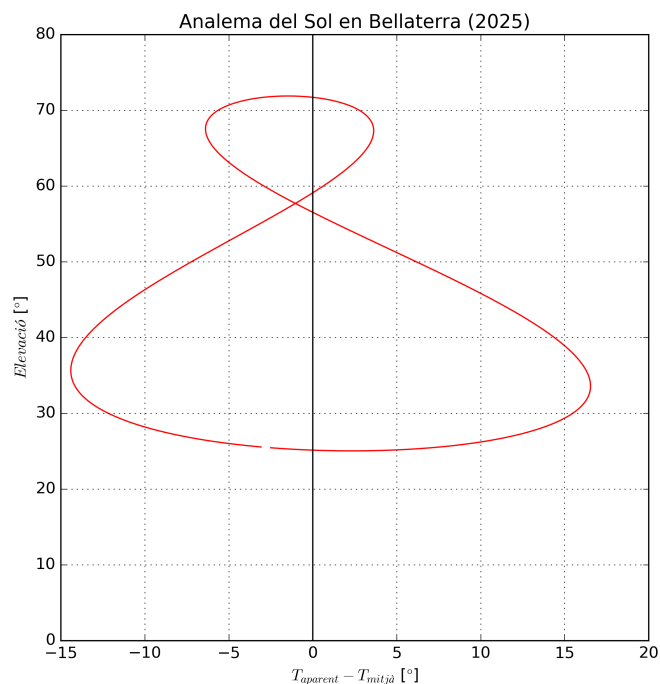


Figura 3: Analema solar vist des de Bellaterra. Font: Github del treball.

Eajldkdsñ

---

## **EXERCICI 7**

ahajaklsl

---

## **EXERCICI 8**

ahajaklsl

---

## **EXERCICI 9**

ahajaklsl

---

## **EXERCICI 10**

ahajaklsl

---



## Referències

- [1] Wikipedia. *Analema*. 2025. URL: <https://es.wikipedia.org/wiki/Analema> (cons. 22-04-2025).
- [2] Wikipedia. *Analemma*. 2025. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Analemma> (cons. 22-04-2025).
- [3] Wikipedia. *Equation of time*. 2025. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Equation\\_of\\_time](https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_time) (cons. 22-04-2025).
- [4] Wikipedia. *Equation of center*. 2025. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Equation\\_of\\_the\\_center](https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_the_center) (cons. 23-04-2025).
- [5] Wikipedia. *Eccentric anomaly*. 2024. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Eccentric\\_anomaly](https://en.wikipedia.org/wiki/Eccentric_anomaly) (cons. 23-04-2025).
- [6] Wikipedia. *Determination of Positions in Orbits*. URL: [https://www.bogan.ca/orbits/kepler/e\\_anomly.html#:~:text=2%CF%80t%2FP%20%3D%20E%20%2D%20e,represent%20by%20the%20letter%2C%20M.](https://www.bogan.ca/orbits/kepler/e_anomly.html#:~:text=2%CF%80t%2FP%20%3D%20E%20%2D%20e,represent%20by%20the%20letter%2C%20M.) (cons. 23-04-2025).