Universitat Autònoma de Barcelona

LLIURAMENT D'INTRODUCCIÓ A L'ASTROFÍSICA: UNDERSTANDING ANALEMMAS

Facultat de ciències

Introducció a l'Astrofísica

Reina Delgado, Airan (1670808)

ABSTRACT

AGajkdkl

EXERCICI 1

Un analema és la corba que descriu el Sol al cel si s'observa des d'un lloc fix, a la mateixa hora del dia, cada dia de l'any. L'analema forma una corba que, aproximadament sol ser, una forma de vuit o lemniscata. Es poden observar analemes en altres planetes del Sistema Solar, però tenen una forma diferent de la que s'observa a la Terra, podent arribar a ser corbes diferents d'un vuit (a Mart és molt semblant a una gota d'aigua), tot i que tenen com a característica comuna que sempre són tancades [1]. Un exemple d'analema és el que es pot observar a la figura 1.

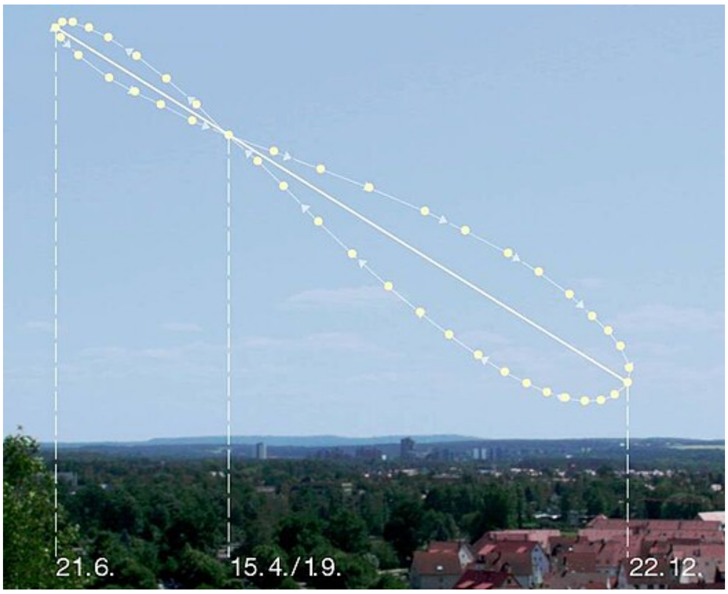


Figura 1: Analema solar per un observador a l'hemisfèri nord. Font: Wikipedia [1].

EXERCICI 2

En coordenades equatorials, un objecte en la bòveda celeste es pot localitzar amb les coordenades "ascensió recta"(α o ra) i "declinació"(δ o dec). El pla des d'ón es defineixen les coordenades és l'equador celestial, que és el pla perpendicular a l'eix de rotació de la Terra coincident amb l'equador terrestre. La declinació és l'angle entre l'equador i el cos celeste i, l'ascensió recta, és l'angle (En hores) del cos al voltant de l'equador celestial. El moviment vertical aparent del Sol en l'analema prové del canvi en la declinació solar al llarg de l'any degut a que la Terra orbita al voltant del Sol amb l'eix de rotació inclinat uns 23.5 graus respecte al pla de l'òrbita [2].

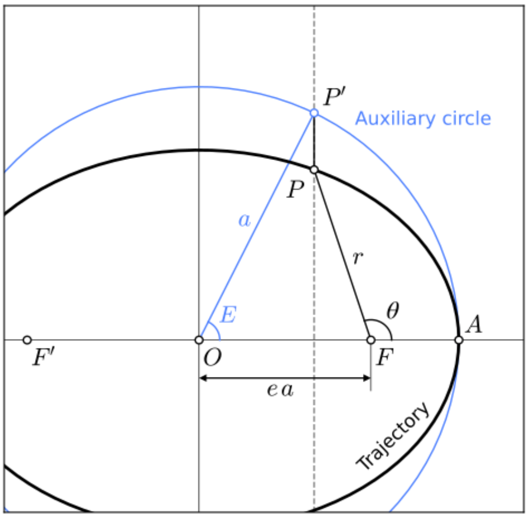
EXERCICI 3

El moviment transversal (Est-Oest) aparent del Sol en l'analema prové del canvi no uniforme de l'ascensió recta solar al llarg de l'any degut als efectes combinats de la inclinació de l'eix de rotació de la Terra i l'eccentricitat de l'òrbita terrestre (Que genera una variació de la velocitat orbital de la Terra al llarg de l'any) [2]. Aquests dos efectes generen una desigualtat en el moviment aparent del Sol al llarg de l'equador celeste, de manera que el Sol no arriba cada dia al meridià a la mateixa hora segons un rellotge mitjà. Aquest desfasament es quantifica mitjançant l'equació del temps, que expressa la diferència entre el temps solar veritable (Marcat per la posició real del Sol) i el temps solar mitjà (Definit per un moviment solar fictici uniforme) [3].

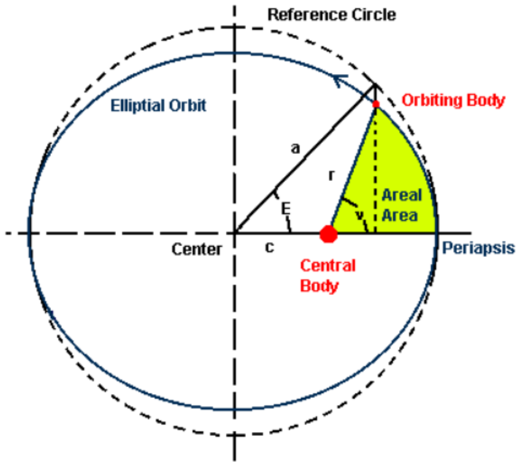
EXERCICI 4

Per resoldre aquest apartat es necesiten unes matemàtiques complexes i, com s'ha esmentat a l'enunciat de l'entrega, es pot fer us de IA i recursos web. En aquest cas, s'ha emprat com a guía els enllaços [4], [5] i [6], encara que els càlculs intermitjos són própis.

Començem, doncs, per entendre i definir els paràmetres de les órbites en moviments Keplerians. La posició d'un objecte celeste en el sistema solar es pot definir mitjançant la anomalía veritable ν (L'angle que escombra la recta que uneix el focus amb l'objecte des del periheli fins a la posició en la órbita real), la anomalía mitja M (L'angle escombrat si l'objecte estigués en una órbita circular de radi a, el semieix major de la elípse) o la anomalía excèntrica E (L'angle escombrat en la circunferència hipotètica si la coordenada x és la real). Per trobar les relacions entre M i ν, serà interessant trobar primer les relacions d'ambdós paràmetres amb E, per després relacionarles entre sí. Un diagrama dels paràmetres restants es troba en la figura de l'esquerra de 2.



(a) Esquema visual per entendre els paràmetres. Font: Wikipedia [5].



(b) Esquema visual per entendre les diferents àrees necesàries en la demostració. Font: Bogan [6].

Figura 2: Esquemes necesàris per entendre la demostració

Per definició d'E, $cos(E) = \frac{x}{a}$. Sabem també que l'equació de la elipse és $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i, com que el primer terme és $cos^2(E)$, el segón ha de ser $sin^2(E)$ per cumplir l'igualtat trigonomètrica. Aquestes dos relacions amb la definició d'excentricitat ϵ ens donen 3 relacions importants:

$$\boxed{\cos(E) = \frac{x}{a}} \quad \boxed{\sin(E) = \frac{y}{b}} \quad \boxed{\epsilon \equiv \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \tag{1}$$

Amb aquestes relacions, podem trobar una expresió que ens relacioni E i ν per començar. Sabem que $cos(E) = \frac{x}{a} = \frac{\epsilon a + r cos(\nu)}{a}$, anem doncs a trobar una expressió per r (Amb arguments geomètrics):

$$
\begin{aligned}
r^2 &= y^2 + (\epsilon a - x)^2 = b^2 sin^2(E) + (\epsilon a - acos(E))^2 = ... \\
&\left[\epsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \implies b^2 = a^2(1-\epsilon^2)\right] \\
... &= a^2[(1-\epsilon^2)(1-cos^2(E)) + (\epsilon - cos(E))^2] = \\
&= a^2[1 - cos^2(E) - \epsilon^2 + \epsilon^2 cos^2(E) + \epsilon^2 + cos^2(E) - 2\epsilon cos(E)] = \\
&= a^2[1 - 2\epsilon cos(E) + \epsilon^2 cos^2(E)] = a^2[1 - \epsilon cos(E)]^2
\end{aligned}
$$

Tenint doncs una expressió per r, seguim amb el càlcul que estàvem fent abans i, després, per trobar una expressió $sin(E)$ en funció de ν, apliquem la identitat trigonomètrica:

$$
\begin{aligned}
cos(E) &= \frac{\epsilon a + [a(1-\epsilon cos(E))]cos(\nu)}{a} = \epsilon + cos(\nu) - \epsilon cos(E)cos(\nu) \\
cos(E)[1+\epsilon cos(\nu)] &= \epsilon + cos(\nu) \implies cos(E) = \frac{\epsilon + cos(\nu)}{1+\epsilon cos(\nu)} //
\end{aligned}
$$

$$
sin(E) = \sqrt{1 - cos^2(E)} = \frac{\sqrt{[1+\epsilon cos(\nu)]^2 - [\epsilon + cos(\nu)]^2}}{1+\epsilon cos(\nu)} =
$$

$$
\frac{\sqrt{1+\epsilon^2 cos^2(\nu) - \epsilon^2 - cos^2(\nu)}}{1+\epsilon cos(\nu)} = \frac{\sqrt{[1-cos^2(\nu)][1-\epsilon^2]}}{1+\epsilon cos(\nu)}
$$

$$
\implies \boxed{cos(E) = \frac{\epsilon + cos(\nu)}{1+\epsilon cos(\nu)}} \quad \boxed{sin(E) = \frac{\sqrt{1-\epsilon^2} sin(\nu)}{1+\epsilon cos(\nu)}} \tag{2}
$$

Ara que tenim les relacions $E(\nu)$, anem a trobar la relació $M(E)$. Aquesta relació es troba directament de la segona llei de Kepler.

EXERCICI 5

ahajaklsl

EXERCICI 6

ahajaklsl

EXERCICI 7

ahajaklsl

EXERCICI 8

ahajaklsl

EXERCICI 9

ahajaklsl

EXERCICI 10

ahajaklsl

Referències

[1] Wikipedia. *Analema*. 2025. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Analema (cons. 22-04-2025).

[2] Wikipedia. *Analemma*. 2025. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Analemma (cons. 22-04-2025).

[3] Wikipedia. *Equation of time*. 2025. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_time (cons. 22-04-2025).

[4] Wikipedia. *Equation of center*. 2025. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_the_center (cons. 23-04-2025).

[5] Wikipedia. *Eccentric anomaly*. 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Eccentric_anomaly (cons. 23-04-2025).

[6] Wikipedia. *Determination of Positions in Orbits*. URL: https://www.bogan.ca/orbits/kepler/e_anomly.html#:~:text=2%CF%80t%2FP%20%3D%20E%20%2D%20e,represent%20by%20the%20letter%2C%20M. (cons. 23-04-2025).