



LLIURAMENT D'INTRODUCCIÓ A L'ASTROFÍSICA: UNDERSTANDING ANALEMMAS

Facultat de ciències

Introducció a l'Astrofísica

Reina Delgado, Airan (1670808)

NOTA:

En la realització del treball s'ha generat contingut pròpi que, amb intenció de simplificar el treball del corrector, s'ha agrupat en un Github. El link del Github és el següent: https://github.com/AiranReina/treball_astro/tree/main. Allà es troba un README.md que resumeix els arxius d'interés en el treball i les seves localitzacions.

EXERCICI 1

Un analema és la corba que descriu el Sol al cel si s'observa des d'un lloc fix, a la mateixa hora del dia, cada dia de l'any. L'analema forma una corba que, aproximadament sol ser, una forma de vuit o lemniscata. Es poden observar analemes en altres planetes del Sistema Solar, però tenen una forma diferent de la que s'observa a la Terra, podent arribar a ser corbes diferents d'un vuit (a Mart és molt semblant a una gota d'aigua), tot i que tenen com a característica comuna que sempre són tancades [1]. Un exemple d'analema és el que es pot observar a la figura 1.

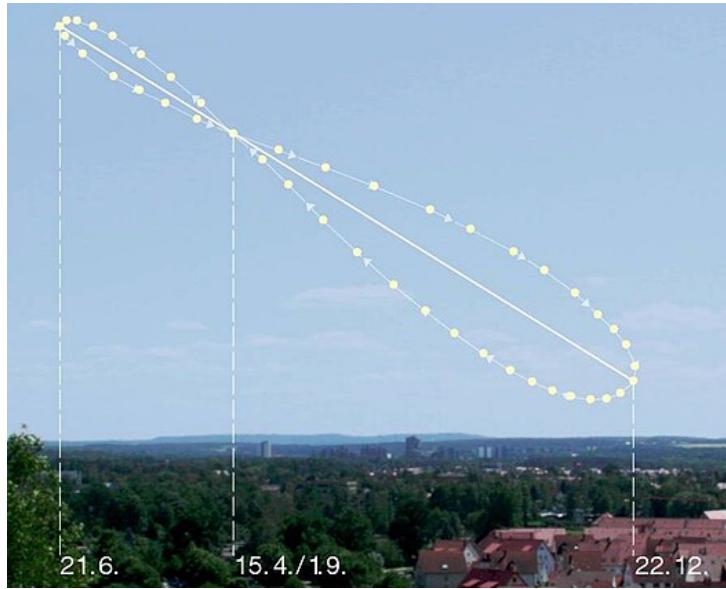


Figura 1: Analema solar per un observador a l'hemisferi nord. Font: Wikipedia [1].

EXERCICI 2

En coordenades equatorials, un objecte en la bóveda celeste es pot localitzar amb les coordenades "ascensió recta" (α o ra) i "declinació" (δ o dec). El pla des d'on es defineixen les coordenades és l'equador celestial, que és el pla perpendicular a l'eix de rotació de la Terra coincident amb l'equador terrestre. La declinació és l'angle entre l'equador i el cos celeste i, l'ascensió recta, és l'angle (En hores) del cos al voltant de l'equador celestial. El moviment vertical aparent del Sol en l'analema prové del canvi en la declinació solar al llarg de l'any degut a que la Terra orbita al voltant del Sol amb l'eix de rotació inclinat uns 23.5 graus respecte al pla de l'òrbita [2].

EXERCICI 3

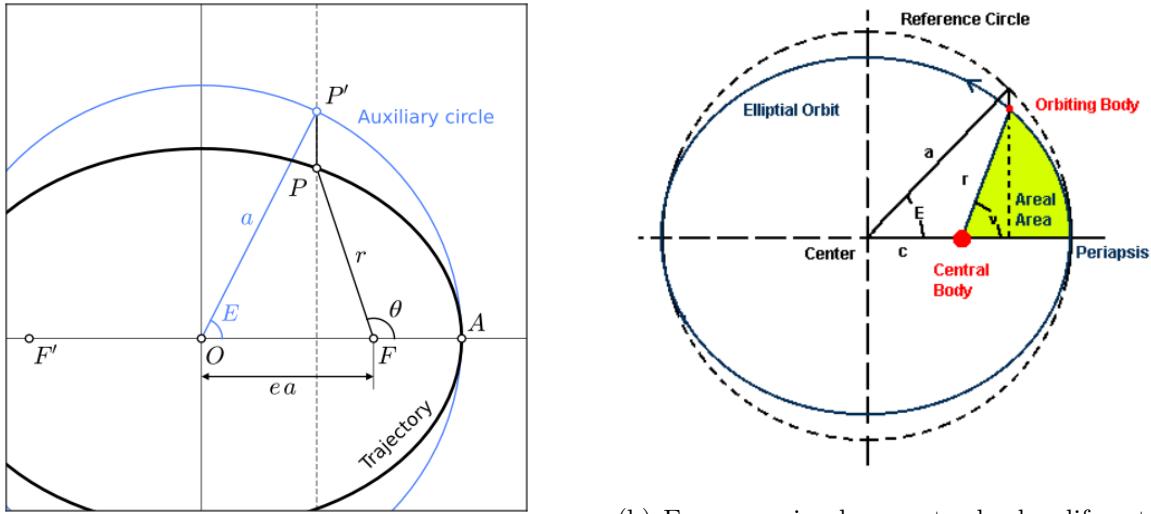
El moviment transversal (Est-Oest) aparent del Sol en l'analema prové del canvi no uniforme de l'ascensió recta solar al llarg de l'any degut als efectes combinats de la inclinació de l'eix de rotació de la Terra i l'eccentricitat de l'òrbita terrestre (Que genera una variació de la velocitat

orbital de la Terra al llarg de l'any) [2]. Aquests dos efectes generen una desigualtat en el moviment aparent del Sol al llarg de l'equador celeste, de manera que el Sol no arriba cada dia al meridià a la mateixa hora segons un rellotge mitjà. Aquest desfasament es quantifica mitjançant l'equació del temps, que expressa la diferència entre el temps solar veritable (Marcat per la posició real del Sol) i el temps solar mitjà (Definit per un moviment solar fictici uniforme) [3].

EXERCICI 4

Per resoldre aquest apartat es necesiten unes matemàtiques complexes i, com s'ha esmentat a l'enunciat de l'entrega, es pot fer us de IA i recursos web. En aquest cas, s'ha emprat com a guia els enllaços [4], [5] i [6], encara que els càlculs intermitjos són propis.

Començem, doncs, per entendre i definir els paràmetres de les órbites en moviments Keplerians. La posició d'un objecte celeste en el sistema solar es pot definir mitjançant la anomalia veritable ν (L'angle que escombra la recta que uneix el focus amb l'objecte des del periheli fins a la posició en la órbita real), la anomalia mitja M (L'angle escombrat si l'objecte estigués en una órbita circular de radi a , el semieix major de la elipse) o la anomalia excèntrica E (L'angle escombrat en la circumferència hipotètica si la coordenada x és la real). Per trobar les relacions entre M i ν , serà interessant trobar primer les relacions d'ambdós paràmetres amb E , per després relacionarles entre sí. Un diagrama dels paràmetres restants es troba en la figura de l'esquerra de 2.



(a) Esquema visual per entendre els paràmetres. Font: Wikipedia [5].

(b) Esquema visual per entendre les diferents àrees necessàries en la demostració. Font: Bogan [6].

Figura 2: Esquemes necessaris per entendre la demostració

Per definició d' E , $\cos(E) = \frac{x}{a}$. Sabem també que l'equació de la elipse és $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i, com que el primer terme és $\cos^2(E)$, el segon ha de ser $\sin^2(E)$ per cumplir l'igualtat trigonomètrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Aquestes dues relacions amb la definició d'excentricitat e ens donen 3 relacions importants:

$$\boxed{\cos(E) = \frac{x}{a}} \quad \boxed{\sin(E) = \frac{y}{b}} \quad \boxed{\epsilon \equiv \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \quad (1)$$

Amb aquestes relacions, podem trobar una expressió que ens relacioni E i ν per començar. Sabem que $\cos(E) = \frac{x}{a} = \frac{\epsilon a + r \cos(\nu)}{a}$, anem doncs a trobar una expressió per r (Amb arguments geomètrics):

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (\epsilon a - x)^2 = b^2 \sin^2(E) + (\epsilon a - a \cos(E))^2 = \dots \\ &\quad \left[\epsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \implies b^2 = a^2(1 - \epsilon^2) \right] \\ \dots &= a^2[(1 - \epsilon^2)(1 - \cos^2(E)) + (\epsilon - \cos(E))^2] = \\ &= a^2[1 - \cos^2(E) - \epsilon^2 + \epsilon^2 \cos^2(E) + \epsilon^2 + \cos^2(E) - 2\epsilon \cos(E)] = \\ &= a^2[1 - 2\epsilon \cos(E) + \epsilon^2 \cos^2(E)] = a^2[1 - \epsilon \cos(E)]^2 \end{aligned}$$

Tenint doncs una expressió per r , seguim amb el càlcul que estàvem fent abans i, després, per trobar una expressió $\sin(E)$ en funció de ν , apliquem la identitat trigonomètrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$\begin{aligned} \cos(E) &= \frac{\epsilon a + [a(1 - \epsilon \cos(E))] \cos(\nu)}{a} = \epsilon + \cos(\nu) - \epsilon \cos(E) \cos(\nu) \\ \cos(E)[1 + \epsilon \cos(\nu)] &= \epsilon + \cos(\nu) \implies \cos(E) = \frac{\epsilon + \cos(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(E) &= \sqrt{1 - \cos^2(E)} = \frac{\sqrt{[1 + \epsilon \cos(\nu)]^2 - [\epsilon + \cos(\nu)]^2}}{1 + \epsilon \cos(\nu)} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2(\nu) - \epsilon^2 - \cos^2(\nu)}}{1 + \epsilon \cos(\nu)} = \frac{\sqrt{[1 - \cos^2(\nu)][1 - \epsilon^2]}}{1 + \epsilon \cos(\nu)} \\ \implies \cos(E) &= \frac{\epsilon + \cos(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)} \quad \boxed{\sin(E) = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)}} \quad (2) \end{aligned}$$

Ara que tenim les relacions $E(\nu)$, anem a trobar la relació $M(E)$. Aquesta relació es troba directament de la segona llei de Kepler. La segona llei de Kepler ens diu que "*El segment que uneix un planeta amb el Sol escombra àrees iguals per temps iguals*". Per intentar trobar la relació $M(E)$, necesitem definir 3 àrees diferents i aplicar la segona llei de Kepler. Si observem la imatge de la dreta de la figura 2, definim l'àrea de referència (A_{ref}) com l'àrea que escombra el radi de la circumferència hipotètica que forma un angle E ; definim l'àrea auxiliar (A_{aux}) com l'àrea escombrada en l'elipse pel segment que uneix el centre amb l'objecte real; finalment, definim l'àrea real (A_{real}) com l'àrea escombrada en l'elipse pel segment que uneix el focus amb l'objecte real (Es veu sombrejat en verd en la imatge esmentada). Definint aquestes àrees, tenim:

$$\begin{aligned}
 A_{ref} &= (\text{Fracció Angular}) \cdot A_{cercle} = \frac{E}{2\pi} \pi a^2 = E \frac{a^2}{2} \\
 A_{aux} &= A_{ref} \frac{b}{a} = A_{ref} \sqrt{1 - \epsilon^2} = E \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} \\
 \left[A_{aux} - A_{real} = A_{triangle} \frac{b}{a} = \frac{[\text{base}][\text{altura}]}{2} \frac{b}{a} = \frac{[a][a\epsilon \sin(E)]}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} \right] \\
 A_{real} &= A_{aux} - A_{triangle} = \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} [E - \epsilon \sin(E)]
 \end{aligned}$$

La segona llei de Kepler ens diu que $\frac{A}{t} = ct \implies A = Kt \forall t$, en especial és vàlid per $t = T$, que és l'àrea de l'elipse sencera, $A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = KT$. Per tant, podem escriure:

$$\begin{aligned}
 KT &= \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} \implies K = \frac{\pi a^2}{T} \sqrt{1 - \epsilon^2} \\
 Kt &= \frac{\pi a^2}{T} \sqrt{1 - \epsilon^2} t = A_{real} = \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} [E - \epsilon \sin(E)] \implies \frac{2\pi t}{T} = E - \epsilon \sin(E)
 \end{aligned}$$

Com sabem, M és la posició hipotètica en l'òrbita circular. Com l'òrbita és circular, per la primera llei de Kepler sabem que el Sol s'hauria de trobar al centre i, per tant, la velocitat angular és constant. Per aquesta raó, podem definir M com l'angle escombrat en el temps t , és a dir, $M \equiv 2\pi \frac{t}{T}$, per tant:

$$M(E) = E - \epsilon \sin(E) \quad (3)$$

Ara, ja tenim totes les relacions necessàries per trobar $M(\nu)$. Per trobar aquesta relació, només hem de substituir la relació $E(\nu)$ (Eq. 2) del $\sin(E)$ en la relació $M(E)$ (Eq. 3). Un cop fet això, trobem la relació no trascendental següent:

$$M(\nu) = \arcsin \left[\frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)} \right] - \epsilon \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)} \quad (4)$$

Com es pot observar, trobar la relació inversa $\nu(M)$ es complica bastant. En el moviment Keplerià, les coordenades del cos celeste es repeteixen de manera periòdica en cada òrbita, fet que permet descriure-les mitjançant sèries periòdiques en funció de variables angulars creixents. L'anomalia mitjana M , que creix linealment amb el temps, és especialment útil perquè permet expressar altres variables orbitals en funció del temps. L'anomalia veritable ν , tot i ser analítica respecte de M , no és una funció entera i té un radi de convergència limitat si s'expressa com a sèrie de potències. Tanmateix, pel fet de ser una funció periòdica, es pot expandir en una sèrie de Fourier que convergeix globalment. Els coeficients d'aquesta sèrie depenen d' ϵ i s'expressen mitjançant funcions de Bessel del primer tipus. De forma genèrica, la sèrie que aproxima la funció $\nu(M)$ és:

$$\nu(M) = M + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left[J_s(s\epsilon) + \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p} [1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}]^p [J_{s-p}(s\epsilon) - J_{s+p}(s\epsilon)] \right] \sin(sM)$$

Si expandim cadascuna de les funcions de Bessel i aproximem per $\epsilon \rightarrow 0$ (Que és bona aproximació considerant que per la Terra $\epsilon \approx 0.0167$), podem trobar una aproximació de la funció $\nu(M)$ que és vàlida per a qualsevol valor de M . Aquesta aproximació queda com:

$$\nu(M) \simeq M + 2\epsilon \sin(M) + \frac{5}{4}\epsilon^2 \sin(2M) \quad (5)$$

Ón hem aproximat per sota d'ordre ϵ^3 . La demostració explícita de la versió aproximada de $\nu(M)$ és bastant complexe i requereix matemàtiques extenses y avançades. Com s'ha dit a l'inici d'aquest exercici, s'han emprat diversos recursos com a guia. En específic, per aquesta part final, s'ha emprat la referència [4] de la Wikipedia. Per trobar una expressió de major ordre, es poden trobar els termes d'ordre superior en la referència esmentada.

Finalment, per completitud, cal esmentar que la diferència $\nu - M$ és la quantitat anomenada "Equació de centre". Amb l'aproximació feta, l'equació de centre és $C(M) \simeq 2\epsilon \sin(M) + \frac{5}{4}\epsilon^2 \sin(2M)$. Aquesta quantitat és un paràmetre clau a l'hora de trobar la "Equació de temps", que ens permetrà graficar l'analema solar en exercicis propers.

EXERCICI 5

L'equació del temps descriu la discrepància entre dos tipus de temps solar. Aquests dos temps són el temps solar apparent, que segueix directament el moviment del Sol, i el temps solar mitjà, que segueix un Sol teòric amb un moviment uniforme al llarg de l'equador celeste. El temps solar apparent es pot obtenir mesurant la posició actual (angle horari) del Sol, tal com indica (amb precisió limitada) un rellotge de sol. El temps solar mitjà, per al mateix lloc, seria el temps indicat per un rellotge regular ajustat de manera que, al llarg de l'any, les seves diferències respecte al temps solar apparent tinguin una mitjana de zero.

L'equació del temps presenta dues oscil·lacions amb forma d'ona sinusoïdal perquè hi ha dues causes físiques independents que afecten el moviment apparent del Sol respecte al temps solar mitjà. La primera és l'excentricitat de l'òrbita terrestre: com que l'òrbita de la Terra és el·líptica, la seva velocitat orbital varia al llarg de l'any. Aquesta variació provoca una desviació periòdica en la posició del Sol apparent, amb una ona sinusoïdal de període anual. La segona causa és la inclinació de l'eix de rotació de la Terra respecte al pla de la seva òrbita (la eclíptica). Aquest angle d'uns $\sim 23.5^\circ$ fa que el moviment apparent del Sol al llarg de l'equador celeste no sigui uniforme, i això introduceix una segona variació també de tipus sinusoïdal, però amb el doble de freqüència angular. El efecte de la doble freqüència prové de que, en projectar el sol sobre el pla eclíptic celeste, ens dona una expressió de la forma $\tan(\alpha) = \cos(\sim 23.5^\circ)\tan(\lambda)$, on α és l'ascensió recta i λ és la longitud eclíptica. Quan expandim la funció $\alpha(\lambda)$ en aquesta expressió, trobem que s'aproxima a una sèrie de Fourier truncada de forma que queda $\alpha(\lambda) = \lambda - C \sin(2\lambda) + \dots$, ón C és una constant.

La forma general de l'equació, trobada teòricament, és $\Delta t_{AM} \approx A \sin(\omega t) + B \sin(2\omega t)$. En la literatura es troba una expressió on s'han aproximat experimentalment els valors de A , B i ω , que és [3]:

$$\Delta t_{AM}(y, d) = -7.659 \sin[D(y, d)] + 9.863 \sin[2D(y, d) + 3.5932] \text{ [minuts]} \quad \text{tal que:} \quad (6)$$

$$D(y, d) = 6.24004077 + 0.01720197[365(y - 2000) + d] \quad (\text{On } d \text{ és el dia de l'any } y)$$

Aquesta expressió es pot avaluar per l'any 2025 si substituim aquest valor en la funció auxiliar $D(y, d)$. Aquesta funció auxiliar queda doncs com:

$$D(2025, d) \equiv D(d) = 163.3155293 + 0.01720197d \quad (7)$$

És interessant observar com l'equació del temps està relacionada directament amb el temps sideral aparent o, simplement, el temps sideral ($T_{sideral}$). Mentre que el temps solar es basa en la rotació de la Terra en relació amb el Sol, el temps sideral es basa en la rotació de la Terra respecte a les estrelles fixes del cel. Un dia sideral té una durada de 23 hores, 56 minuts i 4 segons, mentre que un dia solar, que és el temps que mesuren els rellotges habituals, té una durada de 24 hores. Aquesta diferència es deu al fet que la Terra, a mesura que rota sobre el seu eix, també es mou una mica en la seva òrbita al voltant del Sol, i per tant necessita fer una mica més de rotació per tornar a situar el Sol en la mateixa posició al cel.

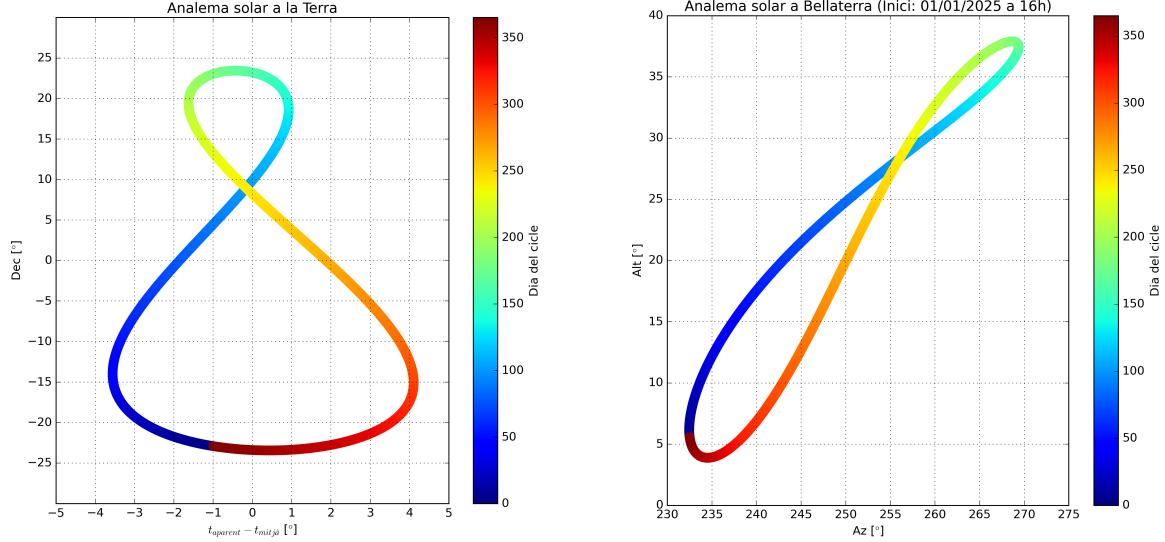
Per definició, l'equació del temps és $EoT = t_{\text{aparent}} - t_{\text{mitjà}} \equiv GHA - GMHA$. GHA significa "Greenwich Hour Angle" i $GMHA$ "Greenwich Mean Hour Angle". $GMHA \equiv UT - \text{offset}$, on l' offset és el temps mig solar quan el Sol està en el meridià de Greenwich, és a dir, les 12h (migdia solar mitjà). D'altra banda, si seguim les definicions dels angles de l'esfera celeste, $GHA = GAST - \alpha$, on $GAST$ és el "Greenwich Apparent Sidereal Time" i α és l'ascensió recta. Si juntem totes les relacions, ens dona una expressió que relaciona directament l'equació del temps amb el temps sideral.

$$EoT = GAST - \alpha - UT + offset \quad (8)$$

EXERCICI 6

Per realitzar aquest exercici, s'ha escrit un script en Python que es pot trobar al GitHub del treball. L'arxiu de l'script es diu `analema.py`. El codi calcula la posició del Sol [en coordenades horitzontals (Altitud, Azimut) = (alt, az) i en coordenades equatorials (Declinació, Ascensió Recta) = (dec, ra) = (δ, α)], calcula la diferència entre el temps solar mitjà i el temps solar aparent a partir de l'equació del temps i, finalment, genera la gràfica de l'analema solar vist des de Bellaterra. Els analemes generats es poden veure a la figura 3.

L'analema graficat en coordenades equatorials (O, equivalentment, la declinació en funció de l'equació del temps) és general del planeta Terra mentres que el graficat en coordenades horitzontals és vàlid per unes coordenades terrestres específiques (Les de Bellaterra en aquest cas). Aquesta observació és demostrable directament de la naturalesa d'ambdós coordenades, doncs les primeres són coordenades definides des de la pròpia Terra mentre que les segones es defineixen localment. Ambdúes representacions són vàlides, però la versió en coordenades horitzontals ens aporta informació extra doncs representa el que qualsevol observador pot analitzar a simple vista, té aplicacions pràctiques (Com als rellotges solars, concepte tractat en un exercici més endavant) i, a més, genera un grau de llibertat extra al ànalisi pel fet d'introduir variació dependent de les coordenades terrestres de l'observador. Degut a tot això, a partir d'ara sempre que es tracti el concepte d'analema, se suposarà intrínsicament la versió en coordenades horitzontals.



(a) Analemma solar vist des de la Terra dec (EoT). Font: Github del treball.

(b) Analemma solar vist des de la Terra alt (az).
Font: Github del treball.

Figura 3: Analemes solars vist des de la Terra

Finalment, és interessant analitzar l'analema que es troba en la paret de la facultat de ciències de l'UAB. En l'anunciat de l'entrega se'ns ha proporcionat la imatge sobre aquest analema. Aquesta es pot veure en la figura 4

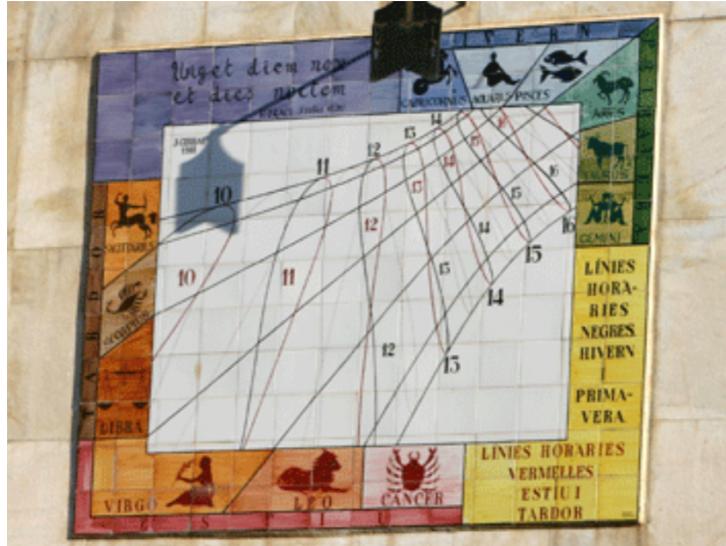
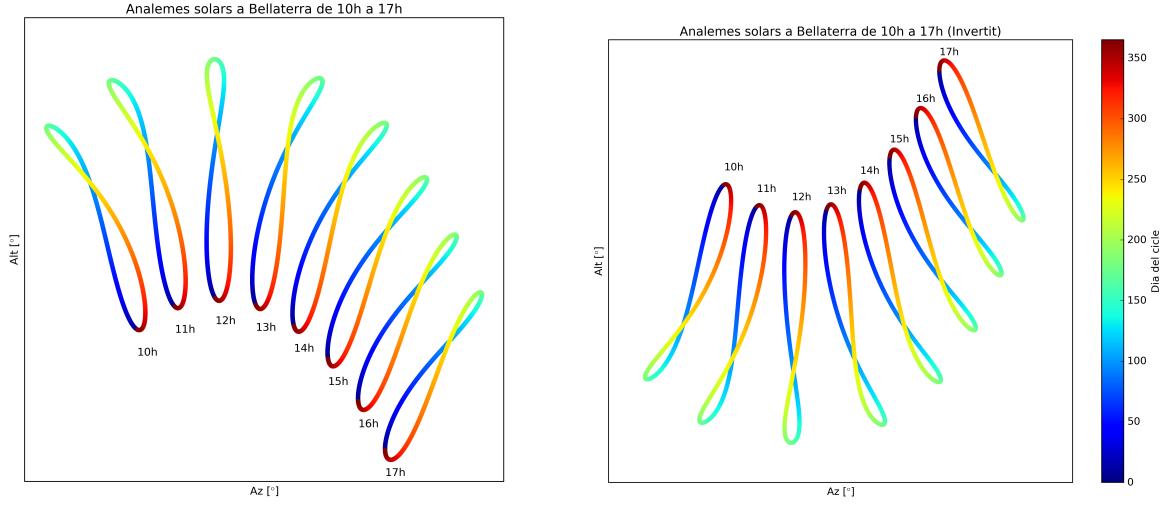


Figura 4: Analema solar a la paret de la facultat de ciències de l'UAB. Font: Enunciad Entrega.

Com es pot observar, la placa conté un conjunt d'analemes. Cada analema està associat a una hora del dia, des de les 10h fins les 17h. A priori sembla que els analemes són correctes doncs tenen forma de "8", tenen un braç més llarg que l'altre, estan espaiats coherentment sabent que cada analema és l'adequat a una hora específica, etc. Igualment, és interessant realitzar un anàlisi més profund. En el mateix codi, s'ha generat també una figura com la que es pot veure a la entrada de la UAB. El resultat es pot veure en la imatge 5a.

Com es pot observar, no s'asemblen molt el de la paret de la UAB i el graficat amb Python. Els 'loops' primis estan localitzats a la part baixa dels analemes (En la figura de la UAB) mentre que,



(a) Analemes d'un conjunt d'hores vist des de la Terra. Font: Github del treball.

(b) Analemes (Invertint l'eix y) d'un conjunt d'hores vist des de la Terra. Font: Github del treball.

Figura 5: Analemes solars vists des de Bellaterra des de les 10h fins les 17h

teòricament, s'observa que haurien d'estar a la part alta. També, s'observa que els analemes de la UAB tenen una tendència a pujar en altitud mentre que els teòrics disminueixen. Sembla ser que els analemes de la entrada de la UAB tenen l'eix vertical invertit i, si es fa aquesta transformació en els graficats teòricament amb Python, s'obté la figura 5b. Comparant la figura invertida amb els analemes de l'entrada de la UAB, es veu una correlació molt major. Igualment no són exactes, doncs els de la UAB tenen una tendència a augmentar en declinació mentre que els teòrics segueixen una corba amb un mínim. També, la inclinació dels analemes és diferent en ambdós figures. Sembla ser que els eixos no són dues rectes perpendiculars, sinó que tenen una certa curvatura. Implementar un model que intenti replicar la figura següent aquesta hipòtesi es complica doncs els eixos poden ser completament arbitraris, així doncs s'emprarà la figura invertida com la millor aproximació.

L'explicació del fet que els analemes observats a l'entrada de la UAB no segueixen la figura teoritzada prové del fet que, realment, la intenció de la figura no és representar els analemes a diverses hores. Aquest és un rellotge solar analemàtic, el qual utilitza la projecció adaptada a la paret vertical i al gnomon i combina diversos factors per poder llegir l'hora solar al llarg de tot l'any. Els analemes graficats segueixen un sistema de coordenades útils i, per tant, la hipòtesi final és correcta. Un ànalisi més detallat sobre els rellotges solars analèmatics i la utilitat dels analemes en aquests dispositius es pot trobar en l'exercici 8.

Per completitud, s'analitzen també els analemes teòrics de forma separada (figura 5a). S'observa que l'analema corresponent a les 12h es presenta gairebé vertical i amb una alçada màxima respecte als altres. Això és coherent amb el fet que les 12h solars representen el migdia solar veritable, moment en què el Sol assoleix la seva màxima altitud al cel per a un dia determinat. Pel que fa a la inclinació dels altres analemes, es constata que: Per hores anteriors a les 12h, l'analema es desvia cap a azimuts menors (més cap a l'est) i, per hores posteriors a les 12h, es desvia cap a azimuts majors (més cap a l'oest). Aquest comportament reflecteix la variació diària del moviment apparent del Sol, així com l'efecte combinat de la declinació solar i la equació del temps en cada moment del dia.

EXERCICI 7

Anem a comparar doncs si l'analema que s'ha generat en aquest treball és correcte. En l'aplicació d'ordinador Stellarium hi ha una funcionalitat que és 'Ephemeris'. Aquesta funció permet situar-se en unes coordenades específiques en un temps determinat en un planeta, escullir un objecte celeste, un rang temporal i un pas de temps i et retorna les coordenades de l'objecte a cada pas de temps durant el rang temporal sencer. S'ha emprat aquest mètode per trobar les coordenades del sol durant un any amb un pas de temps de 15 dies solars. Amb aquest procés s'han trobat els punts n-èssims d'un analema sent n els múltiples de 15. Finalment, el programa et permet visualitzar la posició de les coordenades generades. Si es realitza aquest procés començant el 01/01/2025 a les 16:00h, el resultat és:

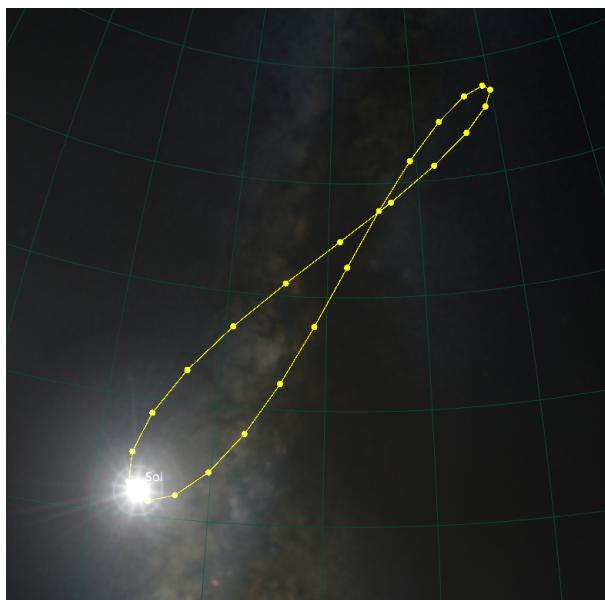


Figura 6: Analema solar a la Terra generat amb Stellarium. Font: Stellarium.

Com es pot veure si es compara amb la imatge de la dreta de la figura 3, ambdós analemes són, en esència, el mateix. Els dos es troben inclinats cap a la dreta i tenen una forma de vuit. El loop superior és més prim i petit que el loop inferior. Els dos analemes tenen un màxim d'altitud proper als 37° i un mínim d'altitud proper als 5° . També, es pot observar que els dos analemes estan limitats en un azimut entre, més o menys, 230° i 270° . Amb aquest anàlisi, es pot conoure que, aproximadament, són equivalents. Igualment, es troba que no quadren entre els valors de forma exacta. Això es deu a que el trobat teòricament és una aproximació mentre que l'stellarium empra models astronòmics avançats i dades de precisió directament extrets de agències espacials importants. També, es pot veure una petita variació en la forma, aquest efecte es deu a que la imatge generada teòricament està representada en un eix pla mentre que, l'Stellarium, t'ho mostra en uns eixos esfèrics (A més del ja anomenat efecte per aproximació).

EXERCICI 8

Un rellotge solar ens marca l'hora solar aparent, mentre que els rellotges convencionals ens marquen l'hora solar mitjana. La diferència entre ambdós tipus de rellotges és la quantitat ano-

menada 'equació del temps' i està directament relacionada amb l'analema solar. Per mantenir el rellotge solar sincronitzat amb el temps solar mitjà, l'analema es pot utilitzar per corregir les fluctuacions causades per lòrbita i la inclinació de la Terra. El patró de l'analema mostra on estaria el Sol a una hora específica de cada dia en comparació amb el temps solar mitjà.

A la pràctica, un rellotge solar pot tenir una escala o factor de correcció inscrit en ell, que ajusta la lectura segons la data. Per exemple, en certs dies, el rellotge solar podria mostrar una hora que estigui uns minuts avançada o endarrerida respecte al temps solar mitjà. En consultar l'analema (o una taula de l'Ecuació del Temps), es pot ajustar l'hora mostrada pel rellotge solar per fer que coincideixi amb el temps solar mitjà. Un exemple de rellotge solar amb correcció és el que es troba en la paret de la facultat de ciències de l'UAB.

EXERCICI 9

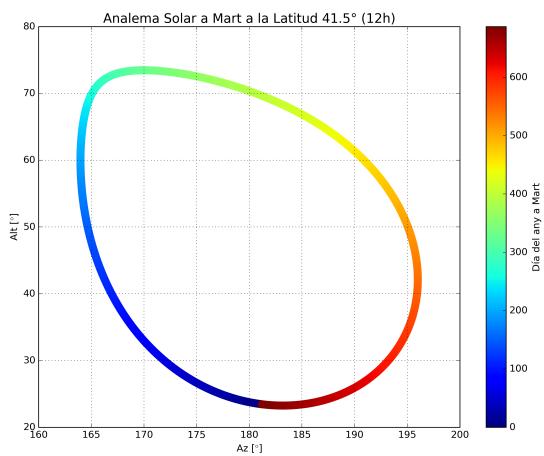
Finalment, per aquest últim apartat, s'intentarà observar la influència directa de l'inclinació de l'eix de rotació i l'excentricitat a l'hora de generar un analema. Per realitzar aquest anàlisi s'han proposat diversos planetes i s'ens demana de graficar l'analema solar per cadascún d'ells. Les dades dels planetes es poden trobar en la taula 1.

Planeta	Obliquitat [°]	Excentricitat ϵ
Mercuri	0.03	0.21
Terra	23.44	0.0167
Mart	25.19	0.0934
Júpiter	3.13	0.0485
Saturn	26.73	0.0565

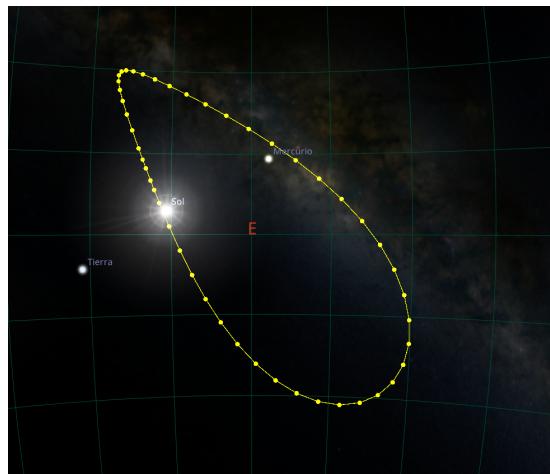
Taula 1: Dades dels planetes. Font: analemma.com [7].

Per realitzar una bona comparativa, s'han generat els analemes per a cada planeta i s'han comparat amb l'observat si ens localitzem en el planeta en qüestió a l'Stellarium, emprant el mètode expressat en l'exercici 7 per observar l'analema. En aquest cas, però, cal tenir en compte alguns detalls. Si es fa ús d'un rang temporal d'un any i un pas de temps de 15 dies solars, com a la Terra, no s'obtindrà un analema en aquell planeta. Per obtenir l'analema en aquell planeta, s'ha d'utilitzar un rang temporal d'un any d'aquell planeta, amb un pas de temps que ha de ser múltiple d'un dia en aquell planeta. Per exemple, Saturn i Júpiter tenen un ràtio $\frac{t_{\text{any}}}{t_{\text{dia}}} > 8500$, mentre que a la Terra és 365. Per tant, el pas de temps hauria de ser molt gran perquè el programa no trigui massa a executar-se. Finalment, cal recalcar que no es podrà tractar l'analema vist des de Mercuri. Això es deu al fet que un dia a Mercuri és més llarg que un any, per tant, no té sentit observar la posició del Sol a una mateixa hora cada dia durant un any. A la figura 7, es poden observar les imatges dels analemes generats teòricament juntament amb els extrets del Stellarium.

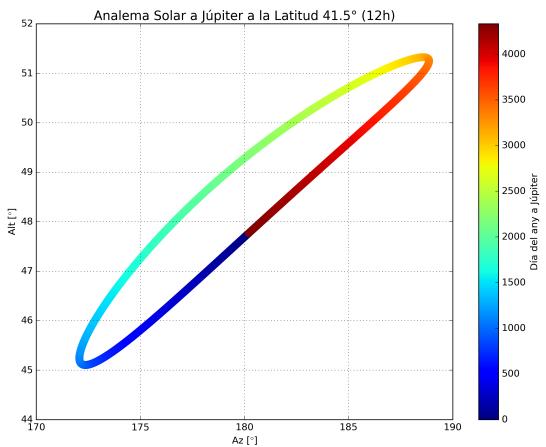
Per realitzar aquest apartat s'ha escrit un nou script de Python que es pot trobar en el Github del treball. L'arxiu de l'script es diu *analema_planetes.py*. El codi et calcula la posició del sol (En coordenades horitzontals) vist des de cada planeta a les 12h. L'equació del temps utilitzada en aquest apartat és $EoT = M - ra$ (On ra és l'ascensió recta del sol i M és l'anomalia mitjana) i, ara, M i ra es troben emprant l'expressió exacta de l'exercici 4 truncada a 20 termes de la sèrie de Bessel. Aquests canvis es deuen a que és necessari modificar els paràmetres de les òrbites



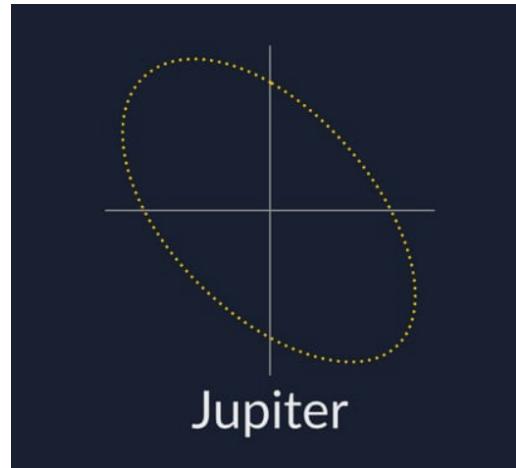
(a) Analema solar de Mart per Python. Font: Github del treball.



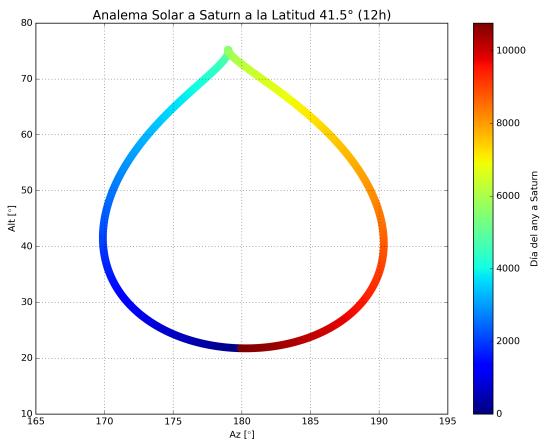
(b) Analema solar de Mart per l'Stellarium. Font: Stellarium.



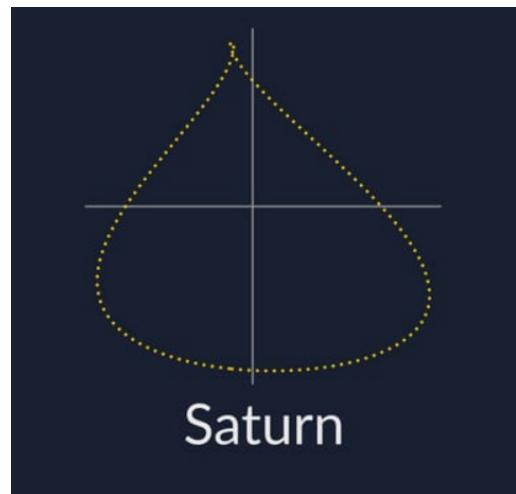
(c) Analema solar de Júpiter per Python. Font: Github del treball.



(d) Analema solar de Júpiter per l'StarWalk. Font: StarWalk.



(e) Analema solar de Saturn per Python. Font: Github del treball.



(f) Analema solar de Saturn per l'StarWalk. Font: StarWalk.

Figura 7: Analemes generats a l'Stellarium, compartits per StarWalk i generats per Python en diversos planetes del sistema solar.

planetàries i, per tant, no es pot emprar l'expressió 6. Això es deu a que aquesta expressió s'ha ajustat amb valors experimentals des de la Terra.

Com es pot observar, no s'han pogut comparar tots els analemes amb l'Stellarium. Això es deu a que no funciona correctament amb planetes amb dies tan curts i anys tan llargs com Júpiter o Saturn (A més, el fet que siguin planetes gasosos no ajuda tampoc doncs la definició de dia és ambigüa). Per poder comparar doncs els analemes graficats per aquests planetes, s'han emprat els que ens proporciona 'StarWalk' [8]. Si es compara el analema teòric amb l'observat per l'Stellarium de Mart, es veu el mateix efecte que amb la Terra. La figura té una tendència similar però no es veu idèntic. Això es deu als mateixos efectes que amb la Terra, l'Stellarium grafica en unes coordenades sobre una esfera mentre que el gràfic sobre un pla, la teòrica és una aproximació, etc. Amb els altres dos planetes no es pot dir massa doncs són analemes corresponents a una altra hora i latitud segurament. Igualment, es pot veure que Júpiter té una tendència ovalada i inclinada i Saturn una forma de gota, així que es pot suposar que és correcte.

Per completitud, es finalitzarà aquest apartat amb el següent: Primer de tot, s'ha generat i analitzat un analema solar i, després, s'ha generalitzat el concepte d'analema a altres planetes (Doncs aquests també orbiten al voltant del sol); Finalment, es pot generalitzar el concepte d'analema a qualsevol cos celeste que orbiti al voltant d'un altre cos celeste. Com a exemple, es pot analitzar l'analema lunar, és a dir, l'analema de la luna vist des de la Terra. L'excentricitat de l'òrbita Terra-Lluna és $\epsilon \approx 0.0549$ i, l'obliquïtat de l'òrbita $\sim 6.68^\circ$ [9]. La forma de l'analema lunar es pot trobar en la figura 8.



Figura 8: Analema lunar vist des de la Terra. Font: TWANIGHT [10].

Com es pot observar, la figura és la que es troba a l'anunciat de l'entrega. La imatge 'Lunar Analemma' és una composició fotogràfica que mostra el moviment de la Lluna sobre el Teatre-Museu Dalí de Figueres, Espanya, al llarg d'un mes lunar. Aquesta tècnica és similar a l'analema solar, però en aquest cas es realitza en un període de temps molt més curt (degut al fet que el període lunar és d'uns 27 dies, mentre que el solar és d'uns 365, aproximadament). Com es pot observar, la figura és coherent amb els analemes graficats anteriorment. Emprant un mètode similar, s'ha generat un arxiu ('moon.py') el qual gener aquest analema. La figura del analema lunar teòric a les 23:59:59h a Bellaterra es pot veure en la figura 9

El recorregut de l'analema és interessant ja que té forma de vuit, està bastant inclinat i té un 'loop' prim i un de gruixut. Sembla ser com els dels altres planetes, però té una diferència notable. Sembla ser que no és tancat, doncs si s'observa el principi d'any lunar amb el final, no arriben a coincidir. Aquesta no és una propietat única de l'analema lunar, de fet, tots els analemes tenen aquesta propietat. La diferència prové del fet que un 'any lunar' és molt més petit que l'any d'un planeta al voltant del sol, per tant, la variació dia a dia és molt gran.

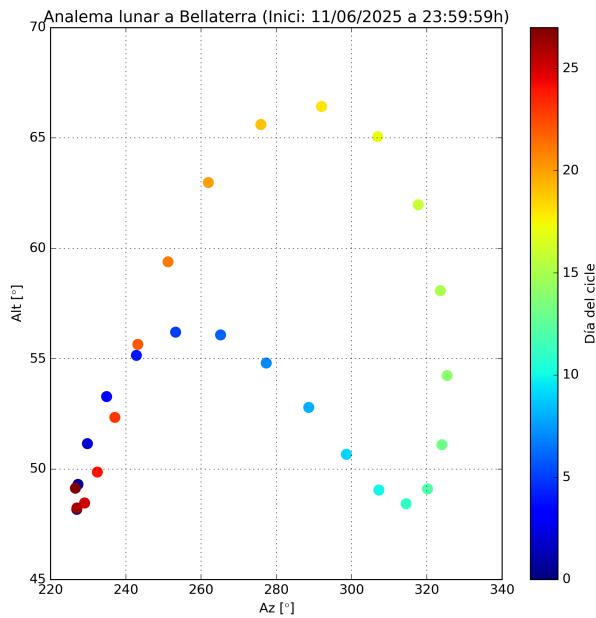


Figura 9: Analema lunar a la Terra per Python. Font: Github del treball.

L'analema depén lleugerament del any en el que es comença a fotografiar, per tant, no pot tenir les mateixes condicions al final que al inici tampoc. Aquesta observació també es pot observar en la imatge de referència del analema lunar en la figura 8.

Referències

- [1] Wikipedia. *Analema*. 2025. URL: <https://es.wikipedia.org/wiki/Analema> (cons. 22-04-2025).
- [2] Wikipedia. *Analemma*. 2025. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Analemma> (cons. 22-04-2025).
- [3] Wikipedia. *Equation of time*. 2025. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_time (cons. 22-04-2025).
- [4] Wikipedia. *Equation of center*. 2025. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_the_center (cons. 23-04-2025).
- [5] Wikipedia. *Eccentric anomaly*. 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Eccentric_anomaly (cons. 23-04-2025).
- [6] Wikipedia. *Determination of Positions in Orbits*. URL: https://www.bogon.ca/orbits/kepler/e_anomaly.html#:~:text=2%CF%80t%2FP%20%3D%20E%20%2D%20e,represent%20by%20the%20letter%2C%20M. (cons. 23-04-2025).
- [7] analemma.com. *Other Analemmas*. URL: <https://analemma.com/other-analemmas.html> (cons. 27-04-2025).
- [8] StarWalk. *Analemma Explained: How To Make It Easily*. 2023. URL: <https://starwalk.space/en/news/analemma-definition> (cons. 08-05-2025).
- [9] NASA. *Moon Fact Sheet*. 2024. URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/moonfact.html> (cons. 30-04-2025).
- [10] Juan Carlos Casado. *Lunar Analemma*. 2011. URL: <https://twanight.org/gallery/lunar-analemma-composite/> (cons. 30-04-2025).