



LLIURAMENT D'INTRODUCCIÓ A L'ASTROFÍSICA: UNDERSTANDING ANALEMMAS

Facultat de ciències

Introducció a l'Astrofísica

Reina Delgado, Airan (1670808)

NOTA:

En la realització del treball s'ha generat contingut pròpi que, amb intenció de simplificar el treball del corrector, s'ha agrupat en un Github. El link del Github és el següent: https://github.com/AiranReina/treball_astro/tree/main. Allà es troba un README.md que resumeix els arxius d'interés en el treball i les seves localitzacions.

EXERCICI 1

Un analema és la corba que descriu el Sol al cel si s'observa des d'un lloc fix, a la mateixa hora del dia, cada dia de l'any. L'analema forma una corba que, aproximadament sol ser, una forma de vuit o lemniscata. Es poden observar analemes en altres planetes del Sistema Solar, però tenen una forma diferent de la que s'observa a la Terra, podent arribar a ser corbes diferents d'un vuit (a Mart és molt semblant a una gota d'aigua), tot i que tenen com a característica comuna que sempre són tancades [1]. Un exemple d'analema és el que es pot observar a la figura 1.

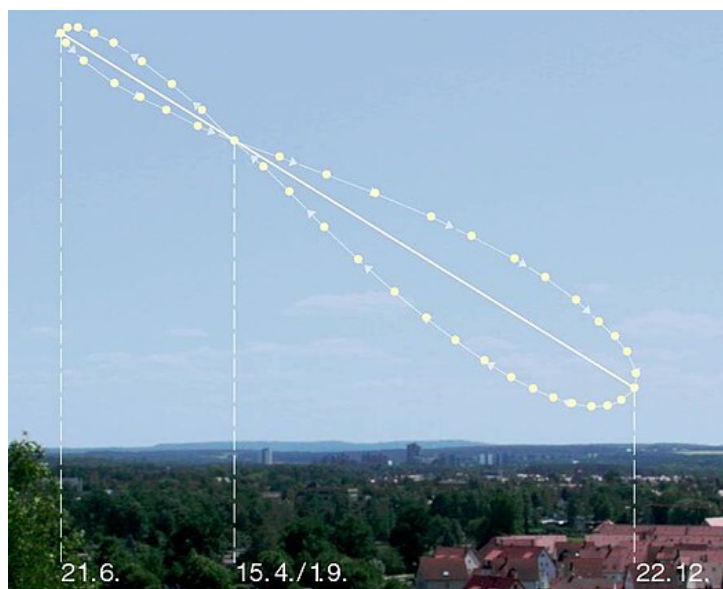


Figura 1: Analema solar per un observador a l'hemisfèri nord. Font: Wikipedia [1].

EXERCICI 2

En coordenades equatorials, un objecte en la bòveda celeste es pot localitzar amb les coordenades "ascensió recta" (α o *ra*) i "declinació" (δ o *dec*). El pla des d'on es defineixen les coordenades és l'equador celestial, que és el pla perpendicular a l'eix de rotació de la Terra coincident amb l'equador terrestre. La declinació és l'angle entre l'equador i el cos celeste i, l'ascensió recta, és l'angle (En hores) del cos al voltant de l'equador celestial. El moviment vertical aparent del Sol en l'analema prové del canvi en la declinació solar al llarg de l'any degut a que la Terra orbita al voltant del Sol amb l'eix de rotació inclinat uns 23.5 graus respecte al pla de l'òrbita [2].

EXERCICI 3

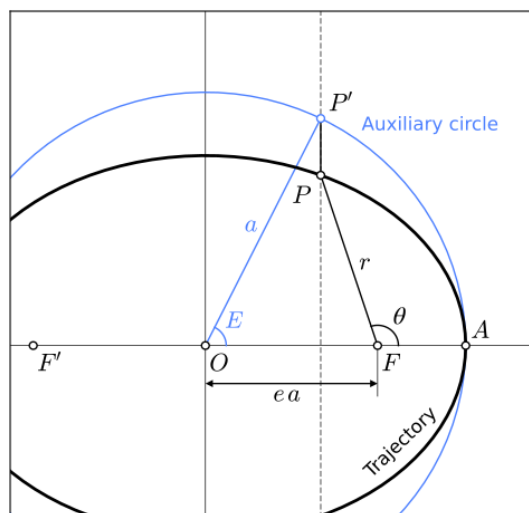
El moviment transversal (Est-Oest) aparent del Sol en l'analema prové del canvi no uniforme de l'ascensió recta solar al llarg de l'any degut als efectes combinats de la inclinació de l'eix de rotació de la Terra i l'eccentricitat de l'òrbita terrestre (Que genera una variació de la velocitat

orbital de la Terra al llarg de l'any) [2]. Aquests dos efectes generen una desigualtat en el moviment aparent del Sol al llarg de l'equador celeste, de manera que el Sol no arriba cada dia al meridià a la mateixa hora segons un rellotge mitjà. Aquest desfasament es quantifica mitjançant l'equació del temps, que expressa la diferència entre el temps solar veritable (Marcat per la posició real del Sol) i el temps solar mitjà (Definit per un moviment solar fictici uniforme) [3].

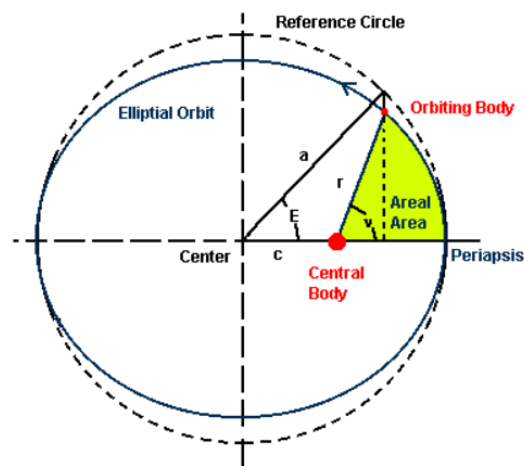
EXERCICI 4

Per resoldre aquest apartat es necessiten unes matemàtiques complexes i, com s'ha esmentat a l'enunciat de l'entrega, es pot fer us de IA i recursos web. En aquest cas, s'ha emprat com a guia els enllaços [4], [5] i [6], encara que els càlculs intermitjos són pròpis.

Començem, doncs, per entendre i definir els paràmetres de les òrbites en moviments Keplerians. La posició d'un objecte celeste en el sistema solar es pot definir mitjançant la anomalia veritable ν (L'angle que escombra la recta que uneix el focus amb l'objecte des del periheli fins a la posició en la òrbita real), la anomalia mitja M (L'angle escombrat si l'objecte estigués en una òrbita circular de radi a , el semieix major de la elipse) o la anomalia excèntrica E (L'angle escombrat en la circumferència hipotètica si la coordenada x és la real). Per trobar les relacions entre M i ν , serà interessant trobar primer les relacions d'ambdós paràmetres amb E , per després relacionar-les entre sí. Un diagrama dels paràmetres restants es troba en la figura de l'esquerra de 2.



(a) Esquema visual per entendre els paràmetres. Font: Wikipedia [5].



(b) Esquema visual per entendre les diferents àrees necessàries en la demostració. Font: Bogan [6].

Figura 2: Esquemes necessaris per entendre la demostració

Per definició d' E , $\cos(E) = \frac{x}{a}$. Sabem també que l'equació de la elipse és $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i, com que el primer terme és $\cos^2(E)$, el segon ha de ser $\sin^2(E)$ per complir l'igualtat trigonomètrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Aquestes dos relacions amb la definició d'excentricitat e ens donen 3 relacions importants:

$$\boxed{\cos(E) = \frac{x}{a}} \quad \boxed{\sin(E) = \frac{y}{b}} \quad \boxed{\epsilon \equiv \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \quad (1)$$

Amb aquestes relacions, podem trobar una expressió que ens relacioni E i ν per començar. Sabem que $\cos(E) = \frac{x}{a} = \frac{\epsilon a + r \cos(\nu)}{a}$, anem doncs a trobar una expressió per r (Amb arguments geomètrics):

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (\epsilon a - x)^2 = b^2 \sin^2(E) + (\epsilon a - a \cos(E))^2 = \dots \\ &\quad \left[\epsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \implies b^2 = a^2(1 - \epsilon^2) \right] \\ \dots &= a^2[(1 - \epsilon^2)(1 - \cos^2(E)) + (\epsilon - \cos(E))^2] = \\ &= a^2[1 - \cos^2(E) - \epsilon^2 + \epsilon^2 \cos^2(E) + \epsilon^2 + \cos^2(E) - 2\epsilon \cos(E)] = \\ &= a^2[1 - 2\epsilon \cos(E) + \epsilon^2 \cos^2(E)] = a^2[1 - \epsilon \cos(E)]^2 \end{aligned}$$

Tenint doncs una expressió per r , seguim amb el càlcul que estàvem fent abans i, després, per trobar una expressió $\sin(E)$ en funció de ν , apliquem la identitat trigonomètrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$\begin{aligned} \cos(E) &= \frac{\epsilon a + [a(1 - \epsilon \cos(E))] \cos(\nu)}{a} = \epsilon + \cos(\nu) - \epsilon \cos(E) \cos(\nu) \\ \cos(E)[1 + \epsilon \cos(\nu)] &= \epsilon + \cos(\nu) \implies \cos(E) = \frac{\epsilon + \cos(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(E) &= \sqrt{1 - \cos^2(E)} = \frac{\sqrt{[1 + \epsilon \cos(\nu)]^2 - [\epsilon + \cos(\nu)]^2}}{1 + \epsilon \cos(\nu)} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2(\nu) - \epsilon^2 - \cos^2(\nu)}}{1 + \epsilon \cos(\nu)} = \frac{\sqrt{[1 - \cos^2(\nu)][1 - \epsilon^2]}}{1 + \epsilon \cos(\nu)} \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\cos(E) = \frac{\epsilon + \cos(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)}} \quad \boxed{\sin(E) = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)}} \quad (2)$$

Ara que tenim les relacions $E(\nu)$, anem a trobar la relació $M(E)$. Aquesta relació es troba directament de la segona llei de Kepler. La segona llei de Kepler ens diu que "El segment que uneix un planeta amb el Sol escombra àrees iguals per temps iguals". Per intentar trobar la relació $M(E)$, necessitem definir 3 àrees diferents i aplicar la segona llei de Kepler. Si observem la imatge de la dreta de la figura 2, definim l'àrea de referència (A_{ref}) com l'àrea que escombra el radi de la circumferència hipotètica que forma un angle E ; definim l'àrea auxiliar (A_{aux}) com l'àrea escombrada en l'elipse pel segment que uneix el centre amb l'objecte real; finalment, definim l'àrea real (A_{real}) com l'àrea escombrada en l'elipse pel segment que uneix el focus amb l'objecte real (Es veu sombrejat en verd en la imatge esmentada). Definint aquestes àrees, tenim:

$$\begin{aligned}
A_{ref} &= (\text{Fracció Angular}) \cdot A_{cercle} = \frac{E}{2\pi} \pi a^2 = E \frac{a^2}{2} \\
A_{aux} &= A_{ref} \frac{b}{a} = A_{ref} \sqrt{1 - \epsilon^2} = E \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} \\
\left[A_{aux} - A_{real} = A_{triangle} \frac{b}{a} = \frac{[base][altura] b}{2} \frac{a}{a} = \frac{[a][a\epsilon \sin(E)]}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} \right] \\
A_{real} &= A_{aux} - A_{triangle} = \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} [E - \epsilon \sin(E)]
\end{aligned}$$

La segona llei de Kepler ens diu que $\frac{A}{t} = ct \implies A = Kt \forall t$, en especial és vàlid per $t = T$, que és l'àrea de l'elipse sencera, $A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = KT$. Per tant, podem escriure:

$$\begin{aligned}
KT &= \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} \implies K = \frac{\pi a^2}{T} \sqrt{1 - \epsilon^2} \\
Kt &= \frac{\pi a^2}{T} \sqrt{1 - \epsilon^2} t = A_{real} = \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - \epsilon^2} [E - \epsilon \sin(E)] \implies \frac{2\pi t}{T} = E - \epsilon \sin(E)
\end{aligned}$$

Com sabem, M és la posició hipotètica en l'òrbita circular. Com l'òrbita és circular, per la primera llei de Kepler sabem que el Sol s'hauria de trobar al centre i, per tant, la velocitat angular és constant. Per aquesta raó, podem definir M com l'angle escombrat en el temps t , és a dir, $M \equiv 2\pi \frac{t}{T}$, per tant:

$$\boxed{M(E) = E - \epsilon \sin(E)} \quad (3)$$

Ara, ja tenim totes les relacions necessàries per trobar $M(\nu)$. Per trobar aquesta relació, només hem de substituir la relació $E(\nu)$ (Eq. 2) del $\sin(E)$ en la relació $M(E)$ (Eq. 3). Un cop fet això, trobem la relació no transcendental següent:

$$\boxed{M(\nu) = \arcsin \left[\frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)} \right] - \epsilon \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin(\nu)}{1 + \epsilon \cos(\nu)}} \quad (4)$$

Com es pot observar, trobar la relació inversa $\nu(M)$ es complica bastant. En el moviment Keplerià, les coordenades del cos celeste es repeteixen de manera periòdica en cada òrbita, fet que permet descriure-les mitjançant sèries periòdiques en funció de variables angulars creixents. L'anomalia mitjana M , que creix linealment amb el temps, és especialment útil perquè permet expressar altres variables orbitals en funció del temps. L'anomalia veritable ν , tot i ser analítica respecte de M , no és una funció entera i té un radi de convergència limitat si s'expressa com a sèrie de potències. Tanmateix, pel fet de ser una funció periòdica, es pot expandir en una sèrie de Fourier que convergeix globalment. Els coeficients d'aquesta sèrie depenen d' ϵ i s'expressen mitjançant funcions de Bessel del primer tipus. De forma genèrica, la sèrie que aproxima la funció $\nu(M)$ és:

$$\nu(M) = M + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left[J_s(s\epsilon) + \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p} [1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}]^p [J_{s-p}(s\epsilon) - J_{s+p}(s\epsilon)] \right] \sin(sM)$$

Si expandim cadascuna de les funcions de Bessel i aproximem per $\epsilon \rightarrow 0$ (Que és bona aproximació considerant que per la Terra $\epsilon \approx 0.0167$), podem trobar una aproximació de la funció $\nu(M)$ que és vàlida per a qualsevol valor de M . Aquesta aproximació queda com:

$$\nu(M) \simeq M + 2\epsilon \sin(M) + \frac{5}{4}\epsilon^2 \sin(2M) \quad (5)$$

Ón hem aproximat per sota d'ordre ϵ^3 . La demostració explícita de la versió aproximada de $\nu(M)$ és bastant complexa i requereix matemàtiques extenses y avançades. Com s'ha dit a l'inici d'aquest exercici, s'han emprat diversos recursos com a guia. En específic, per aquesta part final, s'ha emprat la referència [4] de la Wikipedia. Per trobar una expressió de major ordre, es poden trobar els termes d'ordre superior en la referència esmentada.

Finalment, per completitud, cal esmentar que la diferència $\nu - M$ és la quantitat anomenada "Equació de centre". Amb l'aproximació feta, l'equació de centre és $C(M) \simeq 2\epsilon \sin(M) + \frac{5}{4}\epsilon^2 \sin(2M)$. Aquesta quantitat és un paràmetre clau a l'hora de trobar la "Equació de temps", que ens permetrà graficar l'analema solar en exercicis propers.

EXERCICI 5

L'equació del temps descriu la discrepància entre dos tipus de temps solar. Aquests dos temps són el temps solar aparent, que segueix directament el moviment del Sol, i el temps solar mitjà, que segueix un Sol teòric amb un moviment uniforme al llarg de l'equador celeste. El temps solar aparent es pot obtenir mesurant la posició actual (angle horari) del Sol, tal com indica (amb precisió limitada) un rellotge de sol. El temps solar mitjà, per al mateix lloc, seria el temps indicat per un rellotge regular ajustat de manera que, al llarg de l'any, les seves diferències respecte al temps solar aparent tinguin una mitjana de zero.

L'equació del temps presenta dues oscil·lacions amb forma d'ona sinusoidal perquè hi ha dues causes físiques independents que afecten el moviment aparent del Sol respecte al temps solar mitjà. La primera és l'excentricitat de l'òrbita terrestre: com que l'òrbita de la Terra és el·líptica, la seva velocitat orbital varia al llarg de l'any. Aquesta variació provoca una desviació periòdica en la posició del Sol aparent, amb una ona sinusoidal de període anual. La segona causa és la inclinació de l'eix de rotació de la Terra respecte al pla de la seva òrbita (la eclíptica). Aquest angle d'uns $\sim 23.5^\circ$ fa que el moviment aparent del Sol al llarg de l'equador celeste no sigui uniforme, i això introdueix una segona variació també de tipus sinusoidal, però amb el doble de freqüència angular. El efecte de la doble freqüència prové de que, en projectar el sol sobre el pla eclíptic celeste, ens dona una expressió de la forma $\tan(\alpha) = \cos(\sim 23.5^\circ) \tan(\lambda)$, on α és l'ascensió recta i λ és la longitud eclíptica. Quan expandim la funció $\alpha(\lambda)$ en aquesta expressió, trobem que s'aproxima a una serie de Fourier truncada de forma que queda $\alpha(\lambda) = \lambda - C \sin(2\lambda) + \dots$, ón C és una constant.

La forma general de l'equació, trobada teòricament, és $\Delta t_{AM} \approx A \sin(\omega t) + B \sin(2\omega t)$. En la literatura es troba una expressió on s'han aproximat experimentalment els valors de A , B i ω , que és [3]:

$$\Delta t_{AM}(y, d) = -7.659 \sin[D(y, d)] + 9.863 \sin[2D(y, d) + 3.5932] \text{ [minuts]} \quad \text{tal que:} \quad (6)$$

$$D(y, d) = 6.24004077 + 0.01720197[365(y - 2000) + d] \quad (\text{On } d \text{ és el dia de l'any } y)$$

Aquesta expressió es pot avaluar per l'any 2025 si substituïm aquest valor en la funció auxiliar $D(y, d)$. Aquesta funció auxiliar queda doncs com:

$$D(2025, d) \equiv D(d) = 163.3155293 + 0.01720197d \quad (7)$$

És interessant observar com l'equació del temps està relacionada directament amb el temps sideral aparent o, simplement, el temps sideral ($T_{sideral}$). Mentre que el temps solar es basa en la rotació de la Terra en relació amb el Sol, el temps sideral es basa en la rotació de la Terra respecte a les estrelles fixes del cel. Un dia sideral té una durada de 23 hores, 56 minuts i 4 segons, mentre que un dia solar, que és el temps que mesuren els rellotges habituals, té una durada de 24 hores. Aquesta diferència es deu al fet que la Terra, a mesura que rota sobre el seu eix, també es mou una mica en la seva òrbita al voltant del Sol, i per tant necessita fer una mica més de rotació per tornar a situar el Sol en la mateixa posició al cel. Es pot demostrar que $T_{aparent} = T_{sideral} + \alpha$ [3], on α és l'ascensió recta del Sol.

EXERCICI 6

Per realitzar aquest exercici, s'ha escrit un script de Python que es pot trobar en el Github del treball. L'arxiu de l'script es diu analema.py. El codi et calcula la posició del Sol [(dec,ra) i la (alt,az)], et calcula la diferència entre el temps solar mitjà i el temps solar aparent a partir de l'equació del temps i, finalment, et ploteja l'analema solar vist des de Bellaterra. La imatge generada es pot veure en la figura 3.

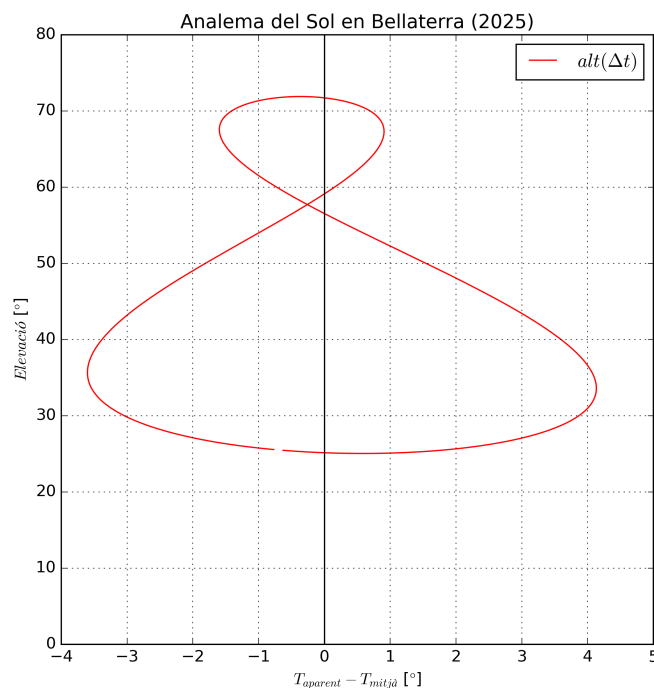


Figura 3: Analema solar vist des de Bellaterra. Font: Github del treball.

Com es pot observar, l'analema solar pateix una petita inlinació. Un analema es veu perfectament vertical quan s'observa des de l'equador a longituds específiques on el migdia solar mitjà coincideix amb el migdia solar aparent. Quan es varia la latitud respecte a l'equador, l'analema es va inlinant lleugerament degut a la inclinació de l'eix terrestre i l'excentricitat de l'òrbita de la Terra.

Finalment, és interessant analitzar l'analema que es troba en la paret de la facultat de ciències de l'UAB (La imatge es troba en l'anunciat, que es pot trobar en el Github del treball). La figura mostra un conjunt d'analemes observats des de Bellaterra per diferents hores del dia. Els analemes tenen un loop més gros (Decembre-Gener) i un més prim (Juny-Juliol). Els analemes es mostren inclinats com es pot esperar a una latitud com Bellaterra. A priori, sembla que els analemes estan representats de forma correcta, tot i que no es pot assegurar amb exactitud degut a que faria falta un estudi més exhaustiu. El fet d'observar diversos analemes prové del fet que, realment, l'observat en la imatge és la correcció del rellotge solar degut a la variació de la posició del sol en la bòveda celeste a una mateixa hora al llarg de l'any. L'explicació exhaustiva d'aquest fenomen es troba explicitada en l'exercici 8.

EXERCICI 7

Anem a comparar doncs si l'analema que s'ha generat en aquest treball és correcte. En l'aplicació d'ordinador Stellarium hi ha una opció d'executar scripts d'usuaris. Hi ha un script que genera un analema visual [7]. Cal recalcar que aquest script genera un analema solar a 2020, però, si en l'animació abans de que es generi l'analema canviem la data, et genera l'analema pel 2025. La figura 4 mostra l'analema generat per l'script en l'Stellarium.

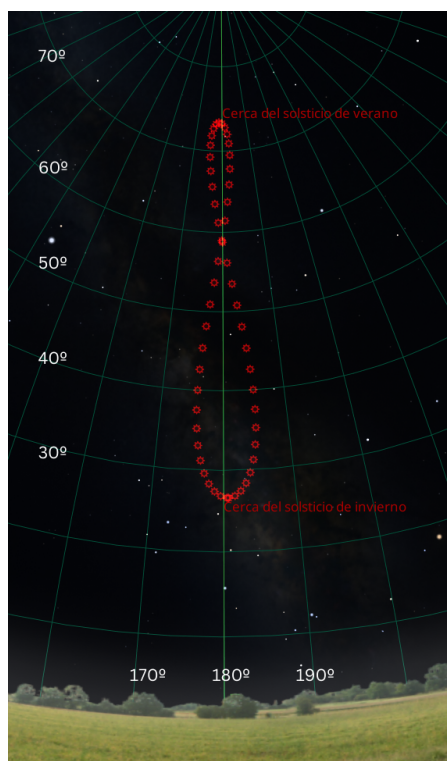


Figura 4: Analema solar generat per l'script de l'Stellarium. Font: Alexander Wolf.

Com es pot veure si es compara amb la figura 3, ambdós analemas són, en essència, el mateix. Els dos es troben inclinats lleugerament cap a l'esquerra i tenen una forma de vuit. El loop superior és més prim i petit que el loop inferior. Els dos analemes tenen un màxim d'altitud per sobre dels 70° i un mínim d'altitud per sota dels 30° . També, es pot observar que el analema de l'Stellarium està limitat en un azimuth de $[175^\circ, 185^\circ]$ i, el generat propi, està limitat a 5° per banda al voltant del meridià on està centrat; ambdós límits són equivalents. Amb aquest anàlisi, es pot concloure que, aproximadament, són equivalents.

EXERCICI 8

Un rellotge solar ens marca l'hora solar aparent, mentre que els rellotges convencionals ens marquen l'hora solar mitjana. La diferència entre ambdós tipus de rellotges és la quantitat anomenada 'equació del temps' i està directament relacionada amb l'analema solar. Per mantenir el rellotge solar sincronitzat amb el temps solar mitjà, l'analema es pot utilitzar per corregir les fluctuacions causades per l'òrbita i la inclinació de la Terra. El patró de l'analema mostra on estaria el Sol a una hora específica de cada dia en comparació amb el temps solar mitjà.

A la pràctica, un rellotge solar pot tenir una escala o factor de correcció inscrit en ell, que ajusta la lectura segons la data. Per exemple, en certs dies, el rellotge solar podria mostrar una hora que estigui uns minuts avançada o endarrerida respecte al temps solar mitjà. En consultar l'analema (o una taula de l'Ecuació del Temps), es pot ajustar l'hora mostrada pel rellotge solar per fer que coincideixi amb el temps solar mitjà. Un exemple de rellotge solar amb correcció és el que es troba en la paret de la facultat de ciències de l'UAB.

EXERCICI 9

Finalment, per aquest últim apartat, s'intentarà observar la influència directa de l'inclinació de l'eix de rotació i l'excentricitat a l'hora de generar un analema. Per realitzar aquest anàlisi s'han proposat diversos planetes i s'ens demana de plotejar l'analema solar per cadascun d'ells. Les dades dels planetes es poden trobar en la taula 1.

Planeta	Obliquïtat $[\circ]$	Excentricitat ϵ
Mercuri	0.03	0.21
Terra	23.44	0.0167
Mart	25.19	0.093
Júpiter	3.13	0.0485
Saturn	26.73	0.056

Taula 1: Dades dels planetes. Font: analemma.com [8].

Per realitzar una bona comparativa, s'han generat els analemes per cada planeta i s'han comparat amb el observat si ens localitzem en el planeta en qüestió a l'Stellarium i augmentem els dies. A l'annex es poden trobar les gràfiques generades per cada planeta. Per realitzar aquest apartat s'ha escrit un nou script de Python que es pot trobar en el Github del treball. L'arxiu

de l'script es diu *analema_planetes.py*. El codi et calcula la declinació del sol a cada planeta, et calcula la diferència entre el temps solar mitjà i el temps solar aparent a partir d'una versió de l'equació del temps diferent a la de l'exercici 6 i, finalment, et grafica l'analema solar vist des de cadascun dels planetes. L'equació del temps utilitzada en aquest apartat és $EoT = M - ra$ (On ra és l'ascensió recta del sol i M és l'anomalia mitjana) i, ara, M i ra es troben emprant l'expressió exacta de l'exercici 4 truncada a 20 termes de la sèrie de Bessel. A més, s'ha obtingut la declinació i no s'ha emprat la llibreria ephemeris, ja que la llibreria et troba la declinació del sol vist des de la Terra. Aquests canvis es deuen a que és necessari modificar els paràmetres de les òrbites planetàries i, per tant, no es pot emprar el codi *analema.py*.

Les òrbites escullides són interessants doncs mostren una gran variació en l'excentricitat i l'inclinació i, per tant, el gran rang d'aspectes que es poden observar en un analema. Tenim 2 grans grups d'analemes segons la seva forma: analemes en forma de vuit (A la Terra, Mart o Saturn) i en forma elíptica (A Mercuri o Júpiter). Els planetes amb l'analema en forma de vuit tenen en comú una obliquïtat alta ($\sim 25^\circ$), mentre que els que tenen forma elíptica tenen una obliquïtat molt baixa ($\sim 1^\circ$). Amb aquesta observació es pot intuir la relació directa entre l'obliquïtat i l'accentuació del loop de l'analema. Com a exemple extrem, es pot observar Urà, que té una obliquïtat de 97.86° i, si s'observa el seu analema, fa una forma de vuit extremadament accentuada.

Per completitud, es finalitzarà aquest apartat amb el següent: Primer de tot, s'ha generat i analitzat un analema solar i, després, s'ha generalitzat el concepte d'analema a altres planetes (Doncs aquests també orbiten al voltant del sol); Finalment, es pot generalitzar el concepte d'analema a qualsevol cos celeste que orbiti al voltant d'un altre cos celeste. Com a exemple, es pot analitzar l'analema lunar, és a dir, l'analema de la luna vist des de la Terra. L'excentricitat de l'òrbita Terra-Lluna és $\epsilon \approx 0.0549$ i, l'obliquïtat de l'òrbita $\sim 6.68^\circ$ [9]. La forma de l'analema lunar es pot trobar en la figura 5.

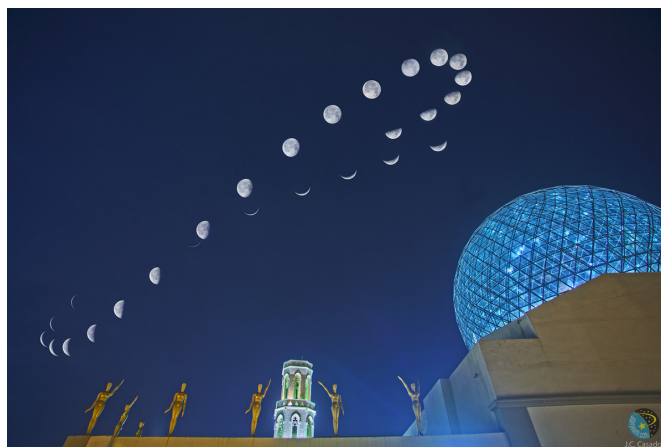
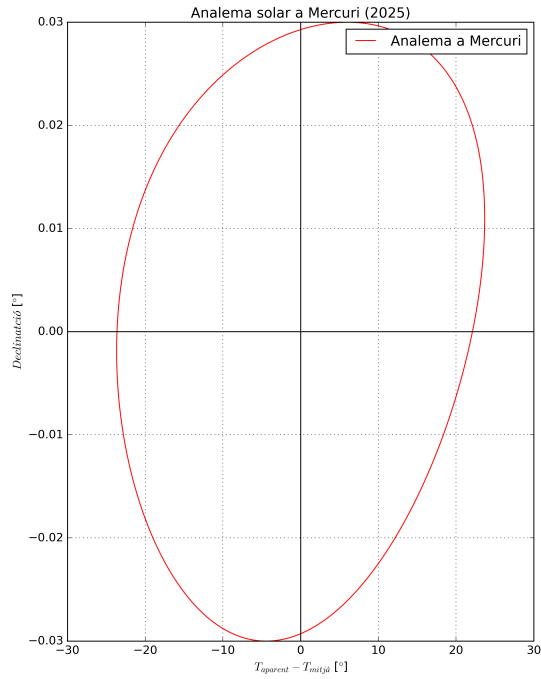


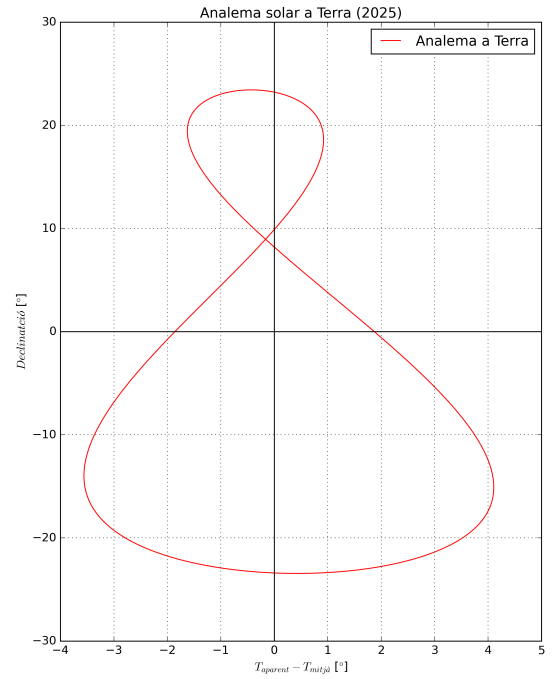
Figura 5: Analema lunar vist des de la Terra. Font: TWANIGHT [10].

Com es pot observar, la figura és la que es troba a l'anunciat de l'entrega. La imatge 'Lunar Analemma' és una composició fotogràfica que mostra el moviment de la Lluna sobre el Teatre-Museu Dalí de Figueres, Espanya, al llarg d'un mes lunar. Aquesta tècnica és similar a l'analema solar, però en aquest cas es realitza en un període de temps molt més curt (degut al fet que el període lunar és d'uns 27 dies, mentre que el solar és d'uns 365, aproximadament). Com es pot observar, la figura és coherent amb els analemes graficats anteriorment. L'òrbita de la lluna té propietats similars a les de Júpiter, per tant, s'observa una figura allargada i inclinada també. A diferència de l'analema de Júpiter, aquesta té forma de vuit, però és probable doncs l'analema de Júpiter està bastant allargat i aprimat, per tant, pot ser que estigui a prop d'una obliquïtat que permet la formació del loop.

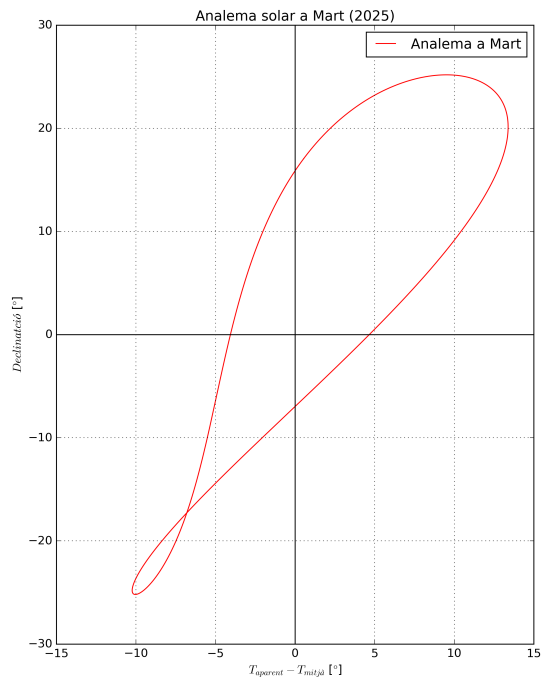
ANNEX



(a) Analema solar de Mercuri per Python. Font: Github del treball.



(b) Analema solar de la Terra per Python. Font: Github del treball.



(c) Analema solar de Mart per Python. Font: Github del treball.



(d) Analema solar de Júpiter per Python. Font: Github del treball.

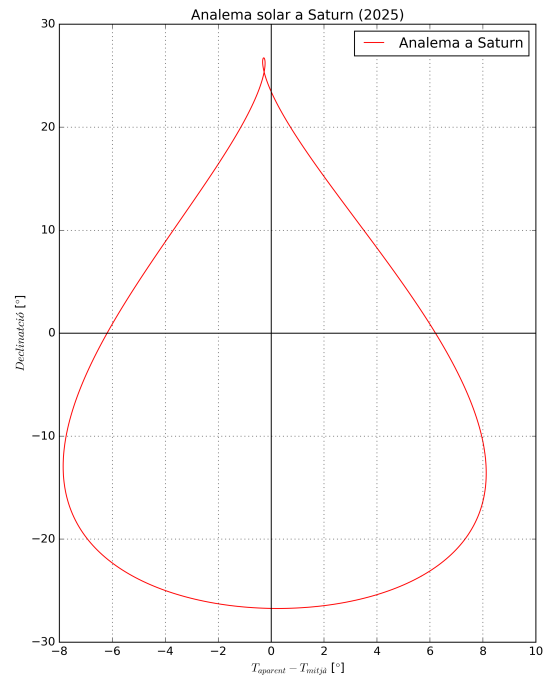


Figura 7: Analema solar de Saturn per Python. Font: Github del treball.

Referències

- [1] Wikipedia. *Analema*. 2025. URL: <https://es.wikipedia.org/wiki/Analema> (cons. 22-04-2025).
- [2] Wikipedia. *Analemma*. 2025. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Analemma> (cons. 22-04-2025).
- [3] Wikipedia. *Equation of time*. 2025. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_time (cons. 22-04-2025).
- [4] Wikipedia. *Equation of center*. 2025. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_the_center (cons. 23-04-2025).
- [5] Wikipedia. *Eccentric anomaly*. 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Eccentric_anomaly (cons. 23-04-2025).
- [6] Wikipedia. *Determination of Positions in Orbits*. URL: https://www.bogan.ca/orbits/kepler/e_anomly.html#:~:text=2%CF%80t%2FP%20%3D%20E%20%2D%20e,represent%20by%20the%20letter%2C%20M. (cons. 23-04-2025).
- [7] Alexander Wolf. *Analemma*. 2020. URL: <https://raw.githubusercontent.com/Stellarium/stellarium/master/scripts/analemma.ssc> (cons. 27-04-2025).
- [8] analemma.com. *Other Analemmas*. URL: <https://analemma.com/other-analemmas.html> (cons. 27-04-2025).
- [9] NASA. *Moon Fact Sheet*. 2024. URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/moonfact.html> (cons. 30-04-2025).
- [10] Juan Carlos Casado. *Lunar Analemma*. 2011. URL: <https://twanight.org/gallery/lunar-analemma-composite/> (cons. 30-04-2025).