Домашнее задание № 3

Выпуклый анализ и оптимизация

Школа анализа данных, осень 2024

Сопряжённые функции (2 pts)

Найдите сопряжённые функции к перечисленным функциям. Не забудьте проверять функции на выпуклость, если используете условие оптимальности первого порядка для поиска супремума.

1. (0.5 pts) $f(x) = \max_{k=1,\dots,p}(a_i x + b_i)$, где $x \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}$
2. (0.5 pts) $g(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x}_1+\ldots+\mathbf{x}_k=\mathbf{x}}(f_1(\mathbf{x}_1)+\ldots+f_k(\mathbf{x}_k))$, где f_i — выпуклые функции. Эта функция называется инфимальной конволюцией (или свёрткой через инфимум). Название обусловлено тем, что при замене сложения на умножение, а инфимума на интеграл, получится стандартная свёртка функций.
3. (1 pts) $f(\mathbf{X}) = \mathrm{trace}(\mathbf{X}^{-1})$, $\mathrm{dom} f = \mathbf{S}^n_{++}$

Условия оптимальности (4 pts)

1. (0.5 pts) Решите следующую задачу

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ &\text{s.t. } \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \le 1, \end{aligned}$$

   где $\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n_{++}$.

2. (1.5 pts) Решите следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}} \mathrm{trace}(\mathbf{X}) - \log\det \mathbf{X} \\ &\text{s.t. } \mathbf{X}\mathbf{z} = \mathbf{y}, \end{aligned}$$

   где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{y}^\top \mathbf{z} = 1$.

3. (2 pts) Приведите алгоритм получения решения следующей задачи на основе условий ККТ и оцените его асимптотическую сложность.

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \\ \text{s.t. } &\sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ &x_i \geq 0. \end{aligned}$$

Двойственные задачи (7 pts)

1. (2 pts) Найдите двойственную задачу к задаче бинарного линейного программирования:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &x_i(1 - x_i) = 0,\ i = 1, \dots, n \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{aligned} \tag{1}$$

Метод поиска приближённых решений в задачах дискретной оптимизации, основанный на построении двойственной задачи уже в непрерывном пространстве называется *релаксацией Лагранжа.*

Докажите, что нижняя оценка, которую даёт релаксация Лагранжа, совпадает с оценкой, которую даёт решение непрерывной релаксации исходной задачи

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \dots, n \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{aligned} \tag{2}$$

Также покажите, что решение этой задачи действительно даёт оценку снизу на решение задачи (1).

2. (1 pts) Постройте двойственную задачу для задачи

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{i=1,\dots,k} (\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} + b_i)$$

3. (1.5 pts) Постройте двойственную задачу для задачи

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}} -\log\det \mathbf{X} \\ \text{s.t. } &\mathbf{a}_i^\top \mathbf{X} \mathbf{a}_i \leq 1,\ i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

4. (1.5 pts) Рассмотрите задачу

$$\begin{aligned} &\min -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3) \\ \text{s.t. } &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{aligned}$$

(a) Решите задачу, используя условия ККТ, при необходимости воспользуйтесь алгоритмами численного решения нелинейных уравнений

(b) Является ли задача выпуклой?

(c) Сформулируйте двойственую задачу и решите её. Выполняется ли сильная двойственность?

5. (1 pts) Постройте двойственную задачу для следующей задачи

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_2^2 + \sum_{i=1}^{p} \|\mathbf{A}_i\mathbf{x}+\mathbf{b}_i\|_2,$$

где $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m_i\times n}$.