☆ конус $K_{d_0} = \{(a,b,c) \in (-\mathbb{R}_{++}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_* \mid \exp\left(\frac{b}{a}\right) \le -\frac{c \cdot c}{a}\}$

☆ $K_d = K_{d_0} \cup \mathcal{A}$, где $\mathcal{A} = \{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

- Тот факт, что $cl(K_{d_0}) = K_d$ доказывается абсолютно аналогично п. (a).

- Докажем, что $(cl(K))^* = K_d$. Для этого докажем $K^* \supseteq K_d$ и $K^* \subseteq K_d$.

① Начнём с $(cl(K))^* \supseteq K_d$. $\exists \overline{v} \in K_d = K_{d_0} \cup \{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Если $\overline{v} \in \mathcal{A}$, то:

$$v^T u = \overset{=0}{a}x + \overset{\ge 0}{b}\overset{\ge 0}{y} + \overset{\ge 0}{c}\overset{\ge 0}{z} \ge 0, \quad \forall u = (x,y,z) \in cl(K).$$

Теперь рассмотрим $\overline{v} \in K_{d_0}, u \in cl(K)$. Оценим снизу $v^T u$:

$$v^T u = ax + by + c\underline{z} \ge ax + by + \underline{c \cdot y \cdot \exp\left(\frac{x}{y}\right)} \ge ax - ay\,\exp\left(\frac{a-b}{a}\right)\exp\left(\frac{x}{y}\right) + by$$

Упростим (скроем):

$$v^T u \ge ax + by - ay\,\exp\left(-\frac{a-b}{a} + \frac{x}{y}\right) = ax + by - ay\,\exp\left(-\frac{ay - by - ax}{ay}\right) \ge$$

$$\overset{(\Rightarrow)}{\ge} \left[e^t \ge 1+t \atop (\forall t)\right] \overset{(\Rightarrow)}{\ge} ax + by - ay \cdot \left(-\frac{ay - by - ax}{ay} + 1\right) = 0.$$

Таким образом, $\overline{v} \in (cl(K))^* \implies (cl(K))^* \supseteq K_d$.

② Теперь докажем, что $(cl(K))^* \subseteq K_d$.

Докажем от противного, пусть $\overline{v} = (a,b,c) \in (cl(K))^*$, но $\overline{v} \notin K_d$.

K_d — объединение 2 выпуклых конусов K_{d_0} и $\mathcal{A}$. Значит, $[\overline{v} \notin K_d] \Leftrightarrow [\overline{v} \notin K_{d_0}] \& [\overline{v} \notin \mathcal{A}]$.

То есть условие $\overline{v} \notin K_d$ эквивалентно следующим условиям:

$$[\overline{v} \notin K_d] \Leftrightarrow \left[\left((a \ge 0) \vee \left(\exp\left(\frac{b}{a}\right) > -\frac{ec}{a}\right) \vee (c<0)\right) \& \left((a \ne 0) \vee (b<0) \vee (c<0)\right)\right]$$

(слагаемик)

Всего есть 9 вариантов (можно раскрыть скобки по дистрибутивности), проверим каждый из них:

1-5) Те варианты, в которых $(c<0)$ — 5шт.

☆ $u = (0,0,1) \in cl(K)$. Тогда $v^T u = c < 0 \implies \overline{v} \notin (cl(K))^*$

6) $(a \ge 0) \& (b<0)$ — 1шт.

> Если $c<0$: ☆ $u = (0,0,1) \in cl(K)$; $v^T u = c < 0 \implies \overline{v} \notin (cl(K))^*$

> Если $c=0$: ☆ $u = (0,1,1) \in cl(K)$; $v^T u = b + c = b < 0 \implies \overline{v} \notin (cl(K))^*$

> Если $c>0$; $a>0$: ☆ $u = (-1,0,0) \in cl(K)$; $v^T u = -a < 0 \implies \overline{v} \notin (cl(K))^*$