Домашнее задание № 1

Выпуклый анализ и оптимизация

Школа анализа данных

1. Выпуклые множества

1. (1 pts) Покажите что множество $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + c \le 0\}$ выпукло, если $\mathbf{A} \succ 0$.

2. (1 pts) Опишите в максимально простом виде, что представляет из себя коническая оболочка множества $\{\mathbf{X}\mathbf{X}^\top \mid \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times k},\ rank(\mathbf{X}) = k\}$.

   Коническая оболочка множества $\mathcal{X}$ — это множество $\{\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \alpha_i \ge 0,\ \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}\}$.

3. (2 pts) Опишите в максимально простой форме множества $P(C)$, где P — это перспекетивное отображение, а множества C:

   (a) гиперплоскость $C = \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + ct = \gamma\}$, $\mathbf{a}$ и c не равны нулю одновременно

   (b) полупространство $C = \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + ct \le \gamma\}$, $\mathbf{a}$ и c не равны нулю одновременно.

4. (1 pts) Докажите, что множество $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \le (\mathbf{c}^\top \mathbf{x})^2,\ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} > 0\}$, где $\mathbf{A} \succ 0$, выпукло.

2. Двойственные конусы

1. (1.5 pts) Покажите, что экспоненциальный конус $\mathcal{K}$ является выпуклым конусом, найдите его замыкание и двойственный к нему конус

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0,\ ye^{x/y} \le z\}.$$

2. (1 pts) Покажите, что множество $\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top,\ \mathbf{y}^\top \mathbf{X}\mathbf{y} \ge 0, \forall \mathbf{y} \ge 0\}$ является выпуклым замкнутым конусом и найдите его двойственный. Этот конус называется конусом ко-положительных матриц.

3. (0.5 pts) Покажите, что множество $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge 0\}$ выпуклый замкнутый конус и найдите его двойственный.

3. Выпуклые функции

1. (6 pts) Проверьте выпуклость/вогнутость следующих функций

   (a) (1 pts) $f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n (1-e^{-x_i})^{\lambda_i}$, $\mathrm{dom} f = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++} \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-x_i} \leq 1\right\}$ и $\lambda_i > 0, i = 1, \ldots, n$.

   (b) (0.5 pts) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_\infty$, $\lambda > 0$

   (c) (1 pts) $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпуклая, дифференцируемая функция и $x > 0$

   (d) (0.5 pts) $f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(\mathbf{X})$, где $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n$ и $\lambda_1(\mathbf{X}) \geq \ldots \geq \lambda_n(\mathbf{X})$ собственные значения матрицы $\mathbf{X}$

   (e) (1 pts) $f(\mathbf{X}) = (\det(\mathbf{X}))^{1/n}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}$

   (f) (1 pts) $f(\mathbf{X}) = \mathrm{trace}(\mathbf{X}^{-1})$, $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}$

   (g) (1 pts) $f(\mathbf{x}, t) = -\log(t^2 - \mathbf{x}^\top \mathbf{x})$, $\mathrm{dom}(f) = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid \|\mathbf{x}\|_2 < t\}$

2. (1 pts) Пусть задан ориентированный взвешенный граф $G = (V, E)$. Проверьте на выпуклость/вогнутость функцию $p_{ij}(\mathbf{c})$ кратчайшего расстояния между некоторой парой вершин (i, j), зависящую от вектора весов $\mathbf{c}$ рёбер графа.

3. (1 pts) Покажите, что следующая функция выпуклая и убывает для любого конечного k на области определения, где каждый знаменатель положителен:

$$f(\mathbf{x}) = \cfrac{1}{x_1 - \cfrac{1}{x_2 - \cfrac{1}{x_3 - \ldots}}},$$

   где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.

4. (1 pts) Покажите выпуклость функции

$$h(\mathbf{x}) = \frac{f^2(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})},$$

   где f выпуклая и неотрицательная, а g вогнутая и положительная.