№7

Дана нормальная матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и её разложение Шура: $A = UTU^*$

а) Требуется записать SVD матрицы A, используя U и T.

б) Показать, что $\sigma_1(A) = \max\limits_i |\lambda_i(A)|$

в) Привести пример $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, для которой формула в б) неверна.

□ Матрица A — нормальная: $AA^* = A^*A$

$A = UTU^*$; $\quad UTU^*UT^*U^* = UTT^*U^* = UT^*U^*UTU^* = UT^*TU^*$

Значит, $TT^* = T^*T$, где T — верхнетреугольная с с.з. λ_i, $i=\overline{1,n}$ на диагонали.

Лемма

• Докажем, что верхнетреугольная матрица B коммутирует с B^* $\Leftrightarrow$ B — диагональная

[$(BB^*)_{ij} = \sum\limits_{k=\max(i,j)}^{n} b_{ik}\overline{b_{jk}}$ $\qquad (b_{ij} = 0 \ \forall i>j)$

$(B^*B)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{\min(i,j)} \overline{b_{ki}}\, b_{kj}$

Рассм. диагональные эл-ты матриц:

$(BB^*)_{ii} = \sum\limits_{k=i}^{n} |b_{ik}|^2$

$(B^*B)_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{i} |b_{ki}|^2$

$(BB^*)_{ii} = (B^*B)_{ii}$. По индукции докажем, что B — диагональная

i=1: $\sum\limits_{k=1}^{n} |b_{1k}|^2 = \sum\limits_{k=1}^{1} |b_{k1}|^2 = |b_{11}|^2 \Rightarrow |b_{12}|^2 + \dots + |b_{1n}|^2 = 0 \Rightarrow b_{1j} = 0, \ j \neq 1$

i=m: пусть для $\forall i \le m-1$ выполнено $b_{ij} = 0$, $j \neq i$

$\sum\limits_{k=m}^{n} |b_{mk}|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} |b_{km}|^2 =$ [по предположению индукции] $= |b_{mm}|^2$

$\Downarrow$

$|b_{mm}|^2 + \sum\limits_{k=m+1}^{n} |b_{mk}|^2 = |b_{mm}|^2 \Rightarrow b_{mk} = 0, \ n \ge k \ge m+1$

Доказано, что B — диагональная]

Доказанная лемма говорит о том, что $T = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$, то есть разложение Шура нормальной матрицы — диагонализация в унитарном базисе

$A = U\Lambda U^*$

б) $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$

$AA^* = U\Lambda\Lambda^*U^* = U \cdot \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2 \dots |\lambda_n|^2) \cdot U^* \Rightarrow \sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$