№8

Покажем, что для множителя W из полярного разложения матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ ($A = WH$, $W^TW = I$, $W \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $H \succeq 0$, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$) выполняется:

$$\frac{\|A^TA - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|_2 \leq \|A^TA - I\|_2$$

Замечание: нер-во даёт соотношение между двумя мерами близости (в смысле $\|\cdot\|_2$) матрицы A к ортогональной: $\|A^TA - I\|_2$ и $\min\limits_{Q:Q^TQ=I} \|A - Q\|_2$

▷ $A = WH$ – полярное разложение

1) Докажем $\|A - W\|_2 \leq \|A^TA - I\|_2$

$\|A - W\|_2 = \|W(H - I)\|_2 = \|H - I\|_2$

$\|A^TA - I\|_2 = \|H^TW^TWH - I\|_2 = \|H^TH - I\|_2$

$H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H \succeq 0$, $H = H^T$, запишем собственное разложение H:

$H = QDQ^T$, $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$ – с.з. H

$H^TH = QD^TDQ^T = QD^2Q^T$

- $\|H - I\|_2 = \|QDQ^T - I\|_2 = \|Q(D - I)Q^T\|_2 = \|D - I\|_2$
- $\|H^TH - I\|_2 = \|Q(D^2 - I)Q^T\|_2 = \|D^2 - I\|_2$

Докажем, что $\|D - I\|_2 \leq \|D^2 - I\|_2$

Т.к. $(D - I)$ и $(D^2 - I)$ – диагональные квадратные матрицы, их $\|\cdot\|_2$ – это модуль максимального эл-та на диагонали (оно же является σ_1 (макс. сингулярным числом)), то есть $|d_1 - 1|$ требуется сравнить с $|d_1^2 - 1|$:

а) $d_1 \in [0;1]$: $1 - d_1 \vee 1 - d_1^2$; $d_1(d_1 - 1) \leq 0 \Rightarrow 1 - d_1 \leq 1 - d_1^2$

б) $d_1 > 1$: $d_1 - 1 \vee d_1^2 - 1$; $0 \leq d_1(d_1 - 1) \Rightarrow d_1 - 1 \leq d_1^2 - 1$

Таким образом, $|d_1 - 1| \leq |d_1^2 - 1|$. То есть $\|D - I\|_2 \leq \|D^2 - I\|_2$. Это доказывает $\|A - W\|_2 \leq \|A^TA - I\|_2$

2) Докажем $\dfrac{\|A^TA - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|_2$

$$\underline{\underline{\|A^TA - I\|_2}} = \|H^TH - I\|_2 = \|D^2 - I\|_2 = \|(D - I)(D + I)\|_2 \overset{[\text{субмультипликативность } \|\cdot\|_2]}{\leq} \underbrace{\|D - I\|_2}_{\|A - W\|_2} \cdot \|D + I\|_2 =$$

$$= \|A - W\|_2 \cdot \|D + I\|_2 \overset{[\text{нер-во } \Delta]}{\leq} \|A - W\|_2 \cdot (\|D\|_2 + 1) = \underline{\underline{\|A - W\|_2 \cdot (\|A\|_2 + 1)}}$$

$[\|D + I\|_2 = |d_1 + 1| \leq |d_1| + 1 = \|D\|_2 + 1]$

Значит, $\dfrac{\|A^TA - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|_2$ ∎