

Работу выполнил:

Назмиев Айрат, группа \*\*\*

## Задача 1

Пусть задан вектор  $u \in \mathbb{C}^n$ :  $\|u\|_2 = 1$ . Найдите все  $\alpha \in \mathbb{C}$ , для которых  $A = I - \alpha uu^*$  является: 1) эрмитовой 2) косоэрмитовой 3) унитарной 4) нормальной. Для пункта 3) также нарисуйте найденные  $\alpha$  на комплексной плоскости.

□ Найдем все  $\alpha \in \mathbb{C}$  в каждом пункте. Обозначим  $\alpha = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

1.  $A$  — эрмитова:  $A^* = A$ .

$$A^* = I - \bar{\alpha} uu^* = I - \alpha uu^* = A, \text{ из условия } \|u\|_2 = 1, \text{ значит } uu^* \neq 0.$$

$$\alpha = \bar{\alpha} \iff \alpha \in \mathbb{R}.$$

2.  $A$  — косоэрмитова:  $A^* = -A$ .

$$A^* = I - \bar{\alpha} uu^* = -I + \alpha uu^* = -A.$$

$$2I = (\alpha + \bar{\alpha}) uu^*.$$

$I$  имеет ранг  $n$ , тогда как  $\text{rank } uu^* = 1$  ( $u \neq 0$ ), в этом случае  $uu^* = u^*u = 1$ . Значит, равенство может выполняться только при  $n = 1$ , в скалярном случае. Тогда также должно быть выполнено  $2 = \alpha + \bar{\alpha} = 2a$ . Получаем, что для  $n \geq 1$  таких  $\alpha$  не существует ( $A$  не может быть косоэрмитовой), для  $n = 1$ :  $\alpha = 1 + ib$ ,  $\forall b \in \mathbb{R}$ .

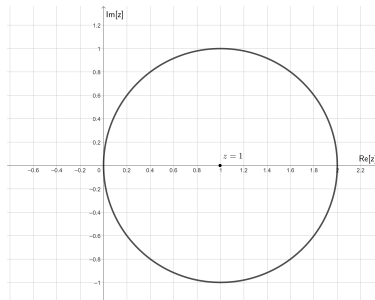
3.  $A$  — унитарная:  $AA^* = I$ .

$$AA^* = (I - \alpha uu^*)(I - \bar{\alpha} uu^*) = I - (\alpha + \bar{\alpha}) uu^* + |\alpha|^2 uu^* uu^* = [u^*u = \|u\|_2 = 1] = I - (\alpha + \bar{\alpha}) uu^* + |\alpha|^2 uu^* = I.$$

$$|\alpha|^2 uu^* = (\alpha + \bar{\alpha}) uu^*.$$

$$a^2 + b^2 = 2a, (a - 1)^2 + b^2 = 1.$$

Таким образом,  $\alpha \in \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$ . Изобразим множество на комплексной плоскости: окружность радиуса 1 с центром в  $z = 1$ .



4.  $A$  — нормальная,  $AA^* = A^*A$ .

$$AA^* = I - (\alpha + \bar{\alpha}) uu^* + |\alpha|^2 uu^*; A^*A = I - (\alpha + \bar{\alpha}) uu^* + |\alpha|^2 uu^*.$$

Можно видеть, что  $AA^* = A^*A$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ . ■

## Задача 2

1. Докажите, что для любой косоэрмитовой  $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$  матрица:

$$Q = (I - K)^{-1}(I + K) \quad (1)$$

будет унитарной.

2. Найдите множество всех унитарных матриц, которые представимы в виде (??).

□ Для начала покажем, что матрица  $I - K$  является обратимой. Известно, что собственные значения косоэрмитовых матриц имеет вид  $\lambda(K) \in i\mathbb{R}$ , то есть являются чисто мнимыми, в том числе могут равняться нулю. Пусть  $K = U\Lambda U^{-1} = U\Lambda U^*$  — ее собственное разложение в ОНБ комплексного векторного пространства (косоэрмитовы матрицы нормальные). Тогда матрицу можно расписать в следующем виде:  $I - K = UU^* - U\Lambda U^* = U(I - \Lambda)U^*$ , то есть  $I - K$  имеет собственные значения вида  $\lambda(I - K) = 1 - \lambda(K) \neq 0$ . Таким образом, все собственные значения данной матрицы ненулевые, а значит,  $I - K$  обратима.

Покажем, что матрица вида (??) является унитарной, для этого требуется доказать  $QQ^* = I$ . Для этого воспользуемся известными свойствами:  $(AB)^* = B^*A^*$ ,  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ , свойством  $K^* = -K$ . Получим:

$$\begin{aligned} Q^* &= (I - K)(I + K)^{-1}, \\ QQ^* &= (I - K)^{-1}(I + K)(I - K)(I + K)^{-1}. \end{aligned}$$

Докажем простой факт: матрицы вида  $I - A$  и  $I + A$  коммутируют  $\forall A \in \mathbb{C}$ . Действительно:

$$(I + A)(I - A) = I - A^2 = (I - A)(I + A).$$

Поэтому можно переставить в  $QQ^*$  второй и третий множитель местами:

$$QQ^* = (I - K)^{-1}(I - K)(I + K)(I + K)^{-1} = I,$$

что и требовалось.

Было доказано, что для любой косоэрмитовой  $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$  формула (??) задает унитарную  $Q$ .

Теперь найдем множество унитарных матриц, представимых в виде (??).

Известно, что в общем случае собственные числа косоэрмитовых матриц чисто мнимые, а ортогональных — являются комплексными и равны единице по модулю.

Пусть  $v$  — собственный вектор  $K$ :  $Kv = \lambda v$ ,  $\lambda \in i\mathbb{R}$ . Тогда:

$$Qv = (I - K)^{-1}(I + K)v. \quad (2)$$

Известно, что собственные векторы матрицы и обратной матрицы совпадают, при этом соответствующим данному вектору собственным значением обратной матрицы будет обратное собственное число исходной матрицы:

$$Ax = \lambda x, \quad x = \lambda A^{-1}x, \quad \lambda^{-1}x = A^{-1}x.$$

Значит, если  $v$  — собственный для  $K$ , то он собственный как для  $(I - K)$ :

$$(I - K)v = (1 - \lambda)v,$$

так и для  $(I - K)^{-1}$ :

$$(I - K)^{-1}v = \frac{1}{1 - \lambda}v.$$

Таким образом, (??) можно записать в виде:

$$Qv = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}v = \mu v, \quad (3)$$

что означает,  $Q$  имеет те же собственные векторы  $v$ , что и  $K$ , которым соответствует собственное число  $\mu = (1 + \lambda)(1 - \lambda)^{-1}$ .

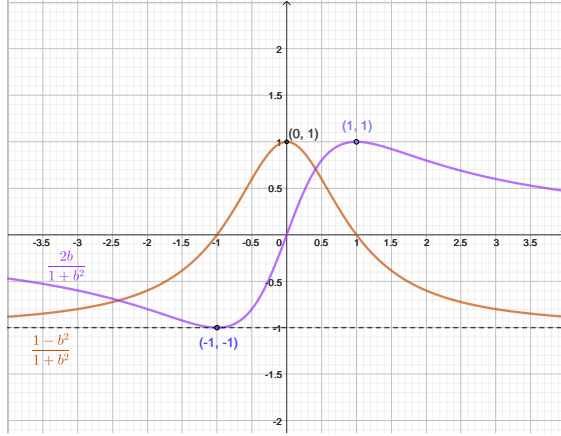
Введем обозначение  $\lambda = ib$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Определим, какие значения может принимать  $\mu$ :

$$\mu = \frac{1 + ib}{1 - ib} = \frac{(1 - b^2) + 2ib}{1 + b^2}. \quad (4)$$

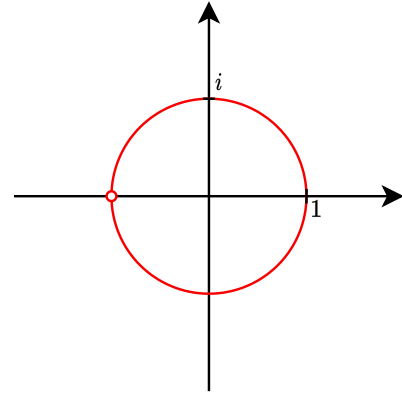
Можно легко убедиться, что  $|\mu| = 1$ , то есть собственные значения лежат на единичной окружности:

$$|\mu| = \left| \frac{(1 - b^2) + 2ib}{1 + b^2} \right| = \sqrt{\frac{(1 - b^2)^2 + (2b)^2}{(1 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{1 - 2b^2 + b^4 + 4b^2}{(1 + b^2)^2}} = 1.$$

Введем обозначение  $\mu = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ . Из (??) получаем, что  $\cos(\theta) = (1 - b^2)(1 + b^2)^{-1}$ ,  $\sin(\theta) = 2b(1 + b^2)^{-1}$ . Зададимся вопросом, какие значения может принимать  $\mu$  на единичной окружности.



(a) Графики  $\frac{1-b^2}{1+b^2}$  и  $\frac{2b}{1+b^2}$



(b)  $\mu$  на комплексной плоскости

Можно легко показать тот факт, что в параметризации (??) невозможно задать точку  $\mu = -1$ . Доказывается это средствами матанализа, исследуя нули, экстремумы, участки монотонности и асимптоты функций  $x(b) = (1 - b^2)(1 + b^2)^{-1}$  и  $y(b) = 2b(1 + b^2)^{-1}$ , но выкладки оказываются крайне громоздкими, поэтому здесь не приводятся. Вместо этого приведены графики функций и полученное множество допустимых значений  $\mu$  на  $\mathbb{C}$ . Можно видеть, что при изменении  $b \in \mathbb{R}$  достигаются все точки на единичной окружности,  $x^2(b) + y^2(b) = 1$ , кроме  $(-1, 0)$ : она не достигается и является пределом при  $b \rightarrow \pm\infty$ . То есть  $\mu \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, z \neq -1\}$ .

Вместо описанного выше наброска доказательства ГМТ  $\mu$  можно заметить, что (??) является преобразованием Кэли в скалярном случае, которое отображает мнимую ось на комплексной плоскости в единичную окружность, при этом  $\pm i\infty$  отображается в  $-1$ . Кстати, в задаче изначально рассматривается более общее отображение Кэли: для комплексных матриц, в приложении к параметризации унитарных матриц через косозермитовы.

Таким образом, вид (??) описывает множество всех унитарных матриц  $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , которые не имеют собственного значения  $-1$ . ■

### Задача 3

Докажите, что

$$\|A\|_{1 \rightarrow 2} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_{1 \rightarrow 2}, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

**Указание:** В случае использования констант эквивалентности векторных норм необходимо обосновывать это значение констант.

□ Докажем, что  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$ , для этого воспользуемся полуаддитивностью квадратного корня и неравенством КБШ:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{|x_i|^2} = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} = \sqrt{n} \|x\|_2.$$

Выпишем определения операторных норм:

$$\|A\|_{1 \rightarrow 2} = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2, \quad \|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

Далее докажем первое неравенство в условии задачи:  $\|A\|_{1 \rightarrow 2} \leq \|A\|_2$ . Из определения операторной нормы ( $\forall x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|x\|_1 = 1$  выполнено  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 = 1$ ) и доказанных неравенств на векторные нормы следует, что:

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_1 = \|A\|_2 \cdot 1 \leq \|A\|_2.$$

Взяв супремум по  $\|x\|_1$  на единичной сфере, можно получить:

$$\|A\|_{1 \rightarrow 2} = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2,$$

что и требовалось. Перейдем к доказательству второго неравенства,  $\|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_{1 \rightarrow 2}$ . Вновь сошлемся на доказанные неравенства на векторные нормы ( $\forall x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|x\|_2 = 1$  выполнено  $\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 = \sqrt{n}$ ) и определения операторных норм и запишем:

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_{1 \rightarrow 2} \|x\|_1 \leq \|A\|_{1 \rightarrow 2} \sqrt{n} \|x\|_2 = \sqrt{n} \|A\|_{1 \rightarrow 2} \|x\|_2$$

Взяв супремум по  $\|x\|_2$  на единичной сфере, можно получить:

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_{1 \rightarrow 2},$$

оба неравенства доказаны. ■

### Задача 4

Обозначим  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  и  $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/n & 0 \end{bmatrix}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Обоснуйте сходимость  $A_n \rightarrow A$ ,  $n \rightarrow \infty$  исходя из определения сходимости с помощью норм.
2. Найдите собственные разложения  $A_n = S_n \Lambda_n S_n^{-1}$  и проверьте существование пределов для каждой из  $S_n, \Lambda_n$  и  $S_n^{-1}$ . Почему не у всех из этих матриц существует предел?
3. Найдите разложения Шура  $A_n = U_n T_n U_n^{-1}$  и проверьте существование пределов для каждой из  $U_n, T_n$  и  $U_n^{-1}$ .

□ Докажем сходимость  $A_n \rightarrow A$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Так как все матричные нормы в конечномерных пространствах эквивалентны, поэтому для удобства будем показывать сходимости по норме Фробениуса:

$$\|A - A_n\|_F = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть  $A_n$  сходится к  $A$ .

Найдем собственные разложение  $A$  и  $A_n$ .

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad (A - 0 \cdot I)v = 0, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

можно видеть, что у матрицы  $A$  только один линейно независимый собственный вектор (а не 2), то есть у  $A$  не имеет собственного разложения. При этом ЖНФ  $A$  имеет вид:

$$A = PJP^{-1}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = P^{-1} = I$$

Собственное разложение  $A_n$ :

$$\det(A_n - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{n} = 0, \quad \lambda_{n1} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \lambda_{n2} = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (A_n - 0 \cdot I)v = 0, \quad v_{n1} = \begin{bmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{n2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{n} \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}, \quad S_n = \begin{bmatrix} \sqrt{n} & -\sqrt{n} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Можно легко видеть (например, рассмотрев разницу матриц в норме Фробениуса), что последовательности  $\Lambda_n$  и  $S_n^{-1}$  имеют предел, а  $S_n$  — нет (так как некоторые элементы матрицы стремятся к бесконечности):

$$\Lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad S_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

При этом  $A_n = S_n \Lambda_n S_n^{-1}$  для любого *конечного*  $n$ . Расходимость некоторых матриц (для выбранных собственных векторов — расходимость  $S_n$ ) связана с тем, что предел последовательности  $A_n$  является вырожденной матрицей  $A$ , для которой не существует собственного разложения. При этом важно заметить, что сходимость собственных значений имеет место,  $\lambda_{n1}$  и  $\lambda_{n2}$  сходятся к 0.

Теперь найдем разложения Шура матриц  $A$  и  $A_n$ .

Для  $A$  легко проверить, что можно записать разложение Шура, совпадающее с найденной выше ЖНФ:

$$A = UTU^*, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = U^* = I.$$

Найдем разложение Шура для  $A_n$ . Нормируем найденный собственный вектор  $v_1$ , найдем для него ортогональный вектор и также его нормируем (вектора сформируют унитарную матрицу), далее найдем верхнетреугольную матрицу  $T_n$ :

$$v_{n1} = \begin{bmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{n2} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{bmatrix}, \quad u_{ni} = \frac{v_{ni}}{\|v_{ni}\|_2}, \quad i = 1, 2,$$

$$U_n = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} & -\frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \end{bmatrix}, \quad U_n^{-1} = U_n^*, \quad T_n = U_n^* A_n U_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}$$

$$U_n, U_n^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I = U, \quad T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T.$$

Легко видеть, что полученные матрицы имеют пределы (например, это можно показать через фробениусовскую норму), при этом они совпадают с разложением Шура матрицы  $A$ , к которой стремится  $A_n$ . Таким образом можно заключить, что все матрицы в разложении Шура  $A_n$  сходятся к соответствующим матрицам в разложении предельной матрицы  $A$ . ■

**Начиная со следующей задачи решения задач будут приведены в письменном виде.**

(N5)

Докажем, что  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  нормальная является унитарной  $\Leftrightarrow$  все её  
с-з.  $\lambda_i, i = \overline{1, n} : |\lambda_i| = 1$

□ •  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  — нормальная, если  $A^*A = AA^*$ , нормальная матрица унитарно  
диагонализуема  
•  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  — унитарная, если  $A^*A = AA^* = I$  (является нормальной)

$\Rightarrow$   $\exists \lambda$  — с-з.  $A$ ,  $v$  — с.в., соот.  $\lambda$ , т.е.  $Av = \lambda v$

Рассмотрим также  $v^*A^* = \bar{\lambda}v^*$ . Умножим  $Av = \lambda v$  слева на данное сопряжение:

$$v^*A^*Av = |\lambda|^2 v^*v.$$

Т.к.  $A$  — унитарная,  $A^*A = I$ , то есть:

$$v^*v = |\lambda|^2 v^*v.$$

Т.к. по определению  $v \neq 0 \Rightarrow v^*v = \|v\|_2^2 \neq 0$  получаем:

$$|\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

Таким образом,  $\forall$  с-з. унитарной матрицы  $A$  по модулю = 1

$\Leftarrow$   $\exists A$  — нормальная матрица и  $\forall$  её с-з.  $\lambda_i, i = \overline{1, n} : |\lambda_i| = 1$ .

Т.к.  $A$  — нормальная  $\Rightarrow$  унитарно диагонализуема, т.е.:

$$A = U\Lambda U^*; U U^* = I, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$A^* = U\Lambda^*U^*; \Lambda^* = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$$

Рассчитаем  $AA^*$ :

$$AA^* = U\Lambda U^*U\Lambda^*U^* = U\Lambda\Lambda^*U^* = [ \Lambda\Lambda^* = \text{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = I ] \ominus$$

$$\ominus U I U^* = I$$

Значит,  $A$  — унитарная  $\square$



№6

а) Докажите, что для  $\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , справедливо:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$$

б) Найдите все матрицы  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ :  $\|A\|_F = \sqrt{n} \|A\|_2$

□ Пусть  $A$  имеет SVD-разложение  $A = U \Sigma V^*$  по метрическим нормам  $\|\cdot\|_F$  и  $\|\cdot\|_2$

$A = U \Sigma V^*$  - SVD;  $r$  - ранг  $A$ ;  $\Sigma \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ;  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$

$$\|A\|_F = \|U \Sigma V^*\|_F = [\|\cdot\|_F - \text{унитарно-инв.}] = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}$$

$$\|A\|_2 = \|U \Sigma V^*\|_F = [\|\cdot\|_2 - \text{унитарно-инв.}] = \|\Sigma\|_2$$

$$\|\Sigma\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Sigma x\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 |x_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 |x_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r |x_i|^2}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sigma_1 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^r |x_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r |x_i|^2}} = \sigma_1$$

$\Rightarrow \sigma_1$ ; значение достигается при  $x = e_1$ .

$$а) \|A\|_2 = \sigma_1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} = \|A\|_F \quad \left( \sigma_1^2 \leq \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \right) - \text{первое нр-во Коши}$$

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \leq n \cdot \sigma_1^2 = n \cdot \|A\|_2^2 \Rightarrow \|A\|_F \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|_2,$$

что и требовалось

б)  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ;  $\|A\|_F = \sqrt{n} \|A\|_2 \Rightarrow \|A\|_F^2 = n \|A\|_2^2$

$$\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 = n \sigma_1^2. \text{ Т.к. } \sigma_i \leq \sigma_1 \Rightarrow \underline{\sigma_i = \sigma_1 \quad \forall i} \quad u, v \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\text{Тогда } A = U \Sigma V^* = [\Sigma = \sigma I \in \mathbb{C}^{n \times n}] = \sigma U V^* = \sigma Q, \text{ где } Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

Таким образом,  $\|A\|_F = \sqrt{n} \|A\|_2$  эквивалентно

для матриц  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  вида:

$$A = \sigma Q, \quad Q \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ - унитарна, } \sigma \in \mathbb{R}_+ \quad (\sigma \geq 0)$$

- унитарна или  
произведение  
унитарных  
( $Q Q^* = I$ )

□



$$\sqrt{7}$$

Дана нормальная матрица  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  и её разложение Шура:  $A = U\Gamma U^*$

- а) Требуется записать SVD матрицы  $A$ , используя  $U$  и  $T$ .
- б) Покажите, что  $\sigma_1(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$
- в) Приведите пример  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ , где формула ~~формула~~ в д) неверна.

□ Метрица  $A$  — нормальная:  $AA^* = A^*A$

$$A = U T U^* ; \quad U T U^* U T^* U^* = U T T^* U^* = U T^* U^* U T U^* = \cancel{U T U^*} U T U^*$$

Значит,  $TT^* = T^*T$ , где  $T$  — вращательное с с.з.  $\lambda_i, i=1, n$  не имеющих

- Done т.е. то ~~не является~~ верхнетрещиной матрица В коммутирует

$$C B^* \Leftrightarrow B - \text{многоэлемент}$$

$$\mathbb{I} (B B^*)_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n b_{ik} \overline{b_{jk}} \quad (b_{ij} = 0 \quad \forall i > j)$$

$$(B^* B)_{c,j} = \sum_{k=1}^{m \wedge n(t,j)} \bar{b}_{k,i} b_{k,j}$$

✗ дифференциал 31-го между:

$$(BB^T)_{ii} = \sum_{k=1}^n |b_{ik}|^2$$

$$(B^* B)_{ii} = \sum_{k=1}^i |b_{ki}|^2$$

$$(B B^T)_{ij} = (B^T B)_{ij} \quad \text{по симметрии скалярного произведения}$$

$$\underline{i=1}: \sum_{k=1}^n |e_{1k}|^2 = \sum_{k=1}^1 |e_{1k}|^2 = |e_{11}|^2 \Rightarrow |e_{12}|^2 + \dots + |e_{1n}|^2 = 0 \Rightarrow e_{1j} = 0$$

$i=m$ : пусть же  $\forall i \leq m-1$  линейно  $b_{ij} = 0, i \neq j$

$$\sum_{k=m}^n |v_{mk}|^2 = \sum_{k=1}^m |v_{km}|^2 = [\text{по предположению индукции}] = |v_{mm}|^2$$

⇓

$$|b_{mm}|^2 + \sum_{k=m+1}^n |b_{mk}|^2 = |b_{mm}|^2 \Rightarrow b_{mk} = 0, n \geq k \geq m+1$$

Доказано, что В-глюкопиноза

Доказательство леммы говорит о том, что  $T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Lambda$ , то есть

рождения Ицра нормальной меркит — гипотезе в фритерной джесе

$$A = U \Lambda U^*$$

$$\delta) \sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^T)} = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$$

$$A A^* = U \Lambda \Lambda^* U^* = U \cdot \text{diag}(|\lambda_1|^2 \dots |\lambda_n|^2) \cdot U^* \Rightarrow G_i(A) = |\lambda_i(A)|$$

а) Таким образом, SVD  $A$  имеет вид:

$$A = U \Sigma U^*; \Sigma = \text{diag}(|\lambda_1| \dots |\lambda_n|)$$

Через  $T = \Lambda$  можно записать так:

$$A = U \cdot (T T^*)^{1/2} \cdot U^*, \quad \text{корни диагональной матрицы — } \begin{matrix} \text{диагональная матрица} \\ \text{неотриц. определений} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{с корнями э-тов} \\ \text{исходной матрицы} \\ \text{не являются} \end{matrix}$$

б)  $\nexists A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 $AA^* \neq A^*A$

Если это положено в  $\mathbb{N}_4$ , ~~тогда~~  $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = 0$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; |A - \lambda E| = \lambda(\lambda - 1), \quad \begin{matrix} \lambda_1(AA^*) = 1 \\ \lambda_2(AA^*) = 0 \end{matrix}$$

$$\sigma_1(A) = \max_i \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = 1 \neq \text{max} \quad 0 = \max_i |\lambda_i(A)| \quad \text{— условие на} \\ \text{нормального} \\ \text{в общем случае}$$

□



78

Покажем, что для любого  $W$  из полярного разложения матрицы  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$  ( $A = WH$ ,  $W^T W = I$ ,  $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $H \geq 0$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) выполняется:

$$\frac{\|A^T A - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|_2 \leq \|A^T A - I\|_2$$

Замечание: пер-го идёт соотношение между  $\|A\|_2$  и  $\|A^T A - I\|_2$  (в смысле  $\| \cdot \|_2$ ) матрицы  $A$  и ортогональной:  $\|A^T A - I\|_2$  и  $\min_{Q: Q^T Q = I} \|A - Q\|_2$

Д  $A = WH$  — полярное разложение

1) Покажем  $\|A - W\|_2 \leq \|A^T A - I\|_2$

$$\|A - W\|_2 = \|W(H - I)\|_2 = \|H - I\|_2$$

$$\|A^T A - I\|_2 = \|H^T W^T W H - I\|_2 = \|H^T H - I\|_2$$

$H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \geq 0$ ,  $H = H^T$ , заменим собственное разложение  $H$ :

$$H = Q D Q^T, D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0 - \text{сг. } H$$

$$H^T H = Q D^T D Q^T = Q D^2 Q^T$$

$$\bullet \|H - I\|_2 = \|Q D Q^T - I\|_2 = \|Q(D - I)Q^T\|_2 = \|D - I\|_2$$

$$\bullet \|H^T H - I\|_2 = \|Q(D^2 - I)Q^T\|_2 = \|D^2 - I\|_2$$

$$\text{Покажем, что } \|D - I\|_2 \leq \|D^2 - I\|_2$$

т.к.  $(D - I)$  и  $(D^2 - I)$  — диагональные матрицы, их  $\| \cdot \|_2$  — это

макс. максимального  $\lambda$ -ти из диагоналей (она же  $\max |d_i - 1|$ ), то есть  $\max$  сингулярных значений

$|d_i - 1|$  третьего слагаемого  $\leq |d_i^2 - 1|$ :

$$a) d_i \in [0; 1]: 1 - d_i \vee 1 - d_i^2; d_i(d_i - 1) \leq 0 \Rightarrow 1 - d_i \leq 1 - d_i^2$$

$$b) d_i > 1: d_i - 1 \vee d_i^2 - 1; 0 \leq d_i(d_i - 1) \Rightarrow d_i - 1 \leq d_i^2 - 1$$

таким образом,  $|d_i - 1| \leq |d_i^2 - 1|$ . То есть  $\|D - I\|_2 \leq \|D^2 - I\|_2$ . Это

сочетает  $\|A - W\|_2 \leq \|A^T A - I\|_2$

2) Покажем  $\frac{\|A^T A - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|_2$

используем свойство  $\| \cdot \|_2$

$$\|A^T A - I\|_2 = \|H^T H - I\|_2 = \|D^2 - I\|_2 = \|(D - I)(D + I)\|_2 \leq \|D - I\|_2 \cdot \|D + I\|_2 \quad \ominus$$

$$\ominus \|A - W\|_2 \cdot \|D + I\|_2 \leq \|A - W\|_2 \cdot (\|D\|_2 + 1) = \|A - W\|_2 \cdot (\|A\|_2 + 1)$$

$$[\|D + I\|_2 = |d_1 + 1| \leq |d_1| + 1 = \|D\|_2 + 1] \quad \text{Значит, } \frac{\|A^T A - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|_2 \quad \square$$

## Бонусные задачи



№3

Решите задачу в же пропущенной унитарно-инв. нормы  $\|\cdot\|$ .

Считайте известным ~~реш~~ неравенство  $\|AB\| \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|$

□ • Обобщим решение задачи №8. Коэффициент со 2-го пункта, заменим

перво:  $\frac{\|A^T A - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|_2$  (Здесь и ниже обозначение совпадает с №8)

Аналогично №8, можем свести задачу к эквивалентной перво:

$$\|D^2 - I\| \leq (\|D\|_2 + 1) \cdot \|D - I\| \quad (\text{доказано так же, что в №8})$$

$$\|D^2 - I\| \leq \|D + I\|_2 \cdot \|D - I\| \quad [\text{ув. из условия}]$$

Тогда получаем:

$$\|D^2 - I\| \leq \|D + I\|_2 \cdot \|D - I\| \leq (\|D\|_2 + 1) \cdot \|D - I\|$$

$$\|D + I\|_2 \leq \|D\|_2 + 1 \quad - \text{это доказано в №8.}$$

Таким образом,  ~~$\|A^T A - I\|_2$~~   $\frac{\|A^T A - I\|}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|$ .

• Докажем  $\|A - W\| \leq \|A^T A - I\|$

Аналогично №8, можем свести задачу к эквивалентной перво:

$$\|D - I\| \leq \|D^2 - I\|$$

$$\|D - I\| \leq \|(D - I)(D + I)\| \leq \|D + I\|_2 \cdot \|D - I\|$$

$$1 \leq \|D + I\|_2 = d_1 + 1, \quad \text{но } d_1 \geq 0$$

Значит,  $1 \leq \|D + I\|_2$ , что приводит  $\|A - W\| \leq \|A^T A - I\|$ . □