№2

Докажем субмультипликативность векторной p-нормы матриц:

$\|A\|_{p,vec} = \|vec(A)\|_p$ при $p \in [1;2]$

▢

$\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n};\ B \in \mathbb{C}^{n\times l}$

- Сначала докажем для $p=1$:

[КБШ] [или $|\Sigma x| \le \Sigma |x|$]

$$\|AB\|_{1,vec} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\cdot|b_{kj}| = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{l}|b_{kj}|\right) \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}|b_{kj}|\right) = \|A\|_{1,vec}\cdot\|B\|_{1,vec}$$

- Докажем для $p \in (1;2]$:

Для доказательства потребуется нер-во Гёльдера (доказывалось в курсах математики)

$\forall x,y \in \mathbb{C}^n,\ \forall p,q \ge 1:\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $\left(q=\frac{p}{p-1}\right)$ выполняется:

$$\left[|x^T y| \le\right] \sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

a_i – i-ая строка A, $i=\overline{1,m}$

b_j – j-ый столбец B, $j=\overline{1,l}$

Заметим $\|AB\|^p_{p,vec}$, воспользуемся нер-вом Гёльдера:

$$\|AB\|^p_{p,vec} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^p = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}|a_i^T b_j|^p \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\|a_i\|_p^p\cdot\|b_j\|_q^p$$

$(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,l})$

Рассмотрим $\forall$ слагаемое и докажем: $|a_i^T b_j|^p \le \|a_i\|_p^p \cdot \|b_j\|_p^p$. Для этого докажем сначала $\forall x \in \mathbb{C}^s$ $\|x\|_q \le \|x\|_p$ при $1 \le p \le q$: $\left(1 \le p \le \frac{p}{p-1};\ p(p-1) \le p \Rightarrow \boxed{1 \le p \le 2}\right)$

[$\|x\|_q^p = \left(\sum_i |x_i|^q\right)^{p/q} \overset{?}{\le} \sum_i |x_i|^p = \|x\|_p^p$

Пусть $y = \frac{x}{\|x\|_p}$; $\|y\|_p = 1$; $\forall i$ $|y_i| \le 1 \Rightarrow \forall i$ $|y_i|^q \le |y_i|^p$ (т.к. $1 \le p \le q$)

$\|y\|_q^q = \sum_i |y_i|^q \le \sum_i |y_i|^p = \|y\|_p^p = 1 \Rightarrow \|y\|_q \le 1 \Rightarrow \|x\|_q \le \|x\|_p$]

Таким образом, $|a_i^T b_j|^p \le \|a_i\|_p^p \cdot \|b_j\|_q^p \le \|a_i\|_p^p \cdot \|b_j\|_p^p \quad \forall i,j$

В итоге получаем:

$$\|AB\|^p_{p,vec} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\|a_i\|_p^p\cdot\|b_j\|_p^p = \left(\sum_{i=1}^{m}\|a_i\|_p^p\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{l}\|b_j\|_p^p\right) = \|A\|^p_{p,vec}\cdot\|B\|^p_{p,vec}$$, то есть

$$\|AB\|_{p,vec} \le \|A\|_{p,vec}\cdot\|B\|_{p,vec}$$ ▨

(*): • $p<1$ — не подходит, т.к. не является нормой (не выполняется нер-во треугольника)

• $p>2$ — на семинарах приводился контрпример (матрицы из единиц)