$\forall\ S = \{X \in \mathbb{R} : \|X\| \le 1\}$ — ограниченное, замкнутое, выпуклое мн-во

$A_0 \in S$ $(\|A_0\| = 1)$, A_0 лежит на границе мн-ва S

(опорной — в данном случае)

По [т. о разделяющей гиперплоскости] : $\exists B_0$:

(*) м. док-во ниже или в [S. Boyd, Convex Optimization, p.p. 46-51]

1) B_0 отделяет A_0 от остального мн-ва S, т.е. $\exists c \in \mathbb{R} : \forall X \in S$:

$Tr(B_0 X^T) \le c$

2) в т. A_0 : $Tr(B_0 A_0^T) = c$, но $\|B_0\|^* = \max\limits_{X \in S} Tr(X B_0^T) \le c$

Значит, $\|B_0\|^* = Tr(B_0 A_0^T) = c$

$\forall\ B = \dfrac{B_0}{\|B_0\|^*}$; $\|B\|^* = 1$

Теперь найдем $Tr(A_0 B^T)$:

$$Tr(A_0 B^T) = \frac{1}{\|B_0\|^*} \overbrace{Tr(A_0 B_0^T)}^{= \|B_0\|^*} = 1$$

То есть, мы получили $Tr(A_0 B^T) = 1$; $\|B\|^* = 1$

Однако по предположению $\|A_0\|^{**} = \max\limits_{B : \|B\|^* \le 1} Tr(A_0 B^T) < 1$,

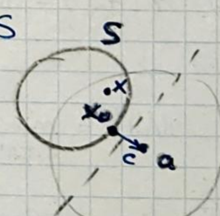
но мы нашли $\underset{\|B^*\| = 1}{B} : Tr(A_0 B^T) = 1$ — противоречие

Значит, $\|A\|^{**} \ge \|A_0\|$

Из (I) и (II) получаем, что $\|A\|^{**} = \|A\|$ ☒

$\boxed{\text{Приложение}}$ — док-во т. о разделяющей гиперплоскости

$\exists\ S$ — выпуклое и $a \notin cl(S) \Rightarrow a$ строго отделима от S



□ 1) $\forall\ d(x) = \|x - a\|_2$

2) $\forall$ шар $B(a, r) = \{t : \|t - a\|_2 \le r\}$

3) $\forall\ \underline{X} = S \cap B(a, r)$ — компакт

4) из [т. Вейерштрасса] : $\exists\ x_0$ — т. min на $\underline{X}$, т.е. $d(x) \ge d(x_0)\ \forall x \in \underline{X}$

5) $\forall\ c = a - x_0$; покажем, что $\langle c, x - x_0 \rangle < 0\ \forall x \in \underline{X}$ (образует тупой угол)

От противного, $\exists\ x_1 \in \underline{X} : \langle c, x_1 - x_0 \rangle \ge 0$

$x(\theta) = \theta x_1 + (1 - \theta) x_0$; $\forall\ f(\theta) = d(x(\theta)) = \|x(\theta) - a\|_2^2$

$[x(0) = x_0]$

$f'(0) = 2(x(\theta) - a)^T (x_1 - x_0)\Big|_{\theta = 0} = 2(x_0 - a)^T (x_1 - x_0) = -2c^T (x_1 - x_0) < 0$

т.е. $\exists\ \theta_0 \in U_\varepsilon(0) : d(x(\theta_0)) < d(x_0) \Rightarrow x_0$ — не т. min — противоречие.

($\alpha = 1$ — опорная)

6) разделяющая гиперплоскость : $\langle c, x \rangle = \langle c, d \rangle$, где $d = \alpha x_0 + (1 - \alpha) a$, $\alpha \in (0; 1)$ ☒