# Домашняя работа 1

(теория)

**Версия от:** 30.01.25
**Дедлайн:** 13.02.25 в 23:59

1. **(6 баллов: 1+2+2+1)** Пусть задан вектор $u \in \mathbb{C}^n : \|u\|_2 = 1$. Найдите все $\alpha \in \mathbb{C}$, для которых $A = I - \alpha u u^*$ является: 1) эрмитовой 2) косоэрмитовой 3) унитарной 4) нормальной. Для пункта 3) также нарисуйте найденные $\alpha$ на комплексной плоскости.

2. **(16 баллов: 7+9)**

   (a) Докажите, что для любой косоэрмитовой $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ матрица:
   $$Q = (I - K)^{-1}(I + K) \tag{1}$$
   будет унитарной.

   (b) Найдите множество всех унитарных матриц, которые представимы в виде (1).

3. **(14 баллов)** Докажите, что
   $$\|A\|_{1\to 2} \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_{1\to 2}, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$
   **Указание:** В случае использования констант эквивалентности векторных норм необходимо обосновывать это значение констант.

4. **(16 баллов: 3+6+7)** Обозначим $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/n & 0 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Обоснуйте сходимость $A_n \to A$, $n \to \infty$ исходя из определения сходимости с помощью норм.

   (b) Найдите собственные разложения $A_n = S_n \Lambda_n S_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из $S_n$,$\Lambda_n$ и $S_n^{-1}$. Почему не у всех из этих матриц существует предел?

   (c) Найдите разложения Шура $A_n = U_n T_n U_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из $U_n$,$T_n$ и $U_n^{-1}$.

5. **(7 баллов)** Докажите, что нормальная матрица является унитарной тогда и только тогда, когда все ее собственные значения по модулю равны 1.

6. **(13 баллов: 6+7)**

   (a) Докажите, что для любой $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m \ge n$, справедливо:
   $$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2.$$

   (b) Найдите все матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, удовлетворяющие $\|A\|_F = \sqrt{n}\|A\|_2$.

7. **(12 баллов: 4+4+4)** Дана нормальная матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и её разложение Шура $A = U\Lambda U^*$.

   (a) Запишите сингулярное разложение матрицы $A$, используя матрицы $U$ и $\Lambda$.

   (b) Покажите, что $\sigma_1(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$.

   (c) Приведите пример матрицы $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, не являющейся нормальной и для которой полученное в (b) выражение неверно.

8. **(16 баллов)**. Докажите, что для множителя $W$ (см. обозначения в лекциях) из полярного разложения матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \ge n$ выполняется:
   $$\frac{\|A^\top A - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \le \|A - W\|_2 \le \|A^\top A - I\|_2.$$
   **Замечание:** Неравенство дает соотношение между двумя мерами близости (в смысле спектральной нормы) матрицы $A$ к ортогональной: $\|A^\top A - I\|$ и $\min_{Q:Q^\top Q = I} \|A - Q\|$.

## Бонусные задачи

1. **(20 б. баллов)**. Назовем норму $\|\cdot\|^*$ двойственной к $\|\cdot\|$ над $\mathbb{R}^{m\times n}$, если

$$\|A\|^* = \max_{B\colon \|B\|=1} \operatorname{Tr}\left(AB^\top\right).$$

Докажите, что

   (a) $(\|A\|^*)^* = \|A\|$;

   (b) норма $\|\cdot\|$ унитарно-инвариантна тогда и только тогда, когда унитарно-инвариантна $\|\cdot\|^*$.

2. **(30 б. баллов)**. Докажите субмультипликативность векторной $p$-нормы матрицы:

$$\|A\|_{p,\mathrm{vec}} \equiv \|\mathrm{vec}(A)\|_p$$

при $1 \le p \le 2$.

3. **(50 б. баллов)**. Решите задачу 8 для произвольной унитарно-инвариантной нормы $\|\cdot\|$:

$$\frac{\|A^\top A - I\|}{\|A\|_2 + 1} \le \|A - W\| \le \|A^\top A - I\|.$$

Считайте известным неравенство $\|AB\| \le \|A\|_2 \|B\|$.