Лекция 2. Основы матричного анализа 2

Максим Рахуба

ФКН ВШЭ

Основы матричных вычислений 24/25

Январь 28, 2025

Факты из лекции 1

•) $\|A\|_F = \|\mathrm{vec}(A)\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$

$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

•) $A = U T U^*, \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad A = S B S^{-1}$

План

Нормальные матрицы

Знакоопределенные матрицы

Сингулярное разложение (SVD)

QR разложение

Нормальные матрицы

Определение

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – нормальная, если

$$A^* A = AA^*.$$

Примеры

- $A^* = A$ (эрмитова)
- $A^* A = AA^* = I$ (унитарная)
- $A^* = -A$ (косоэрмитовые)
- $\{ U \Lambda U^* \}$ – класс матриц, например циркулянтные (позже в курсе)

fix унитарная

Нормальные матрицы

$$A = U\Lambda \overset{U^{-1}}{U^*}$$

Теорема

Матрица A унитарно диагонализуема $\iff$ *A – нормальная.*

□ $\Rightarrow$

$$A^*A = (U\Lambda U^*)^* U\Lambda U^* =$$

$$= U\Lambda^* \underbrace{U^* U}_{I} \Lambda U^* = U\Lambda^*\Lambda U^* = \dots = AA^*$$

$\Leftarrow$

$$A = UTU^*$$

$$\cancel{U} T^*T \cancel{U^*} = \cancel{U} TT^* \cancel{U^*}$$

$$T^*T = TT^*, \qquad T = \begin{array}{c|cc} & 1 & n-1 \\ \hline 1 & a & b \\ n-1 & 0 & C \end{array}$$

По индукции

$$TT^* = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar a & 0 \\ b^* & C^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + \|b\|_2^2 & bC^* \\ Cb^* & CC^* \end{pmatrix}$$

Нормальные матрицы

$$T^*T = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ b^* & C^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & \bar{a} b \\ b^* a & b^* b + C^* C \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{|a|^2} + \|b\|_2^2 = \cancel{|a|^2} \Rightarrow b = 0$$

$$C C^* = C^* C \overset{\text{по индукции}}{\Rightarrow} C \text{ - диаг.} \ \blacksquare$$

Следствие

- *A — эрмитова* $\iff$ *A — нормальная и* $\lambda \in \mathbb{R}$;
- *A — унитарная* $\iff$ *A — нормальная и* $|\lambda| = 1$;
- *A — косоэрмитова* $\iff$ *A — нормальная и* $\lambda \in i \cdot \mathbb{R}$.

План

Нормальные матрицы

Знакоопределенные матрицы

Сингулярное разложение (SVD)

QR разложение

Знакоопределенные матрицы

Определение

1. Эрмитова $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ — положительно определенная, если

$$\forall x \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\} : \quad x^* A x > 0$$

2. Эрмитова $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется неотрицательно определенной (положительно полуопределенной), если

$$\forall x \in \mathbb{F}^n : \quad x^* A x \geq 0$$

Пример A^*A (матрица Грама)

•) $(A^*A)^* = A^* A^{**} = A^*A$ — эрмитова

•) $x^* A^* A x = (Ax)^* Ax = \|Ax\|_2^2 \geq 0$

•) $A^*A v_i = \lambda_i v_i$

$$v_i^* A^* A v_i = v_i^* \lambda_i v_i = \lambda_i \|v_i\|_2^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i \geq 0$$

План

$$A^* A = U \Sigma^2 U^*$$

Нормальные матрицы

Знакоопределенные матрицы

Сингулярное разложение (SVD)

QR разложение

Сингулярное разложение (SVD)

Теорема

Пусть $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ имеет ранг r. Тогда существуют унитарные $U \in \mathbb{F}^{m\times m}$ и $V \in \mathbb{F}^{n\times n}$ и числа $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$:

$$A = U\Sigma V^*$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

пока не знаем, что это ранг.

$\square$ $\measuredangle$ $A^*A = V\Lambda^2V^*$

унитарн.

$$V = \begin{bmatrix} V_r & V_r^\perp \end{bmatrix}$$

r $\quad n-r$

$$\Lambda^2 = V^*A^*AV = \begin{bmatrix} V_r^* \\ V_r^{\perp *} \end{bmatrix} A^*A \begin{bmatrix} V_r & V_r^\perp \end{bmatrix} =$$

$$\Lambda^2 = \begin{bmatrix} \Sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} V_r^*A^*AV_r & * \\ * & V_r^{\perp *}A^*AV_r^\perp \end{bmatrix}$$

Сингулярное разложение (SVD)

$$V_r^* A^* A V_r = \Sigma_r^2$$

$$\underbrace{\Sigma_r^{-1} V_r^* A^*}_{U_r^*} \underbrace{A V_r \Sigma_r^{-1}}_{U_r} = I_r$$

$$A V_r = U_r \Sigma_r$$

$$V_r^{\perp *} A^* A V_r^{\perp} = 0$$

$$\mathrm{Tr}(\dots) = 0$$

$$\| A V_r^{\perp} \|_F^2 = 0$$

т.е. $A V_r^{\perp} = 0$

$$AV = A[V_r \;\; V_r^{\perp}] = [AV_r \;\; AV_r^{\perp}] = [U_r \Sigma_r \;\; 0] =$$

$$= [U_r \Sigma_r \;\; U_r^{\perp} \cdot 0] = \overbrace{[U_r \;\; U_r^{\perp}]}^{U} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^*, \qquad \Sigma = U^* A V \Rightarrow r = \mathrm{rank}(A)$$

Сингулярное разложение (SVD)

Следствие

1. *Сингулярные числа определяются однозначно и равны*

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}, \quad i = 1, \dots, r.$$

$A = U \Sigma V^*$

$A^* A = V \Sigma^T \Sigma V^*$

$A A^* = U \Sigma \Sigma^T U^*$

$A A^* v_i = \sigma_i^2 v_i$

$A^* A (A^* v_i) = \sigma_i^2 (A^* v_i)$

Сингулярное разложение (SVD)

Следствие

1. *Сингулярные числа определяются однозначно и равны*

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

2. $Av_i = \sigma_i u_i, \quad A^* u_i = \sigma_i v_i, \quad i = 1, \ldots, r.$

$$A = U \Sigma V^*$$

$$AV = U \Sigma$$

Сингулярное разложение (SVD)

Следствие

1. *Сингулярные числа определяются однозначно и равны*

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}, \quad i = 1, \dots, r.$$

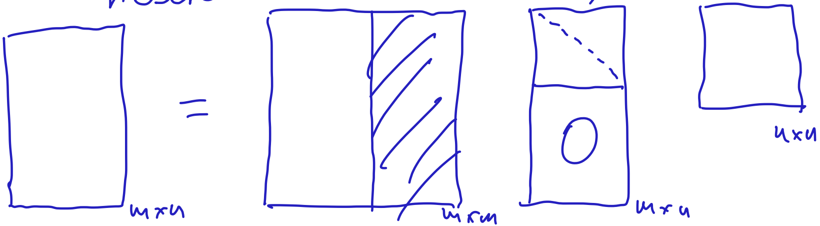
2. $Av_i = \sigma_i u_i, \quad A^* u_i = \sigma_i v_i, \quad i = 1, \dots, r.$

3. $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^*.$

$$U \Sigma V^* = \sum_i \sigma_i u_i v_i^*$$

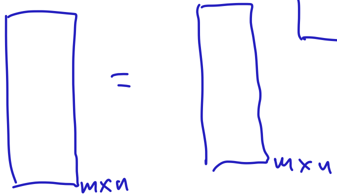
Виды записи SVD

• полное SVD (full)



np.linalg.svd(A)

• Тонкое SVD (thin)



np.linalg.svd(A, full_matrices=False)

Наивный алгоритм вычисления SVD

Пусть $m \geq n$.

1. Вычислить A^*A.

   n m $O(mn^2)$

2. Диагонализация $A^*A \;\Rightarrow\; V, \Sigma_r$:

$$A^*A = V \begin{bmatrix} \Sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.$$

$O(n^3)$

3. Вычислить $U_r = AV_r\Sigma_r^{-1}$.

Итоговая сложность алгоритма: $O(mn \min(m,n))$

Неустойчивый алгоритм (семинар)

Следствие: формулы для норм

Утверждение

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A),$$
$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1(A)^2 + \dots + \sigma_r(A)^2}.$$

$\square$ ·) $\|A\|_2 = \|U \Sigma V^*\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \sigma_1$

(Семинар)

·) $\|U \Sigma V^*\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots}$

$\blacksquare$

Следствие: полярное разложение

Теорема (Полярное разложение)

Пусть $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, причем $m \geq n$. Тогда существует $W \in \mathbb{F}^{m \times n}$ с ортонормированными столбцами ($W^* W = I$) и положительно полуопределенная $H \in \mathbb{F}^{n \times n}$:

$$A = WH.$$

$\square$ Тонкое SVD

$$A = U \Sigma V^* = \underbrace{U \overbrace{V^* V}^{I}}_{W} \underbrace{\Sigma V^*}_{\geq 0}$$

План

Нормальные матрицы

Знакоопределенные матрицы

Сингулярное разложение (SVD)

QR разложение

QR разложение

Теорема (QR разложение)

Для $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $m \geq n$ найдется $Q \in \mathbb{F}^{m\times n}$ с ортонормированными столбцами ($Q^* Q = I$) и верхнетреугольная $R \in \mathbb{F}^{n\times n}$:

$$A = QR$$

QR разложение

Теорема (QR разложение)

Для $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $m \geq n$ найдется $Q \in \mathbb{F}^{m \times n}$ с ортонормированными столбцами ($Q^* Q = I$) и верхнетругольная $R \in \mathbb{F}^{n \times n}$:

$$A = QR$$

Доказательство.

В полноранговом случае Грам-Шмидт (ГШ):

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}_1 &= a_1, & q_1 &= \widetilde{q}_1 / \|\widetilde{q}_1\|_2, \\
\widetilde{q}_2 &= a_2 - q_1(q_1^* a_2), & q_2 &= \widetilde{q}_2 / \|\widetilde{q}_2\|_2, \\
&\vdots & &\vdots \\
\widetilde{q}_n &= a_n - q_1(q_1^* a_n) - \ldots - q_{n-1}(q_{n-1}^* a_n), & q_n &= \widetilde{q}_n / \|\widetilde{q}_n\|_2.
\end{aligned}$$

В случае неполного ранга:

(след. лекция)

QR разложение

Литература

1. Е. Е. Тыртышников. *Методы численного анализа*. Академия, 2007.
2. Е. Е. Тыртышников. *Матричный анализ и линейная алгебра*. Физматлит, 2007.
3. G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*, 4th Edition. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013.

Доска