Основы матричных вычислений 24/25

Лектор: Рахуба Максим Владимирович

Организационные вопросы

1. Подпишитесь на ТГ канал и чат курса
(ссылки на `http://wiki.cs.hse.ru`).
2. У каждой группы будет дополнительно свой ТГ чат.
3. Первый тест на оценку пройдет на следующей неделе.

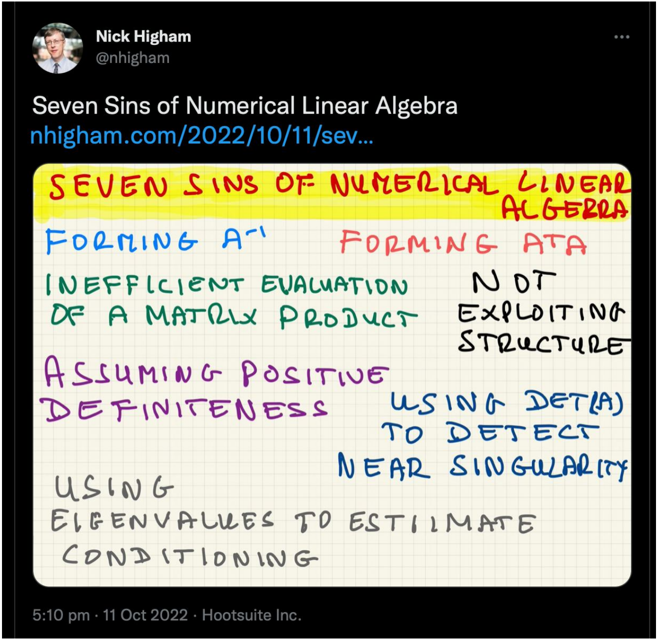
Формула оценки

```
итог = round(min(10,
 0.2*ТДЗ + 0.15*ПДЗ + 0.1*БДЗ  + 0.1*Т + 0.25*К + 0.3*Э
))
```

- ТДЗ, ПДЗ, БДЗ – средняя оценка за прак., теор., бонусные ДЗ;
- Т – средняя оценка за тесты (≈ 5–7 мин.) на семинарах;
- К и Э – оценки за коллоквиум и письменный экзамен;
- 2 раза за семестр можно просрочить дедлайн ДЗ на 1 сутки;
- Автоматов не предусмотрено.

Литература

1. Е. Е. Тыртышников. *Методы численного анализа*. Академия, 2007.
2. Е. Е. Тыртышников. *Матричный анализ и линейная алгебра*. Физматлит, 2007.
3. G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*, 4th Edition. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013.
4. `https://github.com/oseledets/nla2024`.
5. Demmel J. *Applied numerical linear algebra*. SIAM, 1997
6. Trefethen, L. N., & Bau III, D. (1997). *Numerical linear algebra*. (Vol. 50). Siam. Philadelphia.


Nick Higham
@nhigham
Seven Sins of Numerical Linear Algebra
nhigham.com/2022/10/11/sev...
SEVEN SINS OF NUMERICAL LINEAR ALGEBRA
FORMING A^{-1}
FORMING A^TA
INEFFICIENT EVALUATION OF A MATRIX PRODUCT
NOT EXPLOITING STRUCTURE
ASSUMING POSITIVE DEFINITENESS
USING DET(A) TO DETECT NEAR SINGULARITY
USING EIGENVALUES TO ESTIMATE CONDITIONING
5:10 pm · 11 Oct 2022 · Hootsuite Inc.

Лекция 1. Основы матричного анализа

Максим Рахуба

ФКН ВШЭ
Основы матричных вычислений 24/25

Январь 21, 2025

План

Векторные нормы

Матричные нормы

Ортогональность и унитарные матрицы

Разложение Шура

Векторные нормы

$\mathbb{F}^n, \quad \mathbb{F}^{m \times n}, \quad \mathbb{F}^{m \times n \times l}$

Определение

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Тогда $\| \cdot \| \colon V \to \mathbb{R}$ — *норма*, если

Векторные нормы

Определение

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Тогда $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ — *норма*, если

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$,
2. $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{F},\ \forall x \in V$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$.

$z - x$

$$\|\cancel{x} + z - \cancel{x}\| \leq \|x\| + \|z - x\|$$

$$\big|\|z\| - \|x\|\big| \leq \|z - x\|$$

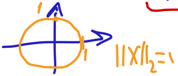
(обратное нер-во треуг.)

Векторные нормы

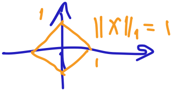
Пусть $V = \mathbb{F}^n$ и $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Примеры

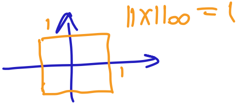
• $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\underbrace{(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)}_{x^* \text{ (эрмитово сопряжение)}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \sqrt{x^* x}$



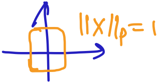
• $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$



• $\|x\|_\infty = \max\limits_{i} |x_i|$



$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1,$



$\|x\|_p \xrightarrow[p \to \infty]{} \|x\|_\infty$

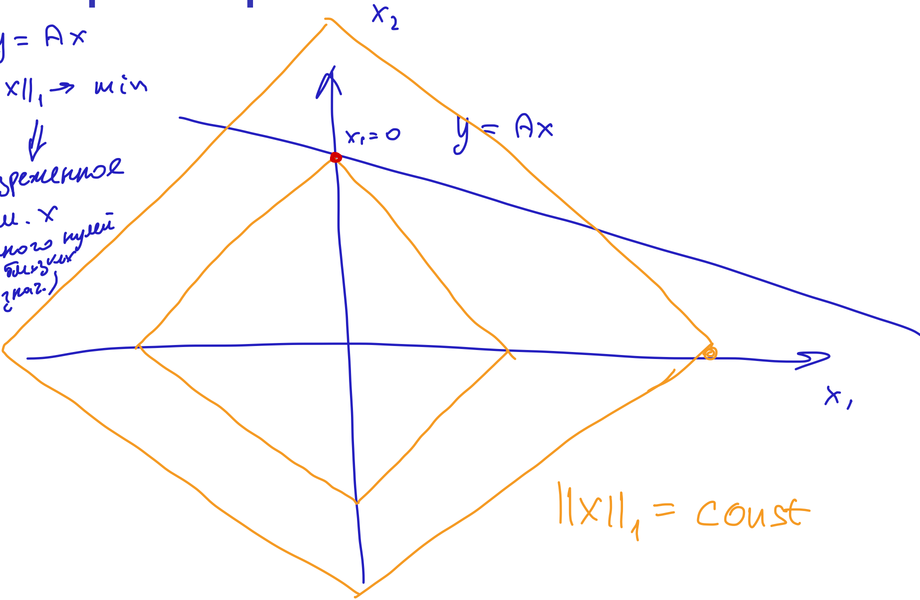
Векторные нормы

$y = Ax$

$\|x\|_1 \to \min$

$\Downarrow$

разреженное реш. x (много нулей или близких к 0 знач.)



Векторные нормы

I – единич.

$\parallel$

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Теорема

$\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ – *непрерывная функция относительно* $\|\cdot\|_2$.

$$i \to \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\square \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \|x\|_2$

$$\big|\, \|x\| - \|z\| \,\big| \le \|x - z\| = \Big\| \sum_i (x_i - z_i) e_i \Big\| \le$$

(Нер-во треуг.) КБШ

$$\le \sum_i |x_i - z_i| \, \|e_i\| \le \sqrt{\sum_i |x_i - z_i|^2} \, \underbrace{\sqrt{\sum_i \|e_i\|}}_{C = C(V)} =$$

$$= C \, \|x - z\|_2$$

$\blacksquare$

Векторные нормы

Теорема

Любые две нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ на конечномерном пространстве V эквивалентны, то есть $\exists C_1, C_2 > 0$ и $\forall x \in V$:

$$C_1\|x\|_a \le \|x\|_b \le C_2\|x\|_a.$$

$\square$ $\|\cdot\|_b$ – непр. ф-я на $S^{n-1} = \{\|y\|_2 = 1\}$

$\Downarrow$ Теор Вейерштрасса

почему?

$$0 < \tilde{C}_1 \le \|y\|_b \le \hat{C}_2$$

$$y = \frac{x}{\|x\|_2}$$

$$\frac{\tilde{C}_1}{\tilde{\tilde{C}}_2}\|x\|_a \le \tilde{C}_1\|x\|_2 \le \|x\|_b \le \tilde{C}_2\|x\|_2 \le \frac{\tilde{C}_2}{\tilde{\tilde{C}}_1}\|x\|_a$$

$$\left(\tilde{\tilde{C}}_1\|x\|_2 \le \|x\|_a \le \tilde{\tilde{C}}_2\|x\|_2\right)$$

$\blacksquare$

Векторные нормы

Теорема

Любые две нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ на конечномерном пространстве V эквивалентны, то есть $\exists C_1, C_2 > 0$ и $\forall x \in V$:

$$C_1\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C_2\|x\|_a.$$

Следствие

Можем говорить о сходимости $x_k \to x$ при $\|x_k - x\| \to 0$, $k \to \infty$ вне зависимости от $\|\cdot\|$.

План

Векторные нормы

Матричные нормы

Ортогональность и унитарные матрицы

Разложение Шура

Матричные нормы

Определение

$\|\cdot\|$ — *матричная* норма, если

1. Норма на $V = \mathbb{F}^{m\times n}$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$.
2. Для любых A и B, допускающих умножение:

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\| \quad \text{(субмультипликативность).}$$

эрмитово сопряж. $\left(A^* \overset{def}{=} \overline{A^T}\right)$

Примеры

- $\|A\|_F = \underbrace{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij}|^2}}_{= \|vec(A)\|_2} = \sqrt{Tr(A^*A)} = \sqrt{Tr(AA^*)}$
- $\|A\|_C = \underbrace{\max |a_{ij}|}_{= \|vec(A)\|_\infty}$ ← не матричная (нет субмульт.), но всё равно норма на пр-ве матриц. (семинар)
- $\|A\|_{sum} = \sum_{i,j} |a_{ij}| = \|vec(A)\|_1$

Матричные нормы

- Операторная норма:

max, т.к. непр ф-я на сфере (компакт)

$$\|A\|_{a\to b} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_b}{\|x\|_a} = \sup_{x\neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|_a} \right\|_b = \sup_{\|y\|_a = 1} \|Ay\|_b$$

- p-норма матрицы (частный случай операторной):

$$\|A\|_p \equiv \|A\|_{p\to p} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

$p \geq 1$

Ф-лы для $p \in \{1, 2, \infty\}$:

наиб. с. з.

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_1(A^* A)} = \sqrt{\lambda_1(A A^*)}$$

(след. лекц.)

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

(семинар)

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

План

Векторные нормы

Матричные нормы

Ортогональность и унитарные матрицы

Разложение Шура

Ортогональность и унитарные матрицы

Определение

$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{F}$ — *скалярное произведение*, если

1. $(x,x) \geq 0, \quad x = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0$,
2. $(x,y) = \overline{(y,x)}$,
3. $(\alpha x, y) = \alpha (x,y)$,
4. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$.

•) $\sum_i x_i \overline{y_i} = y^* x$ — естеств. скаляр. на $\mathbb{C}^n$

•) $\langle A,B \rangle_F = \sum_{i,j} a_{ij} \overline{b_{ij}} = \mathrm{Tr}\,(B^* A)$ — ест. на $\mathbb{C}^{n \times n}$

Ортогональность и унитарные матрицы

Определение

$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{F}$ — *скалярное произведение*, если

1. $(x, x) \geq 0, \quad x = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0$,
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Полезные неравенства

- $|(x, y)| \leq (x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2}$ (КБШ)
- $|y^* x| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (нер-во Гельдера)

$x \perp y$, если $(x, y) = 0$

Унитарные матрицы

Определение

$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — *унитарная*, если

$$U^{-1} = U^{*}.$$

Унитарные матрицы

Определение

$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — *унитарная*, если

$$U^{-1} = U^*.$$

Ортогональность строк и столбцов U

Так как $UU^* = U^*U = I$:

$$U^*U = \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^*u_1 & \dots & u_1^*u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^*u_1 & \dots & u_n^*u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Унитарная инвариантность норм

Утверждение 1

Если $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — унитарная, то $\forall x \in \mathbb{C}^n$

$$\|Ux\|_2 = \|x\|_2.$$

$$\square \quad \|Ux\|_2^2 = (Ux)^*(Ux) = x^* \underbrace{U^* U}_{I} x = x^* x = \|x\|_2^2 \quad \blacksquare$$

Утверждение 2

Пусть $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — унитарные. Тогда $\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$$\|UAV\|_F = \|A\|_F,$$
$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2.$$

$\square$ 1) через Tr.

2) $$\|UAV\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\cancel{U}AVx\|_2}{\|\underbrace{Vx}_{y}\|_2} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} = \|A\|_2 \quad \blacksquare$$

План

Векторные нормы

Матричные нормы

Ортогональность и унитарные матрицы

Разложение Шура

Собственное разложение и ЖНФ

A и B подобны, если $\exists S$: $A = SBS^{-1}$

•) Собств. разлож. (не всегда $\exists$)

$$A = S \Lambda S^{-1}, \quad \Lambda \text{ - диаг.}$$

с.з. на диаг.

•) ЖНФ (существует, но неустойчиво)

$$A = S J S^{-1}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

Нужен устойчивый аналог для вычислений

Разложение Шура

Теорема

$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *найдется унитарная* $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *и верхнетреугольная матрица* $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *такие что*

$$A = U\underbrace{T}_{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}\overbrace{U^*}^{U^{-1}}.$$

$\leftarrow$ с. з. A

$\square$ По индукции. $n=1$ – очевидно

$\exists\ (\lambda_1, v_1):\ Av_1 = \lambda_1 v_1,\quad \|v_1\|_2 = 1$

$U_1 = [v_1\ v_2 \dots v_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – унитар.

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{bmatrix} \underbrace{A\,[v_1 \dots v_n]}_{[Av_1 \dots Av_n]} =$$

$$= \begin{bmatrix} \overset{\lambda_1}{v_1^* \overset{\lambda_1 v_1}{A v_1}} & v_1^* A v_2 & \dots \\ \underset{0}{v_2^* \overset{\lambda_1 v_1}{A v_1}} & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} =$$

$$A_1 = U_2 T_2 U_2^*$$

(по индукции)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}}_{\text{верхнетреуг.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}^* \qquad \blacksquare$$

Доска