ФКН ВШЭ
Основы Матричных Вычислений
Весенний семестр 2025

Домашняя работа 1
(теория)

Работу выполнил:

Назмиев Айрат, группа ***

Задача 1

Пусть задан вектор $u \in \mathbb{C}^n \colon \|u\|_2 = 1$. Найдите все $\alpha \in \mathbb{C}$, для которых $A = I - \alpha uu^*$ является: 1) эрмитовой 2) косоэрмитовой 3) унитарной 4) нормальной. Для пункта 3) также нарисуйте найденные α на комплексной плоскости.

□ Найдем все $\alpha \in \mathbb{C}$ в каждом пункте. Обозначим $\alpha = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$.

1. A — эрмитова: $A^* = A$.

   $A^* = I - \overline{\alpha} uu^* = I - \alpha uu^* = A$, из условия $\|u\|_2 = 1$, значит $uu^* \neq 0$.

   $\alpha = \overline{\alpha} \iff \alpha \in \mathbb{R}$.

2. A — косоэрмитова: $A^* = -A$.

   $A^* = I - \overline{\alpha} uu^* = -I + \alpha uu^* = -A$.

   $2I = (\alpha + \overline{\alpha}) uu^*$.

   I имеет ранг n, тогда как $\operatorname{rank} uu^* = 1$ $(u \neq 0)$, в этом случае $uu^* = u^*u = 1$. Значит, равенство может выполнятся только при $n = 1$, в скалярном случае. Тогда также должно быть выполнено $2 = \alpha + \overline{\alpha} = 2a$. Получаем, что для $n \geqslant 1$ таких α не существует (A не может быть косоэрмитовой), для $n = 1$: $\alpha = 1 + ib,\ \forall b \in \mathbb{R}$.

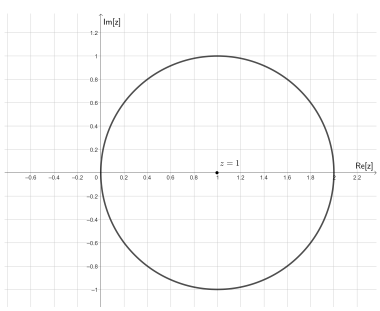
3. A — унитарная: $AA^* = I$.

   $AA^* = (I - \alpha uu^*)(I - \overline{\alpha} uu^*) = I - (\alpha + \overline{\alpha}) uu^* + |\alpha|^2 uu^* uu^* = [u^*u = \|u\|_2 = 1] = I - (\alpha + \overline{\alpha}) uu^* + |\alpha|^2 uu^* = I$.

   $|\alpha|^2 uu^* = (\alpha + \overline{\alpha}) uu^*$.

   $a^2 + b^2 = 2a,\ (a-1)^2 + b^2 = 1$.

   Таким образом, $\alpha \in \{z \in \mathbb{C} :\ |z - 1| = 1\}$. Изобразим множество на комплексной плоскости: окружность радиуса 1 с центром в $z = 1$.



4. A — нормальная, $AA^* = A^*A$.

   $AA^* = I - (\alpha + \overline{\alpha}) uu^* + |\alpha|^2 uu^*$; $A^*A = I - (\alpha + \overline{\alpha}) uu^* + |\alpha|^2 uu^*$.

   Можно видеть, что $AA^* = A^*A,\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$. ■

Задача 2

1. Докажите, что для любой косоэрмитовой $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ матрица:
$$Q = (I-K)^{-1}(I+K) \quad (1)$$
будет унитарной.

2. Найдите множество всех унитарных матриц, которые представимы в виде (**??**).

□ Для начала покажем, что матрица $I-K$ является обратимой. Известно, что собственные значения косоэрмитовых матриц имеет вид $\lambda(K) \in i\mathbb{R}$, то есть являются чисто мнимыми, в том числе могут равняться нулю. Пусть $K = U\Lambda U^{-1} = U\Lambda U^*$ — ее собственное разложение в ОНБ комплексного векторного пространства (косоэрмитовы матрицы нормальные). Тогда матрицу можно расписать в следующем виде: $I-K = UU^* - U\Lambda U^* = U(I-\Lambda)U^*$, то есть $I-K$ имеет собственные значения вида $\lambda(I-K) = 1-\lambda(K) \neq 0$. Таким образом, все собственные значения данной матрицы ненулевые, а значит, $I-K$ обратима.

Покажем, что матрица вида (**??**) является унитарной, для этого требуется доказать $QQ^* = I$. Для этого воспользуемся известными свойствами: $(AB)^* = B^*A^*$, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, свойством $K^* = -K$. Получим:
$$Q^* = (I-K)(I+K)^{-1},$$
$$QQ^* = (I-K)^{-1}(I+K)(I-K)(I+K)^{-1}.$$
Докажем простой факт: матрицы вида $I-A$ и $I+A$ коммутируют $\forall A \in \mathbb{C}$. Действительно:
$$(I+A)(I-A) = I - A^2 = (I-A)(I+A).$$
Поэтому можно переставить в QQ^* второй и третий множитель местами:
$$QQ^* = (I-K)^{-1}(I-K)(I+K)(I+K)^{-1} = I,$$
что и требовалось.

Было доказано, что для любой косоэрмитовой $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ формула (**??**) задает унитарную Q.

Теперь найдем множество унитарных матриц, представимых в виде (**??**).

Известно, что в общем случае собственные числа косоэрмитовых матриц чисто мнимые, а ортогональных — являются комплексными и равны единице по модулю.

Пусть v — собственный вектор K: $Kv = \lambda v$, $\lambda \in i\mathbb{R}$. Тогда:
$$Qv = (I-K)^{-1}(1+\lambda)v. \quad (2)$$
Известно, что собственные векторы матрицы и обратной матрицы совпадают, при этом соответствующим данному вектору собственным значением обратной матрицы будет обратное собственное число исходной матрицы:
$$Ax = \lambda x,\ x = \lambda A^{-1}x,\ \lambda^{-1}x = A^{-1}x.$$
Значит, если v - собственный для K, то он собственный как для $(I-K)$:
$$(I-K)v = (1-\lambda)v,$$
так и для $(I-K)^{-1}$:
$$(I-K)^{-1}v = \frac{1}{1-\lambda}v.$$

Таким образом, (**??**) можно записать в виде:

$$Qv = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} v = \mu v, \tag{3}$$

что означает, Q имеет те же собственные векторы v, что и K, которым соответствует собственное число $\mu = (1+\lambda)(1-\lambda)^{-1}$.

Введем обозначение $\lambda = ib,\ b \in \mathbb{R}$. Определим, какие значения может принимать μ:

$$\mu = \frac{1+ib}{1-ib} = \frac{(1-b^2)+2ib}{1+b^2}. \tag{4}$$

Можно легко убедится, что $|\mu| = 1$, то есть собственные значения лежат на единичной окружности:

$$|\mu| = \left| \frac{(1-b^2)+2ib}{1+b^2} \right| = \sqrt{\frac{(1-b^2)^2+(2b)^2}{(1+b^2)^2}} = \sqrt{\frac{1-2b^2+b^4+4b^2}{(1+b^2)^2}} = 1.$$

Введем обозначение $\mu = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Из (**??**) получаем, что $\cos(\theta) = (1-b^2)(1+b^2)^{-1}$, $\sin(\theta) = 2b(1+b^2)^{-1}$. Зададимся вопросом, какие значения может принимать μ на единичной окружности.

(a) Графики $\frac{1-b^2}{1+b^2}$ и $\frac{2b}{1+b^2}$

(b) μ на комплексной плоскости

Можно легко показать тот факт, что в параметризации (**??**) невозможно задать точку $\mu = -1$. Доказывается это средствами матанализа, исследуя нули, экстремумы, участки монотонности и асимптоты функций $x(b) = (1-b^2)(1+b^2)^{-1}$ и $y(b) = 2b(1+b^2)^{-1}$, но выкладки оказываются крайне громоздкими, поэтому здесь не приводятся. Вместо этого приведены графики функций и полученное множество допустимых значений μ на $\mathbb{C}$. Можно видеть, что при изменении $b \in \mathbb{R}$ достигаются все точки на единичной окружности, $(x(b), y(b)),\ x^2(b) + y^2(b) = 1$, кроме $(-1, 0)$: она не достигается и является пределом при $b \to \pm\infty$. То есть $\mu \in \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1,\ z \neq -1\}$.

Вместо описанного выше наброска доказательства ГМТ μ можно заметить, что (**??**) является преобразованием Кэли в скалярном случае, которое отображает мнимую ось на комплексной плоскости в единичную окружность, при этом $\pm i\infty$ отображается в -1. Кстати, в задаче изначально рассматривается более общее отображение Кэли: для комплексных матриц, в приложении к параметризации унитарных матриц через косоэрмитовы.

Таким образом, вид (**??**) описывает множество всех унитарных матриц $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$, которые не имеют собственного значения -1. ■

Домашняя работа 1
(теория)

Задача 3

Докажите, что
$$\|A\|_{1\to 2} \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|A\|_{1\to 2}, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

Указание: В случае использования констант эквивалентности векторных норм необходимо обосновывать это значение констант.

□ Докажем, что $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$, для этого воспользуемся полуаддитивностью квадратного корня и неравенством КБШ:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leqslant \sum_{i=1}^n \sqrt{|x_i|^2} = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot 1 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} = \sqrt{n}\|x\|_2.$$

Выпишем определения операторных норм:

$$\|A\|_{1\to 2} = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2, \quad \|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

Далее докажем первое неравенство в условии задачи: $\|A\|_{1\to 2} \leqslant \|A\|_2$. Из определения операторной нормы ($\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_1 = 1$ выполнено $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 = 1$) и доказанных неравенств на векторные нормы следует, что:
$$\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_2\|x\|_2 \leqslant \|A\|_2\|x\|_1 = \|A\|_2 \cdot 1 \leqslant \|A\|_2.$$

Взяв супремум по $\|x\|_1$ на единичной сфере, можно получить:

$$\|A\|_{1\to 2} = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_2,$$

что и требовалось. Перейдем к доказательству второго неравенства, $\|A\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|A\|_{1\to 2}$. Вновь сошлемся на доказанные неравенства на векторные нормы ($\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_2 = 1$ выполнено $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 = \sqrt{n}$) и определения операторных норм и запишем:

$$\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_{1\to 2}\|x\|_1 \leqslant \|A\|_{1\to 2}\sqrt{n}\|x\|_2 = \sqrt{n}\|A\|_{1\to 2}$$

Взяв супремум по $\|x\|_2$ на единичной сфере, можно получить:

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|A\|_{1\to 2},$$

оба неравенства доказаны. ■

Задача 4

Обозначим $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/n & 0 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Обоснуйте сходимость $A_n \to A$, $n \to \infty$ исходя из определения сходимости с помощью норм.
2. Найдите собственные разложения $A_n = S_n \Lambda_n S_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из S_n,Λ_n и S_n^{-1}. Почему не у всех из этих матриц существует предел?
3. Найдите разложения Шура $A_n = U_n T_n U_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из U_n,T_n и U_n^{-1}.

□ Докажем сходимость $A_n \to A$, $n \to \infty$. Так как все матричные нормы в конечномерных пространствах эквивалентны, поэтому для удобства будем показывать сходимости по норме Фробениуса:

$$\|A - A_n\|_F = \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty,$$

то есть A_n сходится к A.

Найдем собственные разложение A и A_n.

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad (A - 0 \cdot I)v = 0, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

можно видеть, что у матрицы A только один линейно независимый собственный вектор (а не 2), то есть у A не имеет собственного разложения. При этом ЖНФ A имеет вид:

$$A = PJP^{-1}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = P^{-1} = I$$

Собственное разложение A_n:

$$\det(A_n - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{n} = 0, \quad \lambda_{n1} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \lambda_{n2} = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (A - 0 \cdot I)v = 0, \quad v_{n1} = \begin{bmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{n2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{n} \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}, \quad S_n = \begin{bmatrix} \sqrt{n} & -\sqrt{n} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Можно легко видеть (например, рассмотрев разницу матриц в норме Фробениуса), что последовательности Λ_n и S_n^{-1} имеют предел, а S_n — нет (так как некоторые элементы матрицы стремятся к бесконечности):

$$\Lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad S_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

При этом $A_n = S_n \Lambda_n S_n^{-1}$ для любого *конечного* n. Расходимость некоторых матриц (для выбранных собственных векторов — расходимость S_n) связана с тем, что предел последовательности A_n является вырожденной матрицей A, для которой не существует собственного разложения. При этом важно заметить, что сходимость собственных значений имеет место, λ_{n1} и λ_{n2} сходятся к 0.

Теперь найдем разложения Шура матриц A и A_n.

Для A легко проверить, что можно записать разложение Шура, совпадающее с найденной выше ЖНФ:

$$A = UTU^*, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = U^* = I.$$

Найдем разложение Шура для A_n. Нормируем найденный собственный вектор v_1, найдем для него ортогональный вектор и также его нормируем (вектора сформируют унитарную матрицу), далее найдем верхнетреугольную матрицу T_n:

$$v_{n1} = \begin{bmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{n2} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{bmatrix}, \quad u_{ni} = \frac{v_{ni}}{\|v_{ni}\|_2},\ i = 1, 2,$$

$$U_n = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} & -\frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \end{bmatrix}, \quad U_n^{-1} = U_n^*, \quad T_n = U_n^* A_n U_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}$$

$$U_n, U_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} I = U, \quad T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T.$$

Легко видеть, что полученные матрицы имеют пределы (например, это можно показать через фробениусовскую норму), при этом они совпадают с разложением Шура матрицы A, к которой стремится A_n. Таким образом можно заключить, что все матрицы в разложении Шура A_n сходятся к соответствующим матрицам в разложении предельной матрицы A. ■

Начиная со следующей задачи решения задач будут приведены в письменном виде.

№5

Докажем, что $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – нормальная является унитарной $\Longleftrightarrow$ все её с.з. λ_i, $i=\overline{1,n}$: $|\lambda_i|=1$

□ • $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – нормальная, если $A^*A = AA^*$, нормальные матрицы унитарно диагонализуемы

• $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — унитарная, если $A^*A = AA^* = I$ (частный случай нормальной)

($\Longrightarrow$) $\exists \lambda$ – с.з. A, v – с.в, соот. λ, т.е. $Av = \lambda v$

Рассмотрим также $v^*A^* = \bar{\lambda} v^*$. Умножим $Av = \lambda v$ слева на данное выражение:

$v^*A^*Av = |\lambda|^2 v^*v$.

Т.к. A – унитарная, $A^*A = I$, то есть:

$v^*v = |\lambda|^2 v^*v$.

Т.к. по определению $v \neq 0 \Rightarrow v^*v = \|v\|_2^2 \neq 0$ получаем:

$|\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$

Таким образом, $\forall$ с.з. унитарной матрицы A по модулю $= 1$

($\Longleftarrow$) $\exists A$ – нормальная матрица и $\forall$ её с.з. λ_i, $i=\overline{1,n}$: $|\lambda_i|=1$.

Т.к. A – нормальная $\Rightarrow$ унитарно диагонализуема, т.е.:

$A = U\Lambda U^*$; $UU^* = I$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

$\measuredangle$ $A^* = U\Lambda^* U^*$; $\Lambda^* = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$

Найдём AA^*:

$AA^* = U\Lambda U^* U\Lambda^* U^* = U\Lambda\Lambda^* U^* = \left[\Lambda\Lambda^* = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2 \dots |\lambda_n|^2) = I\right] \ominus$

$\ominus$ $UIU^* = I$

Значит, A – унитарная ☒

№6

а) Докажите, что для $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m \geq n$, справедливо:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

б) Найдите все матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\|A\|_F = \sqrt{n}\,\|A\|_2$

□ Найдём явный вид матричных норм $\|\cdot\|_F$ и $\|\cdot\|_2$

$r \leq \min(m,n)$

$A = U\Sigma V^*$ – SVD ; r – ранг A ; $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times n}$; $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r \geq 0$

$$\|A\|_F = \|U\Sigma V^*\|_F = [\|\cdot\|_F - \text{унитарно-инв.}] = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}$$

$$\|A\|_2 = \|U\Sigma V^*\|_F = [\|\cdot\|_2 - \text{унитарно-инв}] = \|\Sigma\|_2$$

$$\|\Sigma\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\Sigma x\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x\neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 |x_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 |x_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r |x_i|^2}} = \sup_{x\neq 0} \frac{\sigma_1 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^r |x_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r |x_i|^2}} \ominus$$

$\ominus\ \sigma_1$; оценка достигается при $x = e_1$.

а) $\|A\|_2 = \sigma_1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} = \|A\|_F$ $\quad \left(\sigma_1^2 \leq \sum_{i=1}^r \sigma_i^2\right)$ – первое нер-во доказано

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \leq n\cdot\sigma_1^2 = n\cdot\|A\|_2^2 \Rightarrow \|A\|_F \leq \sqrt{n}\cdot\|A\|_2,$$

что и требовалось

б) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$; $\|A\|_F = \sqrt{n}\,\|A\|_2 \rightarrow \|A\|_F^2 = n\|A\|_2^2$

$\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 = n\sigma_1^2$. Т.к. $\sigma_i \leq \sigma_1 \Rightarrow \underline{\sigma_i = \sigma_1 = \sigma\ \forall i}$ $\qquad U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Тогда $A = U\Sigma V^* = [\Sigma = \sigma I \in \mathbb{C}^{n\times n}] = \sigma U V^* = \sigma Q$, где $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – унитарная как произведение унитарных ($QQ^* = I$)

Таким образом, $\|A\|_F = \sqrt{n}\|A\|_2$ выполняется для матриц $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ вида:

$A = \sigma Q$, $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – унитарная, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ $(\sigma \geq 0)$ ■

№7

Дана нормальная матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и её разложение Шура: $A = UTU^*$

а) Требуется записать SVD матрицы A, используя U и T.

б) Показать, что $\sigma_1(A) = \max\limits_i |\lambda_i(A)|$

в) Привести пример $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, для которой формула в б) неверна.

□ Матрица A — нормальная: $AA^* = A^*A$

$A = UTU^*$; $\quad UTU^*UT^*U^* = UTT^*U^* = UT^*U^*UTU^* = UT^*TU^*$

Значит, $TT^* = T^*T$, где T — верхнетреугольная с с.з. λ_i, $i=\overline{1,n}$ на диагонали.

Лемма

• Докажем, что верхнетреугольная матрица B коммутирует с $B^* \iff B$ — диагональная

[$(BB^*)_{ij} = \sum\limits_{k=\max(i,j)}^{n} b_{ik}\overline{b_{jk}} \qquad (b_{ij} = 0 \ \forall i>j)$

$(B^*B)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{\min(i,j)} \overline{b_{ki}}\, b_{kj}$

∡ диагональные эл-ты матриц:

$(BB^*)_{ii} = \sum\limits_{k=i}^{n} |b_{ik}|^2$

$(B^*B)_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{i} |b_{ki}|^2$

$(BB^*)_{ii} = (B^*B)_{ii}$. По индукции докажем, что B — диагональная

$i=1$: $\quad \sum\limits_{k=1}^{n} |b_{1k}|^2 = \sum\limits_{k=1}^{1} |b_{k1}|^2 = |b_{11}|^2 \Rightarrow |b_{12}|^2 + \dots + |b_{1n}|^2 = 0 \Rightarrow b_{1j} = 0, \ j \neq 1$

$i=m$: $\quad$ пусть для $\forall i \le m-1$ выполнено $b_{ij} = 0$, $j \neq i$

$\sum\limits_{k=m}^{n} |b_{mk}|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} |b_{km}|^2 =$ [по предположению индукции] $= |b_{mm}|^2$

$\Downarrow$

$\cancel{|b_{mm}|^2} + \sum\limits_{k=m+1}^{n} |b_{mk}|^2 = \cancel{|b_{mm}|^2} \Rightarrow b_{mk} = 0, \ n \ge k \ge m+1$

Доказано, что B — диагональная]

Доказанная лемма говорит о том, что $T = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$, то есть разложение Шура нормальной матрицы — диагонализация в унитарном базисе

$A = U\Lambda U^*$

б) $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$

$AA^* = U\Lambda\Lambda^*U^* = U \cdot \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2 \dots |\lambda_n|^2) \cdot U^* \Rightarrow \sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$

а) Таким образом, SVD A имеет вид:

$$A = U \Sigma U^*; \quad \Sigma = \mathrm{diag}(|\lambda_1| \dots |\lambda_n|)$$

Через $T = \Lambda$ можно записать так:

$$A = U \cdot (T T^*)^{1/2} \cdot U^*,$$

корень диагональной неотриц. определенной матрицы — диагональная матрица с корнями эл-тов исходной матрицы на диагонали

б) $\exists A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underbrace{AA^*}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \neq \underbrace{A^*A}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Как было показано в №4, $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = 0$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad |A - \lambda E| = \lambda(\lambda - 1), \quad \begin{matrix} \lambda_1(AA^*) = 1 \\ \lambda_2(AA^*) = 0 \end{matrix}$$

$\sigma_1(A) = \max\limits_i \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = 1 \neq 0 = \max\limits_i (\lambda_i(A))$ — условие не выполнено в общем случае

$\boxtimes$

№8

Покажем, что для множителя W из полярного разложения матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ ($A = WH$, $W^TW = I$, $W \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $H \succeq 0$, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$) выполнено:

$$\frac{\|A^TA - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|_2 \leq \|A^TA - I\|_2$$

Замечание: нер-во даёт соотношение между двумя мерами близости (в смысле $\|\cdot\|_2$) матрицы A и ортогональной: $\|A^TA - I\|_2$ и $\min\limits_{Q:Q^TQ=I} \|A - Q\|_2$

D $A = WH$ — полярное разложение

1) Докажем $\|A-W\|_2 \leq \|A^TA - I\|_2$

$\|A - W\|_2 = \|W(H-I)\|_2 = \|H - I\|_2$

$\|A^TA - I\|_2 = \|H^TW^TWH - I\|_2 = \|H^TH - I\|_2$

$H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H \succeq 0$, $H = H^T$, запишем собственное разложение H:

$H = QDQ^T$, $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$ — с.з. H

$H^TH = QD^TDQ^T = QD^2Q^T$

- $\|H - I\|_2 = \|QDQ^T - I\|_2 = \|Q(D-I)Q^T\|_2 = \|D - I\|_2$
- $\|H^TH - I\|_2 = \|Q(D^2 - I)Q^T\|_2 = \|D^2 - I\|_2$

Докажем, что $\|D - I\|_2 < \|D^2 - I\|_2$

т.к. $(D-I)$ и (D^2-I) — диагональные квадратные матрицы, их $\|\cdot\|_2$ — это модуль максимального эл-та на диагонали (оно же является σ_1 (макс. сингулярным числом)), то есть $|d_1 - 1|$ требуется сравнить с $|d_1^2 - 1|$:

а) $d_1 \in [0;1]$: $1 - d_1 \vee 1 - d_1^2$; $d_1(d_1 - 1) < 0 \Rightarrow 1 - d_1 < 1 - d_1^2$

б) $d_1 > 1$: $d_1 - 1 \vee d_1^2 - 1$; $0 < d_1(d_1-1) \Rightarrow d_1 - 1 < d_1^2 - 1$

Таким образом, $|d_1 - 1| < |d_1^2 - 1|$. То есть $\|D - I\|_2 < \|D^2 - I\|_2$. Это доказывает $\|A - W\|_2 \leq \|A^TA - I\|_2$

2) Докажем $\dfrac{\|A^TA - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|_2$

[субмультипликативность $\|\cdot\|_2$]

$$\|A^TA - I\|_2 = \|H^TH - I\|_2 = \|D^2 - I\|_2 = \|(D-I)(D+I)\|_2 \leq \underbrace{\|D - I\|_2}_{\|A-W\|_2} \cdot \|D + I\|_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|A - W\|_2 \cdot \|D + I\|_2 \leq \|A - W\|_2 \cdot (\|D\|_2 + 1) = \|A - W\|_2 \cdot (\|A\|_2 + 1)$$

$[\|D + I\|_2 = |d_1 + 1| \overset{\text{[нер-во Δ]}}{\leq} |d_1| + 1 = \|D\|_2 + 1]$

Значит, $\dfrac{\|A^TA - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|_2$ ☒