№5

Докажем, что $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – нормальная является унитарной $\iff$ все её с.з. λ_i, $i=\overline{1,n}$: $|\lambda_i|=1$

$\square$ • $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – нормальная, если $A^*A = AA^*$, нормальные матрицы унитарно диагонализуемы

• $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – унитарная, если $A^*A = AA^* = I$ (является нормальной)

$\Rightarrow$ $\exists \lambda$ – с.з. A, v – с.в, соот. λ, т.е $Av=\lambda v$

Рассмотрим также $v^*A^* = \bar{\lambda} v^*$. Умножим $Av=\lambda v$ слева на данное выражение:

$v^*A^*Av = |\lambda|^2 v^*v$.

Т.к. A – унитарная, $A^*A = I$, то есть:

$v^*v = |\lambda|^2 v^*v$.

Т.к. по определению $v \neq 0 \Rightarrow v^*v = \|v\|_2^2 \neq 0$ получаем:

$|\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$

Таким образом, $\forall$ с-з. унитарной матрицы A по модулю $=1$

$\Leftarrow$ $\exists A$ – нормальная матрица и $\forall$ её с.з. λ_i, $i=\overline{1,n}$: $|\lambda_i|=1$.

Т.к. A – нормальная $\Rightarrow$ унитарно диагонализуема, т.е.:

$A = U\Lambda U^*$; $UU^*=I$, $\Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

$\measuredangle$ $A^* = U\Lambda^*U^*$; $\Lambda^* = diag(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$

Найдём AA^*:

$AA^* = U\Lambda U^* U\Lambda^* U^* = U\Lambda\Lambda^*U^* = \left[\Lambda\Lambda^* = diag(|\lambda_1|^2 \dots |\lambda_n|^2) = I\right] \ominus$

$\ominus$ $UIU^* = I$

Значит, A – унитарная $\boxtimes$