# Домашняя работа 2

(теория)

**Версия от:** 28.02.25
**Дедлайн:** 12.03.24 в 23:59

1. **(12 баллов)**. Пусть $P_1$ и $P_2$ являются ортопроекторами на $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ соответственно. Покажите, что если они коммутируют, то их композиция является ортопроектором на $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

2. **(12 баллов)**. Пусть $U = [U_r \ U_r^{\perp}] \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – матрица левых сингулярных векторов матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ранга $r$. Покажите, что $\ker(A^*) = \mathrm{Im}(U_r^{\perp})$ и запишите ортопроектор на $\ker(A^*)$.

3. **(42 балла: по 6 баллов за пункт)**. Вычислите дифференциалы и производные для следующих функционалов:

   (3.1) $f(x) = \|A - xx^\top\|_F^2$, $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

   (3.2) $f(X) = \mathrm{Tr}\left((X^\top X)^{-1} X^\top A X\right)$, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ранга $p$, $A = A^\top$.

   (3.3) $f(X) = \mathrm{Tr}(X \odot X)$, $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

   (3.4) $f(X) = \mathrm{Tr}(X \mathrm{diag}(X))$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{diag}(X) = \mathrm{diag}(x_{11}, \ldots, x_{nn})$.

   (3.5) $f(X) = a^\top X^2 b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   (3.6) $f(X) = \mathrm{Tr}(I \otimes X + X \otimes I)$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   (3.7) $f(U) = F(W + UV^\top)$ и $g(V) = F(W + UV^\top)$, $W \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times r}$. Считайте, что вы умеете вычислять $\partial F(X)/\partial X$. **Замечание:** производные такого вида возникают при тонкой настройке больших языковых моделей.

4. **(14 баллов)**. Найдите кронекеров ранг $m_1 m_2 \times n_1 n_2$ матрицы с элементами $a_{ij} = i + j$. Считайте, что $m_i, n_i \geq 2$ и нумерация индексов ведется с нуля. **Замечание:** кронекеров ранг – минимальное число слагаемых $r$ для представления $A$ в виде суммы кронекеровых произведений:

$$A = \sum_{\alpha=1}^{r} B_\alpha \otimes C_\alpha, \quad B_\alpha \in \mathbb{R}^{m_1\times n_1}, \quad C_\alpha \in \mathbb{R}^{m_2\times n_2}.$$

5. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – заданная симметричная невырожденная матрица и $B \in \mathbb{R}^{n\times n\times n}$ – заданный тензор. Предложите алгоритм поиска $X \in \mathbb{R}^{n\times n\times n}$ с арифметической сложностью $\mathcal{O}(n^4)$ из следующего уравнения:

$$[\![X; A, I, I]\!] + [\![X; I, A, I]\!] + [\![X; I, I, A]\!] = B.$$

## Бонусные задачи

1. **(20 б. баллов)**. Пусть $P_1$ и $P_2$ – ортопроекторы на подпространства $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ одинаковой размерности. Введем понятие расстояния между подпространствами как $\mathrm{dist}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = \|P_1 - P_2\|_2$. Докажите, что $\mathrm{dist}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}_1$ содержит ненулевой вектор, ортогональный $\mathcal{S}_2$.

2. **(30 б. баллов)**. Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$. Предложите, обоснуйте и запишите в виде псевдокода алгоритм решения следующей задачи:

$$f(X) = \|A - X \otimes X\|_F \to \min_{X \in \mathbb{R}^{n\times n}}$$

   в случае произвольной $A$. Считайте, что помимо базовых арифметических операций с матрицами, вам доступно вычисление собственного разложения матрицы `eigs` (при условии его существования), а также функции `reshape` и `transpose`.

3. **(50 б. баллов)**. Найдите наилучшее приближение матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ матрицей с ограниченной спектральной нормой:

$$\min_{B:\ \|B\|_2 \leq 1} \|A - B\|_F.$$