№3

Решите задачу 8 для произвольной унитарно-инв нормы $\|\cdot\|$.

Считайте известным неравенство $\|AB\| \le \|A\|_2 \cdot \|B\|$

□ • Обобщим решение задачи №8. Начнем со 2-го пункта, докажем

нер-во: $\dfrac{\|A^TA - I\|}{\|A\|_2 + 1} \le \|A - W\|$ (Здесь и ниже обозначение совпадают с №8)

Аналогично №8, можем свести док-во к эквивалентному нер-ву:

$\|D^2 - I\| \overset{?}{\le} (\|D\|_2 + 1) \cdot \|D - I\|$ (обозначения те же, что в №8)

$\|\underbrace{D^2 - I}_{(D-I)(D+I)}\| \le \|D + I\|_2 \cdot \|D - I\|$ [утв. из условия]

Тогда получим:

$\|D^2 - I\| \le \|D + I\|_2 \cdot \|D - I\| \overset{?}{\le} (\|D\|_2 + 1) \cdot \|D - I\|$

$\|D + I\|_2 \overset{?}{\le} \|D\|_2 + 1$ — было доказано в №8.

Таким образом, $\dfrac{\|A^TA - I\|}{\|A\|_2 + 1} \le \|A - W\|$.

• Докажем $\|A - W\| \le \|A^TA - I\|$

Аналогично №8, можем свести док-во к эквивалентному нер-ву:

$\|D - I\| \overset{?}{\le} \|D^2 - I\|$

$\|D - I\| \overset{?}{\le} \|(D - I)(D + I)\| \le \|D + I\|_2 \cdot \|D - I\|$

$1 \overset{?}{\le} \|D + I\|_2 = d_1 + 1$, но $d_1 \ge 0$

Значит, $1 \le \|D + I\|_2$, что доказывает $\|A - W\| \le \|A^TA - I\|$. ☒