Т.к. S — замкнутое выпуклое мн-во, [теорема разделяющей гиперплоскости]

утверждает, что $\exists\, \tilde{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$Tr(\tilde{C}B^T) \le \alpha < Tr(\tilde{C}B_0^T) \quad \forall B \in S$$

(*) теорема из стандартного курса мехмата или выпуклого анализа, см. [S. Boyd, pp. 46-51] Convex Optimization

Можем отнормировать $\tilde{C}$: $C = \tilde{C}/\alpha$:

$$Tr(CB^T) \le 1 < Tr(CB_0^T) \quad \forall B \in S$$

По определению: $\|B_0\|^* = \max\limits_{D:\|D\|=1} Tr(B_0 D^T)$; при этом в нашем случае $\|B_0\| = 1$.

Т.к. $\forall$ унитарно-инвариантные нормы субмультипликативны [утверждение от лектора],

заметим:

$$Tr(B_0 D^T) \le \|B_0\| \cdot \|D\| = [\|B\|_0 = 1;\ \|D\| = 1] = 1$$

Значит, $\|B_0\|^* \le 1$

С другой стороны, возьмем $D = B_0$ ($B_0 \in \{D : \|D\| = 1\}$), получим: $Tr(B_0 B_0^T) = \|B_0\|^2 = 1$

Значит, $\|B_0\|^* = 1$ — противоречие, т.к. $B_0 \notin S$ по предположению

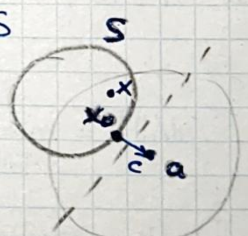
$\Downarrow$

$\|A_0\|^{**} \ge \|A_0\|$

Из (I) и (II) получаем, что $\|A_0\|^{**} = \|A_0\|$ ☒

Приложение — док-во т. разделяющей гиперплоскости

$]$ S — выпуклое и $a \in cl(S)$ => a строго отделима от S



□ 1) ∡ $d(x) = \|x - a\|_2$

2) ∡ шар $B(a,r) = \{t : \|t - a\|_2 \le r\}$

3) ∡ $\overline{X} = S \cap B(a,r)$ — компакт

4) из [т. Вейерштрасса]: $\exists\, x_0$ — т. min на $\overline{X}$, т.е. $d(x) \ge d(x_0)\ \forall x \in \overline{X}$

5) ∡ $c = a - x_0$; покажем, что $\langle c, x - x_0 \rangle < 0\ \forall x \in \overline{X}$ (образует тупой угол)

От противного, $\exists\, x_1 \in \overline{X}$: $\langle c, x_1 - x_0 \rangle \ge 0$

$x(\theta) = \theta x_1 + (1-\theta) x_0$; ∡ $f(\theta) = d(x(\theta)) = \|x(\theta) - a\|_2^2$ $[x(0) = x_0]$

$$f'(0) = 2(x(\theta) - a)^T (x_1 - x_0)\big|_{\theta=0} = 2(x_0 - a)^T (x_1 - x_0) = -2c^T(x_1 - x_0) < 0$$

т.е. $\exists\, \theta_0 \in U_\varepsilon(0)$: $d(x(\theta_0)) < d(x_0)$ => x_0 — не т. min — противоречие.

6) разделяющая гиперплоскость: $\langle c, x \rangle = \langle c, d \rangle$, где $d = \alpha x_0 + (1-\alpha) a$, $\alpha \in (0;1)$ ☒