№8

Покажем, что для множителя W из полярного разложения матрицы $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $m\geq n$ ($A=WH$, $W^TW=I$, $W\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $H\succeq 0$, $H\in\mathbb{R}^{n\times n}$) выполнено:

$$\frac{\|A^TA-I\|_2}{\|A\|_2+1} \leq \|A-W\|_2 \leq \|A^TA-I\|_2$$

Замечание: первое даёт соотношение между двумя мерами близости (в смысле $\|\cdot\|_2$) матрицы A и ортогональной: $\|A^TA-I\|_2$ и $\min\limits_{Q:\,Q^TQ=I}\|A-Q\|_2$

▷ $A=WH$ — полярное разложение

1) Докажем $\|A-W\|_2 \leq \|A^TA-I\|_2$

$\|A-W\|_2 = \|W(H-I)\|_2 = \|H-I\|_2$

$\|A^TA-I\|_2 = \|H^TW^TWH-I\|_2 = \|H^TH-I\|_2$

$H\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $H\succeq 0$, $\overset{H=H^T}{\text{запишем}}$ собственное разложение H:

$H = QDQ^T$, $D=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$, $d_1\geq d_2\geq\dots\geq d_n\geq 0$ — с.з. H

$H^TH = QD^TDQ^T = QD^2Q^T$

- $\|H-I\|_2 = \|QDQ^T-I\|_2 = \|Q(D-I)Q^T\|_2 = \|D-I\|_2$
- $\|H^TH-I\|_2 = \|Q(D^2-I)Q^T\|_2 = \|D^2-I\|_2$

Докажем, что $\|D-I\|_2 < \|D^2-I\|_2$

т.к. $(D-I)$ и (D^2-I) — диагональные квадратные матрицы, их $\|\cdot\|_2$ — это модуль максимального эл-та на диагонали (оно же является σ_1 (макс. сингулярное число)), то есть $|d_1-1|$ требуется сравнить с $|d_1^2-1|$:

а) $d_1\in[0;1]$: $1-d_1 \vee 1-d_1^2$; $d_1(d_1-1)<0 \Rightarrow 1-d_1 < 1-d_1^2$

б) $d_1>1$: $d_1-1 \vee d_1^2-1$; $0<d_1(d_1-1) \Rightarrow d_1-1 < d_1^2-1$

таким образом, $|d_1-1| < |d_1^2-1|$. То есть $\|D-I\|_2 < \|D^2-I\|_2$. Это доказывает $\|A-W\|_2 \leq \|A^TA-I\|_2$

2) Докажем $\dfrac{\|A^TA-I\|_2}{\|A\|_2+1} \leq \|A-W\|_2$

$$\underline{\|A^TA-I\|_2} = \|H^TH-I\|_2 = \|D^2-I\|_2 = \|(D-I)(D+I)\|_2 \overset{[\text{субмультипликативность } \|\cdot\|_2]}{\leq} \underbrace{\|D-I\|_2}_{\|A-W\|_2}\cdot\|D+I\|_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|A-W\|_2\cdot\|D+I\|_2 \leq \|A-W\|_2\cdot(\|D\|_2+1) = \underline{\|A-W\|_2\cdot(\|A\|_2+1)}$$

$$\left[\|D+I\|_2 = |d_1+1| \overset{[\text{нер-во } \Delta]}{\leq} |d_1|+1 = \|D\|_2+1\right]$$

Значит, $\dfrac{\|A^TA-I\|_2}{\|A\|_2+1} \leq \|A-W\|_2$ ⊠