№1

Норма $\|\cdot\|^*$ — двойственная к $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^{m\times n}$, если

$$\|A\|^* = \max_{B:\|B\|=1} Tr(AB^T)$$

Докажите, что:

а) $(\|A\|^*)^* = \|A\|$

б) $\|\cdot\|$ — унитарно-инв. $\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|^*$ — унитарно-инв

□ б) ($\Rightarrow$) Пусть $\|\cdot\|$ — унитарно-инв; $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$; $\left.\begin{matrix} U\in\mathbb{R}^{m\times m} \\ V\in\mathbb{R}^{n\times n}\end{matrix}\right\}$ — ортогональные матрицы (унитарные)

$$\|UAV\|^* = \max_{B:\|B\|=1} Tr(UAVB^T) = \max_{B:\|B\|=1} Tr(AVB^TU) = \begin{bmatrix} D = U^TBV^T \\ \|D\| = \|B\| = 1\end{bmatrix} =$$

$$= \max_{D:\|B\|=1} Tr(AC^T) = \|A\|^*$$, т.е. $\|\cdot\|^*$ — унитарно-инв

($\Leftarrow$) Пусть $\|\cdot\|^*$ — унитарно-инв; воспользуемся $\|A\|^{**} = \|A\|$ из п. а)

$$\|UAV\| = \max_{C:\|C\|^*=1} Tr(AVC^TU) = \begin{bmatrix} M = U^TCV^T \\ \|M\| = \|C\| = 1\end{bmatrix} = \max_{M:\|M\|^*=1} Tr(AM^T) = \|A\|,$$

т.е. $\|\cdot\|$ — унитарно-инв.

а) Докажем в два этапа: $(\|A\|^*)^* \le \|A\|$, потом $\|A\| \le (\|A\|^*)^*$; $\|A\|^{**} = \max_{C:\|C\|^*=1} Tr(AC^T)$

I) $Tr(AC^T) = \|A\| \cdot Tr\left(\frac{A}{\|A\|}C^T\right) \le \|A\| \cdot \max_{D:\|D\|=1} Tr(CD^T) = \|A\| \cdot \|C\|^*$

$\Downarrow$

$$\|A\|^{**} = \max_{C:\|C\|^*=1} Tr(AC^T) \le \|A\|$$

II) От противного, пусть $\exists A_0: \|A_0\|^{**} > \|A_0\|$

$\|A\|^{**} = \max_{B:\|B\|^*=1} Tr(AB^T)$

$\measuredangle$ $B_0 = \frac{A_0}{\|A_0\|}$; $\|B_0\| = 1$

$\measuredangle$ $S = \{B \in \mathbb{R}^{m\times n} : \|B^*\| \le 1\}$ — выпуклое замкнутое мн-во

По предположению:

$Tr(A_0B^T) \le \|A_0\|^{**} < \|A_0\| \quad \forall B \in S$

Кроме того, в т. B_0: $Tr(A_0B_0^T) = \frac{Tr(A_0A_0^T)}{\|A_0\|} = \|A_0\|$

$\Downarrow$

Значит, $B_0 \notin S$