№6

а) Докажите, что для $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m \geq n$, справедливо:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

б) Найдите все матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\|A\|_F = \sqrt{n}\,\|A\|_2$

□ Найдём явный вид матричных норм $\|\cdot\|_F$ и $\|\cdot\|_2$

$r \leq \min(m,n)$

$A = U\Sigma V^*$ – SVD ; r – ранг A ; $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times n}$; $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r \geq 0$

$$\|A\|_F = \|U\Sigma V^*\|_F = [\|\cdot\|_F - \text{унитарно-инв.}] = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2}$$

$$\|A\|_2 = \|U\Sigma V^*\|_F = [\|\cdot\|_2 - \text{унитарно-инв}] = \|\Sigma\|_2$$

$$\|\Sigma\|_2 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|\Sigma x\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x\neq 0}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2|x_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}} \leq \sup_{x\neq 0}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2|x_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r}|x_i|^2}} = \sup_{x\neq 0}\frac{\sigma_1\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{r}|x_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r}|x_i|^2}} =$$

$= \sigma_1$; оценка достигается для $x = e_1$.

а) $\|A\|_2 = \sigma_1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2} = \|A\|_F$ $\quad\left(\sigma_1^2 \leq \sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\right)$ – первое нер-во доказано

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2 \leq n\cdot\sigma_1^2 = n\cdot\|A\|_2^2 \Rightarrow \|A\|_F \leq \sqrt{n}\cdot\|A\|_2,$$

что и требовалось

б) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$; $\|A\|_F = \sqrt{n}\,\|A\|_2 \to \|A\|_F^2 = n\|A\|_2^2$

$\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2 = n\sigma_1^2$. Т.к. $\sigma_i \leq \sigma_1 \Rightarrow \underline{\sigma_i = \sigma_1 = \sigma\ \forall i}$ $\qquad U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Тогда $A = U\Sigma V^* = [\Sigma = \sigma I \in \mathbb{C}^{n\times n}] = \sigma UV^* = \sigma Q$, где $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – унитарная как произведение унитарных ($QQ^* = I$)

Таким образом, $\|A\|_F = \sqrt{n}\,\|A\|_2$ выполняется для матриц $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ вида:

$A = \sigma Q$, $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – унитарная, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ($\sigma \geq 0$) ∎