

1. **(6 баллов: 1+2+2+1)** Пусть задан вектор $u \in \mathbb{C}^n$: $\|u\|_2 = 1$. Найдите все $\alpha \in \mathbb{C}$, для которых $A = I - \alpha uu^*$ является: 1) эрмитовой 2) косоэрмитовой 3) унитарной 4) нормальной. Для пункта 3) также нарисуйте найденные α на комплексной плоскости.

2. **(16 баллов: 7+9)**

- (а) Докажите, что для любой косоэрмитовой $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ матрица:

$$Q = (I - K)^{-1}(I + K) \quad (1)$$

будет унитарной.

- (б) Найдите множество всех унитарных матриц, которые представимы в виде (1).

3. **(14 баллов)** Докажите, что

$$\|A\|_{1 \rightarrow 2} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_{1 \rightarrow 2}, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

Указание: В случае использования констант эквивалентности векторных норм необходимо обосновывать это значение констант.

4. **(16 баллов: 3+6+7)** Обозначим $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/n & 0 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

- (а) Обоснуйте сходимость $A_n \rightarrow A$, $n \rightarrow \infty$ исходя из определения сходимости с помощью норм.
(б) Найдите собственные разложения $A_n = S_n \Lambda_n S_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из S_n, Λ_n и S_n^{-1} . Почему не у всех из этих матриц существует предел?
(с) Найдите разложения Шура $A_n = U_n T_n U_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из U_n, T_n и U_n^{-1} .
5. **(7 баллов)** Докажите, что нормальная матрица является унитарной тогда и только тогда, когда все ее собственные значения по модулю равны 1.

6. **(13 баллов: 6+7)**

- (а) Докажите, что для любой $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m \geq n$, справедливо:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2.$$

- (б) Найдите все матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, удовлетворяющие $\|A\|_F = \sqrt{n} \|A\|_2$.

7. **(12 баллов: 4+4+4)** Дана нормальная матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и её разложение Шура $A = U \Lambda U^*$.

- (а) Запишите сингулярное разложение матрицы A , используя матрицы U и Λ .
(б) Покажите, что $\sigma_1(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$.
(с) Приведите пример матрицы $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, не являющейся нормальной и для которой полученное в (б) выражение неверно.
8. **(16 баллов)**. Докажите, что для множителя W (см. обозначения в лекциях) из полярного разложения матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ выполняется:

$$\frac{\|A^T A - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\|_2 \leq \|A^T A - I\|_2.$$

Замечание: Неравенство дает соотношение между двумя мерами близости (в смысле спектральной нормы) матрицы A к ортогональной: $\|A^T A - I\|$ и $\min_{Q: Q^T Q = I} \|A - Q\|$.

Бонусные задачи

1. **(20 б. баллов)**. Назовем норму $\|\cdot\|^*$ двойственной к $\|\cdot\|$ над $\mathbb{R}^{m \times n}$, если

$$\|A\|^* = \max_{B: \|B\|=1} \text{Tr}(AB^\top).$$

Докажите, что

- (a) $(\|A\|^*)^* = \|A\|$;
 - (b) норма $\|\cdot\|$ унитарно-инвариантна тогда и только тогда, когда унитарно-инвариантна $\|\cdot\|^*$.
2. **(30 б. баллов)**. Докажите субмультипликативность векторной p -нормы матрицы:

$$\|A\|_{p, \text{vec}} \equiv \|\text{vec}(A)\|_p$$

при $1 \leq p \leq 2$.

3. **(50 б. баллов)**. Решите задачу 8 для произвольной унитарно-инвариантной нормы $\|\cdot\|$:

$$\frac{\|A^\top A - I\|}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - W\| \leq \|A^\top A - I\|.$$

Считайте известным неравенство $\|AB\| \leq \|A\|_2 \|B\|$.