



PROJET SIMULATION NUMÉRIQUE ALÉATOIRE

**Sûreté aérienne
MAP 474D**

4 juin 2016

Florent BENAYCH-GEORGES
Martin BOMPAIRE
Stefano DE MARCO
Gersende FORT
Emmanuel GOBET
Igor KORTCHEMSKI

Auteur : Felipe GARCÍA

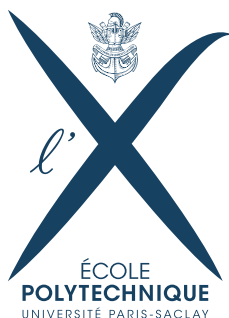


TABLE DES MATIÈRES

1	Remerciements	3
2	Présentation du sujet	4
2.1	Introduction	4
2.2	Modélisation	4
2.3	Simulation	6
3	Résultats	7
3.1	Monte Carlo naïve	7
3.2	Importance Sampling	9
3.3	Méthode de Splitting	13
4	Conclusion	14
5	Références bibliographiques	15

1

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué dans cet projet et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce rapport.

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mon professeur, Mr Joseph X de l'Université Y qui m'a beaucoup aidé dans ma recherche de stage et m'a permis de postuler dans cette entreprise. Son écoute et ses conseils m'ont permis de cibler mes candidatures, et de trouver ce stage qui était en totale adéquation avec mes attentes.

Je tiens à remercier vivement mon maitre de stage, Mr Gabriel X, responsable du service Y au sein de l'entreprise F, pour son accueil, le temps passé ensemble et le partage de son expertise au quotidien. Grâce aussi à sa confiance j'ai pu m'accomplir totalement dans mes missions. Il fut d'une aide précieuse dans les moments les plus délicats.

Je remercie également toute l'équipe E pour leur accueil, leur esprit d'équipe et en particulier Mr DDDD, qui m'a beaucoup aidé à comprendre les problématiques d'achats sécurisés...

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont conseillé et relu lors de la rédaction de ce rapport de stage : ma famille, mon amie Julie B camarade de promotion.

2

PRÉSENTATION DU SUJET

2.1 INTRODUCTION

Le nombre d'avions circulant dans le ciel est devenu considérable, un avion décolle toutes les secondes dans le monde. En moyenne nous avons 80.000 vols par jour, soit près de 29.200.000 vols par an. En 2020 on prévoit 200 millions de vols commerciaux par an soit 6,3 vols par seconde. Le site web [flightradar24](#) permet de voir en temps réel les avions sur une carte comme montre la Figure 2.1. La bonne gestion du trafic aérien (ATM en anglais) est devenu primordial pour éviter le risque aérien.

Il existent plusieurs risques comme la foudre, panne de moteur, collision avec des oiseaux, fatigue du matériel entre autres. Dans cet projet nous nous concentrons en mesurer la probabilité de collision entre deux avions. Nous souhaitons qu'elle soit faible pour être d'accord avec la réglementation, elle est édictée par L'Organisation de l'aviation civile internationale (OACI).

Pour minimiser le risque de collision il est obligatoire de maintenir une distance minimale entre avions quand les avions sont en dessous on est dans une situation de risque. Cette tâche est garantie par le contrôle de circulation aérienne (ATC en anglais), elle est chargée de répartir les vols entre aéroports et moments de la journée. Néanmoins cette tâche n'est pas facile, les trajectoires des avions ne sont pas déterministes car elles sont soumises à des aléas comme le vent, perturbation de pilotage et des erreurs de mesure qui rendent la collision possible.

2.2 MODELISATION

Une route d'avion entre deux aéroports est effectuée avec un plan de vol qui est divisé en points de passage (waypoints) à intervalle régulier (20 min). Le pilote doit suivre donc la trajectoire entre deux points de passage à chaque fois. Comme le vol est soumis au vent on doit considérer une modélisation aléatoire du processus.

Dans la bibliographie la trajectoire est bien modélisée avec un processus stochastique continu en temps qui est ajouté à les équations du vol ([PW05]). Dans cet projet on utilise la méthode précédente.



Figure 2.1 – Vols en temps réel

Plus précisément on considère des trajectoires planes, le mouvement étant décrit par

$$dX_t = v dt + \sigma_t dW_t \quad (2.2.1)$$

où X_t représente la position, v la vitesse, σ_t la variance et W_t est un mouvement Brownien en deux dimensions. La trajectoire en chaque instant on la considère dans un repère local centré, c'est à dire la position est décomposée comme $X_t = (X_{a,t}, X_{c,t})$ où $X_{a,t}$ est la composante along-track et $X_{c,t}$ est l'across-track. Donc l'équation de mouvement est :

$$dX_{a,t} = v dt + \sigma_{a,t} dW_{a,t} \quad (2.2.2)$$

$$dX_{c,t} = \sigma_{c,t} dW_{c,t} \quad (2.2.3)$$

Dans ce modèle pour des raisons de pilotage on considère que quand le temps augmente on a plus de certitude sur la composante cross track mais moins sur la along-track.

$$X_{a,t} \sim \mathcal{N}(vt, (r_a t)^2) \quad (2.2.4)$$

$$X_{c,t} \sim \mathcal{N}(0, \min(\sigma_c, (r_c t)^2)) \quad (2.2.5)$$

$r_a = 0.25 \text{ nmimin}^{-1}$ et $r_c = 1/57 \text{ nmimin}^{-1}$ sont facteurs fixes du modèle. Si on fait l'approximation

$$\min(\sigma_c, (r_c t)^2) \approx \sigma_c^2 (1 - e^{-2\frac{r_c}{\sigma_c} vt})$$

On peut calculer $\sigma_{a,t} = r_a \sqrt{2t}$ et $\sigma_{c,t} = e^{-\frac{r_c}{\sigma_c} vt} \sqrt{2\sigma_c r_c v}$ avec Itô. On a aussi une autre modélisation avec la matrice variance/covariance pour $(t < s)$:

$$\text{Cov}(X_{a,t}, X_{a,s}) = r_a^2 t^2 \quad (2.2.6)$$

$$\text{Cov}(X_{c,t}, X_{c,s}) = \sigma_c^2 (1 - e^{-2\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}) e^{-\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)} \quad (2.2.7)$$

Comme sugeré dans le sujet du projet. Ce modèle est connu comme processus d'Ornstein-Uhlenbeck car la composante cross-track devient déterministe (égal à zero) dans le temps. Finalement juste noter que si on fait une rotation de θ degrés de notre trajectoire on doit multiplier chaque composante $X_t = (X_{a,t}, X_{c,t})$ de notre processus par la matrice de rotation

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.2.8)$$

chaque composante étant gaussienne avec une transformation linéaire reste gaussienne avec une moyenne de $\begin{pmatrix} vt \cos(\theta) \\ vt \sin(\theta) \end{pmatrix}$ et une matrice de covariance $R_\theta V(t) R_\theta^t$.

2.3 SIMULATION

On considère une simulation de deux avions dans un même plan, on simule les trajectoires décrites en 2.2 sur un horizon de temps de 20 minutes à une vitesse de 500 kt (926 km/h). On simule d'abord des trajectoires en parallèle et après des trajectoires qui se croissent. Les trajectoires sont discrétisées uniformément avec 100 points sur chaque trajectoire. On gardera les notations suivantes :

- d : dimension de discrétisation
- $\Sigma_a \in \mathbb{R}^{d \times d}$: matrice de variance/covariance along-track
- $\Sigma_c \in \mathbb{R}^{d \times d}$: matrice de variance/covariance cross-track

on a donc :

$$\begin{pmatrix} X_a^{(1)} \\ X_c^{(1)} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} vT \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_a & 0 \\ 0 & \Sigma_c \end{bmatrix} \right) \quad (2.3.1)$$

où $X_a^{(1)} \in \mathbb{R}^d, X_c^{(1)} \in \mathbb{R}^d$ et $T = [0, \dots, 20] \in \mathbb{R}^d$ est le vecteur temps discrétisé. Si nous faisons une rotation de θ degrés, le vecteur reste gaussien avec moyenne et covariance :

$$R_\theta \begin{pmatrix} X_a^{(1)} \\ X_c^{(1)} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \cos(\theta)vT \\ \sin(\theta)vT \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_a \cos^2(\theta) + \Sigma_c \sin^2(\theta) & \sin(\theta) \cos(\theta)(\Sigma_a - \Sigma_c) \\ \sin(\theta) \cos(\theta)(\Sigma_a - \Sigma_c) & \Sigma_a \cos^2(\theta) + \Sigma_c \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \right) \quad (2.3.2)$$

Nous sommes intéressés en estimer la probabilité de collision c'est à dire, la probabilité de que la distance entre les avions soit inférieure à un seuil prédefini ϵ .

$$\mathbb{P}(\exists i \mid \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^d \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon\right) \quad (2.3.3a)$$

$$= \mathbb{P}\left(\min_{1 \leq i \leq d} \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon\right) \quad (2.3.3b)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\forall i \mid \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon) \quad (2.3.3c)$$

3

RÉSULTATS

Les méthodes de calcul de probabilité sur des événements rares étant vues en cours seront juste rappelés par son nom sauf pour des cas quand on fait une adaptation de la méthode.

3.1 MONTE CARLO NAÏVE

On a fait une simulation Monte Carlo naïve pour le cas des trajectoires parallèles, une trajectoire type es montré dans la Figure 3.2. Nous avons simulé au total 10^5 trajectoires et pour des raisons de amélioration de calcul et de simulation, nous avos décidé de simuler le processus de la difference des trajectoires $U = X^{(1)} - X^{(2)}$, dans la Figure 3.3, on utilisera cette figure comme référence après pour la méthode IS. Pour faire l'estimation de la probabilité de collision on utilise la fonction $\phi(U) = \mathbb{I}\{\min_{1 \leq i \leq d} U_i \leq \epsilon\}$ et on calcule la probabilité de collision comme $\mathbb{E}[\phi(U)]$. L'estimation de probabilité faite avec Monte Carlo est montré dans la table 3.1.

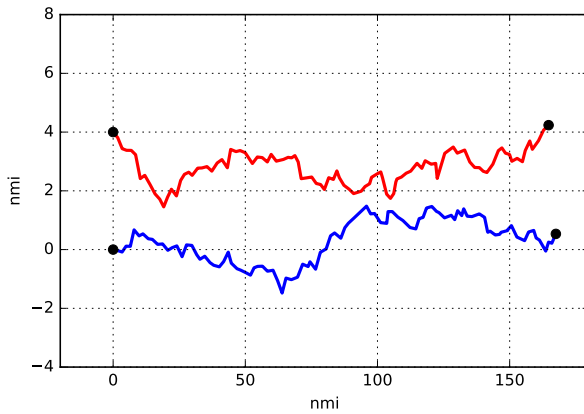


Figure 3.2 – Exemple de Trajectoire

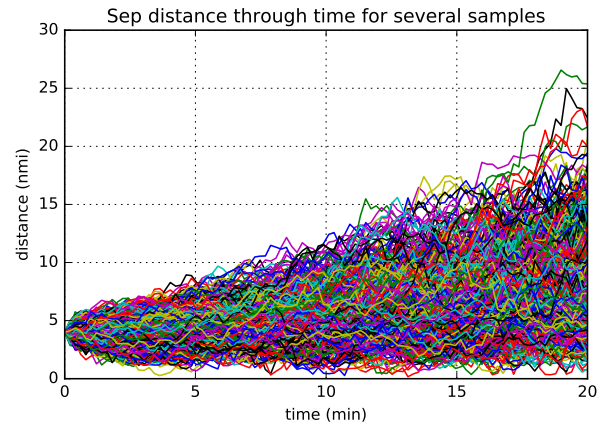


Figure 3.3 – Trajectoires de U

Dans la table 3.1 sont représentés les résultats de la méthode Monte Carlo naïve pour des distance entre 2 et 6 nmi. On a omis quelques résultats, notamment quand la distance est de 6 nmi seulement avec 10^5 simulations on pouvait arriver à des résultats non nuls. On a constaté aussi que pour 10^5 simulations la méthode Monte Carlo marchait jusqu'à des distance de l'ordre de 6nmi. Cette méthode nous permet d'estimer des probabilités de l'ordre de 10^{-5} .

Distance	Probability	Error	Relative error	N
2.0	0.44000	9.70×10^{-2}	22.11%	100
2.0	0.38000	3.03×10^{-2}	07.91%	1000
2.0	0.39785	3.03×10^{-3}	00.76%	100000
4.0	0.04000	1.37×10^{-2}	96.01%	100
4.0	0.01300	8.46×10^{-3}	54.00%	1000
4.0	0.01984	8.75×10^{-4}	04.35%	100000
6.0	0.00011	7.33×10^{-5}	59.09%	100000

Table 3.1 – Estimation avec Monte Carlo de la probabilité de collision

En analysant la table 3.1 on constate que la méthode de Monte Carlo marche bien pour des distances petites et que après on a besoin de un nombre plus grande de simulations. Néanmoins l'erreur relatif et le nombre de simulations ne sont pas linéairement liées, c'est à dire pour améliorer 10 fois l'erreur relatif on a besoin de plus de 10 fois le nombre de simulations utilisés antérieurement.

Finalement avec les simulations Monte Carlo on a fait un histogramme de la densité du minimum sur chaque trajectoire et un histogramme de ça conditionné à l'évènement de collision dans les Figures 3.4 et 3.5. Ces simulations sont faites à une distance de 4 nmi entre avions.

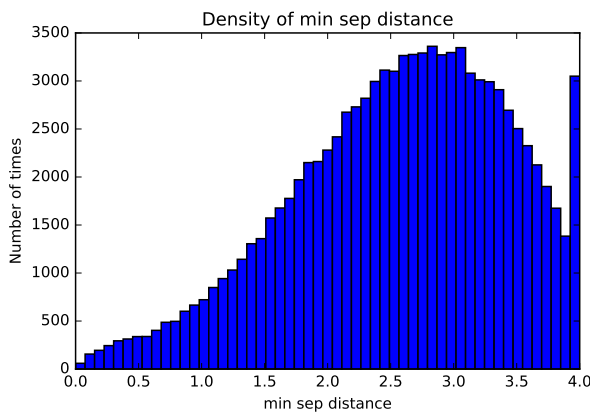


Figure 3.4 – Histogramme de la distance minimale

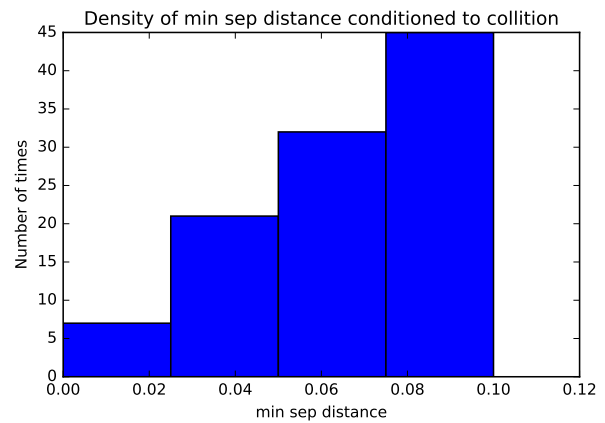


Figure 3.5 – Histogramme de la distance minimale conditionné à la collision

Dans la Figure 3.4 on constate qu'il existe une grande majorité où le minimum se place à distance 4, celui-ci c'est le cas quand les trajectoires se éloignent l'un de l'autre au début de la simulation. On constate aussi une concentration au tour des distances entre 2 et 3.5 nmi, c'est à dire que ça c'est la distance minimale entre les deux. Finalement pour la forme de l'histogramme on pourrait dire que ça ressemble à une normale centré au tour de 2.5 et 3.0 et coupé au delà de 4, pour confirmer cette affirmation on pourrait faire un test χ^2 ou calculer

la densité du minimum. Dans la Figure 3.5 on constate que l'histogramme a une forme linéaire mais cependant on n'a pas suffisamment d'observations pour confirmer cette affirmation.

Dans le cas de collision on a dessiné deux histogrammes avec le temps de collision et la position de collision dans les Figures 3.6 et 3.7

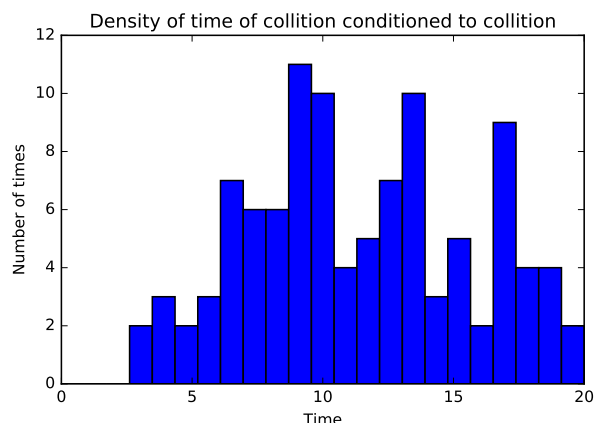


Figure 3.6 – Histogramme du Temps de collision entre avions

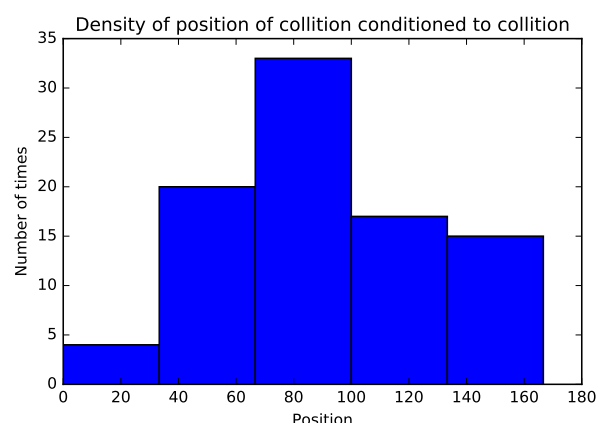


Figure 3.7 – Histogramme de la position de collision entre avions

Nous constatons que la collision tends à se produire au milieu de la trajectoire plus suivant et aussi pour la distance de collision, on constate une forme de toit dans ces trajectoires, cette affirmation sera utilisé pour la méthode IS après.

3.2 IMPORTANCE SAMPLING

Dans cette section on montre comment on a implémenté le décentrage. Comme dans ce sujet on travail avec des gaussiennes, l'échantillonnage d'importance restait valide et avec une formule assez simple comme on a vu en cours. Néanmoins le vecteur gaussien multidimensionnel $X \in \mathbb{R}^d$ n'est pas centré et sa matrice de variance/covariance n'est pas l'identité. Pour résoudre cet problème on a fait deux solutions équivalents :

- Faire un décentrage adapté au processus
- Normaliser le vecteur X et appliquer la méthode du cours

Pour la première méthode on a pris à la base l'idée du décentrage :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(f(X)) &= \int f(x)p(x) \, dx = \int f(x) \frac{p(x)}{q(x)} q(x) \, dx \\
 &= \mathbb{E}_Q\left(f(X) \frac{p(x)}{q(x)}\right)
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

où \mathbb{Q} est la nouvelle distribution. On appelle aussi $L(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ le ratio de vraisemblances. Pour une gaussienne multidimensionnelle $X \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ on a :

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (3.2.2)$$

Donc pour un décentrage de $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \boldsymbol{\theta}$ le ratio de vraisemblance est donc

$$L(\mathbf{x}) = \exp \left\{ \boldsymbol{\theta}^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\theta} \right\} \quad (3.2.3)$$

On rappelle que pour une Gaussienne standard le ratio vraisemblance est :

$$L(\mathbf{x}) = \exp \left\{ \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta} \right\} \quad (3.2.4)$$

Pour la deuxième méthode la procédure pour normaliser une gaussienne $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ c'est de la centrer juste avec une modification de la probabilité qu'on cherche trouver et deuxièmement trouver sa racine carrée car si on a $CC^T = \Sigma$ alors pour une gaussienne standard G on a : $CG \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, CC^T)$ donc on peut simuler la variable aléatoire X avec CG et la formule :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(CG)) = \mathbb{E}(f(C(G + \boldsymbol{\theta}))) e^{\boldsymbol{\theta} \cdot G - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}} \quad (3.2.5)$$

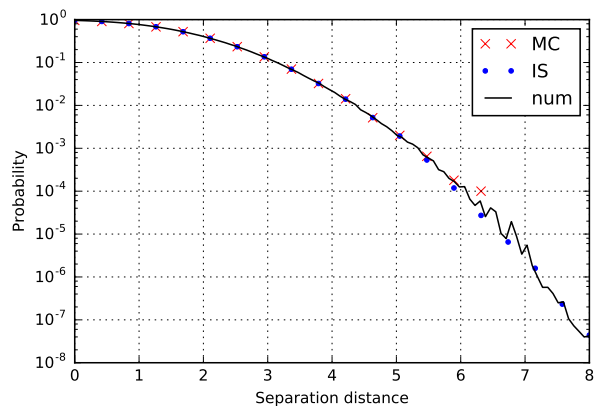
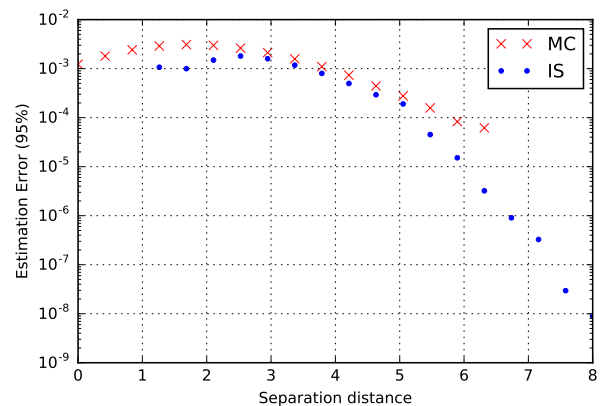
Finalement pour la simulation il nous reste à régler le paramètre $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$, cet paramètre est très important pour une bonne estimation pouvant amener à des grands erreurs en cas d'être mal choisi. On a adopté trois méthodes pour le choix de $\boldsymbol{\theta}$: un décalage constant, linéaire et toit. On a choisi ces trois décalages car le premier était le plus simple à faire mais pas le meilleur, l'autre pour des raisons de collision d'après les Figures Figure 3.2 et Figure 3.6 on voit que la collision se produit pas au début de la trajectoire mais au milieu ou à la fin. Finalement ces trois méthodes sont implémentées adaptativement, c'est à dire pour chaque type de décalage on fait différents tailles de décalage. Par exemple on fait des décalages du type toit avec une variation de l'auteur du toit entre 0 et la distance entre avions.

Les performances de la méthode Monte Carlo, Importance Sampling sont montrés dans la Figure 3.8 avec l'erreur dans la Figure 3.9

Les probabilités estimés sont montrés dans les Tables 3.2 3.3 et 3.4

Dans la Table 3.2 on voit que ce n'est pas une bonne choix pour $\boldsymbol{\theta}$ car l'erreur relatif reste grand même quand on augmente le nombre de simulations. Par contre les estimations dans les Tables 3.3 et 3.4 on obtient des bonnes approximations pour la probabilité de collision avec un erreur relatif qui reste petit. On constate aussi que quand la probabilité à estimer devient plus petite, les erreurs relatives sont plus grands.

Dans les Tables on a aussi affiché le décalage μ choisi adaptativement, dans les tables on a affiché un de plusieurs runs de la méthode, on constate que la choix de μ varie et dépend de chaque simulation, mais cependant qu'elle est au tour de moins la distance entre avions et donc

**Figure 3.8** – Probabilité estimé**Figure 3.9** – Erreur de les méthodes

Distance	Probability	Error	Relative error	N	μ
4.0	3.858×10^{-52}	7.095×10^{-52}	183.87%	100	-4.000
4.0	2.467×10^{-44}	2.761×10^{-44}	111.94%	1000	-4.000
4.0	5.852×10^{-38}	1.085×10^{-37}	185.35%	100000	-4.000
6.0	1.209×10^{-121}	2.153×10^{-121}	178.07%	100	-6.000
6.0	1.196×10^{-112}	1.328×10^{-112}	111.04%	1000	-6.000
6.0	7.344×10^{-100}	1.140×10^{-99}	155.16%	100000	-6.000
8.0	3.053×10^{-161}	4.008×10^{-161}	131.25%	100	-6.737
8.0	5.256×10^{-144}	1.019×10^{-143}	193.84%	1000	-6.737
8.0	5.672×10^{-155}	9.303×10^{-155}	164.03%	100000	-7.158

Table 3.2 – Estimation avec IS type constant de la probabilité de collision

Distance	Probability	Error	Relative error	N	μ
4.0	1.33×10^{-2}	5.29×10^{-3}	39.93%	100	-4.000
4.0	1.14×10^{-2}	2.17×10^{-3}	19.02%	1000	-4.000
4.0	2.04×10^{-2}	5.60×10^{-4}	2.74%	100000	-1.263
6.0	2.43×10^{-5}	1.10×10^{-5}	45.15%	100	-6.000
6.0	4.14×10^{-5}	1.03×10^{-5}	24.90%	1000	-5.053
6.0	9.22×10^{-5}	8.28×10^{-6}	8.98%	100000	-3.789
8.0	8.87×10^{-9}	5.06×10^{-9}	57.10%	100	-7.157
8.0	1.68×10^{-8}	6.23×10^{-9}	37.00%	1000	-7.157
8.0	4.72×10^{-8}	6.92×10^{-9}	14.65%	100000	-6.736

Table 3.3 – Estimation avec IS type linear de la probabilité de collision

Distance	Probability	Error	Relative error	N	μ
4.0	7.932×10^{-3}	3.261×10^{-3}	41.10%	100	-3.368
4.0	9.489×10^{-3}	2.379×10^{-3}	25.06%	1000	-4.000
4.0	2.062×10^{-2}	7.153×10^{-4}	3.46%	100000	-0.842
6.0	2.830×10^{-5}	2.013×10^{-5}	71.15%	100	-6.000
6.0	2.143×10^{-5}	6.983×10^{-6}	32.59%	1000	-6.000
6.0	5.763×10^{-5}	6.626×10^{-6}	11.49%	100000	-4.105
8.0	3.881×10^{-9}	2.751×10^{-9}	70.89%	100	-8.0
8.0	5.087×10^{-9}	2.089×10^{-9}	41.06%	1000	-8.0
8.0	1.673×10^{-8}	2.678×10^{-9}	16.00%	100000	-7.578

Table 3.4 – Estimation avec IS type toit de la probabilité de collision

si on voulait une méthode robuste pour calculer la probabilité on choisirait $\mu = -\text{dist}$ car elle est souvent choisie et donne des erreurs raisonnables. Avec la méthode obtenue par IS on a fait un histogramme de la densité de probabilité, c'est à dire, on calculait pour chaque $\epsilon \in [0, 4]$ la probabilité de collision ce qui nous donne la fonction de répartition et après on fait une dérivé discretisé pour obtenir la densité de probabilité. Les graphes sont affichés dans les Figures 3.10 et 3.11

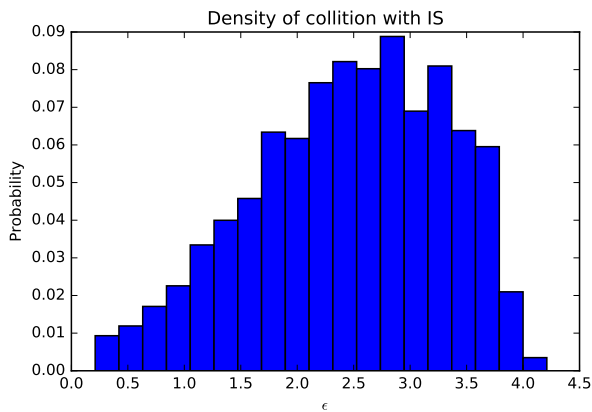


Figure 3.10 – Densité de probabilité obtenue avec IS

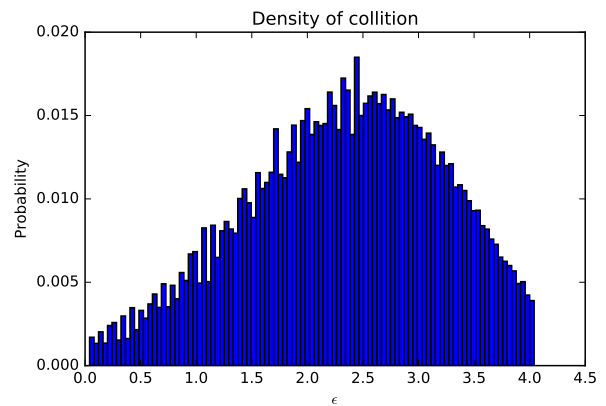


Figure 3.11 – Densité de probabilité obtenue numériquement

Ces deux Figures sont faites pour une simulation à distance 4. La Figure 3.10 est faite avec 10^5 simulations pour chaque $\epsilon \in [0, 4]$ avec une division de 20 points, pour des raisons de vitesse. et la Figure 3.11 est faite avec 100 points. On constate une concordance entre le méthode numérique et la méthode IS.

3.3 MÉTHODE DE SPLITTING

Dans cette section on implemente la méthode de splitting pour le calcul de

On montre dans la Figure 3.12 la méthode de Splitting et le calcul par Monte Carlo de la probabilité de collision

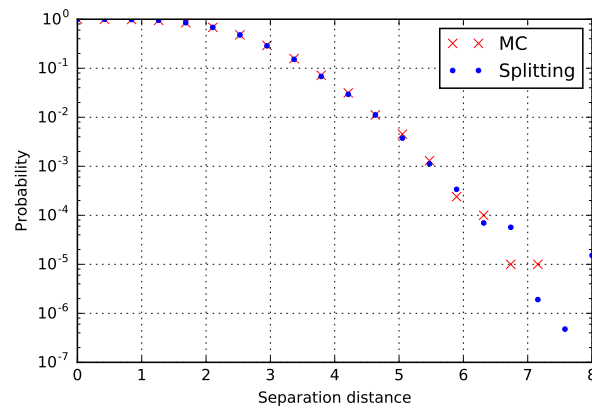


Figure 3.12 – Probabilité estimé avec Splitting

4 CONCLUSION

FIN

5

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

-
- [GL04] Willian Glover and John Lygeros. A multi-aircraft model for conflict detection and resolution algorithm evaluation. *HYBRIDGE Deliverable D*, 1 :3, 2004.
- [HPS05] Jianghai Hu, Maria Prandini, and Shankar Sastry. Aircraft conflict prediction in the presence of a spatially correlated wind field. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 6(3) :326–340, 2005.
- [JM13] Damien Jacquemart and Jérôme Morio. Conflict probability estimation between aircraft with dynamic importance splitting. *Safety science*, 51(1) :94–100, 2013.
- [MB15] J. Morio and M. Balesdent. *Estimation of Rare Event Probabilities in Complex Aerospace and Other Systems : A Practical Approach*. Elsevier Science, 2015.
- [MPLG10] Jérôme Morio, Rudy Pastel, and François Le Gland. An overview of importance splitting for rare event simulation. *European Journal of Physics*, 31(5) :1295, 2010.
- [Pai98] Russell A Paielli. Empirical test of conflict probability estimation. In *USA/Europe Air Traffic Management R&D Seminar, Orlando*, 1998.
- [PE97] Russell A Paielli and Heinz Erzberger. Conflict probability for free flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 20(3) :588–596, 1997.
- [PW05] Maria Prandini and Oliver J Watkins. Probabilistic aircraft conflict detection. *HYBRIDGE, IST-2001*, 32460 :116–119, 2005.