Modal SNA
Sûreté aérienne

Felipe García

Plan

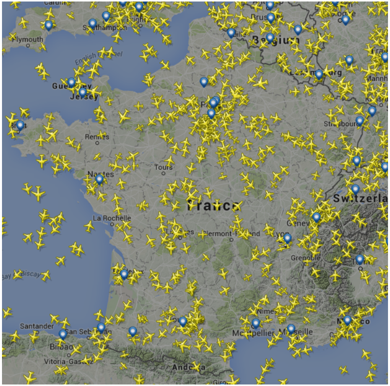
Collision entre Avions

Faits autour des avions :

80.000 vols par jour

Plusieurs risques

Collision entre Avions



Collision entre Avions

Faits autour des avions :

- 80.000 vols par jour
- Plusieurs risques
- Collision entre Avions

Collision entre Avions

Faits autour des avions :

- 80.000 vols par jour
- Plusieurs risques
- Collision entre Avions

Routes des Avions

Route divisé en waypoints

Composante aléatoire : le vent

Processus stochastique $X_t = (X_{a,t}, X_{c,t})$

$$\mathrm{d}X_t = v \ \mathrm{d}t + \sigma_t \ \mathrm{d}W_t$$

Routes des Avions

Route divisé en waypoints

Composante aléatoire : le vent

Processus stochastique $X_t = (X_{a,t}, X_{c,t})$

$$\mathrm{d}X_t = v\ \mathrm{d}t + \sigma_t\ \mathrm{d}W_t$$

Routes des Avions

Route divisé en waypoints

Composante aléatoire : le vent

Processus stochastique $X_t = (X_{a,t}, X_{c,t})$

$$\mathrm{d}X_t = v\ \mathrm{d}t + \sigma_t\ \mathrm{d}W_t$$

Modélisation Aléatoire

Modélisation aléatoire

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_{a,t}, X_{a,s}) = r_a^2 t^2$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_{c,t}, X_{c,s}) = \sigma_c^2 (1 - e^{-2\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}) e^{-\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}$$

Connu comme processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus reste gaussien avec une rotation

Modélisation Aléatoire

Modélisation aléatoire

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_{a,t}, X_{a,s}) = r_a^2 t^2$$
$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_{c,t}, X_{c,s}) = \sigma_c^2 (1 - e^{-2\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}) e^{-\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}$$

Connu comme processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus reste gaussien avec une rotation

Modélisation Aléatoire

Modélisation aléatoire

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_{a,t}, X_{a,s}) = r_a^2 t^2$$
$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_{c,t}, X_{c,s}) = \sigma_c^2 (1 - e^{-2\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}) e^{-\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}$$

Connu comme processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus reste gaussien avec une rotation

Modélisation des trajectoires

Sûreté aérienne

Méthode de modélisation.

- Trajectoires discrétisées
- On simule la différence des trajectoires $U = X^{(1)} - X^{(2)}$
- On modélise des trajectoires en parallèle et croisées

Modélisation des trajectoires

Méthode de modélisation.

- Trajectoires discrétisées
- On simule la différence des trajectoires $U = X^{(1)} - X^{(2)}$
- On modélise des trajectoires en parallèle et croisées

Modélisation des trajectoires

Méthode de modélisation.

Trajectoires discrétisées

On simule la différence des trajectoires $U = X^{(1)} - X^{(2)}$

On modélise des trajectoires en parallèle et croisées

Probabilité de Collision

Estimer la probabilité de que la distance entre les avions soit inférieure à un seuil prédéfini ϵ.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\exists i \mid \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{d} \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\min_{1\leq i\leq d} \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\forall i \mid \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon\right)
\end{aligned}
$$

Estimation des probabilités

Estimation avec les méthodes du cours

Vérification des résultats avec une méthode numérique

Exemple de trajectoire

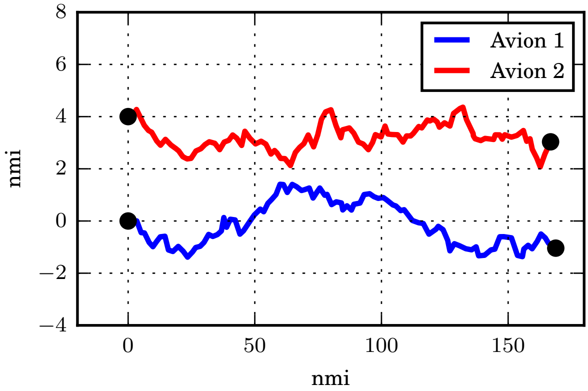
Estimation des probabilités

Estimation avec les méthodes du cours

Vérification des résultats avec une méthode numérique

Exemple de trajectoire

Estimation avec les méthodes du cours
Vérification des résultats avec une méthode numérique
Exemple de trajectoire



Monte Carlo naïve

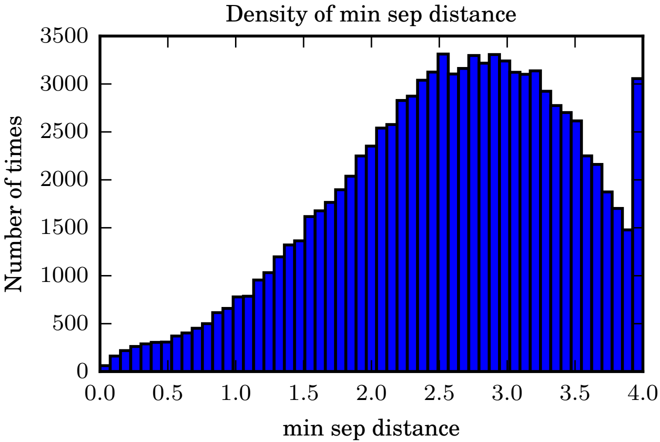
Estimation de $\mathbb{E}[\phi(U)]$ avec $\phi(U) = \mathbb{I}\left\{\min_{1\leq i\leq d} U_i \leq \epsilon\right\}$ et $U = X^{(1)} - X^{(2)}$.

Monte Carlo naïve

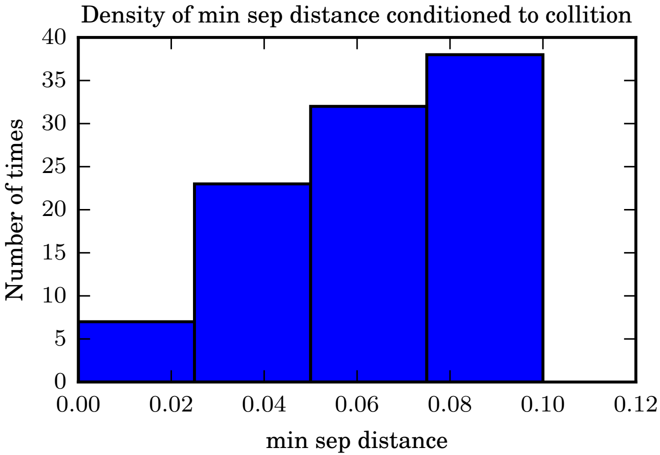
Estimation de $\mathbb{E}[\phi(U)]$ avec $\phi(U) = \mathbb{I}\left\{\min_{1\leq i\leq d} U_i \leq \epsilon\right\}$ et $U = X^{(1)} - X^{(2)}$.

Dist	Probability	Error	Rel Err	N
2.0	0.44000	9.70×10^{-2}	22.11%	100
2.0	0.38000	3.03×10^{-2}	07.91%	1000
2.0	0.39785	3.03×10^{-3}	00.76%	100000
4.0	0.04000	1.37×10^{-2}	96.01%	100
4.0	0.01300	8.46×10^{-3}	54.00%	1000
4.0	0.01984	8.75×10^{-4}	04.35%	100000
6.0	0.00011	7.33×10^{-5}	59.09%	100000

Distribution Conditionnelle



Distribution Conditionnelle



Implémentation du décentrage.

Faire un décentrage adapté au processus

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})})$$

$$L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\theta}\right\}$$

Normaliser le vecteur $\boldsymbol{x} = CC^{\mathrm{T}}$

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(CG)) = \mathbb{E}(f(C(G+\boldsymbol{\theta}))e^{\boldsymbol{\theta}.G-\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}})$$

Choix du $\boldsymbol{\theta}$

Méthode adaptative

Importance Sampling

Implémentation du décentrage.

Faire un décentrage adapté au processus

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})})$$

$$L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\theta}\right\}$$

Normaliser le vecteur $\boldsymbol{x} = CC^{\mathrm{T}}$

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(CG)) = \mathbb{E}(f(C(G+\boldsymbol{\theta}))e^{\boldsymbol{\theta}.G-\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}})$$

Choix du $\boldsymbol{\theta}$

Méthode adaptative

Importance Sampling

Implémentation du décentrage.

Faire un décentrage adapté au processus

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})})$$

$$L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\theta}\right\}$$

Normaliser le vecteur $\boldsymbol{x} = CC^{\mathrm{T}}$

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(CG)) = \mathbb{E}(f(C(G+\boldsymbol{\theta}))e^{\boldsymbol{\theta}.G-\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}})$$

Choix du $\boldsymbol{\theta}$

Méthode adaptative

Importance Sampling

Implémentation du décentrage.

Faire un décentrage adapté au processus

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})})$$

$$L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\theta}\right\}$$

Normaliser le vecteur $\boldsymbol{x} = CC^{\mathrm{T}}$

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(CG)) = \mathbb{E}(f(C(G+\boldsymbol{\theta}))e^{\boldsymbol{\theta}.G-\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}})$$

Choix du $\boldsymbol{\theta}$

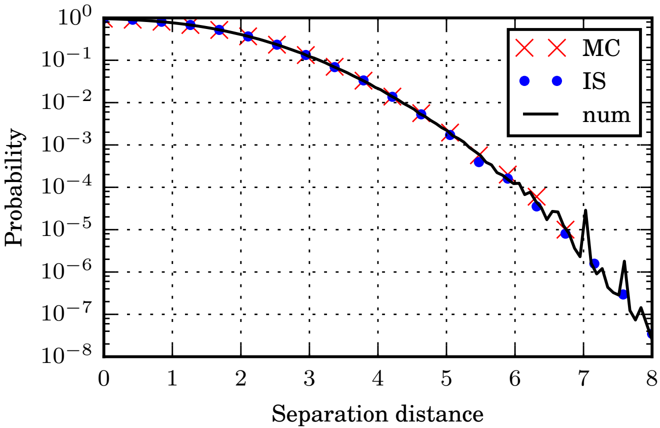
Méthode adaptative

Résultats

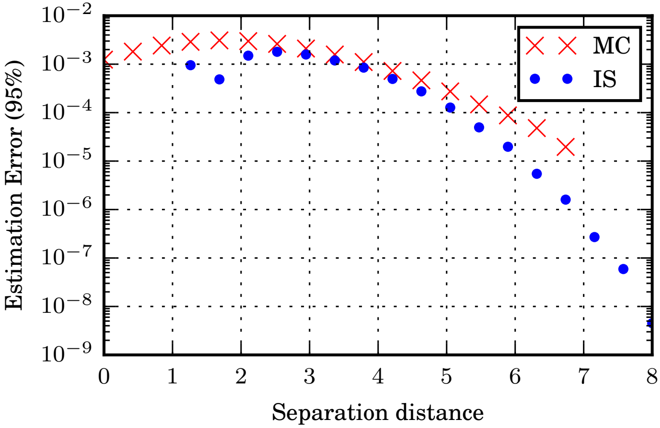
Comparaison entre Importance Sampling Monte Carlo et la Méthode Numérique

Résultats

Comparaison entre Importance Sampling Monte Carlo et la Méthode Numérique



Résultats



10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
Estimation Error (95%)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Separation distance
MC
IS

Résultats

Calcul par méthode Constante

Dist	Probability	Error	Rel Err	N	mu
4.0	3.85×10^{-52}	7.09×10^{-52}	183.87%	100	-4.0
4.0	2.46×10^{-44}	2.76×10^{-44}	111.94%	1000	-4.0
4.0	5.85×10^{-38}	1.08×10^{-37}	185.35%	100000	-4.0
6.0	1.20×10^{-121}	2.15×10^{-121}	178.07%	100	-6.0
6.0	1.19×10^{-112}	1.32×10^{-112}	111.04%	1000	-6.0
6.0	7.34×10^{-100}	1.14×10^{-99}	155.16%	100000	-6.0
8.0	3.05×10^{-161}	4.00×10^{-161}	131.25%	100	-6.7
8.0	5.25×10^{-144}	1.01×10^{-143}	193.84%	1000	-6.7
8.0	5.67×10^{-155}	9.30×10^{-155}	164.03%	100000	-7.1

Résultats

Calcul par méthode Linéaire

Dist	Probability	Error	Rel Err	N	mu
4.0	1.33×10^{-2}	5.29×10^{-3}	39.93%	100	-4.000
4.0	1.14×10^{-2}	2.17×10^{-3}	19.02%	1000	-4.000
4.0	2.04×10^{-2}	5.60×10^{-4}	2.74%	100000	-1.263
6.0	2.43×10^{-5}	1.10×10^{-5}	45.15%	100	-6.000
6.0	4.14×10^{-5}	1.03×10^{-5}	24.90%	1000	-5.053
6.0	9.22×10^{-5}	8.28×10^{-6}	8.98%	100000	-3.789
8.0	8.87×10^{-9}	5.06×10^{-9}	57.10%	100	-7.157
8.0	1.68×10^{-8}	6.23×10^{-9}	37.00%	1000	-7.157
8.0	4.72×10^{-8}	6.92×10^{-9}	14.65%	100000	-6.736

Calcul par méthode Toit

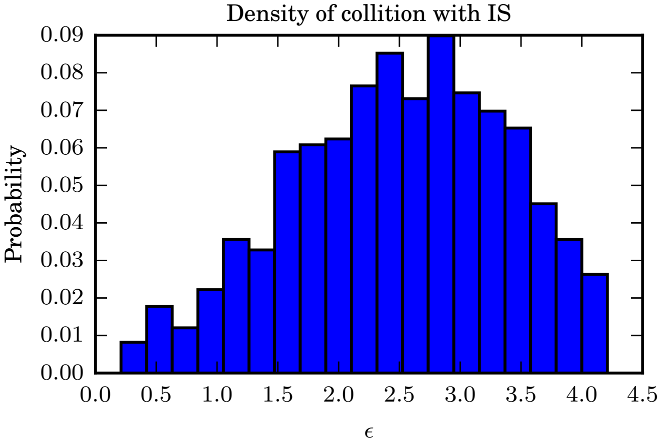
Dist	Probability	Error	Rel Err	N	mu
4.0	7.932×10^{-3}	3.261×10^{-3}	41.10%	100	-3.368
4.0	9.489×10^{-3}	2.379×10^{-3}	25.06%	1000	-4.000
4.0	2.062×10^{-2}	7.153×10^{-4}	3.46%	100000	-0.842
6.0	2.830×10^{-5}	2.013×10^{-5}	71.15%	100	-6.000
6.0	2.143×10^{-5}	6.983×10^{-6}	32.59%	1000	-6.000
6.0	5.763×10^{-5}	6.626×10^{-6}	11.49%	100000	-4.105
8.0	3.881×10^{-9}	2.751×10^{-9}	70.89%	100	-8.0
8.0	5.087×10^{-9}	2.089×10^{-9}	41.06%	1000	-8.0
8.0	1.673×10^{-8}	2.678×10^{-9}	16.00%	100000	-7.578

Distribution conditionnée

Simulation à distance 4 avec un échantillon de 10^5.

Distribution conditionnée

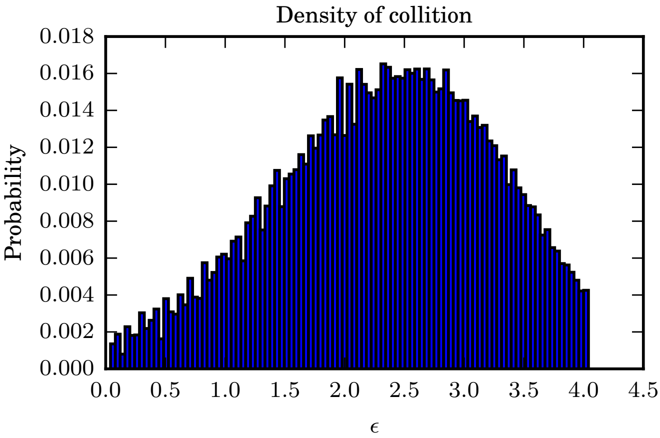
Simulation à distance 4 avec un échantillon de 10^5.



Sûreté aérienne

Distribution conditionnée

Simulation à distance 4 avec un échantillon de 10^5.



Méthode de Splitting

On souhaite estimer $\mathbb{P}[\varphi(U) \leq \epsilon]$ avec $\varphi(U)$ le plus petit élément de U. On trouve une séquence $\epsilon_k > \ldots > \epsilon$ et on calcule

$$\mathbb{P}[\varphi(U) \leq \epsilon] = \mathbb{P}(\varphi(U) \leq \epsilon_1) \prod_{k=2}^{m} \mathbb{P}(\varphi(U) \leq \epsilon_k | \varphi(U) \leq \epsilon_{k-1})$$

Avoir les probabilités dans un même ordre

Estimer les quantiles empiriques

Méthode de Splitting

On souhaite estimer $\mathbb{P}[\varphi(U) \leq \epsilon]$ avec $\varphi(U)$ le plus petit élément de U. On trouve une séquence $\epsilon_k > \ldots > \epsilon$ et on calcule

$$\mathbb{P}[\varphi(U) \leq \epsilon] = \mathbb{P}(\varphi(U) \leq \epsilon_1) \prod_{k=2}^{m} \mathbb{P}(\varphi(U) \leq \epsilon_k | \varphi(U) \leq \epsilon_{k-1})$$

Avoir les probabilités dans un même ordre

Estimer les quantiles empiriques

Méthode de Splitting

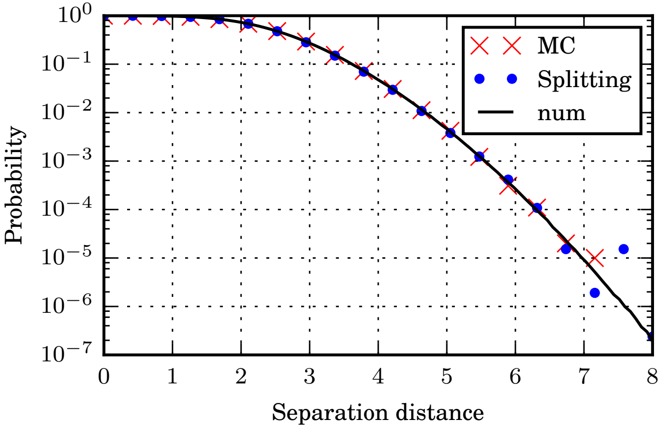
On souhaite estimer $\mathbb{P}[\varphi(U) \leq \epsilon]$ avec $\varphi(U)$ le plus petit élément de U. On trouve une séquence $\epsilon_k > \ldots > \epsilon$ et on calcule

$$\mathbb{P}[\varphi(U) \leq \epsilon] = \mathbb{P}(\varphi(U) \leq \epsilon_1) \prod_{k=2}^{m} \mathbb{P}(\varphi(U) \leq \epsilon_k | \varphi(U) \leq \epsilon_{k-1})$$

Avoir les probabilités dans un même ordre

Estimer les quantiles empiriques

Résultats


10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
Probability
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Separation distance
MC
Splitting
num

Résultats

Dist	Probability	Error	Rel Err	N
4.0	2.740×10^{-2}	7.058×10^{-3}	34.69%	100
4.0	1.721×10^{-2}	-3.109×10^{-3}	-15.30%	1000
4.0	1.712×10^{-2}	-2.833×10^{-3}	-14.19%	100000
6.0	2.537×10^{-3}	2.430×10^{-3}	2273.42%	100
6.0	2.441×10^{-4}	5.364×10^{-4}	107.40%	1000
6.0	1.221×10^{-3}	-3.332×10^{-5}	3.75%	100000

Trajectoires Croisées

Modélisation des trajectoires

Rotation des trajectoires

Prendre la différence entre elles $U = (U_x, U_y)$

Estimer $\mathbb{P}(\sqrt{U_x^2 + U_y^2} < \epsilon)$

Trajectoires Croisées

Modélisation des trajectoires

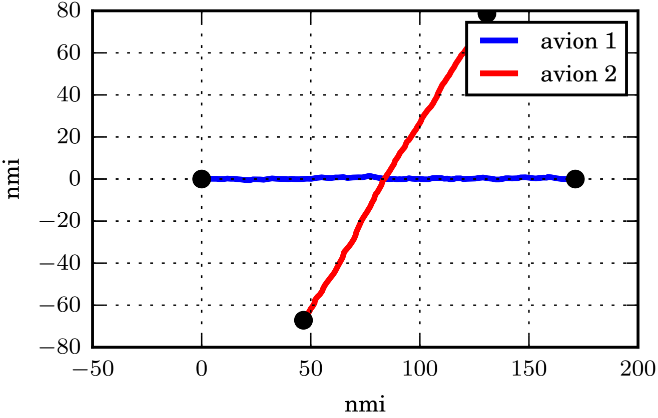
- Rotation des trajectoires
- Prendre la différence entre elles $U = (U_x, U_y)$
- Estimer $\mathbb{P}(\sqrt{U_x^2 + U_y^2} < \epsilon)$

Trajectoires Croisées

Modélisation des trajectoires

- Rotation des trajectoires
- Prendre la différence entre elles $U = (U_x, U_y)$
- Estimer $\mathbb{P}(\sqrt{U_x^2 + U_y^2} < \epsilon)$

Modélisation des trajectoires

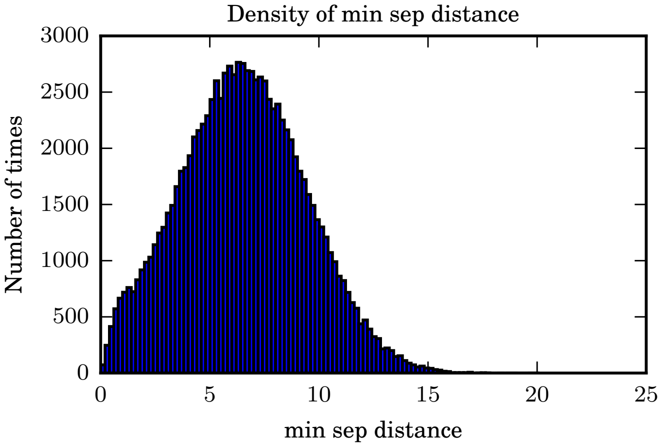


Résultats

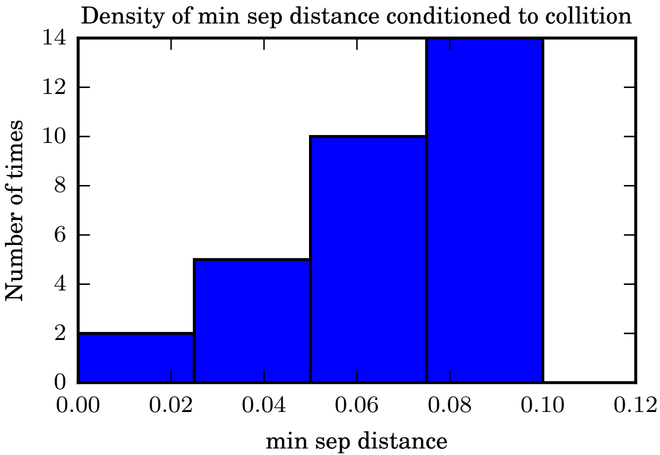
Résultats

Probability	Error	Rel Err	N
2.520×10^{-4}	9.620×10^{-5}	38%	100
3.887×10^{-4}	3.227×10^{-5}	8%	1000
6.026×10^{-4}	1.993×10^{-6}	0.33%	100000

Distribution Conditionnelle



Distribution Conditionnelle



Conclusion

Méthodes Implémentées

Résultats obtenus

Probabilité estimée

Conclusion

Méthodes Implémentées

Résultats obtenus

Probabilité estimée

Conclusion

Méthodes Implémentées

Résultats obtenus

Probabilité estimée

Fin

Merci