



Plan

Sûreté aérienne

Résultats

- 1 Introduction
 - Modélisation
 - Simulation
- 2 Résultats
 - Monte Carlo naïve
 - Importance Sampling
 - Méthode de Splitting
 - Trajectoires Croisées
- 3 Conclusion



Collision entre Avions

Sûreté aérienne

Faits autour des avions : 80.000 vols par jour

Plusieurs risques Collision entre Avion

Introduction

Modélisation

Simulation

Resultai





Collision entre Avions

Sûreté aérienne

Introduction Modélisation

D. I. .

resurea

Faits autour des avions :
80.000 vols par jour
Plusieurs risques



Collision entre Avions

Sûreté aérienne

Introduction Modélisation

Résultat

Conclusio

Faits autour des avions : 80.000 vols par jour Plusieurs risques Collision entre Avions



Routes des Avions

Sûreté aérienne

Introducti

Modélisation

D. I. .

...

Conclusio

Route divisé en waypoints

Composante aléatoire : le vent

Processus stochastique $X_t = (X_{a,t}, X_{c,t})$

$$dX_t = v dt + \sigma_t dW_t$$



Routes des Avions

Sûreté aérienne

Introducti

Modélisation

Dácultati

Conclusio

Route divisé en waypoints

Composante aléatoire : le vent

Processus stochastique $X_t = (X_{a,t}, X_{c,t})$

$$dX_t = v dt + \sigma_t dW_t$$



Routes des Avions

Sûreté aérienne

Introducti

Modélisation

Dácultati

.

Conclusion

Route divisé en waypoints

 $Composante \ al\'eatoire: le \ vent$

Processus stochastique $X_t = (X_{a,t}, X_{c,t})$

$$dX_t = v dt + \sigma_t dW_t$$



Modélisation Aléatoire

Sûreté aérienne

Introduction

Modélisation

. . codirect

Conclusio

Modélisation aléatoire

$$\operatorname{Cov}(X_{a,t}, X_{a,s}) = r_a^2 t^2$$

$$\operatorname{Cov}(X_{c,t}, X_{c,s}) = \sigma_c^2 (1 - e^{-2\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}) e^{-\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}$$

Connu comme processus d'Ornstein-Uhlenbeck Le processus reste gaussien avec une rotation



Modélisation Aléatoire

Sûreté aérienne

Introduction

Modélisation

Simulatio

r coourcus.

Conclusio

Modélisation aléatoire

$$Cov(X_{a,t}, X_{a,s}) = r_a^2 t^2$$

$$Cov(X_{c,t}, X_{c,s}) = \sigma_c^2 (1 - e^{-2\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}) e^{-\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}$$

Connu comme processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus reste gaussien avec une rotation



Modélisation Aléatoire

Sûreté aérienne

Introductio

Modélisation

. . codirect

Conclusio

Modélisation aléatoire

$$\operatorname{Cov}(X_{a,t}, X_{a,s}) = r_a^2 t^2$$

$$\operatorname{Cov}(X_{c,t}, X_{c,s}) = \sigma_c^2 (1 - e^{-2\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}) e^{-\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}$$

Connu comme processus d'Ornstein-Uhlenbeck Le processus reste gaussien avec une rotation



Modélisation des trajectoires

Sûreté aérienne

Introduction

Modélisation

Modélisation Simulation

Résultats

Conclusio

Méthode de modélisation.

Trajectoires discrétisées

On simule la différence des trajectoires $U = X^{(1)} - X^{(2)}$

On modélise des trajectoires en parallèle et croisées



Modélisation des trajectoires

Sûreté aérienne

Introduction Modélisation

Simulation

Conclusio

Méthode de modélisation.

Trajectoires discrétisées

On simule la différence des trajectoires $U=X^{(1)}-X^{(2)}$

On modélise des trajectoires en parallèle et croisées



Modélisation des trajectoires

Sûreté aérienne

Introduction

Modélisation

Modélisation Simulation

Récultate

Méthode de modélisation.

Trajectoires discrétisées

On simule la différence des trajectoires $U = X^{(1)} - X^{(2)}$

On modélise des trajectoires en parallèle et croisées



Probabilité de Collision

Sûreté aérienne

Introduction

Simulation

Récultate

Conclusio

Estimer la probabilité de que la distance entre les avions soit inférieure à un seuil prédéfini ϵ .

$$\mathbb{P}\left(\exists i \mid \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \le \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^d \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \le \epsilon\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\min_{1 \le i \le d} \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \le \epsilon\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\forall i \mid \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \le \epsilon\right)$$



Estimation des probabilités

Sûreté aérienne

Introduction

Résultats

Monte Carlo naïve Importance Samplii Méthode de Splittii

Conclusion

Estimation avec les méthodes du cours

Vérification des résultats avec une méthode numérique Exemple de trajectoire



Estimation des probabilités

Sûreté aérienne

Résultats

Estimation avec les méthodes du cours Vérification des résultats avec une méthode numérique



Estimation des probabilités

Sûreté aérienne

Introducti

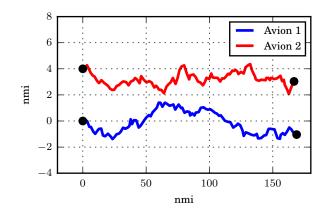
Résultats

Monte Carlo naïve
Importance Sampling
Méthode de Splitting

Trajectoires Croisée

Conclusion

Estimation avec les méthodes du cours Vérification des résultats avec une méthode numérique Exemple de trajectoire





Monte Carlo naïve

Sûreté aérienne

Estimation de $\mathbb{E}[\phi(U)]$ avec $\phi(U) = \mathbb{I}\{\min_{1 \leq i \leq d} U_i \leq \epsilon\}$ et $U = X^{(1)} - X^{(2)}$.

Introduct

Résultat

Monte Carlo naïve

Importance Samplir Méthode de Splittir



Monte Carlo naïve

Sûreté aérienne

Estimation de $\mathbb{E}[\phi(U)]$ avec $\phi(U) = \mathbb{I}\{\min_{1 \le i \le d} U_i \le \epsilon\}$ et $U = X^{(1)} - X^{(2)}$

Monte Carlo naïve

Dist	Probability	Error	Rel Err	N
2.0	0.44000	9.70×10^{-2}	22.11%	100
2.0	0.38000	3.03×10^{-2}	07.91%	1000
2.0	0.39785	3.03×10^{-3}	00.76%	100000
4.0	0.04000	1.37×10^{-2}	96.01%	100
4.0	0.01300	8.46×10^{-3}	54.00%	1000
4.0	0.01984	8.75×10^{-4}	04.35%	100000
6.0	0.00011	7.33×10^{-5}	59.09%	100000



Distribution Conditionnelle

Sûreté aérienne

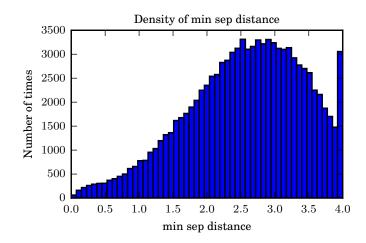
.....

Késultats

Monte Carlo naïve

Importance Samplin Méthode de Splittin

C





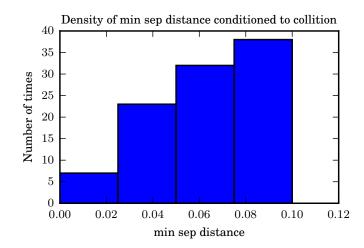
Distribution Conditionnelle

Sûreté aérienne

Introduction

Monte Carlo naïve

Importance Samplir Méthode de Splittir





Sûreté aérienne

Introductio

minoductio

Monte Carlo naïve

Importance Sampling
Méthode de Splitting

Trajectoires Croisées

Conclusion

Implémentation du décentrage.

Faire un décentrage adapté au processus

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})})$$
$$L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\theta}\right\}$$

Normaliser le vecteur $x = CC^{T}$

$$\mathbb{E}(f(x)) = \mathbb{E}(f(CG)) = \mathbb{E}(f(C(G+\theta))e^{\theta \cdot G - \frac{1}{2}\theta^{\mathrm{T}}\theta})$$

Choix du 6

Méthode adaptative



Sûreté aérienne

Introductio

milioductio

Monte Carlo naïve

Importance Sampling Méthode de Splitting

Trajectoires Croisées

Conclusior

Implémentation du décentrage.

Faire un décentrage adapté au processus

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})})$$
$$L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\theta}\right\}$$

Normaliser le vecteur $\boldsymbol{x} = CC^{\mathrm{T}}$

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(CG)) = \mathbb{E}(f(C(G+\boldsymbol{\theta}))e^{\boldsymbol{\theta}\cdot G - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}})$$

Choix du 6

Méthode adaptative



Sûreté aérienne

Importance Sampling

Implémentation du décentrage.

Faire un décentrage adapté au processus

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})})$$
$$L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\theta}\right\}$$

Normaliser le vecteur $\boldsymbol{x} = CC^{\mathrm{T}}$

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(CG)) = \mathbb{E}(f(C(G+\boldsymbol{\theta}))e^{\boldsymbol{\theta}\cdot G - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}})$$

Choix du $\boldsymbol{\theta}$



Sûreté aérienne

Introductio

....

Monte Carlo naïve
Importance Sampling

Méthode de Splittin

Trajectoires Croisée

Conclusion

Implémentation du décentrage.

Faire un décentrage adapté au processus

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})})$$
$$L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\theta}\right\}$$

Normaliser le vecteur $\boldsymbol{x} = CC^{\mathrm{T}}$

$$\mathbb{E}(f(\boldsymbol{x})) = \mathbb{E}(f(CG)) = \mathbb{E}(f(C(G+\boldsymbol{\theta}))e^{\boldsymbol{\theta}\cdot G - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}})$$

Choix du θ

Méthode adaptative



Sûreté aérienne

Méthode Numérique

Comparaison entre Importance Sampling Monte Carlo et la

Introduction

Résultats

Monte Carlo naïve

Importance Sampling

T . . . C . .

Trajectoires Croisé



Sûreté aérienne

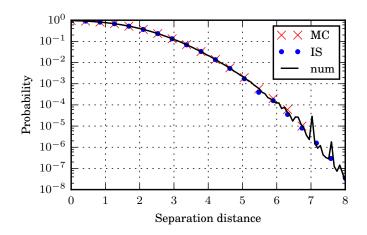
Introduction

Monte Carlo naïve
Importance Sampling
Méthodo do Splitting

Méthode de Splitting Trajectoires Croisées

Conclusion

Comparaison entre Importance Sampling Monte Carlo et la Méthode Numérique





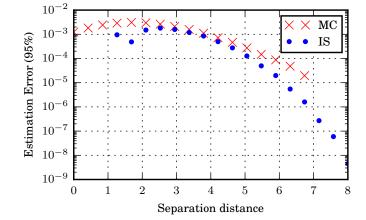
Sûreté aérienne

Introductio

Monte Carlo naïve

Méthode de Splitti

Trajectoires Croisé





Sûreté aérienne

Calcul par méthode Constante

Introduction

Monte Carlo naïve
Importance Sampling
Méthode de Splitting
Trajectoires Croisées

Dist	Probability	Error	Rel Err	N	mu
4.0	3.85×10^{-52}	7.09×10^{-52}	183.87%	100	-4.0
4.0	2.46×10^{-44}	2.76×10^{-44}	111.94%	1000	-4.0
4.0	$5.85{ imes}10^{-38}$	1.08×10^{-37}	185.35%	100000	-4.0
6.0	1.20×10^{-121}	2.15×10^{-121}	178.07%	100	-6.0
6.0	1.19×10^{-112}	1.32×10^{-112}	111.04%	1000	-6.0
6.0	7.34×10^{-100}	1.14×10^{-99}	155.16%	100000	-6.0
8.0	3.05×10^{-161}	4.00×10^{-161}	131.25%	100	-6.7
8.0	5.25×10^{-144}	1.01×10^{-143}	193.84%	1000	-6.7
8.0	5.67×10^{-155}	9.30×10^{-155}	164.03%	100000	-7.1



Sûreté aérienne

Calcul par méthode Linéaire

Introduction

Monte Carlo naïve
Importance Sampling
Méthode de Splitting
Trajectoires Croisées

Dist	Probability	Error	Rel Err	N	mu
4.0	1.33×10^{-2}	5.29×10^{-3}	39.93%	100	-4.000
4.0	1.14×10^{-2}	$2.17{ imes}10^{-3}$	19.02%	1000	-4.000
4.0	2.04×10^{-2}	5.60×10^{-4}	2.74%	100000	-1.263
6.0	2.43×10^{-5}	1.10×10^{-5}	45.15%	100	-6.000
6.0	4.14×10^{-5}	1.03×10^{-5}	24.90%	1000	-5.053
6.0	9.22×10^{-5}	8.28×10^{-6}	8.98%	100000	-3.789
8.0	8.87×10^{-9}	5.06×10^{-9}	57.10%	100	-7.157
8.0	1.68×10^{-8}	6.23×10^{-9}	37.00%	1000	-7.157
8.0	4.72×10^{-8}	6.92×10^{-9}	14.65%	100000	-6.736



Sûreté aérienne

Calcul par méthode Toit

Introduction

Monte Carlo naïve
Importance Sampling
Méthode de Splitting
Trajectoires Croisées

Dist	Probability	Error	Rel Err	N	mu
4.0	7.932×10^{-3}	3.261×10^{-3}	41.10%	100	-3.368
4.0	9.489×10^{-3}	2.379×10^{-3}	25.06%	1000	-4.000
4.0	2.062×10^{-2}	7.153×10^{-4}	3.46%	100000	-0.842
6.0	2.830×10^{-5}	2.013×10^{-5}	71.15%	100	-6.000
6.0	2.143×10^{-5}	6.983×10^{-6}	32.59%	1000	-6.000
6.0	5.763×10^{-5}	6.626×10^{-6}	11.49%	100000	-4.105
8.0	3.881×10^{-9}	2.751×10^{-9}	70.89%	100	-8.0
8.0	5.087×10^{-9}	2.089×10^{-9}	41.06%	1000	-8.0
8.0	1.673×10^{-8}	2.678×10^{-9}	16.00%	100000	-7.578



Distribution conditionnée

Sûreté aérienne

Simulation à distance 4 avec un échantillon de 10^5 .

Introduction

D/--II--

Monte Carlo naïve

Importance Sampling

Trajectoires Croisé



Distribution conditionnée

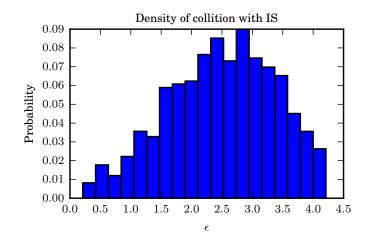
Sûreté aérienne

Simulation à distance 4 avec un échantillon de 10^5 .



Importance Sampling
Méthode de Splitting

Trajectoires Croisée





Distribution conditionnée

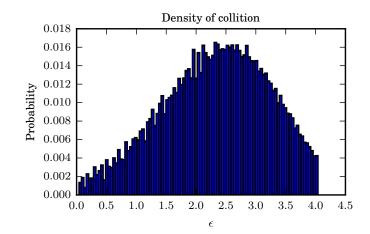
Sûreté aérienne

Simulation à distance 4 avec un échantillon de 10^5 .

Introductio

Monte Carlo naïve
Importance Sampling

Méthode de Splitting Trajectoires Croisées





Méthode de Splitting

Sûreté aérienne

Introduct

D. I. .

Monte Carlo naïve Importance Sampling Méthode de Splitting

Trajectoires Croisées

Conclusio

On souhaite estimer $\mathbb{P}[\varphi(U) \leq \epsilon]$ avec $\varphi(U)$ le plus petit élément de U. On trouve une séquence $\epsilon_k > \ldots > \epsilon$ et on calcule

$$\mathbb{P}[\varphi(U) \le \epsilon] = \mathbb{P}(\varphi(U) \le \epsilon_1) \prod_{k=2}^{m} \mathbb{P}(\varphi(U) \le \epsilon_k | \varphi(U) \le \epsilon_{k-1})$$

Avoir les probabilités dans un même ordre Estimer les quantiles empiriques



Méthode de Splitting

Sûreté aérienne

Introducti

Monte Carlo naïve
Importance Sampling

Méthode de Splitting Trajectoires Croisées

Conclusio

On souhaite estimer $\mathbb{P}[\varphi(U) \leq \epsilon]$ avec $\varphi(U)$ le plus petit élément de U. On trouve une séquence $\epsilon_k > \ldots > \epsilon$ et on calcule

$$\mathbb{P}[\varphi(U) \le \epsilon] = \mathbb{P}(\varphi(U) \le \epsilon_1) \prod_{k=2}^{m} \mathbb{P}(\varphi(U) \le \epsilon_k | \varphi(U) \le \epsilon_{k-1})$$

Avoir les probabilités dans un même ordre

Estimer les quantiles empiriques



Méthode de Splitting

Sûreté aérienne

Introduction

.....

Monte Carlo naïve Importance Sampling Méthode de Splitting

Méthode de Splitting Trajectoires Croisées

Conclusio

On souhaite estimer $\mathbb{P}[\varphi(U) \leq \epsilon]$ avec $\varphi(U)$ le plus petit élément de U. On trouve une séquence $\epsilon_k > \ldots > \epsilon$ et on calcule

$$\mathbb{P}[\varphi(U) \le \epsilon] = \mathbb{P}(\varphi(U) \le \epsilon_1) \prod_{k=2}^{m} \mathbb{P}(\varphi(U) \le \epsilon_k | \varphi(U) \le \epsilon_{k-1})$$

Avoir les probabilités dans un même ordre Estimer les quantiles empiriques



Résultats

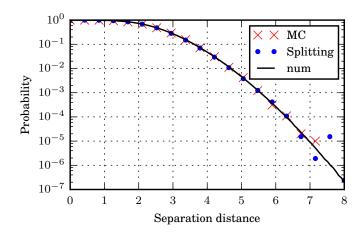
Sûreté aérienne

Introductio

Dánultata

Monte Carlo naïve
Importance Sampling
Méthode de Splitting

Trajectoires Croisé





Résultats

Sûreté aérienne

Introductio

Résultats

Importance Sampling
Méthode de Splitting
Trajectoires Croisées

Dist	Probability	Error	Rel Err	N
4.0	2.740×10^{-2}	7.058×10^{-3}	34.69%	100
4.0	1.721×10^{-2}	-3.109×10^{-3}	-15.30%	1000
4.0	1.712×10^{-2}	-2.833×10^{-3}	-14.19%	100000
6.0	2.537×10^{-3}	$2.430{ imes}10^{-3}$	2273.42%	100
6.0	2.441×10^{-4}	5.364×10^{-4}	107.40%	1000
6.0	1.221×10^{-3}	-3.332×10^{-5}	3.75%	100000



Sûreté aérienne

Introduction

......

Monte Carlo naïve Importance Samplir

Trajectoires Croisées

Modélisation des trajectoires

Rotation des trajectoires

Prendre la différence entre elles $U = (U_x, U_y)$

Estimer
$$\mathbb{P}(\sqrt{U_x^2 + U_y^2} < \epsilon)$$



Sûreté aérienne

Introduction

....

Monte Carlo naïve Importance Samplii Méthode de Splittir

Trajectoires Croisées

C l

Modélisation des trajectoires

Rotation des trajectoires

Prendre la différence entre elles $U = (U_x, U_y)$

Estimer
$$\mathbb{P}(\sqrt{U_x^2 + U_y^2} < \epsilon)$$



Sûreté aérienne

Introductio

IIIIIoductic

Monte Carlo naïve Importance Samplin Méthode de Splittin

Trajectoires Croisées

Conclusion

Modélisation des trajectoires

Rotation des trajectoires

Prendre la différence entre elles $U = (U_x, U_y)$

Estimer
$$\mathbb{P}(\sqrt{U_x^2 + U_y^2} < \epsilon)$$



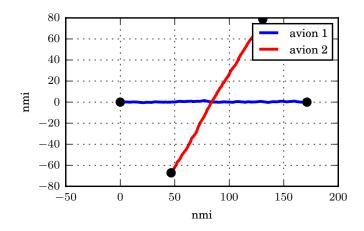
Sûreté aérienne

Modélisation des trajectoires

Introductio

Monte Carlo naïve Importance Samplin Méthode de Splittin

Trajectoires Croisées





Importance Sampling

Sûreté aérienne

Résultats

Introduction

Résultat

Monte Carlo naïve Importance Samplin Méthode de Splittin

Trajectoires Croisées



Importance Sampling

Sûreté aérienne

Résultats

_ . .

Monte Carlo naïve Importance Sampling Méthode de Splitting

Trajectoires Croisées

Probability	Error	Rel Err	N
$\begin{array}{c} 2.520 \times 10^{-4} \\ 3.887 \times 10^{-4} \\ 6.026 \times 10^{-4} \end{array}$	$\begin{array}{c} 9.620 \times 10^{-5} \\ 3.227 \times 10^{-5} \\ 1.993 \times 10^{-6} \end{array}$	38% 8% 0.33%	100 1000 100000



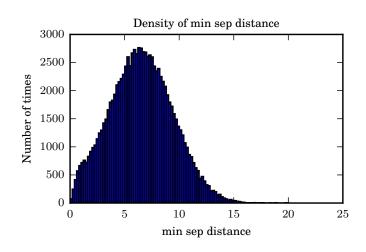
Distribution Conditionnelle

Sûreté aérienne

meroduc

Résultats

Importance Sampling
Méthode de Splitting
Trajectoires Croisées





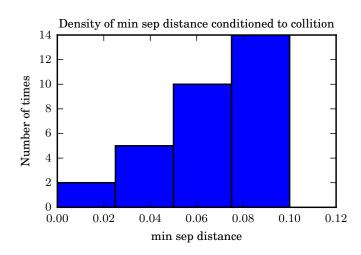
Distribution Conditionnelle

Sûreté aérienne

IIILIOGUC

Résultat

Importance Sampling
Méthode de Splitting
Trajectoires Croisées





Conclusion

Sûreté aérienne

Introduct

Conclusion

Méthodes Implémentées

Probabilité estimée



Conclusion

Sûreté aérienne

IIItioduci

Conclusion

Méthodes Implémentées Résultats obtenus

Probabilité estimée



Conclusion

Sûreté aérienne

IIItioduct

Conclusion

Méthodes Implémentées Résultats obtenus Probabilité estimée



Fin

Sûreté aérienne

Introduction

Conclusion

Merci