



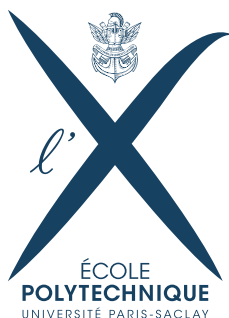
# PROJET SIMULATION NUMÉRIQUE ALÉATOIRE

**Sûreté aérienne  
MAP 474D**

6 juin 2016

Florent BENAYCH-GEORGES  
Martin BOMPAIRE  
Stefano DE MARCO  
Gersende FORT  
Emmanuel GOBET  
Igor KORTCHEMSKI

Auteur : Felipe GARCÍA



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>1</b>	<b>Présentation du sujet</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	Modélisation . . . . .	3
1.3	Simulation . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Résultats</b>	<b>6</b>
2.1	Monte Carlo naïve . . . . .	6
2.2	Importance Sampling . . . . .	8
2.3	Méthode de Splitting . . . . .	12
2.4	Trajectoires Croisées . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Références bibliographiques</b>	<b>17</b>

# 1

## PRÉSENTATION DU SUJET

---

### 1.1 INTRODUCTION

---

Le nombre d'avions circulant dans le ciel est devenu considérable, un avion décolle toutes les secondes dans le monde. En moyenne nous avons 80.000 vols par jour, soit près de 29.200.000 vols par an. En 2020 on prévoit 200 millions de vols commerciaux par an soit 6,3 vols par seconde. Le site web [flightradar24](https://www.flightradar24.com) permet de voir en temps réel les avions sur une carte comme montre la Figure 1.1. La bonne gestion du trafic aérien (ATM en anglais) est devenu primordial pour éviter le risque aérien.

Il existent plusieurs risques comme la foudre, panne de moteur, collision avec des oiseaux, fatigue du matériel entre autres. Dans cet projet nous nous concentrons en mesurer la probabilité de collision entre deux avions. Nous souhaitons qu'elle soit faible pour être d'accord avec la réglementation, elle est édicté par L'organisation de l'aviation civile internationale (OACI).

Pour minimiser le risque de collision il est obligatoire de maintenir une distance minimale entre avions quand les avions sont en dessous on est dans une situation de risque. Cette tâche est garantie par le contrôle de circulation aérienne (ATC en anglais), elle est chargé de répartir les vols entre aéroports et moments de la journée. Néanmoins cette tâche n'est pas facile, les trajectoires des avions ne sont pas déterministes car elles sont soumises à des aléas comme le vent, perturbation de pilotage et des erreurs de mesure qui rendent la collision possible.

### 1.2 MODÉLISATION

---

Une route d'avion entre deux aéroports est effectué avec un plan de vol qui est divisé en points de passage (waypoints) à intervalle régulier (20 min). Le pilote doit suivre donc la trajectoire entre deux points de passage à chaque fois. Comme le vol est soumis au vent on doit considérer une modélisation aléatoire du processus. Dans tout le projet on utilise le système de mesure en nmi (1 nmi = 1.82 km).

Dans la bibliographie la trajectoire est bien modélisé avec un processus stochastique continu en temps qui est ajouté aux équations du vol ([PW05]). Dans cet projet on utilise la méthode précédente.



**Figure 1.1** – Vols en temps réel

Plus précisément on considère des trajectoires planes, le mouvement étant décrit par

$$dX_t = v dt + \sigma_t dW_t \quad (1.2.1)$$

où  $X_t$  représente la position,  $v$  la vitesse,  $\sigma_t$  la variance et  $W_t$  est un mouvement Brownien en deux dimensions. La trajectoire en chaque instant on la considère dans un repère local centré, c'est à dire la position est décomposée comme  $X_t = (X_{a,t}, X_{c,t})$  où  $X_{a,t}$  est la composante along-track et  $X_{c,t}$  est l'across-track. Donc l'équation de mouvement est :

$$dX_{a,t} = v dt + \sigma_{a,t} dW_{a,t} \quad (1.2.2)$$

$$dX_{c,t} = \sigma_{c,t} dW_{c,t} \quad (1.2.3)$$

Dans ce modèle pour des raisons de pilotage on considère que quand le temps augmente, on a plus de certitude sur la composante across-track mais moins sur l'along-track.

$$X_{a,t} \sim \mathcal{N}(vt, (r_a t)^2) \quad (1.2.4)$$

$$X_{c,t} \sim \mathcal{N}(0, \min(\sigma_c, (r_c t)^2)) \quad (1.2.5)$$

$r_a = 0.25 \text{ nmimin}^{-1}$  et  $r_c = 1/57 \text{ nmimin}^{-1}$  sont facteurs fixes du modèle. Si on fait l'approximation

$$\min(\sigma_c, (r_c t)^2) \approx \sigma_c^2 (1 - e^{-2 \frac{r_c}{\sigma_c} vt})$$

On peut calculer  $\sigma_{a,t} = r_a \sqrt{2t}$  et  $\sigma_{c,t} = e^{-\frac{r_c}{\sigma_c} vt} \sqrt{2\sigma_c r_c v}$  avec Itô. On a aussi une autre modélisation avec la matrice variance/covariance pour  $(t < s)$  :

$$\text{Cov}(X_{a,t}, X_{a,s}) = r_a^2 t^2 \quad (1.2.6)$$

$$\text{Cov}(X_{c,t}, X_{c,s}) = \sigma_c^2 (1 - e^{-2 \frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)}) e^{-\frac{r_c}{\sigma_c} v(s-t)} \quad (1.2.7)$$

Comme suggéré dans le sujet du projet. Ce modèle est connu comme processus d'Ornstein-Uhlenbeck car la composante across-track devient déterministe (égal à zéro) dans le temps. Finalement juste noter que si on fait une rotation de  $\theta$  degrés de notre trajectoire on doit multiplier chaque composante  $X_t = (X_{a,t}, X_{c,t})$  de notre processus par la matrice de rotation

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.2.8)$$

chaque composante étant gaussienne avec une transformation linéaire reste gaussienne avec une moyenne de  $\begin{pmatrix} vt \cos(\theta) \\ vt \sin(\theta) \end{pmatrix}$  et une matrice de covariance  $R_\theta V(t) R_\theta^t(\theta)$ .

### 1.3 SIMULATION

On considère une simulation de deux avions dans un même plan, on simule les trajectoires décrites en 1.2 sur un horizon de temps de 20 minutes à une vitesse de 500 kt (926 km/h). On simule d'abord des trajectoires en parallèle et après des trajectoires qui se croissent. Les trajectoires sont discrétisées uniformément avec 100 points sûr chaque trajectoire. On gardera les notations suivantes :

- $d$  : dimension de discrétisation
- $\Sigma_a \in \mathbb{R}^{d \times d}$  : matrice de variance/covariance along-track
- $\Sigma_c \in \mathbb{R}^{d \times d}$  : matrice de variance/covariance across-track

on a donc :

$$\begin{pmatrix} X_a^{(1)} \\ X_c^{(1)} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} vT \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_a & 0 \\ 0 & \Sigma_c \end{bmatrix} \right) \quad (1.3.1)$$

où  $X_a^{(1)} \in \mathbb{R}^d, X_c^{(1)} \in \mathbb{R}^d$  et  $T = [0, \dots, 20] \in \mathbb{R}^d$  est le vecteur temps discrétisé. Si nous faisons une rotation de  $\theta$  degrés, le vecteur reste gaussien avec moyenne et covariance :

$$R_\theta \begin{pmatrix} X_a^{(1)} \\ X_c^{(1)} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \cos(\theta)vT \\ \sin(\theta)vT \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_a \cos^2(\theta) + \Sigma_c \sin^2(\theta) & \sin(\theta) \cos(\theta)(\Sigma_a - \Sigma_c) \\ \sin(\theta) \cos(\theta)(\Sigma_a - \Sigma_c) & \Sigma_a \cos^2(\theta) + \Sigma_c \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \right) \quad (1.3.2)$$

Nous sommes intéressés en estimer la probabilité de collision c'est-à-dire, la probabilité de que la distance entre les avions soit inférieure à un seuil prédéfini  $\epsilon$ .

$$\mathbb{P}(\exists i \mid \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^d \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon\right) \quad (1.3.3a)$$

$$= \mathbb{P}\left(\min_{1 \leq i \leq d} \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon\right) \quad (1.3.3b)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\forall i \mid \|X_i^{(1)} - X_i^{(2)}\|_2 \leq \epsilon) \quad (1.3.3c)$$

## 2 RÉSULTATS

Les méthodes de calcul de probabilité sur des événements rares étant vues en cours seront juste rappelés par son nom sauf pour des cas quand on fait une adaptation de la méthode. Pour comparer les résultats dans le cas des avions en parallèle on a utilisé une méthode numérique pour approcher la probabilité, la méthode permet de calculer la cdf d'une gaussienne multi-dimensionnelle. Et pour le cas en parallèle quand,  $r_a = 0$  on calcule avec l'équation 1.3.3c la probabilité de collision. La librairie utilisée est `scipy.stats.mvn`.

### 2.1 MONTE CARLO NAÏVE

On a fait une simulation Monte Carlo naïve pour le cas des trajectoires parallèles, une trajectoire type es montré dans la Figure 2.2. Nous avons simulé au total  $10^5$  trajectoires et pour des raisons d'amélioration de calcul et de simulation, nous avons décidé de simuler le processus de la différence des trajectoires  $U = X^{(1)} - X^{(2)}$ , dans la Figure 2.3, on utilisera cette figure comme référence après pour la méthode IS. Pour faire l'estimation de la probabilité de collision on utilise la fonction  $\phi(U) = \mathbb{I}\{\min_{1 \leq i \leq d} U_i \leq \epsilon\}$  et on calcule la probabilité de collision comme  $\mathbb{E}[\phi(U)]$ . L'estimation de probabilité faite avec Monte Carlo est montré dans la table 2.1.

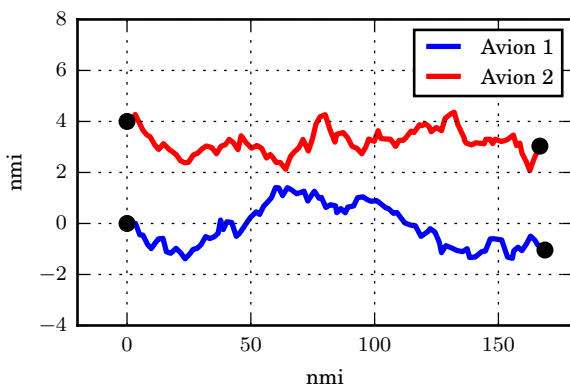


Figure 2.2 – Exemple de Trajectoire

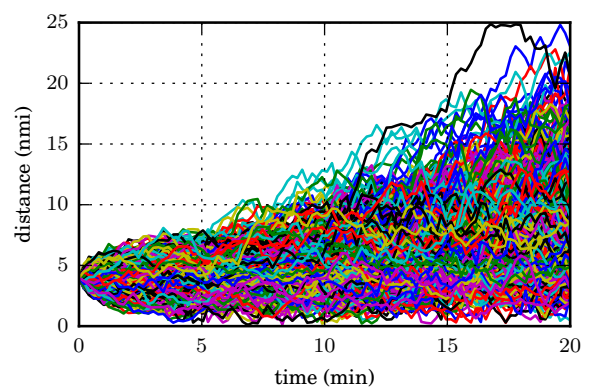


Figure 2.3 – Trajectoires de  $U$

Dans la table 2.1 sont représentés les résultats de la méthode Monte Carlo naïve pour des distances entre 2 et 6 nmi. On a omis quelques résultats, notamment quand la distance est de 6 nmi seulement avec  $10^5$  simulations on pouvait arriver à des résultats non nuls. On a constaté

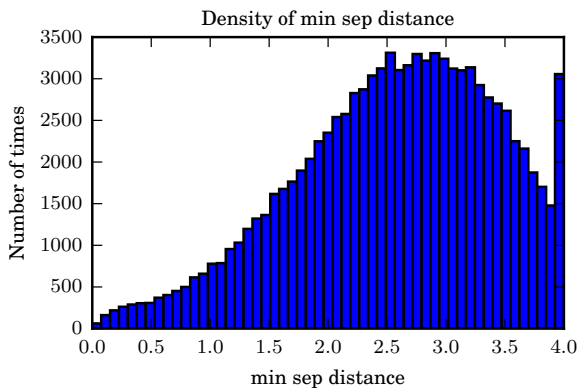
Distance	Probability	Error	Relative error	$N$
2.0	0.44000	$9.70 \times 10^{-2}$	22.11%	100
2.0	0.38000	$3.03 \times 10^{-2}$	07.91%	1000
2.0	0.39785	$3.03 \times 10^{-3}$	00.76%	100000
4.0	0.04000	$1.37 \times 10^{-2}$	96.01%	100
4.0	0.01300	$8.46 \times 10^{-3}$	54.00%	1000
4.0	0.01984	$8.75 \times 10^{-4}$	04.35%	100000
6.0	0.00011	$7.33 \times 10^{-5}$	59.09%	100000

**Table 2.1** – Estimation avec Monte Carlo de la probabilité de collision

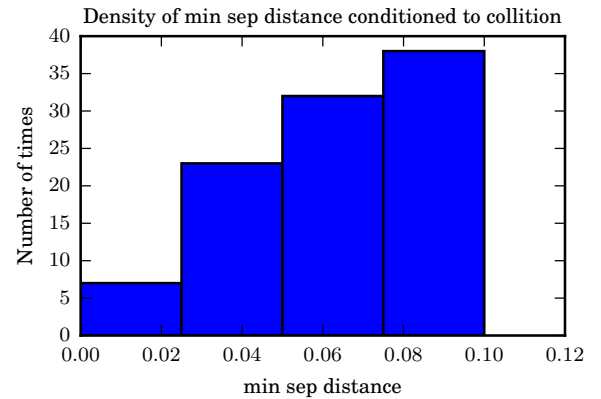
aussi que pour  $10^5$  simulations la méthode Monte Carlo marchait jusqu'à des distances de l'ordre de 6nmi. Cette méthode nous permet d'estimer des probabilités de l'ordre de  $10^{-5}$ .

En analysant la table 2.1 on constate que la méthode de Monte Carlo marche bien pour des distances petites et qu'après on a besoin de un nombre plus grand de simulations. Néanmoins l'erreur relative et le nombre de simulations ne sont pas linéairement liées, c'est-à-dire pour améliorer 10 fois l'erreur relative on a besoin de plus de 10 fois le nombre de simulations utilisés antérieurement.

Finalement avec les simulations Monte Carlo on a fait un histogramme de la densité du minimum sur chaque trajectoire et un histogramme de ça conditionné à l'évènement de collision dans les Figures 2.4 et 2.5. Ces simulations sont faites à une distance de 4 nmi entre avions.



**Figure 2.4** – Histogramme de la distance minimale

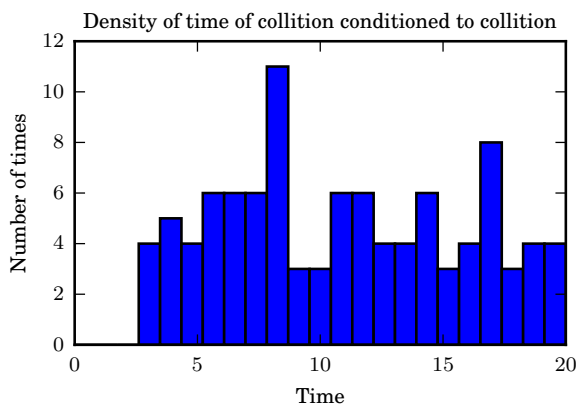


**Figure 2.5** – Histogramme de la distance minimale conditionné à la collision

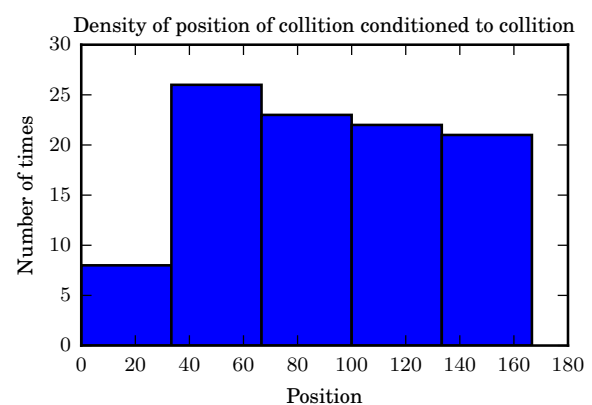
Dans la Figure 2.4 on constate qu'il existe une grande majorité où le minimum se place à distance 4, celui-ci c'est le cas quand les trajectoires s'éloignent l'un de l'autre au début de la simulation. On constate aussi une concentration au tour des distances entre 2 et 3.5

nmi, c'est-à-dire que ça c'est la distance minimale entre les deux. Finalement pour la forme de l'histogramme on pourrait dire que ça ressemble à une normale centré au tour de 2.5 et 3.0 et coupé au-delà de 4, pour confirmer cette affirmation on pourrait faire un test  $\chi^2$  ou calculer la densité du minimum. Dans la Figure 2.5 on constate que l'histogramme a une forme linéaire mais cependant on n'a pas suffisamment d'observations pour confirmer cette affirmation.

Dans le cas de collision on a dessiné deux histogrammes avec le temps de collision et la position de collision dans les Figures 2.6 et 2.7



**Figure 2.6** – Histogramme du Temps de collision entre avions



**Figure 2.7** – Histogramme de la position de collision entre avions

Nous constatons que la collision tends à se produire au milieu de la trajectoire plus suivante et aussi pour la distance de collision, on constate une forme de toit dans ces trajectoires, cette affirmation sera utilisé pour la méthode IS après.

## 2.2 IMPORTANCE SAMPLING

Dans cette section on montre comment on a implémenté le décentrage. Comme dans ce problème on a des gaussiennes, l'échantillonnage d'importance restait valide et avec une formule assez simple comme on a vu en cours. Néanmoins le vecteur gaussien multidimensionnel  $X \in \mathbb{R}^{2d}$  n'est pas centré et ça matrice de variance/covariance n'est pas l'identité. Pour résoudre cet problème on a fait deux solutions équivalentes :

- Faire un décentrage adapté au processus
- Normaliser le vecteur  $X$  et appliquer la méthode du cours



Pour la première méthode on a pris à la base l'idée du décentrage :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X)) &= \int f(x)p(x) \, dx = \int f(x)\frac{p(x)}{q(x)}q(x) \, dx \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(f(X)\frac{p(x)}{q(x)}\right)\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

où  $\mathbb{Q}$  est ta nouvelle distribution. On appelle aussi  $L(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  le ratio de vraisemblances. Pour une gaussienne multidimensionnelle  $X \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  on a :

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (2.2.2)$$

Donc pour un décentrage de  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \boldsymbol{\theta}$  le ratio de vraisemblance est donc

$$L(\mathbf{x}) = \exp \left\{ \boldsymbol{\theta}^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\theta} \right\} \quad (2.2.3)$$

On rappelle que pour une Gaussienne standard le ratio vraisemblance est :

$$L(\mathbf{x}) = \exp \left\{ \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta} \right\} \quad (2.2.4)$$

Pour la deuxième méthode la procédure pour normaliser une gaussienne  $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$  c'est de la centrer juste avec une modification de la probabilité qu'on cherche trouver et deuxièmement trouver sa racine carrée car si on a  $CC^T = \Sigma$  alors pour une gaussienne standard  $G$  on a :  $CG \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, CC^T)$  donc on peut simuler la variable aléatoire  $X$  avec  $CG$  et la formule :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(CG)) = \mathbb{E}(f(C(G + \boldsymbol{\theta})))e^{\boldsymbol{\theta} \cdot G - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}} \quad (2.2.5)$$

Finalement pour la simulation il nous reste à régler le paramètre  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$ , cet paramètre est très important pour une bonne estimation pouvant amener à des grands erreur en cas d'être mal choisi. On a adopté trois méthodes pour le choix de  $\boldsymbol{\theta}$  : un décalage constant, linéaire et toit. On a choisi ces trois décalages car le premier était le plus simple à faire mais pas le meilleur, l'est autre pour des raisons de collision d'après les Figures Figure 2.2 et Figure 2.6 on voit que la collision se produit pas au début de la trajectoire mais au milieu ou à la fin. Finalement ces trois méthodes sont implémentées de manière adaptative, c'est-à-dire pour chaque type de décalage on fait différents tailles de décalage et on choisit celui avec la plus petite variance. Par exemple on fait des décalages du type toit avec une variation de l'auteur du toit entre 0 et la distance entre avions.

Les performances de la méthode Monte Carlo, Importance Sampling sont montrés dans la Figure 2.8 avec l'erreur dans la Figure 2.9

Les probabilités estimées sont montrés dans les Tables 2.2 2.3 et 2.4

Dans la Table 2.2 on voit que ce n'est pas une bonne choix pour  $\boldsymbol{\theta}$  car l'erreur relative reste grand même quand on augmente le nombre de simulations. Par contre les estimations dans les

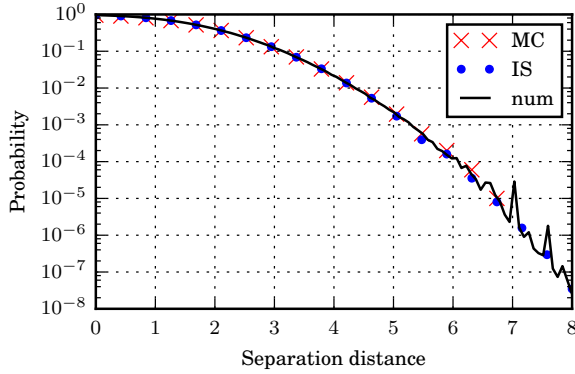


Figure 2.8 – Probabilité estimé

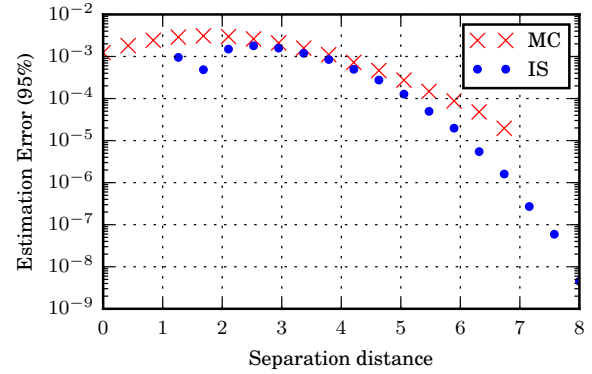


Figure 2.9 – Erreur de les méthodes

Distance	Probability	Error	Relative error	$N$	$\mu$
4.0	$3.858 \times 10^{-52}$	$7.095 \times 10^{-52}$	183.87%	100	-4.000
4.0	$2.467 \times 10^{-44}$	$2.761 \times 10^{-44}$	111.94%	1000	-4.000
4.0	$5.852 \times 10^{-38}$	$1.085 \times 10^{-37}$	185.35%	100000	-4.000
6.0	$1.209 \times 10^{-121}$	$2.153 \times 10^{-121}$	178.07%	100	-6.000
6.0	$1.196 \times 10^{-112}$	$1.328 \times 10^{-112}$	111.04%	1000	-6.000
6.0	$7.344 \times 10^{-100}$	$1.140 \times 10^{-99}$	155.16%	100000	-6.000
8.0	$3.053 \times 10^{-161}$	$4.008 \times 10^{-161}$	131.25%	100	-6.737
8.0	$5.256 \times 10^{-144}$	$1.019 \times 10^{-143}$	193.84%	1000	-6.737
8.0	$5.672 \times 10^{-155}$	$9.303 \times 10^{-155}$	164.03%	100000	-7.158

Table 2.2 – Estimation avec IS type constant de la probabilité de collision

Distance	Probability	Error	Relative error	$N$	$\mu$
4.0	$1.33 \times 10^{-2}$	$5.29 \times 10^{-3}$	39.93%	100	-4.000
4.0	$1.14 \times 10^{-2}$	$2.17 \times 10^{-3}$	19.02%	1000	-4.000
4.0	$2.04 \times 10^{-2}$	$5.60 \times 10^{-4}$	2.74%	100000	-1.263
6.0	$2.43 \times 10^{-5}$	$1.10 \times 10^{-5}$	45.15%	100	-6.000
6.0	$4.14 \times 10^{-5}$	$1.03 \times 10^{-5}$	24.90%	1000	-5.053
6.0	$9.22 \times 10^{-5}$	$8.28 \times 10^{-6}$	8.98%	100000	-3.789
8.0	$8.87 \times 10^{-9}$	$5.06 \times 10^{-9}$	57.10%	100	-7.157
8.0	$1.68 \times 10^{-8}$	$6.23 \times 10^{-9}$	37.00%	1000	-7.157
8.0	$4.72 \times 10^{-8}$	$6.92 \times 10^{-9}$	14.65%	100000	-6.736

Table 2.3 – Estimation avec IS type linéaire de la probabilité de collision

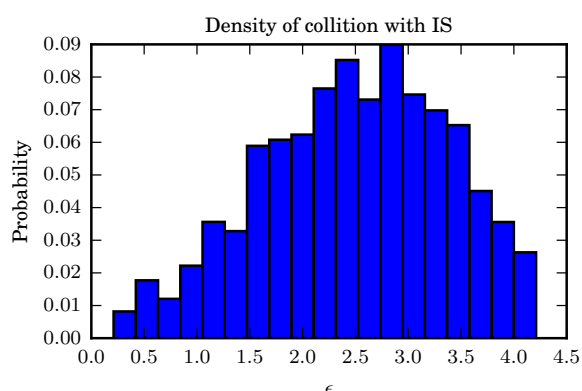
Distance	Probability	Error	Relative error	$N$	$\mu$
4.0	$7.932 \times 10^{-3}$	$3.261 \times 10^{-3}$	41.10%	100	-3.368
4.0	$9.489 \times 10^{-3}$	$2.379 \times 10^{-3}$	25.06%	1000	-4.000
4.0	$2.062 \times 10^{-2}$	$7.153 \times 10^{-4}$	3.46%	100000	-0.842
6.0	$2.830 \times 10^{-5}$	$2.013 \times 10^{-5}$	71.15%	100	-6.000
6.0	$2.143 \times 10^{-5}$	$6.983 \times 10^{-6}$	32.59%	1000	-6.000
6.0	$5.763 \times 10^{-5}$	$6.626 \times 10^{-6}$	11.49%	100000	-4.105
8.0	$3.881 \times 10^{-9}$	$2.751 \times 10^{-9}$	70.89%	100	-8.0
8.0	$5.087 \times 10^{-9}$	$2.089 \times 10^{-9}$	41.06%	1000	-8.0
8.0	$1.673 \times 10^{-8}$	$2.678 \times 10^{-9}$	16.00%	100000	-7.578

**Table 2.4** – Estimation avec IS type toit de la probabilité de collision

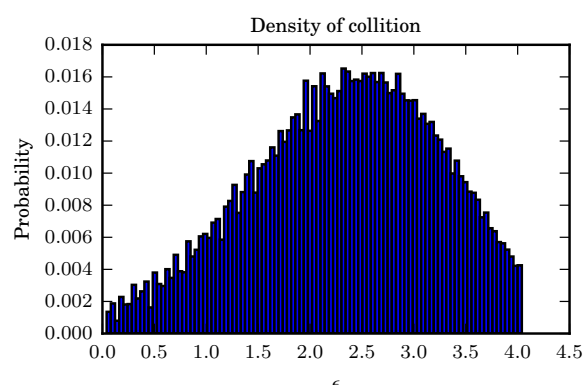
Tables 2.3 et 2.4 on obtient des bonnes approximations pour la probabilité de collision avec une erreur relative qui reste petit. On constate aussi que quand la probabilité à estimer devient plus petite, les erreurs relatives sont plus grands.

Dans les Tables on a aussi affiché le décalage  $\mu$  choisi de manière adaptative, dans les tables on a affiché un de plusieurs exécutions de la méthode, on constate que le choix de  $\mu$  varie et dépend de chaque simulation, mais cependant qu'elle est au tour de moins la distance entre avions et donc si on voulait une méthode robuste pour calculer la probabilité on choisirait  $\mu = -1$  car elle est souvent choisie et donne des erreurs raisonnables.

Avec la méthode obtenue par IS on a fait un histogramme de la densité de probabilité, c'est-à-dire, on calculait pour chaque  $\epsilon \in [0, 4]$  la probabilité de collision ce qui nous donne la fonction de répartition et après on fait un dérivé discrétisé pour obtenir la densité de probabilité. Les graphes sont affichés dans les Figures 2.10 et 2.11



**Figure 2.10** – Densité de probabilité obtenue avec IS



**Figure 2.11** – Densité de probabilité obtenue numériquement

Ces deux Figures sont faites pour une simulation à distance 4. La Figure 2.10 est faite avec  $10^5$  simulations pour chaque  $\epsilon \in [0, 4]$  avec une division de 20 points, pour des raisons de vitesse, la Figure 2.11 est faite avec 100 points. On constate une concordance entre la méthode numérique et la méthode IS.

## 2.3 MÉTHODE DE SPLITTING

Dans cette section on implémente la méthode de splitting pour le calcul de la probabilité de collision entre avions. On souhaite estimer  $\mathbb{P}[\varphi(U) \leq \epsilon]$  avec  $\varphi(U) = \min_{1 \leq i \leq d} U_i \leq \epsilon$ . La méthode de splitting qu'on a implémentée est adaptative, c'est-à-dire, les ensembles intermédiaires dont on calcule la probabilité sont choisis de façon à avoir une probabilité constante prédéfinie par l'utilisateur égal à  $\alpha$ . On rappelle que pour la méthode de splitting on fait :  $E = A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_{m-1} \supset A_m = A$  où  $A_k = \{x : \varphi(x) \leq \epsilon_k\}$  et on calcule

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^m \mathbb{P}(A_k | A_{k-1}) \quad (2.3.1)$$

On choisit les  $\epsilon_k$  de manière à avoir des probabilités semblables dans l'équation (2.3.1). La méthode implémentée c'est la suivante :

1. Initialiser  $U_0$  tel que
2. Simuler  $N$  échantillons  $U_1, \dots, U_N \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$
3. Estimer les quantiles empiriques  $q_\alpha$  et calculer  $A_k = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \varphi(x) \leq q_\alpha\}$
4. Répéter les étapes (2)-(3) jusqu'à avoir

Finalement la probabilité à calculer est :

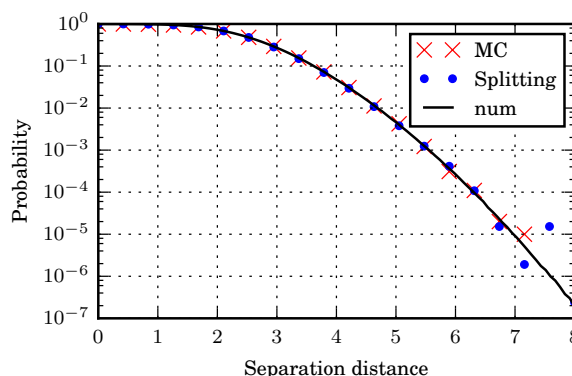
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^m \mathbb{P}(A_k | A_{k-1}) \quad (2.3.2)$$

$$= \alpha^{m-1} \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}\{\varphi(X_i) > \epsilon_k\} \quad (2.3.3)$$

On a choisi comme paramètre  $\alpha = 0.5$  et on a adapté le processus AR(1) vu en cours pour le cas multidimensionnel. C'est-à-dire on fait :

$$X_{i+1}^k = \begin{cases} \rho X_i^k + \sqrt{1 - \rho^2} Y_i^k, & \text{si dans } g^{-1}(A_{k-1}) \\ X_i^k, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

où les  $(Y_i^k)$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I_n)$ . Pour le modèle on a choisit  $\rho = 0.5$  parce que permettait mieux résultats. Les résultats de la méthode de splitting et sa comparaison avec Monte Carlo sont montrés dans la Figure 2.12. Vu que pour la méthode de Splitting c'est difficile de trouver l'erreur, on affiche juste la probabilité dans la Figure 2.12 et dans la Table 2.5 on a fait la méthode de Splitting 23 fois pour obtenir une erreur au 95%.



**Figure 2.12** – Probabilité estimé avec Splitting

Dans la Figure 2.12 on voit une bonne performance par rapport à Monte Carlo pour le calcul des probabilités faibles. Cependant on doit dire que la méthode de Splitting prend beaucoup plus de temps car on doit faire un nouveau échantillon chaque fois qu'on n'est pas dans  $g^{-1}(A_{k-1})$  que pour des probabilités petites fais que la méthode de splitting prend plus de temps, aussi comme la méthode est adaptative, plus l'ordre de la probabilité est faible, plus le  $m$  dans la méthode croît et donc la méthode fait plus des étapes.

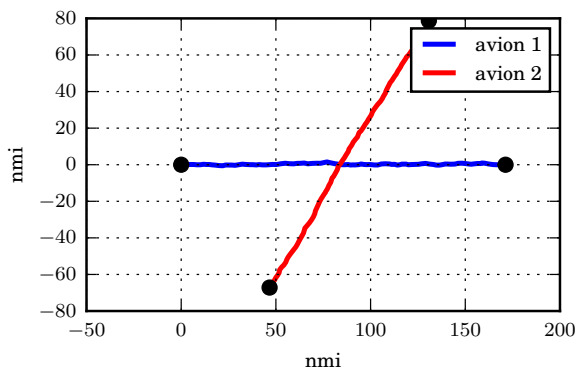
En analysant la table on voit que les estimations améliorent avec plus d'estimations mais en comparant la méthode de Splitting avec IS on trouve des erreurs plus grands et une convergence plus lente vers la probabilité réelle. On peut justifier ça parce que la méthode IS est plus adapté à la situation qu'on souhaite estimer.

Distance	Probability	Error	Relative error	$N$
4.0	$2.740 \times 10^{-2}$	$7.058 \times 10^{-3}$	34.69%	100
4.0	$1.721 \times 10^{-2}$	$-3.109 \times 10^{-3}$	-15.30%	1000
4.0	$1.712 \times 10^{-2}$	$-2.833 \times 10^{-3}$	-14.19%	100000
6.0	$2.537 \times 10^{-3}$	$2.430 \times 10^{-3}$	2273.42%	100
6.0	$2.441 \times 10^{-4}$	$5.364 \times 10^{-4}$	107.40%	1000
6.0	$1.221 \times 10^{-3}$	$-3.332 \times 10^{-5}$	3.75%	100000

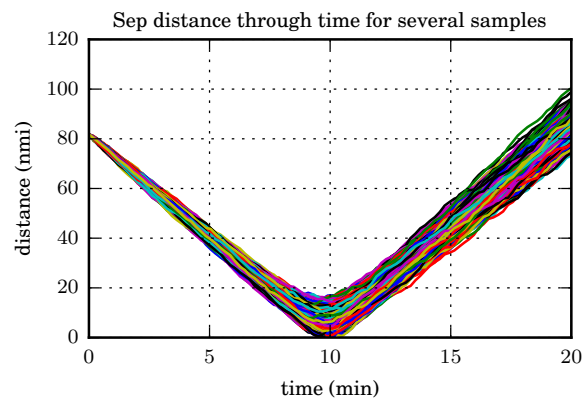
**Table 2.5** – Estimation avec Splitting de la probabilité de collision

## 2.4 TRAJECTOIRES CROISÉES

Dans cette partie on fait l'étude de la probabilité de collision dans le cas de deux trajectoires que se croissent comme on peut voir dans la Figure 2.13 on montre aussi la distance entre les avions dans la Figure 2.14 on peut voir que c'est une parabole. On essaie de calculer la proportion de trajectoires  $U$  qui passent en dessous du seuil  $\epsilon = 0.1$ . Le cas d'étude est constitué de deux trajectoires qui se croissent dans un angle de  $60^\circ$ . Pour avoir des probabilités raisonnables on a choisi une situation près d'un choc, mais avec un décalage.



**Figure 2.13** – Exemple de trajectoire



**Figure 2.14** – Distance au cours du temps

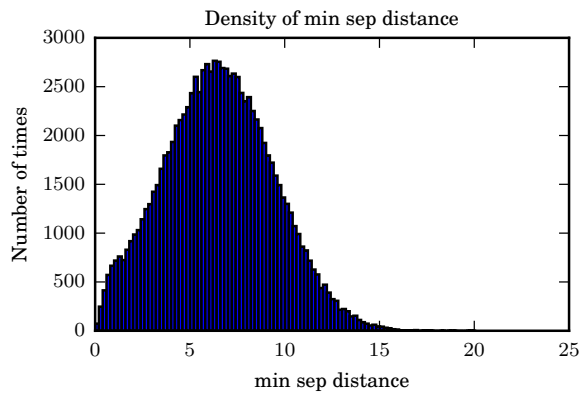
Pour obtenir un calcul de référence, on a aussi implémentée avec la méthode de Monte Carlo avec  $10^5$  simulations et on a obtenu la probabilité estimative  $6.3 \times 10^{-4}$ . Pour améliorer la performance de calcul de notre méthode IS on a fait un zoom près de la zone de choc car la probabilité de choc en dehors d'après les calculs de la Section 2.3 on sait que si la distance est plus grand que 8 nmi alors la probabilité est de l'ordre de  $10^{-8}$  que pour notre cas on peut négliger. Le zoom aussi rend le calcul plus précis parce qu'on augmente la densité de points dans la trajectoire. Les résultats de la méthode IS sont affichés dans la Table 2.6

Probability	Error	Relative error	$N$
$2.520 \times 10^{-4}$	$9.620 \times 10^{-5}$	38%	100
$3.887 \times 10^{-4}$	$3.227 \times 10^{-5}$	8%	1000
$6.026 \times 10^{-4}$	$1.993 \times 10^{-6}$	0.33%	100000

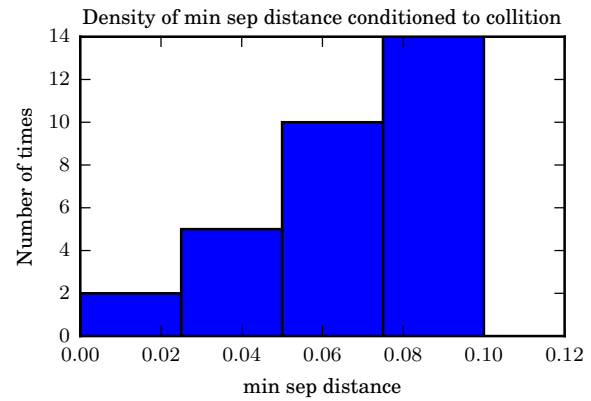
**Table 2.6** – Estimation avec IS de la probabilité de collision

On voit que la méthode es plus précise quand on augmente le nombre de simulations mais que l'erreur relative n'augmente pas au même rythme, avec  $10^5$  simulations on arrive a des bons résultats avec une erreur relative petite.

Pour cette expérience on a calculé aussi la densité et densité conditionné à la collision montrées dans les Figure 2.15 et Figure 2.16



**Figure 2.15** – Histogramme de la distance minimale



**Figure 2.16** – Histogramme de la distance minimale conditionné à la collision

On observe un changement par rapport à la densité vue dans la Section 2.1 en se penchant vers la gauche, on peut justifier ça parce que maintenant la distance minimale est plus petite que pour le cas en parallèle car on est près de la zone de choc. Pour la Figure 2.16 on obtient des résultats similaires à ceux trouvés avant.

# 3

## CONCLUSION

---

Pour la situation de collision d'avions on a implémentée deux méthodes qui s'adaptent bien au calcul de la probabilité de collision. La méthode d'importance sampling était la mieux adapté au cas de gaussiennes multivariées. La méthode de Splitting a pu être adapté mais elle n'est pas suffisamment adapté pour avoir des bons erreurs relatives. Finalement, dans les résultats obtenus on peut conclure que si la distance minimale entre avions supérieure à 10 nmi dans tout moment alors la probabilité de collision sera inférieure à  $10^{-9}$  qui va en accord avec la probabilité souhaitée. Aussi dans cet projet nous n'avons pas considéré le fait que les avions peuvent être à des différents hauteurs ce qui rendrait la probabilité encore plus petite.

---

---

FIN



## 4

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 
- [GL04] Willian Glover and John Lygeros. A multi-aircraft model for conflict detection and resolution algorithm evaluation. *HYBRIDGE Deliverable D*, 1 :3, 2004.
- [HPS05] Jianghai Hu, Maria Prandini, and Shankar Sastry. Aircraft conflict prediction in the presence of a spatially correlated wind field. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 6(3) :326–340, 2005.
- [JM13] Damien Jacquemart and Jérôme Morio. Conflict probability estimation between aircraft with dynamic importance splitting. *Safety science*, 51(1) :94–100, 2013.
- [MB15] J. Morio and M. Balesdent. *Estimation of Rare Event Probabilities in Complex Aerospace and Other Systems : A Practical Approach*. Elsevier Science, 2015.
- [MPLG10] Jérôme Morio, Rudy Pastel, and François Le Gland. An overview of importance splitting for rare event simulation. *European Journal of Physics*, 31(5) :1295, 2010.
- [Pai98] Russell A Paielli. Empirical test of conflict probability estimation. In *USA/Europe Air Traffic Management R&D Seminar, Orlando*, 1998.
- [PE97] Russell A Paielli and Heinz Erzberger. Conflict probability for free flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 20(3) :588–596, 1997.
- [PW05] Maria Prandini and Oliver J Watkins. Probabilistic aircraft conflict detection. *HYBRIDGE, IST-2001*, 32460 :116–119, 2005.