

Osciladores acoplados

Relatório técnico apresentado ao professor Wesley Cota
como parte das exigências da disciplina Fis 492

Timóteo Fassoni e Airton Ferreira

28 de janeiro de 2025

1 Introdução e motivação

Um sistema mecânico de grande interesse é o de osciladores acoplados. O exemplo mais simples consiste em dois pêndulos ligados por uma mola sujeitos a oscilar no plano vertical definido pelas suas posições de equilíbrio. Seja d a distância entre os pêndulos (igual ao comprimento natural da mola, sem distender), k a constante elástica da mola e considera-se que ambos sejam idênticos (mesma massa m e comprimento l da corda). Nessas circunstâncias, as equações de movimento são dadas, definindo $\omega_0^2 = g/l$, por:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -m\omega_0^2 x_2 + k(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (1)$$

A Figura 1 ilustra o problema dos dois pêndulos acoplados por uma mola.

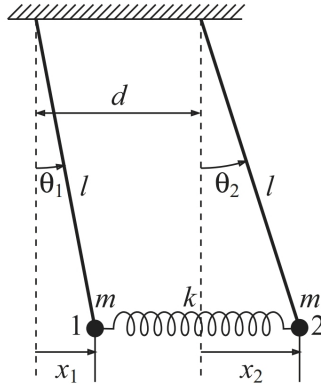


Figura 1: Ilustração do problema dos dois pêndulos acoplados. Retirado de [1].

Para resolver o sistema, utiliza-se as coordenadas (modos) normais, um conjunto $\{q_j\}$ de coordenadas linearmente independentes dadas por combinações lineares do conjunto $\{x_j\}$ e que cada uma tem a solução complexa da forma¹

$$\hat{q}_j = C_j e^{\omega_j i t}, \quad (2)$$

onde ω_j é a frequência associada a cada modo normal q_j . Para o caso dos pêndulos acoplados, uma vez que as coordenadas normais têm soluções harmônicas, faz-se $x_1 = A_1 e^{\omega i t}$ e $x_2 = A_2 e^{\omega i t}$ para encontrar o conjunto de frequências normais, de modo que:

$$\begin{cases} -mA_1\omega^2 e^{\omega i t} = -mA_1\omega_0^2 e^{\omega i t} + k(A_2 - A_1)e^{\omega i t} \\ -mA_2\omega^2 e^{\omega i t} = -mA_2\omega_0^2 e^{\omega i t} + k(A_1 - A_2)e^{\omega i t}. \end{cases} \quad (3)$$

¹Uma constante de fase φ_j pode ser acrescentada à dependência exponencial para ajuste de condições iniciais.

Isto é,

$$\begin{cases} mA_1\omega^2 - mA_1\omega_0^2 + k(A_2 - A_1) = 0 \\ mA_2\omega^2 - mA_2\omega_0^2 + k(A_1 - A_2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (m(\omega^2 - \omega_0^2) - k) A_1 + kA_2 = 0 \\ kA_1 + (m(\omega^2 - \omega_0^2) - k) A_2 = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

que, escrevendo na notação matricial, fica:

$$\begin{bmatrix} (m(\omega^2 - \omega_0^2) - k) & k \\ k & (m(\omega^2 - \omega_0^2) - k) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (5)$$

de modo que as soluções não triviais são dadas por

$$\begin{vmatrix} (m(\omega^2 - \omega_0^2) - k) & k \\ k & (m(\omega^2 - \omega_0^2) - k) \end{vmatrix} = 0 \implies \omega_1^2 = \omega_0^2 \text{ e } \omega_2^2 = \omega_0^2 + 2k/m, \quad (6)$$

que são as frequências de oscilação das coordenadas normais. Os autovetores (A_1, A_2) associados a elas são $(1, 1)$ e $(1, -1)$, de modo que as coordenadas normais podem ser escritas por:

$$q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \quad (7)$$

onde a constante $1/2$ é adicionada de tal forma a q_1 corresponder à coordenada do centro de massa. q_2 é a posição de x_1 relativa à massa 2.

Ou seja, no problema desses dois pêndulos acoplados, o centro de massa do sistema (q_1) e a posição de um em relação ao outro (q_2) executam um movimento harmônico simples, cada um com uma frequência ω_1 e ω_2 . As coordenadas naturais do sistema, x_1 e x_2 , podem ser obtidas pela transformação linear $x_1 = q_1 + q_2$ e $x_2 = q_1 - q_2$.

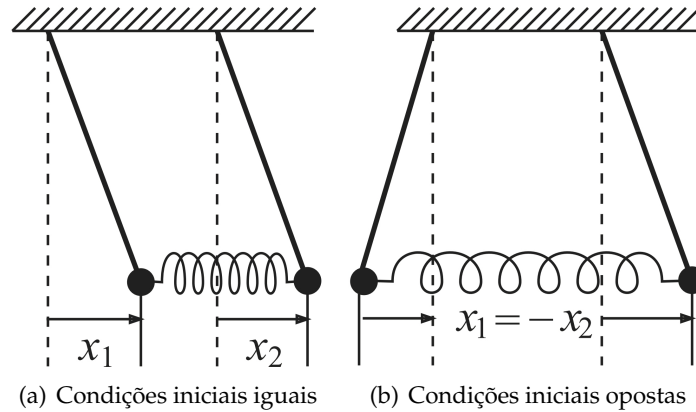


Figura 2: Condições iniciais para demonstração da independência linear dos modos normais. Estes também são chamados de modo simétrico e modo anti-simétrico.

Este problema foi tratado para três condições iniciais distintas. A primeira, de condições iniciais iguais, é definida por:

$$\begin{cases} x_1(t=0) = x_2(t=0) = x_0 \\ \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

A segunda, de condições iniciais opostas, dada por:

$$\begin{cases} x_1(t=0) = -x_2(t=0) = x_0 \\ \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

A Figura 2 mostra estas duas. Reescrevendo-as pelas coordenadas normais, ficam

$$\begin{cases} q_1(t=0) = x_0 \text{ e } q_2(t=0) = 0 \\ \dot{q}_1(t=0) = \dot{q}_2(t=0) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

para o primeiro caso, e

$$\begin{cases} q_1(t=0) = 0 & \text{e} & q_2(t=0) = x_0 \\ \dot{q}_1(t=0) = \dot{q}_2(t=0) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

para a segunda. Assim, as condições iniciais correspondem às soluções em que (x_1, x_2) oscilam com a frequência de cada um dos modos normais (isto é, são, justamente, os autovetores comentados anteriormente) e podem ser utilizadas para mostrar a independência linear dos modos. A terceira, corresponde a:

$$\begin{cases} x_1(t=0) = x_1^0 & \text{e} & x_2(t=0) = x_2^0 \\ \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_1^0 & \text{e} & \dot{x}_2(t=0) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

utilizada para ver o fenômeno de batimentos (de transmissão de energia de um para o outro pêndulo) e as diferenças entre as soluções para as coordenadas naturais e normais, bem como o espaço de fase do sistema.

A teoria dos osciladores acoplados é muito útil para vários outros fenômenos. Por exemplo, o modelo de Debye para sólidos é baseado nessa ideia. A própria solução de onda para uma corda pode ser construída tratando como um conjunto de N osciladores acoplados e fazendo $N \rightarrow \infty$. A ideia inicial é implementar a solução numérica com o método de Runge-Kutta de quarta ordem para integração numérica da Eq. (1) e, posteriormente, implementar para o caso de N osciladores para a corda – a Figura 3 mostra os modos normais para $N = 4$.

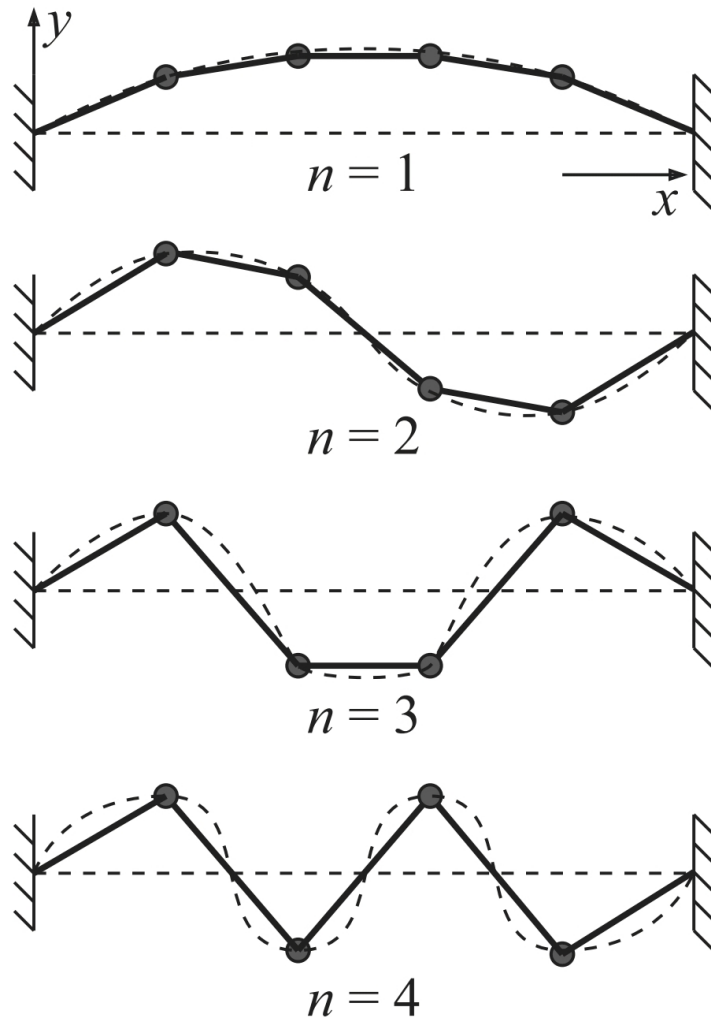


Figura 3: Modos normais para quatro osciladores acoplados numa corda.

2 Implementação

O programa foi desenvolvido em Fortran, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) para a integração numérica das equações diferenciais do sistema, foi escolhido devido à sua precisão e estabilidade em simulações numéricas de sistemas dinâmicos.

A simulação foi dividida em vários arquivos de programas, sendo a parte de fortran composta pelo programa principal `osc_acopladas_n.f90` e módulo `mod_runge_kutta.f90`, já a parte de análise gráfica foi desenvolvida em python, o qual é composto por `graph_2_pendulos.py` e `graph_n_pendulos.py` fazendo uso assim das bibliotecas *numpy* e *matplotlib*. A estrutura básica consiste nos seguintes componentes:

- **Programa principal (`osc_acopladas_n`):** Configura os parâmetros iniciais, como número de pêndulos (N), as condições iniciais e as constantes físicas do sistema, conforme descrito anteriormente. Em seguida, chama o módulo `runge_kutta` que vai fazer a integração numérica das equações diferenciais do sistema para pêndulos acoplados. O código inclui uma interface que solicita ao usuário o número de pêndulos e a condição inicial a ser escolhida. Após as escolhas serem feitas, o programa termina de simular gerando os resultados, que são armazenados em arquivos de saída no formato `.dat`. Mais informações são descritas no arquivo `osc_acopladas_n.f90`.
- **Função auxiliar (`derivada_z`):** Inclui as equações diferenciais acopladas (??), adaptadas para o cálculo de N . É esta parte do código que pode ser substituída, pois, possui a flexibilidade de ser adaptada para outros sistemas descritos por EDOs, desde que possam ser reduzidos a sistemas de primeira ordem.
- **Módulo (`runge_kutta`):** O módulo é composto pela função principal, `rk4_multi`, responsável por calcular a evolução do sistema a cada passo de tempo, utilizando os coeficientes intermediários (k_1, k_2, k_3, k_4) para estimar o próximo estado do sistema. A função de derivadas, fornecida pelo usuário, define as taxas de variação das variáveis, e a solução numérica é obtida pela combinação ponderada desses coeficientes. Aqui destaca-se a importância da criação do módulo, pois ele torna o desenvolvimento mais flexível, permitindo fácil adaptação a diferentes sistemas dinâmicos e necessidades específicas de modelagem.

2.1 Método de Runge-Kutta

As equações diferenciais (??) foram reformuladas em termos de um sistema de primeira ordem. Seja \mathbf{z} o vetor de estado, composto pelas coordenadas e suas derivadas, temos:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

com as equações diferenciais dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{z}_2, \\ \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = \dot{z}_4, \\ \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (14)$$

Essas equações são resolvidas iterativamente, atualizando o vetor \mathbf{z} a cada passo de tempo $\Delta t = h$.

2.2 Saída e Visualização dos Resultados

Os resultados da simulação são gravados em arquivos de texto, permitindo sua posterior análise gráfica com ferramentas como o *Matplotlib* no Python. A saída inclui:

- Coordenadas naturais (x_1, x_2) e normais (q_1, q_2) ao longo do tempo.
- Perfis do espaço de fase para as coordenadas naturais e normais.
- Distribuição de energia entre as massas ao longo do tempo.

O código está estruturado para ser escalável, permitindo simular sistemas com qualquer número N de pêndulos. A próxima etapa consiste em estender a análise para o caso de $N > 2$, explorando os modos normais de sistemas mais complexos.

3 Resultados

A análise gráfica dos resultados foi feita no Python, com auxílio do pacote Matplotlib. Todos os dados foram normalizados e são dados em termos de unidades arbitrárias.

As Figuras 4 e 5 mostram os resultados para as primeiras condições iniciais. De fato, elas mostram que as coordenadas naturais oscilam harmonicamente de acordo com a coordenada normal que não é nula pelas condições iniciais. Isso mostra que o conjunto (q_1, q_2) é linearmente independente, uma vez que há soluções em que uma é autovetor do problema e a outra é identicamente nula. Estas soluções são os modos simétrico e anti-simétrico, respectivamente, como comentado.

Para o terceiro caso, com as condições iniciais diferentes, as soluções para (x_1, x_2) não são harmônicas. Os perfis dos dois espaços de fase – isto é, os espaços definidos pelas coordenadas $(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ e $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ – dados pelos gráficos da velocidade com sua respectiva coordenada espacial mostram isso. Para o movimento harmônico, estes perfis são de elipses, o que é observado para os modos, enquanto as coordenadas naturais têm o perfil diferente (no geral, são dados pela família das curvas de Lissajous [2]).

A Figura 7 mostra as soluções para cada conjunto de coordenada para a terceira condição inicial. As coordenadas (q_1, q_2) , apesar do movimento harmônico, não se encontram em fase e têm frequências diferentes (como esperado).

Para as coordenadas (x_1, x_2) observa-se o fenômeno de batimentos: um dos pêndulos começa a oscilar, e, pela interação da mola que os liga, a sua energia é transferida para o outro pêndulo, até quase parar e o outro oscilar com amplitude máxima. Depois, a energia é transferida novamente para o primeiro. Daí o fenômeno de batimentos. A Figura 8 mostra como a energia do sistema é distribuída entre os pêndulos, mostrando a sua conservação e a transmissão de energia de um para outro pêndulo: quando a de um é máxima, a do outro é mínima.

Este fenômeno de batimentos é extremamente importante para todos os modelos onde aparecem as oscilações acopladas e as oscilações forçadas (por exemplo em circuitos elétricos) e está conectado, também, ao fenômeno de ressonância. É uma consequência clara da superposição e interferência de movimentos harmônicos (e, dessa forma, de ondas).

A Figura 9 mostra os resultados do programa implementado para quatro pêndulos ligados por molas. O modo normal é a coordenada do centro de massa, que é sempre o primeiro dos modos. Futuramente, a perspectiva é implementar esse conjunto de N osciladores ligados por molas.

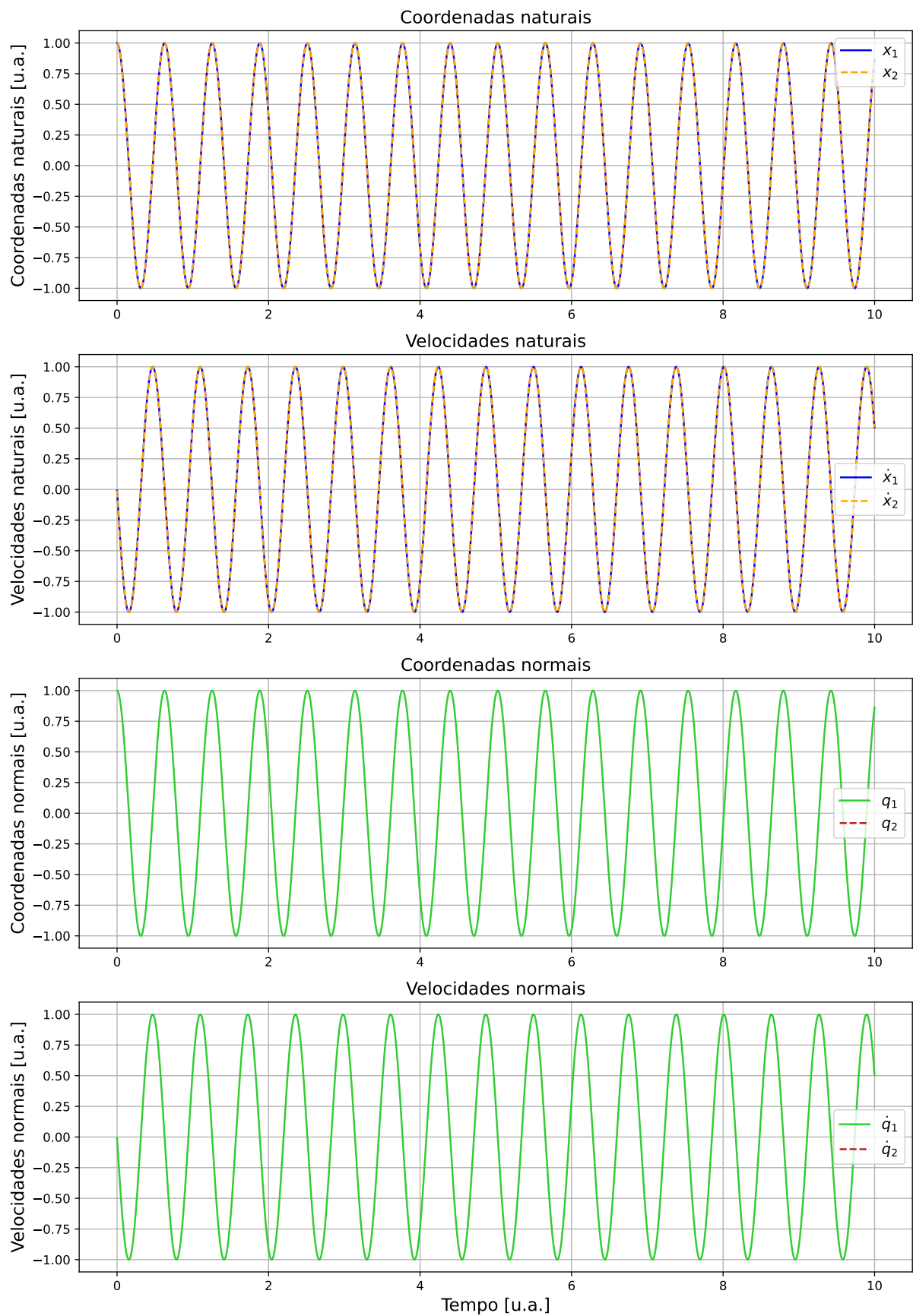


Figura 4: Conjuntos de coordenadas $(x_1(t), x_2(t))$ e $(q_1(t), q_2(t))$ do sistema para condições iniciais iguais.

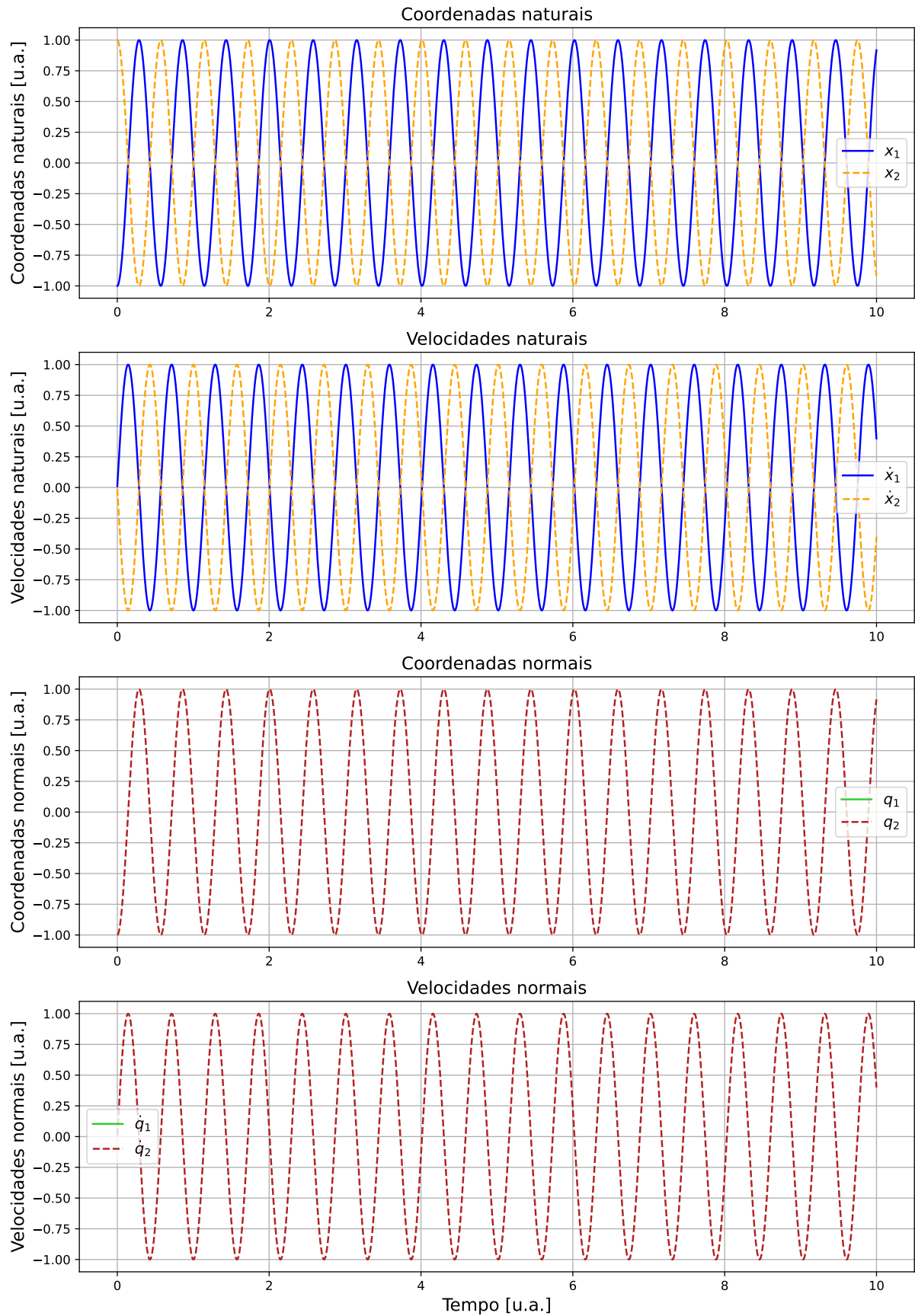


Figura 5: Conjuntos de coordenadas $(x_1(t), x_2(t))$ e $(q_1(t), q_2(t))$ do sistema para condições iniciais opostas.

4 Conclusões

O programa elaborado é capaz de estudar bem o caso dos dois pêndulos acoplados pela mola. Ele é capaz de analisar as soluções para as coordenadas, os perfis do espaço de fase e a

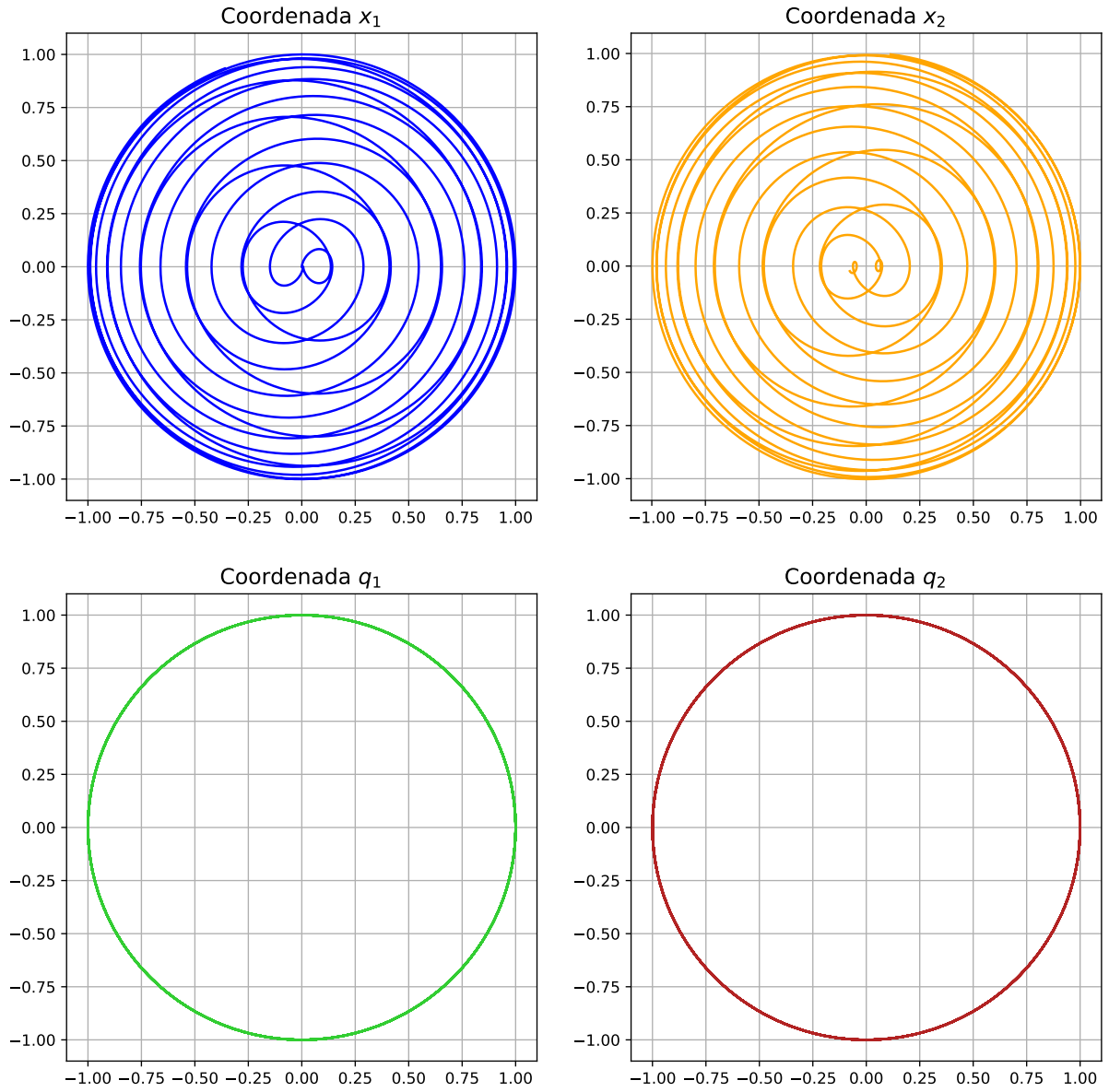


Figura 6: Perfis dos espaços de fase para cada coordenada. Para os modos, observa-se elipses, de acordo com o esperado para o movimento harmônico. Para as coordenadas naturais, observa-se padrões diferentes. A variação do raio das curvas (distância até a origem) é causada pela variação da energia em cada pêndulo dada pelo fenômeno de batimentos (ver Figura 8).

energia do sistema. Para o caso de $N > 2$ osciladores acoplados, o programa ainda depende de alguns ajustes para determinação dos modos normais, bem como uma aplicação de osciladores ligados por molas com movimento longitudinal e transversal pelas mesmas molas.

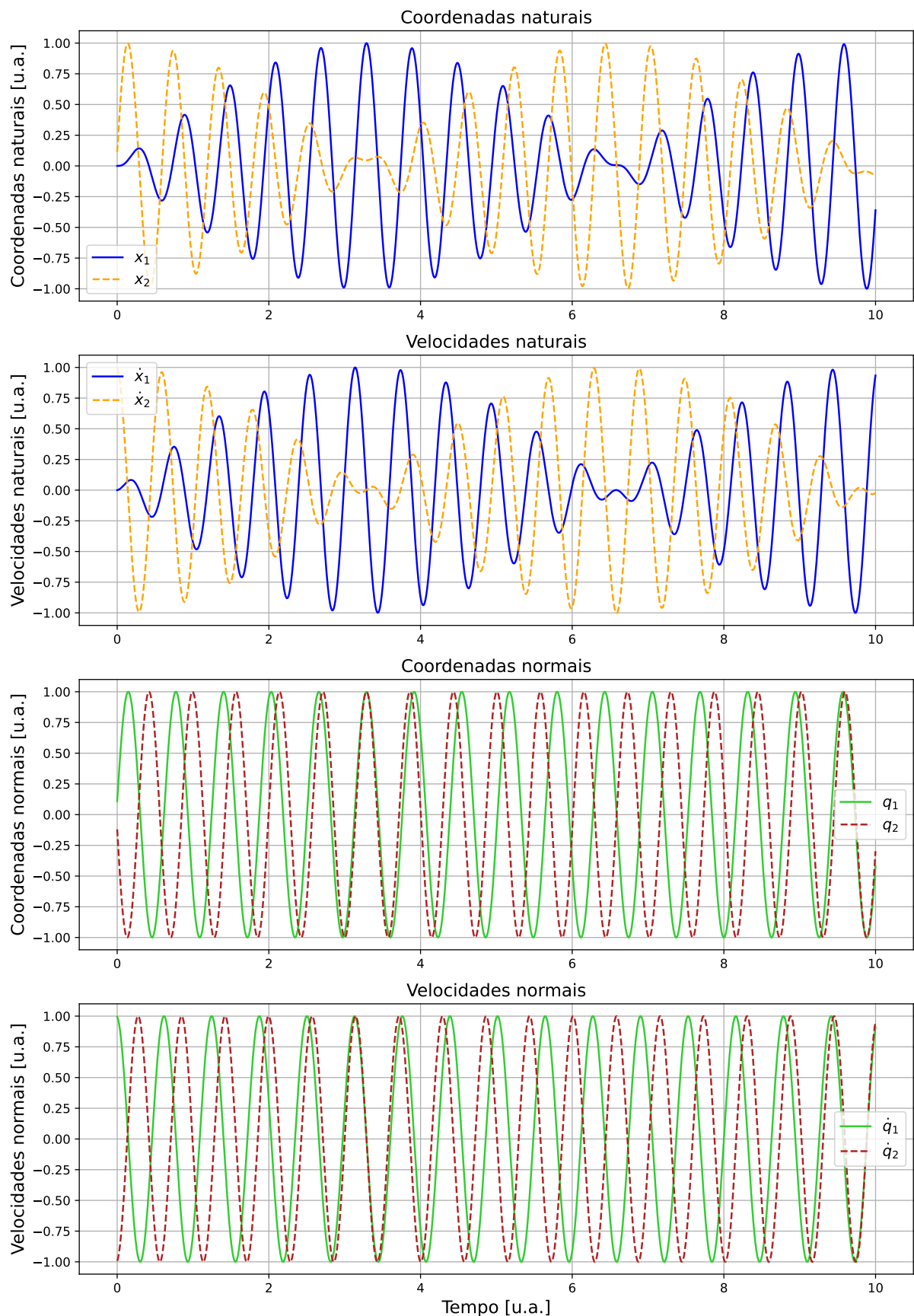


Figura 7: Conjuntos de coordenadas $(x_1(t), x_2(t))$ e $(q_1(t), q_2(t))$ do sistema para condições diferentes.

Referências

- [1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de Física Básica, vol. 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*, volume 2. Editora Blucher, São Paulo, Brasil, 5 edition, 2014.

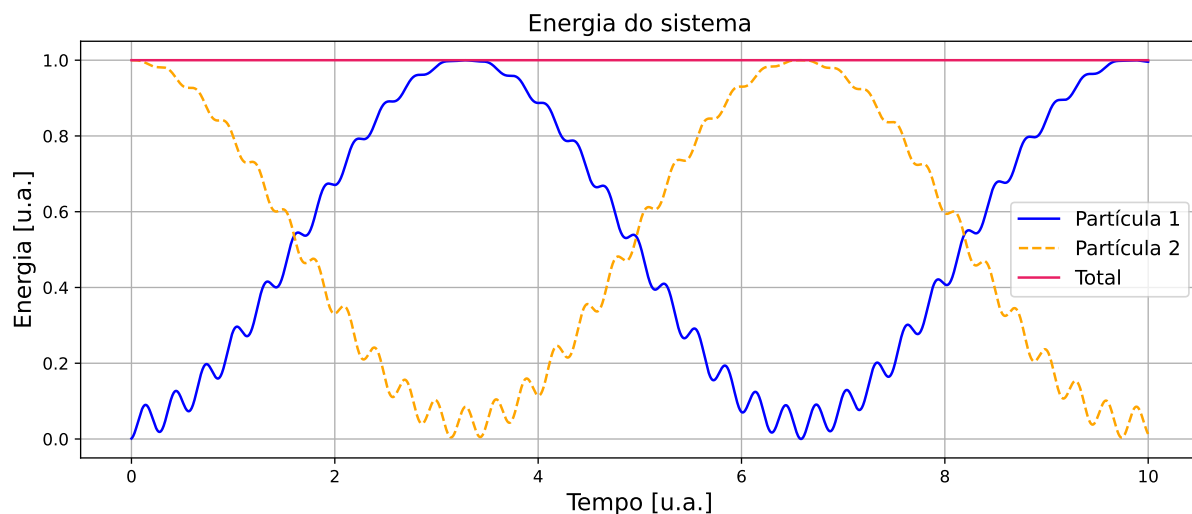


Figura 8: Distribuição da energia do sistema entre as duas massas, mostrando o fenômeno de batimentos.

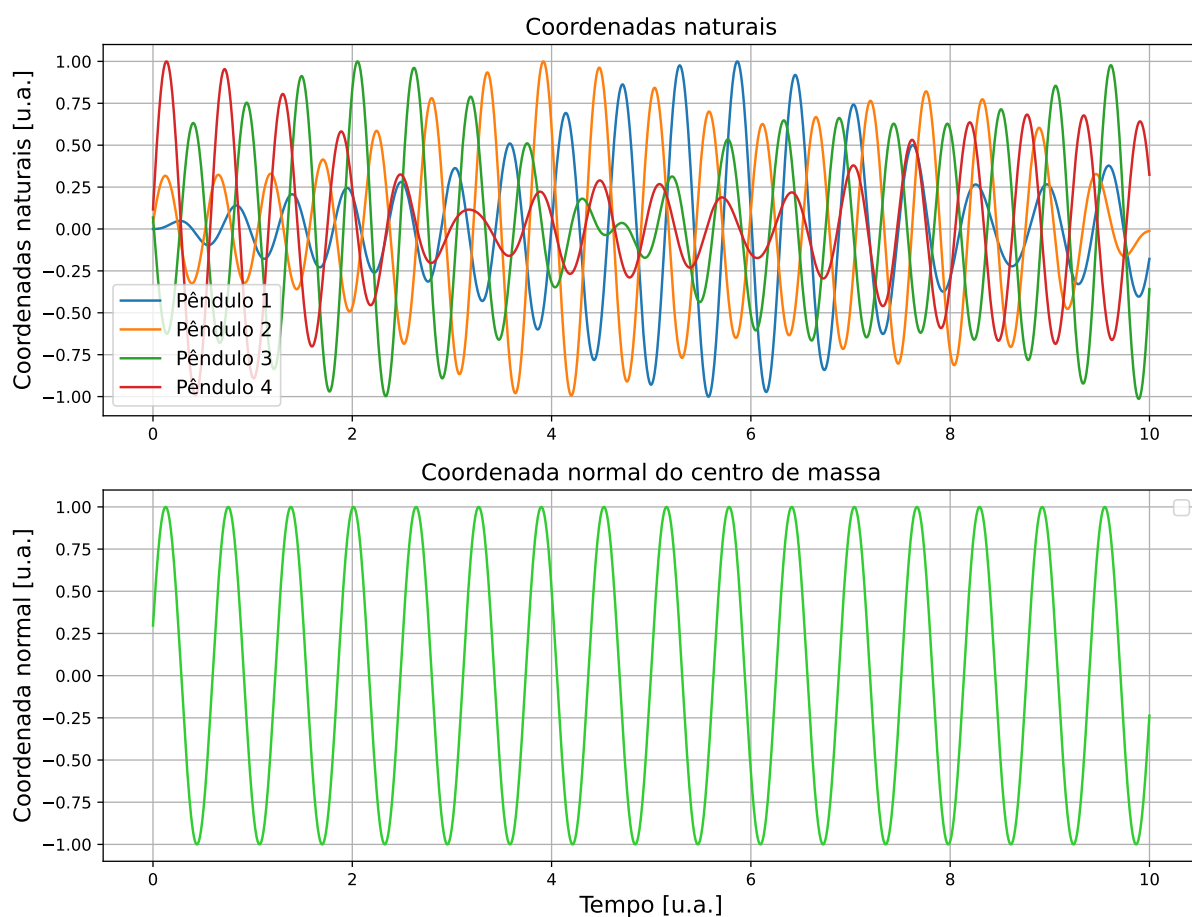


Figura 9: Conjuntos de coordenadas naturais e a coordenada normal do centro de massa do sistema para $N = 4$ osciladores com condições iniciais diferentes para cada um.

- [2] Stephen T Thornton and Jerry B Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Cengage Learning, 2004.
- [3] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de Física Básica, vol. 1: Mecânica*, volume 1. Editora Blucher, São Paulo, Brasil, 5 edition, 2013.
- [4] Keith R Symon. *Mechanics*. Addison-Wesley, 1971.