**Постановка задачи поиска оптимального программного управления**

Пусть поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением



где  – вектор состояния системы, ;  – вектор управления, ,  – некоторое заданное множество допустимых значений управления, определяемое прямым произведением отрезков ;  – промежуток времени функционирования системы; момент окончания  заранее не задан;  – непрерывная вектор-функция;  – -мерное евклидово пространство.

Начальное условие  задает начальное состояние системы.

Определим множество допустимых процессов  как множество троек , которые включают момент окончания процесса управления, траекторию  и управление  (где , функции  непрерывны и кусочно-дифференцируемы, а  кусочно-непрерывны), удовлетворяющие уравнению (1) с заданным начальным условием.

На множестве  определим функционал качества управления

,

где  – заданная непрерывная функция.

Требуется найти такую тройку , что .

**Постановка задачи об управлении солнечным парусом**

В задаче рассматривается модель плоского паруса, имеющего идеальную отражающую поверхность. Движение происходит благодаря зеркальной поверхности, создающей тягу при отражении падающего на поверхность солнечного светового излучения. Первые исследования в области применения солнечного излучения для межпланетных полетов связаны с опытами П.Н. Лебедева по обнаружению светового давления в начале XX века. Первое серьезное исследование данной проблемы принадлежит Ф.А. Цандеру. В своих работах он предлагал для создания тяги использовать тонкие зеркала, выполненные из алюминиевых листов.

Солнечный парус как двигатель создает тягу, используя поток энергии и электромагнитное излучения Солнца. При взаимодействии потока солнечного светового излучения с поверхностью паруса происходит изменение вектора количества движения потока фотонов.

Рассмотрим математическую модель движения центра масс космического аппарата под действием тяги в гравитационном поле:

, (3)

где  – масса аппарата,  –радиус-вектор в инерциальной системе координат,  – вектор тяги,  – единичный вектор направления тяги,  – вектор ускорения от гравитационных сил,  – время,  – вектор других внешних сил, действующих на аппарат, определяемый внешними условиями полета.

Модель движения солнечного паруса, описанная уравнением (1), содержит в себе учет гравитационных сил и сил давления солнечного излучения.

Масса космического аппарата является величиной постоянной, поскольку данная модель не учитывает износ солнечного паруса и изменение его площади, и складывается из двух составляющих: массы полезной нагрузки  и массы непосредственно паруса, задаваемой соотношением . Подставляя полученные соотношения в уравнение движения, получаем:

,

где  – единичный вектор нормали к теневой стороне паруса,  –единичный вектор направления солнечных лучей,  – косинус угла  установки паруса по отношению к солнечным лучам,  – солнечное давление на единичную площадку, установленную перпендикулярно к солнечным лучам, на орбите Земли ,  – расстояние аппарата до Солнца (в гелиоцентрической системе координат ,  и  - плотность и толщина материала паруса.

В уравнения движения вошли параметры паруса , ,  и . Комбинацию этих параметров, содержащуюся в уравнении массы, можно заменить ускорением, которое сообщает парус космическому аппарату на расстоянии  от Солнца, будучи установленным перпендикулярно к солнечным лучам ():



В конечном результате уравнение движения записывается следующим образом:



В данной модели ускорение  для уравнения движения играет роль постоянного управляющего параметра. Единственная управляющая функция в этом уравнении – угол установки паруса (направление нормали к теневой стороне паруса), который может меняться в пределах:



При рассмотрении межорбитального участка перелета солнечного паруса, летящего вне сферы гравитационного воздействия планет, орбиты которых считаются компланарными с нулевым эксцентриситетом, движение космического аппарата происходит в центральном гравитационном поле Солнца под действием давления солнечного излучения. Полагая в уравнении движения ,  и обозначая через  угол установки паруса, составляемый нормалью к теневой стороне паруса и радиусом-вектором , совпадающим с направлением солнечных лучей , получаем следующую систему уравнений плоского движения:



где  – радиальная и угловая позиции соответственно;  – радиальная и тангенциальная скорости,  – угол тангажа (переменная управления),  – параметр яркости солнечного паруса,  – гравитационное ускорение от Солнца на радиусе . Схема модели космического аппарата с солнечным парусом изображена на рисунке 1.

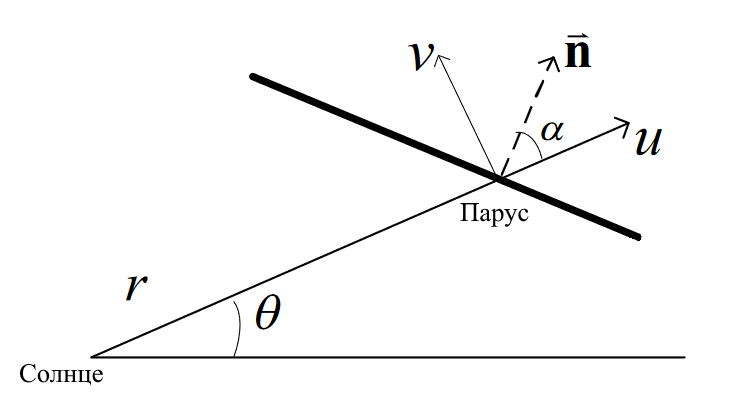


Рисунок 1 Схема объекта управления

Начальные условия определяются из положения солнечного паруса на гелиоцентрической орбите Земли.

 (4)

Конечные условия определяются в зависимости от гелиоцентрической орбиты выбранной целевой планеты и приведены в таблице 1.

Таблица 1. Конечные условия задачи перелета солнечного паруса

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Целевая орбита планеты |  |  |  |
| Меркурий |  |  |  |
| Венера |  |  |  |
| Марс |  |  |  |

Поскольку целью миссии является перелет между орбитами планет солнечной системы, на угловую позицию солнечного паруса в гелиоцентрической системе координат не накладываются ограничения.

Функционал качества управления:

, (5)

где  весовые коэффициенты. Структура функционала соответствует реализации межпланетной миссии, заключающейся в переходе с орбиты Земли (ее задают начальные условия (4)) на орбиту Меркурия, Венеры или Марса (их определяют конечные условия, приведенные в таблице 1) за минимальное время. Первое слагаемое описывает число дней, затрачиваемое на перелет, а второе, третье и четвертое – точность выхода на заданную орбиту. Значения весовых коэффициентов характеризуют степень важности обеспечения требований к желаемой траектории. Для контроля степени выполнения конечных условий на каждой итерации контролируется величина невязки в виде модуля разности по всем координатам космического аппарата в конечный момент времени:

.

Предлагается искать приближенное решение в виде функции насыщения, которая должна гарантировать выполнение заданных ограничений на управление параллелепипедного вида. Аргументы функции насыщения искать в виде линейной комбинации заданных базисных функций, которые используются в спектральном методе анализа и синтеза нелинейных систем управления. Поскольку момент окончания явно не задан, то возникает проблема определения семейства базисных функций. Поэтому применяется подход, связанный с введением новой независимой переменной , отрезок ее изменения делится на  подынтервалов одинаковой длины, равной . Промежуток времени  функционирования системы делится тоже на  подынтервалов переменной длины , ; . При этом момент окончания процесса находится по формуле

,

Моменту  соответствует , а моменту  момент окончания . Используем соотношение, связывающее дифференциалы переменных  и .

, . (6)

Интегрируя по отдельному промежутку времени , получаем , . Отсюда следует, что шаг по переменной  постоянный и равен , так как , ; .

Найдем связь между переменными  и : , . Поскольку , имеем

.

; ; . (7)

Искомое управление предлагается искать в виде функции насыщения , гарантирующей выполнение ограничений на управление:

, ; (8)



.

В качестве базисной функций , можно использовать сплайны:  ,  - финитные функции, порожденные сплайнами, на отрезке :



где  при  задает кусочно-постоянный сплайн, при  – кусочно-линейный (крышки), при  – квадратичный, при  – кубический.

МЕТОДИКА ПОДСЧЕТА ФУНКЦИОНАЛА

1. На каждой итерации выбранным метаэвристическим алгоритмом оптимизации генерируется расширенный вектор-столбец

.

1. Интегрируя уравнение (7) с заданным начальным условием и управлением, вычисляемым по формуле (8), на отрезке , получаем решение .
2. Подсчитать значение функционала .

**Алгоритм оптимизации, имитирующий поведение стаи серых волков**

Метод серых волков (Grey Wolf Optimizer – GWO) имитирует охоту стаи серых волков за жертвой. Он относится к методам роевого интеллекта, в которых используется иерархия лидерства в стае и особый механизм охоты, заключающийся в отслеживании и приближении к жертве, ее последующем окружении и финальном нападении.

В начале работы метода случайным образом, используя предположение о равномерном распределении, на множестве допустимых решений  генерируется некоторый набор начальных точек (волков в стае):  где  – вектор координат волка с номером   – количество волков в стае. Поскольку в процессе охоты положение жертвы точно не известно вследствие ее постоянного движения (а в задаче оптимизации не известно положение точки экстремума), то члены стаи ориентируются на лидеров, полагая, что они обладают большей информацией о положении жертвы (точке экстремума).

В стае волков, где каждый волк характеризуется своей позицией в области допустимых решений, выбираются три последовательно лучших () по величине целевой функции : . Все волки в стае меняют свое положение с учетом сравнения своей текущей позиции с этими тремя наилучшими:







где  – операция поэлементного произведения векторов по Адамару,  – номер итерации,  – следующее и текущее положения волков,   – векторы, определяемые по правилу   – -мерный вектор, каждая компонента которого описывается равномерным распределением на отрезке ;  – вектор с одинаковыми компонентами, уменьшающимися линейно по закону   – максимальное число итераций; – векторы, определяемые по правилу ,  – -мерный вектор, каждая компонента которого описывается равномерным распределением на отрезке . Имеется модификация, в которой . Программное обеспечение, подтвердило эффективность предложенного метода.

**Алгоритм оптимизации, имитирующий поведение стаи горбатых китов**

Метод горбатых китов (Whales Optimization Algorithm – WOA) имитирует охоту стаи горбатых китов за крилем или мелкой рыбой, используя уникальный способ преследования и окружения цели – движение из глубины к поверхности океана по спирали.

В начале работы метода случайным образом, используя предположение о равномерном распределении, на множестве допустимых решений  генерируется некоторый набор начальных точек (горбатых китов в стае):  где  – вектор координат кита с номером   – количество горбатых китов в стае. Поскольку в процессе охоты положение жертвы точно неизвестно вследствие ее постоянного движения (в задаче оптимизации положение точки экстремума также неизвестно), то члены стаи ориентируются на лидера, полагая, что он обладает большей информацией о положении жертвы (точке экстремума).

В стае китов положение каждого кита характеризуется относительно лидера стаи. В процессе реализации охоты стая китов может, как исследовать множество допустимых решений в поисках косяка рыбы, так и окружать найденную добычу, постепенно приближаясь к жертве. Одним из возможных способов приближения является спиралевидное движение вокруг потенциальной добычи.

На каждой итерации для каждой особи () генерируется случайное число  согласно равномерному закону распределения на отрезке .

Если , то подсчитывается величина , где  – вектор, определяемый по правилу   – -мерный вектор, каждая компонента которого описывается равномерным распределением на отрезке ;  – вектор с одинаковыми компонентами, уменьшающимися линейно по закону   – максимальное число итераций, знак  обозначает эвклидову норму вектора. Имеется модификация алгоритма, в которой координаты вектора  уменьшаются по квадратичному закону .

В случае, когда , используется формула, по которой новое положение кита определяется относительно расположения жертвы:





где  – лучшая особь на текущей итерации,  – операция поэлементного произведения векторов по Адамару,  – номер итерации,  – следующее и текущее положения китов,   – вектор, определяемый по правилу ,  – -мерный вектор, каждая компонента которого описывается равномерным распределением на отрезке . В этом случае реализуется процесс разработки найденного источника пищи.

Если , то реализуется исследование (поиск новых источников пищи) на множестве допустимых решений:





где  – случайно выбранная особь на текущей итерации.

Если , то новое положение кита определяется по формуле





где  – случайная величина, распределенная равномерно на отрезке   – параметр логарифмической спирали.

**Алгоритм оптимизации, имитирующий поведение стаи стрекоз**

Алгоритм (Dragonfly Algorithm – DA) имитирует как статическое, так и динамическое поведение семейства стрекоз в природе, реализуя три принципа: разделение (уклонение одного индивидуума от другого внутри окрестности его расположения), выравнивание (в окрестности положения индивидуума скорости стрекоз полагаются одинаковыми), сплоченность (индивидуумы перемещаются к центру масс семейства). Конфигурация стаи стрекоз и направление их полета определяются задачей поиска пищи (стремлением к лидеру стаи), уклонением от хищника (наихудшего решения), памятью о предыдущем передвижении. Нахождение нового положения стрекозы (положения решения в множестве допустимых решений) производится либо под влиянием ближайших соседей в стае (если их число превышает единицу), либо посредством независимого перелета с использованием распределения Леви (в противном случае). Используя описанные принципы, стая стрекоз осуществляет разведку новых областей и разработку старых. Характерные черты поведения стрекоз используются при решении задачи поиска экстремума функции на множестве допустимых решений. Процедура поиска завершается при достижении заданного числа итераций.