



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

INGENIERÍA EN AUTOMATIZACIÓN

ROBÓTICA

Análisis Cinemático de un Robot de 6 Grados de Libertad: Cinemática Directa e Inversa

Profesor:

Dr. Gerardo Israel Pérez Soto

Equipo 1

Alumno:

Nombre	Expediente
Hernández Osorio Airy Mario	274904

11 de Abril de 2024

Índice

1. introducción	2
2. Objetivos.	2
3. Marco teórico	3
3.1. Introducción a la Cinemática de Robots	3
3.1.1. Definición de Grados de Libertad	3
3.2. Importancia de la Cinemática	3
3.2.1. Parámetros de Denavit-Hartenberg (DH)	3
3.3. Funcionamiento de los Servomotores	4
3.3.1. Señal de Control (PWM)	4
3.3.2. Mecanismo de Retroalimentación	4
4. Análisis Matemático	5
4.1. Cinemática Directa	5
4.2. Cinemática Inversa	7
4.2.1. Reestructuración de la MTH	7
4.2.2. Cálculo del Vector \hat{R}	8
4.2.3. Cálculo de la Muñeca Esférica	10
5. Conclusiones	11
6. Trabajos Futuros	11
7. Referencias Bibliográficas	11

Índice de figuras

1. Ejemplo de movimiento de un servomotor según el ancho del pulso.	4
2. Ejemplo del funcionamiento interno de un Servomotor.	4
3. Diagrama del brazo de 6 grados de libertad.	5
4. Vector posición extraído de la MTH_4^0	8
5. Matriz de Rotación extraída de la MTH_6^3	10

1. introducción

La cinemática de robots es un campo fundamental en la robótica que se encarga de estudiar el movimiento y la posición de los sistemas mecánicos articulados. En particular, el análisis cinemático de un robot de 6 grados de libertad (GDL) es crucial para entender cómo se comporta y se controla este tipo de robots en entornos industriales, médicos y diversos aplicativos.

Este documento se enfoca en proporcionar un análisis detallado de la cinemática directa e inversa de un robot de 6 GDL. La cinemática directa permite determinar la posición y orientación del extremo del robot (actuador final) en función de las articulaciones y longitudes de los eslabones. Por otro lado, la cinemática inversa calcula los ángulos de las articulaciones necesarios para posicionar el actuador final en una posición y orientación específicas en el espacio.

2. Objetivos.

1. Analizar la Cinemática Directa: Desarrollar las ecuaciones y algoritmos necesarios para calcular la posición y orientación del actuador final utilizando los parámetros de Denavit-Hartenberg (DH) específicos de un robot de 6 GDL.
2. Implementar la Cinemática Inversa: Definir los procedimientos matemáticos para determinar los ángulos de las articulaciones que permiten alcanzar una posición y orientación deseada del actuador final.
3. Validar los Resultados: Verificar la precisión de los cálculos mediante simulaciones computacionales y comparaciones con modelos físicos, asegurando la fiabilidad de los algoritmos propuestos.

Este documento pretende ser un recurso para estudiantes interesados en comprender y aplicar los principios fundamentales de la cinemática robótica, específicamente en el contexto de robots con 6 grados de libertad.

3. Marco teórico

3.1. Introducción a la Cinemática de Robots

La cinemática de robots es una disciplina esencial dentro de la robótica, encargada de estudiar y describir el movimiento de sistemas mecánicos articulados sin considerar las fuerzas que lo producen. En este contexto, los robots de 6 grados de libertad (GDL) son de particular interés debido a su capacidad de realizar movimientos complejos en tres dimensiones, siendo ampliamente utilizados en aplicaciones industriales, médicas y de investigación.

3.1.1. Definición de Grados de Libertad

El concepto de grados de libertad se refiere al número de movimientos independientes que puede realizar un robot. En un robot de 6 GDL, estos movimientos generalmente comprenden tres traslaciones y tres rotaciones, permitiendo al actuador final alcanzar cualquier posición y orientación dentro de su espacio de trabajo.

3.2. Importancia de la Cinemática

La cinemática de robots es crucial para la planificación y control de movimientos. Se divide en dos ramas principales:

- **Cinemática Directa:** Determina la posición y orientación del actuador final del robot, dada una configuración específica de las articulaciones.
- **Cinemática Inversa:** Calcula los ángulos de las articulaciones necesarios para alcanzar una posición y orientación deseadas del actuador final.

Ambas ramas son fundamentales para diseñar algoritmos de control y para la ejecución precisa de tareas robóticas.

3.2.1. Parámetros de Denavit-Hartenberg (DH)

Los parámetros DH son esenciales para la representación de la cinemática de un robot. Estos parámetros son:

- **Ángulo de torsión (θ_i):** Ángulo entre los ejes Z_i y Z_{i-1} .
- **Distancia de enlace (a_i):** Distancia entre los orígenes X_{i-1} y X_i a lo largo del eje Z_{i-1} .
- **Ángulo de enlace (α_i):** Ángulo entre los ejes X_i y X_{i-1} .
- **Longitud de enlace (d_i):** Desplazamiento a lo largo del eje Z_i .

Estos parámetros permiten la construcción de la matriz de transformación homogénea que relaciona la posición y orientación de cada enlace.

3.3. Funcionamiento de los Servomotores

Los servomotores son motores de corriente continua (DC) que pueden posicionar su eje en un ángulo específico y mantener esa posición con precisión. Esto se logra mediante el uso de una señal de control conocida como modulación por ancho de pulsos (PWM).

3.3.1. Señal de Control (PWM)

- **Tren de Pulsos:** El servomotor recibe un tren de pulsos continuo, donde la duración de cada pulso determina la posición angular del eje.
- **Duración del Pulso**
 - Un pulso de 1 ms posiciona el eje en 0 grados.
 - Un pulso de 1.5 ms posiciona el eje en 90 grados.
 - Un pulso de 2 ms posiciona el eje en 180 grados.

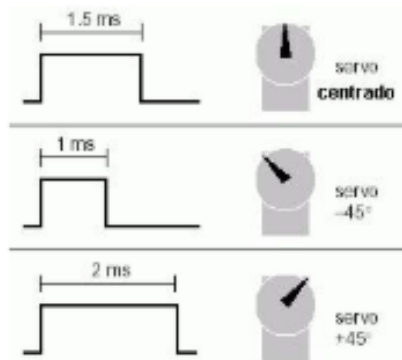


Figura 1: Ejemplo de movimiento de un servomotor según el ancho del pulso.

3.3.2. Mecanismo de Retroalimentación

- **Control Interno:** Un circuito de control interno interpreta la duración del pulso y ajusta el eje a la posición correspondiente.

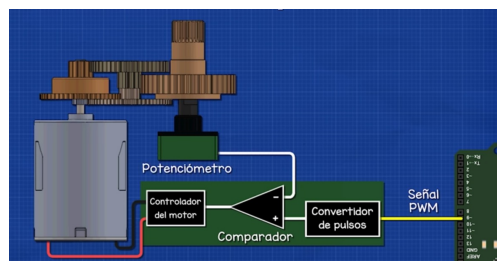


Figura 2: Ejemplo del funcionamiento interno de un Servomotor.

- **Retroalimentación:** Utiliza un potenciómetro conectado al eje para asegurar que la posición del eje coincida con la posición deseada.

La figura 1 muestra cómo diferentes anchos de pulso corresponden a diferentes posiciones angulares del eje del servomotor.

4. Análisis Matemático

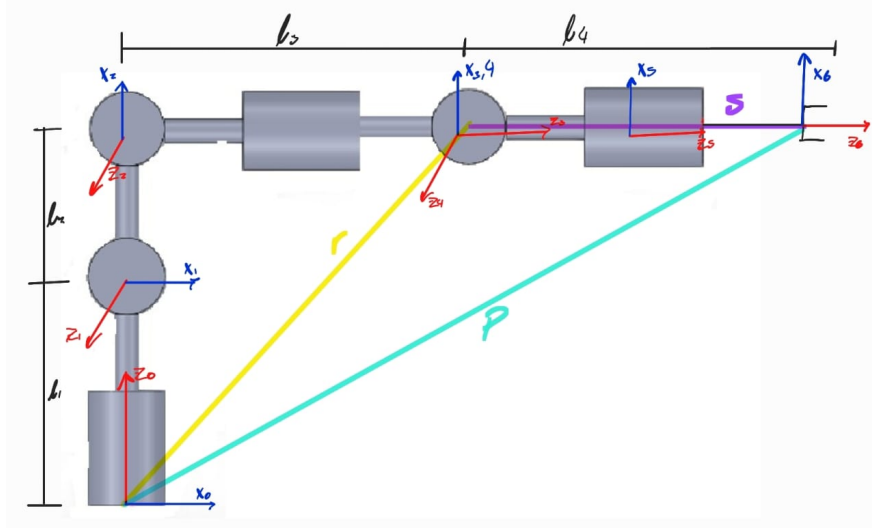


Figura 3: Diagrama del brazo de 6 grados de libertad.

4.1. Cinemática Directa

La Matriz de Transformación Homogénea (MTH) se utiliza para calcular los ángulos de Euler del actuador final de un robot con múltiples Grados de Libertad (GDL). Esta matriz proporciona una representación espacial completa de la configuración del robot desde la base hasta el actuador final.

La MTH de 0 a n GDL se define por la siguiente expresión:

$$MTH = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \cdot \cos(\alpha) & \sin(\theta) \cdot \sin(\alpha) & a \cdot \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \cdot \cos(\alpha) & -\cos(\theta) \cdot \sin(\alpha) & a \cdot \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Para calcular los ángulos de Euler que describen la orientación del actuador final de un robot, es esencial conocer la MTH de 0 a n GDL, donde n representa el número total de Grados de Libertad del robot. Cada elemento de esta matriz está determinado por los parámetros de Denavit-Hartenberg (DH), los cuales definen la geometría y configuración relativa de cada eslabón y articulación del robot.

- θ : Ángulo de traslación respecto al eje z anterior.
- α : Ángulo de rotación respecto al eje x común.
- a : Distancia entre los ejes z a lo largo del eje x .
- d : Longitud del enlace a lo largo del eje z .

Para obtener los ángulos de Euler en la secuencia ZXZ a partir de la MTH, se realizan los siguientes pasos:

1. Extraer la matriz de rotación R de la MTH:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

2. Calcular los ángulos de Euler (α, β, γ) en la secuencia ZXZ :

$$\alpha = \arctan 2(r_{31}, -r_{32})$$

$$\beta = \arccos(r_{33})$$

$$\gamma = \arctan 2(r_{13}, r_{23})$$

Estos ángulos describen la orientación del actuador final en términos de rotaciones sucesivas alrededor de los ejes Z , X y Z .

4.2. Cinemática Inversa

4.2.1. Reestructuración de la MTH

La matriz de transformación homogénea es una herramienta esencial en la robótica y la cinemática de robots manipuladores. Permite describir la posición y orientación relativa entre dos sistemas de coordenadas.

La MTH se expresa como:

$$MTH_{06} = \begin{bmatrix} R_{06} & p_{06} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

- R_{06} es la matriz de rotación 3x3 que describe la orientación del actuador final.
- p_{06} es el vector de posición 3x1 que representa la ubicación del actuador final en el espacio.

Para obtener R_{06} , combinamos las matrices de rotación individuales para los ángulos de Euler:

- Rotación en el eje Z (α):

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotación en el eje X (β):

$$R_x(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

- Segunda rotación en el eje Z (γ):

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, multiplicamos estas matrices de rotación en el orden correcto para obtener R_6^0 :

$$R_6^0 = R_z(\alpha) \cdot R_x(\beta) \cdot R_z(\gamma)$$

Finalmente, la MTH completa se expresa como:

$$MTH_6^0 = \begin{bmatrix} R_{zzz} & P_{06} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Donde P_{06} representa la posición del actuador final en el espacio tridimensional.

4.2.2. Cálculo del Vector \hat{R}

Transformaremos la MTH_6^0 (3) a su forma $\hat{n}\hat{o}\hat{a}$

$$MTH_6^0 = \begin{bmatrix} \hat{n} & \hat{o} & \hat{a} & P_6^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Para calcular la posición del vector \hat{r} :

$$Z_6^0 = \hat{a}$$

Luego, escalamos este vector por la longitud l_4 :

$$S = l_4 Z_6^0$$

Finalmente, restamos esta proyección de la posición del actuador final para obtener el vector \hat{r} :

$$\hat{R} = \hat{P} - \hat{S} = \begin{bmatrix} P_{xf} \\ P_{yf} \\ P_{zf} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{xs} \\ P_{ys} \\ P_{zs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{xr} \\ P_{yr} \\ P_{zr} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Una vez que hemos definido la posición del vector \hat{R} utilizando el código adjunto **P1_Parametros_DH_syms.py**, obtenemos:

```
3. El vector posición MTH0_4 es:
P:
Px: (l2*cos(th2) + l3*sin(th2 + th3))*cos(th1)
Py: (l2*cos(th2) + l3*sin(th2 + th3))*sin(th1)
Pz: l1 + l2*sin(th2) - l3*cos(th2 + th3)
```

Figura 4: Vector posición extraído de la MTH_4^0 .

Donde:

- **Variables conocidas:** $P_x, P_y, P_z, l_1, l_2, l_3$
- **Variables desconocidas:** $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

Cálculo de θ_1

Dividir $\frac{P_y}{P_x}$

$$\frac{[l_1 C \theta_2 + l_3 S (\theta_2 + \theta_3)] \sin \theta_1}{[l_2 C \theta_2 + l_3 S (\theta_2 + \theta_3)] \cos \theta_1} = \frac{P_y}{P_x} \quad (6)$$

$$\theta_1 = \text{atan} \left(\frac{P_y}{P_x} \right) \quad (7)$$

Cálculo de θ_2

Se realizarán un par de sustituciones en las ecuaciones de P_y y P_z .

Primera sustitución:

$$u = \frac{P_y}{\sin(\theta_1)}, \quad v = P_z - l_1$$

Esto nos da las siguientes ecuaciones:

$$u = l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \quad (8)$$

$$v = l_2 \sin(\theta_2) - l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \quad (9)$$

Despejando $\theta_2 + \theta_3$, elevamos al cuadrado y sumamos ambas ecuaciones.

$$l_3^2 = u^2 + v^2 + l_2^2 + 2l_2u \sin(\theta_2) - 2l_2v \cos(\theta_2) \quad (10)$$

Segunda sustitución:

Definimos:

$$m = u^2 + v^2 + l_2^2 - l_3^2$$

$$n = 2l_2v$$

$$P = -2l_2u$$

Usando identidades trigonométricas, llegamos a:

$$m + n \frac{2 \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)} + P \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)} = 0 \quad (11)$$

Finalmente, acomodamos la expresión en su forma de segundo grado y resolvemos para θ_2 :

$$\theta_2 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \quad (12)$$

Cálculo de θ_3

Dividiremos $\frac{(8)}{(9)}$

$$(\theta_2 + \theta_3) = \tan^{-1} \left[\frac{u - l_2 \cos \theta_2}{v + l_2 \sin \theta_2} \right] \quad (13)$$

Por lo tanto:

$$\theta_3 = (\theta_2 + \theta_3) - \theta_2 \quad (14)$$

4.2.3. Cálculo de la Muñeca Esférica

Sabemos que la relación entre las matrices de rotación es:

$$R_6^0 = R_3^0 R_6^3 \quad (15)$$

Por lo tanto, podemos despejar R_6^3 de la siguiente manera:

$$R_6^3 = (R_3^0)^T R_6^0 \quad (16)$$

Esto es posible porque extraemos la matriz de rotación R_6^0 de la MTH (Matriz de Transformación Homogénea) MTH_6^0 . La matriz R_3^0 la calculamos numéricamente utilizando los valores obtenidos para θ_1 , θ_2 y θ_3 .

Utilizando el código adjunto **P1_Parametros_DH_syms.py**, obtenemos la matriz de rotación R_6^3 :

```
4. La matriz de Rotacion de MTH_6 es:
R:
[-sin(th4)*sin(th6) + cos(th4)*cos(th5)*cos(th6) | -sin(th4)*cos(th6) - sin(th6)*cos(th4)*cos(th5) | sin(th5)*cos(th4)]
[sin(th4)*cos(th5)*cos(th6) + sin(th6)*cos(th4) | -sin(th4)*sin(th6)*cos(th5) + cos(th4)*cos(th6) | sin(th4)*sin(th5)]
[-sin(th5)*cos(th6) | sin(th5)*sin(th6) | cos(th5)]
```

Figura 5: Matriz de Rotación extraída de la MTH_6^3 .

Una vez que tenemos la matriz de rotación R_6^3 , podemos encontrar los ángulos θ_4 , θ_5 y θ_6 necesarios utilizando las relaciones trigonométricas.

Cálculo de θ_6

La relación trigonométrica es:

$$\frac{R(3, 2)}{R(3, 1)} = \frac{\sin \theta_5 \sin \theta_6}{-\sin \theta_5 \cos \theta_6}$$

De aquí, obtenemos:

$$\theta_6 = \tan^{-1} \left(\frac{R(3, 2)}{-R(3, 1)} \right) \quad (17)$$

Cálculo de θ_4

La relación trigonométrica es:

$$\frac{\sin \theta_4}{\cos \theta_4} = \frac{R(2, 3)}{R(1, 3)}$$

De aquí, obtenemos:

$$\theta_4 = \tan^{-1} \left(\frac{R(2, 3)}{R(1, 3)} \right) \quad (18)$$

Cálculo de θ_5

La relación trigonométrica es:

$$\cos \theta_5 = R(3, 3)$$

De aquí, obtenemos:

$$\theta_5 = \cos^{-1} (R(3, 3)) \quad (19)$$

5. Conclusiones

En este trabajo, se ha presentado un análisis detallado de la cinemática directa e inversa de un robot de 6 grados de libertad. Se han desarrollado las ecuaciones necesarias para determinar la posición y orientación del actuador final y se han implementado algoritmos para resolver la cinemática inversa, permitiendo calcular los ángulos de las articulaciones para alcanzar una posición y orientación deseadas.

El proyecto se ha implementado sobre una Raspberry Pi 3, que se comunica por Bluetooth con una aplicación que envía los datos necesarios, ya sean los ángulos de cada articulación o el vector de Euler y posición. La validación de los resultados, mediante simulaciones computacionales y comparaciones con modelos físicos, ha demostrado la precisión y fiabilidad de los algoritmos propuestos.

Además, este proyecto es open source y se encuentra disponible en GitHub. Puede encontrar más información sobre el código y algunas aplicaciones en este enlace. Este estudio proporciona una base sólida para comprender y aplicar los principios fundamentales de la cinemática robótica.

6. Trabajos Futuros

Existen varias direcciones posibles para extender este trabajo:

- Optimización de Algoritmos: Mejorar los algoritmos de cinemática inversa para reducir el tiempo de cálculo y aumentar la precisión, aprovechando al máximo las capacidades de la Raspberry Pi 3.
- Control Avanzado: Implementar estrategias de control avanzado, como control adaptativo o control robusto, para mejorar el desempeño del robot en entornos dinámicos y con perturbaciones, utilizando la Raspberry Pi como núcleo de procesamiento.
- Integración con Sensores: Integrar sensores adicionales, como cámaras o sensores de fuerza, que se puedan comunicar con la Raspberry Pi para permitir una interacción más compleja y precisa con el entorno.
- Mejoras en la Comunicación: Optimizar la comunicación Bluetooth entre la Raspberry Pi y la aplicación móvil para aumentar la velocidad y confiabilidad de la transmisión de datos.
- Aplicaciones Específicas: Desarrollar aplicaciones específicas en áreas como la cirugía robótica, la manufactura automatizada y la exploración espacial, adaptando los principios de la cinemática a las necesidades particulares de cada campo.

Estos trabajos futuros pueden ampliar significativamente las capacidades y aplicaciones de los robots con 6 grados de libertad, llevando a desarrollos innovadores en la robótica y demostrando la versatilidad de la Raspberry Pi como plataforma de control.

7. Referencias Bibliográficas

1. Herrera, M. (2008). *Computadoras y Controladores Lógicos Programables*. McGraw-Hill Interamericana.
2. Siciliano, B., & Khatib, O. (2008). *Springer Handbook of Robotics*. Springer.
3. Craig, J. J. (2005). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Pearson Prentice Hall.
4. Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2006). *Robot Modeling and Control*. Wiley.
5. Murray, R. M., Li, Z., & Sastry, S. S. (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press.