UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

INGENIERÍA EN AUTOMATIZACIÓN

ROBÓTICA

Análisis Cinemático de un Robot de 6 Grados de Libertad: Cinemática Directa e Inversa

Profesor:
Dr. Gerardo Israel Pérez Soto

Equipo 1

Alumno:

Nombre	Expediente
Hernández Osorio Airy Mario	274904

11 de Abril de 2024

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

1. introducción

La cinemática de robots es un campo fundamental en la robótica que se encarga de estudiar el movimiento y la posición de los sistemas mecánicos articulados. En particular, el análisis cinemático de un robot de 6 grados de libertad (GDL) es crucial para entender cómo se comporta y se controla este tipo de robots en entornos industriales, médicos y diversos aplicativos.

Este documento se enfoca en proporcionar un análisis detallado de la cinemática directa e inversa de un robot de 6 GDL. La cinemática directa permite determinar la posición y orientación del extremo del robot (actuador final) en función de las articulaciones y longitudes de los eslabones. Por otro lado, la cinemática inversa calcula los ángulos de las articulaciones necesarios para posicionar el actuador final en una posición y orientación específicas en el espacio.

2. Objetivos.

1. Analizar la Cinemática Directa: Desarrollar las ecuaciones y algoritmos necesarios para calcular la posición y orientación del actuador final utilizando los parámetros de Denavit-Hartenberg (DH) específicos de un robot de 6 GDL.

2. Implementar la Cinemática Inversa: Definir los procedimientos matemáticos para determinar los ángulos de las articulaciones que permiten alcanzar una posición y orientación deseada del actuador final.

3. Validar los Resultados: Verificar la precisión de los cálculos mediante simulaciones computacionales y comparaciones con modelos físicos, asegurando la fiabilidad de los algoritmos propuestos.

Este documento pretende ser un recurso para estudiantes interesados en comprender y aplicar los principios fundamentales de la cinemática robótica, específicamente en el contexto de robots con 6 grados de libertad.

3. Análisis Matemático

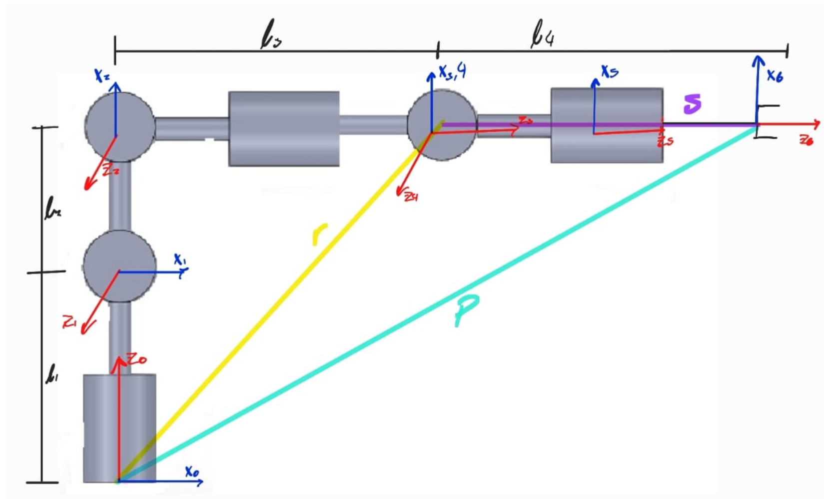

Figura 1: Diagrama del brazo de 6 grados de libertad.

3.1. Cinemática Directa

La Matriz de Transformación Homogénea (MTH) se utiliza para calcular los ángulos de Euler del actuador final de un robot con múltiples Grados de Libertad (GDL). Esta matriz proporciona una representación espacial completa de la configuración del robot desde la base hasta el actuador final.

La MTH de 0 a n GDL se define por la siguiente expresión:

$$MTH = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\cdot\cos(\alpha) & \sin(\theta)\cdot\sin(\alpha) & a\cdot\cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\cdot\cos(\alpha) & -\cos(\theta)\cdot\sin(\alpha) & a\cdot\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Para calcular los ángulos de Euler que describen la orientación del actuador final de un robot, es esencial conocer la MTH de 0 a n GDL, donde n representa el número total de Grados de Libertad del robot. Cada elemento de esta matriz está determinado por los parámetros de Denavit-Hartenberg (DH), los cuales definen la geometría y configuración relativa de cada eslabón y articulación del robot.

- θ: Ángulo de traslación respecto al eje z anterior.
- α: Ángulo de rotación respecto al eje x común.
- a: Distancia entre los ejes z a lo largo del eje x.
- d: Longitud del enlace a lo largo del eje z.

Para obtener los ángulos de Euler en la secuencia ZXZ a partir de la MTH, se realizan los siguientes pasos:
1. Extraer la matriz de rotación R de la MTH:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

2. Calcular los ángulos de Euler (α, β, γ) en la secuencia ZXZ:

$$\alpha = \arctan 2(r_{31}, -r_{32})$$

$$\beta = \arccos(r_{33})$$

$$\gamma = \arctan 2(r_{13}, r_{23})$$

Estos ángulos describen la orientación del actuador final en términos de rotaciones sucesivas alrededor de los ejes Z, X y Z.

3.2. Cinemática Inversa

3.2.1. Restructuración de la MTH

La matriz de transformación homogénea es una herramienta esencial en la robótica y la cinemática de robots manipuladores. Permite describir la posición y orientación relativa entre dos sistemas de coordenadas.

La MTH se expresa como:

$$MTH_{06} = \begin{bmatrix} R_{06} & p_{06} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

- R_{06} es la matriz de rotación 3x3 que describe la orientación del actuador final.
- p_{06} es el vector de posición 3x1 que representa la ubicación del actuador final en el espacio.

Para obtener R_{06}, combinamos las matrices de rotación individuales para los ángulos de Euler:

- Rotación en el eje Z (α):
$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Rotación en el eje X (β):
$$R_x(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$
- Segunda rotación en el eje Z (γ):
$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, multiplicamos estas matrices de rotación en el orden correcto para obtener R_{06}:

$$R_{06} = R_z(\alpha) \cdot R_x(\beta) \cdot R_z(\gamma)$$

Finalmente, la MTH completa se expresa como:

$$MTH_{06} = \begin{bmatrix} R_{zxz} & P_{06} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Donde P_{06} representa la posición del actuador final en el espacio tridimensional.

3.2.2. Calculo del Vector $\hat{R}$

Tranformaremos la MTH_{06} (3) a su forma $\hat{n}\hat{o}\hat{a}$

$$MTH_{06} = \begin{bmatrix} \hat{n} & \hat{o} & \hat{a} & P_{06} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Para calcular la posición del vector $\hat{r}$:

$$Z_6^0 = \hat{a}$$

Luego, escalamos este vector por la longitud l_4:

$$S = l_4 Z_6^0$$

Finalmente, restamos esta proyección de la posición del actuador final para obtener el vector $\hat{r}$:

$$\hat{R} = \hat{P} - \hat{S} = \begin{bmatrix} P_{xf} \\ P_{yf} \\ P_{zf} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{xs} \\ P_{ys} \\ P_{zs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{xr} \\ P_{yr} \\ P_{zr} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Una vez que hemos definido la posición del vector $\hat{R}$ utilizando el código adjunto **P1_Parametros_DH_-syms.py**, obtenemos:

```
3. El vector posición MTH0_4 es:
P:
Px: (l2*cos(th2) + l3*sin(th2 + th3))*cos(th1)
Py: (l2*cos(th2) + l3*sin(th2 + th3))*sin(th1)
Pz: l1 + l2*sin(th2) - l3*cos(th2 + th3)
```

Figura 2: Vector posición extraído de la MTH_{04}.

Donde:

- **Variables conocidas**: P_x ,P_y, P_z , l_1 , l_2 , l_3
- **Variables desconocidas**: θ_1, θ_2, θ_3

Cálculo de θ_1

Dividir $\frac{P_y}{P_x}$

$$\frac{[l_1 C\theta_2 + l_S S(\theta_2 + \theta_3)] \sin\theta_1}{[l_2 C\theta_2 + l_3 S(\theta_2 + \theta_3)] \cos\theta_1} = \frac{P_y}{P_x} \tag{6}$$

$$\theta_1 = \text{atan}\left(\frac{P_y}{P_x}\right) \tag{7}$$

Cálculo de θ_2

Se realizarán un par de sustituciones en las ecuaciones de P_y y P_z.

Primera sustitución:

$$u = \frac{P_y}{\sin(\theta_1)}, \quad v = P_z - l_1$$

Esto nos da las siguientes ecuaciones:

$$u = l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \tag{8}$$

$$v = l_2 \sin(\theta_2) - l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \tag{9}$$

Despejando $\theta_2 + \theta_3$, elevamos al cuadrado y sumamos ambas ecuaciones.

$$l_3^2 = u^2 + v^2 + l_2^2 + 2l_2 u \sin(\theta_2) - 2l_2 v \cos(\theta_2) \tag{10}$$

Segunda sustitución:

Definimos:

$$\begin{aligned} m &= u^2 + v^2 + l_2^2 - l_3^2 \\ n &= 2l_2 v \\ P &= -2l_2 u \end{aligned}$$

Usando identidades trigonométricas, llegamos a:

$$m + n\frac{2\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)} + P\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)} = 0 \tag{11}$$

Finalmente, acomodamos la expresión en su forma de segundo grado y resolvemos para θ_2:

$$\theta_2 = 2\tan^{-1}\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \tag{12}$$

Cálculo de θ_3

Dividiremos $\frac{(8)}{(9)}$

$$(\theta_2 + \theta_3) = \tan^{-1}\left[\frac{u - l_2\cos\theta_2}{v + l_2 \sin\theta_2}\right] \tag{13}$$

Por lo tanto:

$$\theta_3 = (\theta_2 + \theta_3) - \theta_2 \tag{14}$$