第五章 数学形态学图像处理

- 数学形态学的发展历史及基本概念
- 数学形态学的数学基础
- 二值形态学基本运算
- 灰度图像形态学处理
- 数学形态学图像处理应用

本章概要

上课3学时

作业1学时

数学形态学的历史及基本概念

- 数学形态学(mathematical morphology, MM)：以形态为基础对图像进行分析的一类方法。
- 基本思想:用具有一定形态的结构元（Structuring Element, SE)，去度量和提取图像中的对应特征。
- 发展起源：
  - 1964年Jean Serra提出了形态学表达式、66年提出Mathematical Morphology 概念
  - 1982年Jean Serra主编“Image Analysis and Mathematical Morphology”一书
- 数学形态学处理的基本步骤
  - 根据物体结构模式选择合适的结构元B
  - 选择合适的形态学处理突出所需的信息
- 结构元B非常关键，选取的原则
  - 几何上简单且有界、凸性子集
  - 1通常表示选取，0通常表示不选

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1_{\Delta} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1_{\Delta} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

有代表性的结构元B, Δ表示结构元的原点

数学形态学的数学基础

● **集合论的一些基本概念：**

—元素属于、不属于、空集

令A是Z^2中的一个集合，如果a是其中的一个元素，称a属于A，并记作：$a \in A$, 否则，称a不属于A，记为：$a \notin A$，如A中没有任何元素，称A为空集：$\varnothing$

—集合之间的关系：子集、并集、交集

$$A \subseteq B,\ C = A \cup B,\ C = A \cap B$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1_{\Delta} \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} 1_{\Delta} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

—集合的不相连（互斥）、补集、差集

$$A \cap B = \varnothing,\ A^c = \{a \mid a \notin A\},\ A - B = \{c \mid c \in A, c \notin B\} = A \cap B^c = A \backslash B$$

—集合的反射或转置（相对某个中心点） $\hat{B} = \{w \mid w = -b, b \in B\}$

集合的移位（相对原点） $(A)_z = \{c \mid c = a + z, a \in A\}$

^ :caret, 卡

集合平移

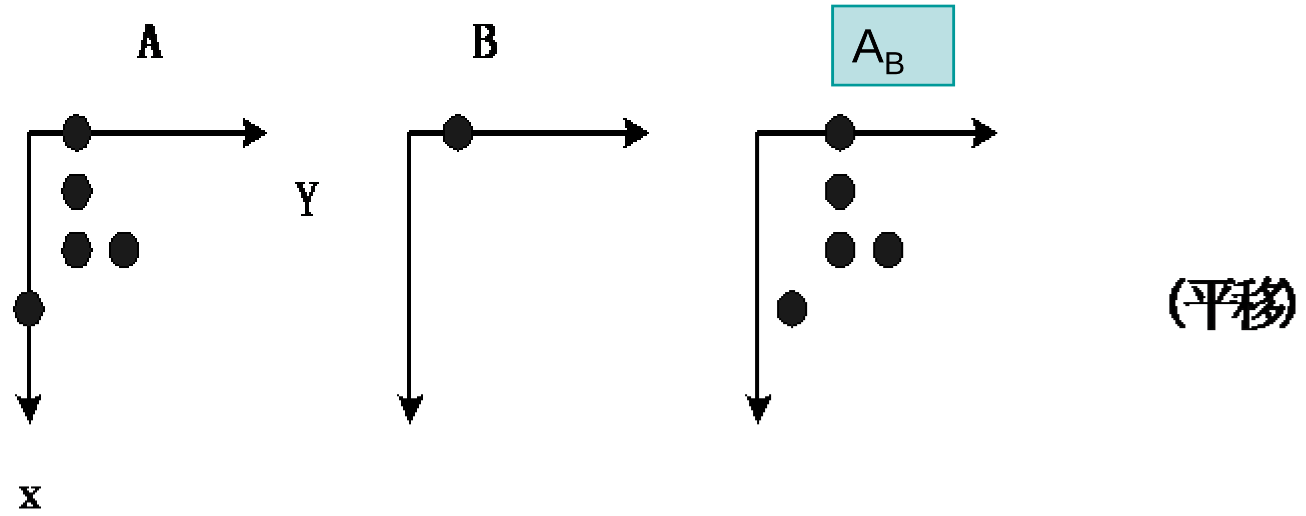
$A, x \subseteq E^N$，A平移x记作A_x，定义为

$$A_x = \left\{ c \subset E^N, c = a + x, \forall a \in A \right\}$$

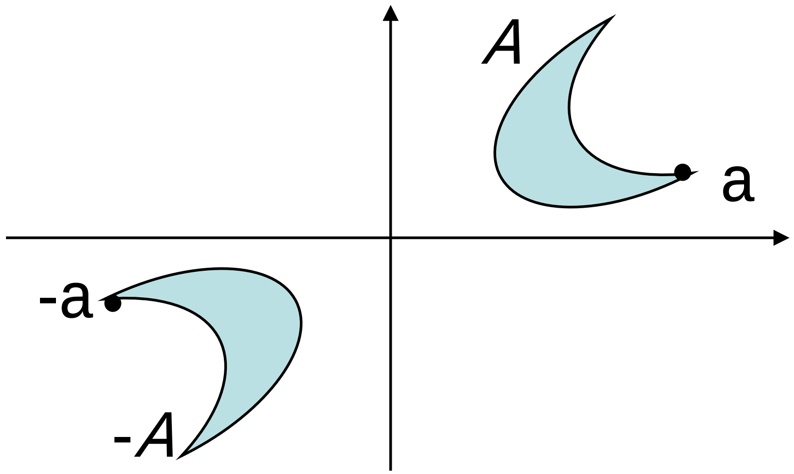
其中A_B表示$x = B$时的平移。

例：$A = \left\{ (0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0) \right\}, x = \left\{ (0,1) \right\}$

则$A_x = \left\{ (0,2), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1) \right\}$



集合反射或转置图解



相对原点转180º，实际的转置或反射点为结构元的原点

二值形态学基本运算

- 膨胀 (dilation)
- 腐蚀 (erosion)
- 开 (opening)
- 闭 (closing)
- 击中与否变换 (hit-or-miss)

二值形态学基本运算

- **膨胀：假定A和B是Z²上的两个集合，把A被B（结构元素）膨胀定义为**

$$A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq NULL\}$$ B反转后的位移与A相交不为空的像素设为1

- **腐蚀：假定A和B是Z²上的两个集合，把A被B腐蚀定义为**

$$A \Theta B = \{z \mid (B)_z \subseteq A\}$$ B为1的元素与A的当前邻域中所有1元素完全一致才为1

- **开：A对结构元B的开操作为，用同一结构元先腐蚀再膨胀**

$$A \circ B = (A \Theta B) \oplus B$$

- **闭：A对结构元B的闭操作为，用同一结构元先膨胀再腐蚀**

$$A \bullet B = (A \oplus B) \Theta B$$

- **击中与否变换：A对结构元B的该变换为如下式**

$$A \# B = (A \Theta B_1) \cap (A^c \Theta B_0)$$ A中的B_1部分及A^c中的B_0部分完全一致才为1，精确定位

其中B_1是B中为1的元素集合，B_0是B中为0的元素集合，B中还可含有非0或1的元素，它们对该变换无影响，B_1与B_0具有相同的原点；不考虑B_0影响时，退化为腐蚀运算

A对B_1腐蚀、A^c对B_0腐蚀，都为1的像素才为1

二值形态学基本运算：实现细节

对结构元B的一些标注：

1）实现时结构元B通常为长方形矩阵，含有n_x乘n_y个元素，原点为(i_0, j_0);B的元素记为$b_{ij}(i=0, \ldots, n_x-1; j=0, \ldots, n_y-1)$. b_{ij}取值可为0(不要选的元素或击中与否变换对背景的选择)、1(要选的元素)、*（任意或不参与运算的元素）。

2）对B求转置或反射（膨胀需要）$\hat{B}$，原来的(i,j)变成$(2i_0-i,2j_0-j)$，原点依旧为(i_0, j_0)。对原点对称的结构元满足 $\hat{B} = B$， 即转置后保持不变

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1_{\Delta} \end{bmatrix} \hat{B} = \begin{bmatrix} 1_{\Delta} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1_{\Delta} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1_{\Delta} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

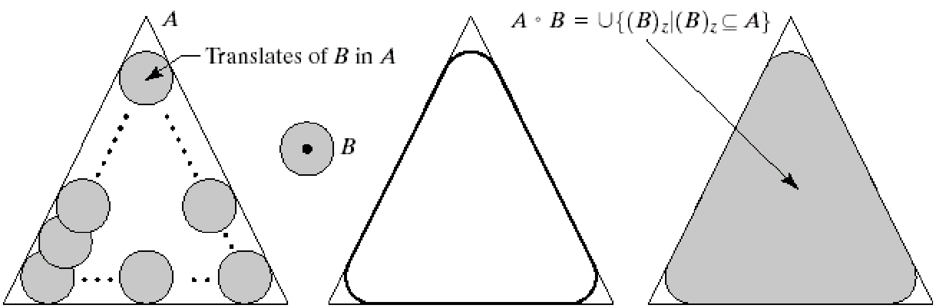
（**(i,j)与(i',j')对（i_0,j_0)对称，满足$2i_0=i+i'$, $2j_0=j+j'$)**

3）实际的图像对结构元的操作，利用卷积或局部掩膜运算实现

二值形态学基本运算效果解释

开运算通常对图像轮廓进行平滑，使狭窄的“地峡”形状断开，去掉细小的凸起。

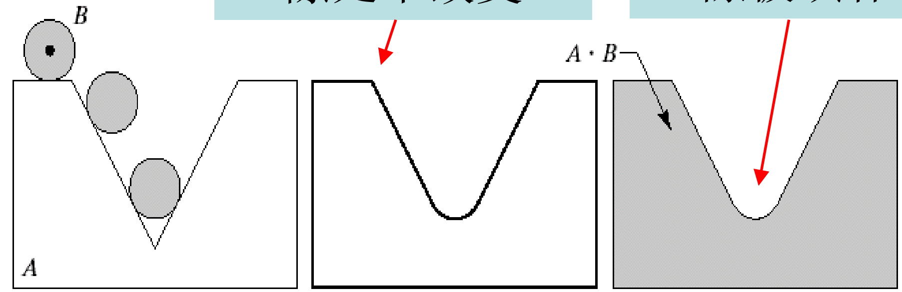
闭运算也是趋向于平滑图像的轮廓，但与开运算相反，它一般使窄的断开部位和细长的沟熔合，填补轮廓上的间隙。



$A \circ B$

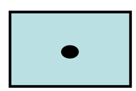
尖锐凸起但无缝隙处不改变

尖锐凸起的缝隙被填补

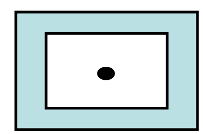


$A \bullet B$

●表原点，绿色区域表为1的结构元



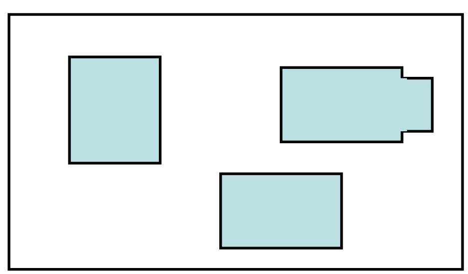
击中结构元素

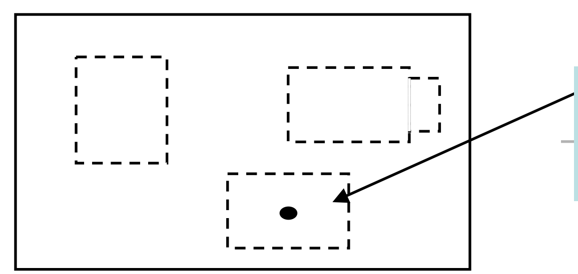


击不中结构元素

利用击中与否变换识别物体：

- ●同时考虑了前景与背景的形状
- ●能精确定位





只有这一点被选中

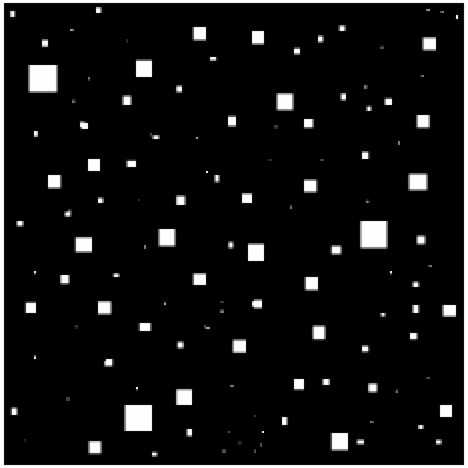
二值形态学处理的一些例子

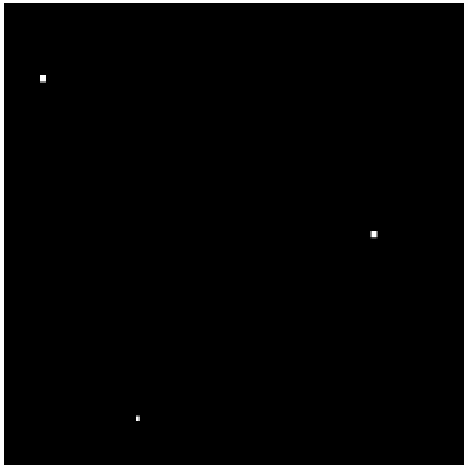
- ✓ 使用腐蚀消除图像的细节部分，产生滤波器的作用

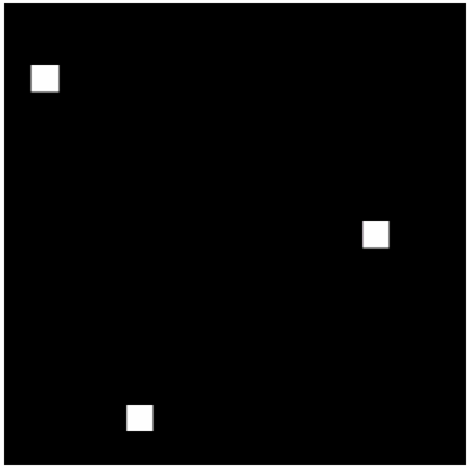
包含边长为1,3,5,7,9和15像素正方形的二值图像

使用13×13像素大小的结构元素腐蚀原图像的结果

使用13×13像素大小的结构元素膨胀图b，恢复原来15×15尺寸的正方形







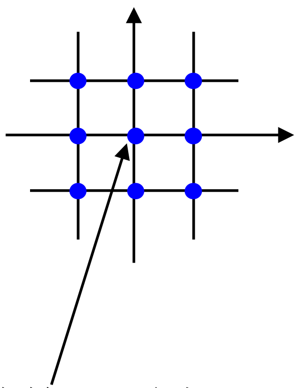
腐蚀+膨胀

消除比结构元小的区域

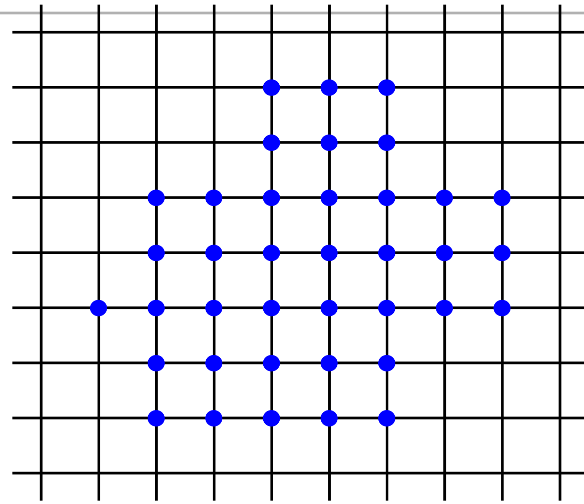
比结构元大的区域不变大，形状趋于与结构元一致

二值形态学处理的一些例子（形态学梯度）

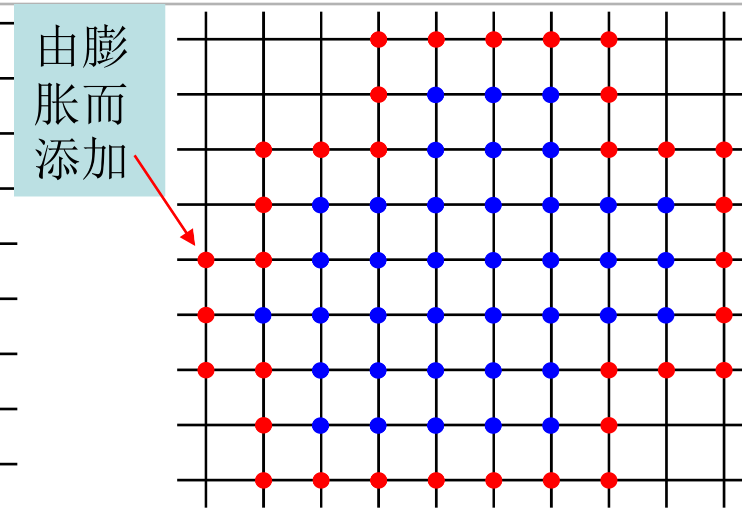
用原点强邻接像素模板得到强连通边界。



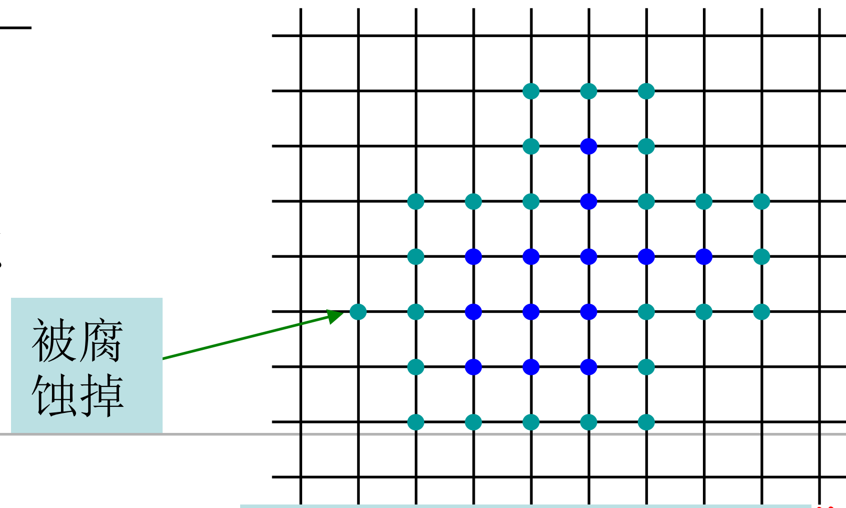
结构元原点



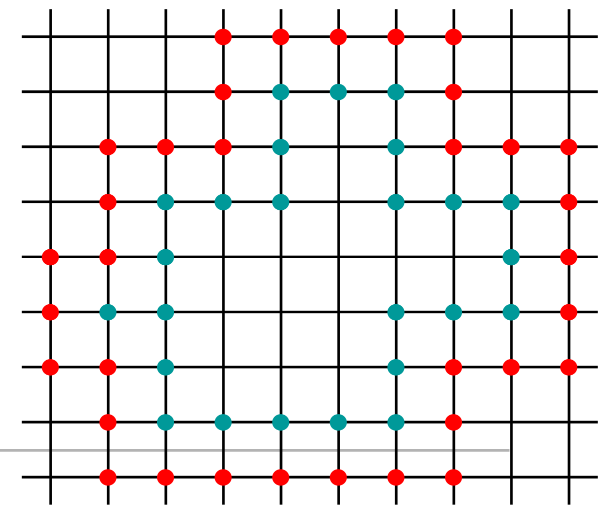
(a) 输入图像



(b) 膨胀/强连通外边界



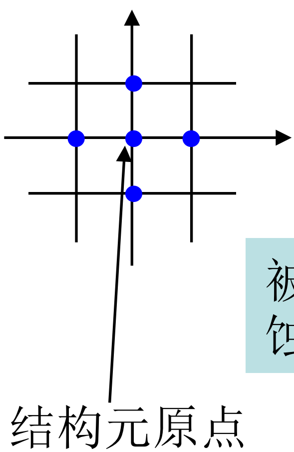
(c) 腐蚀/强连通内边界

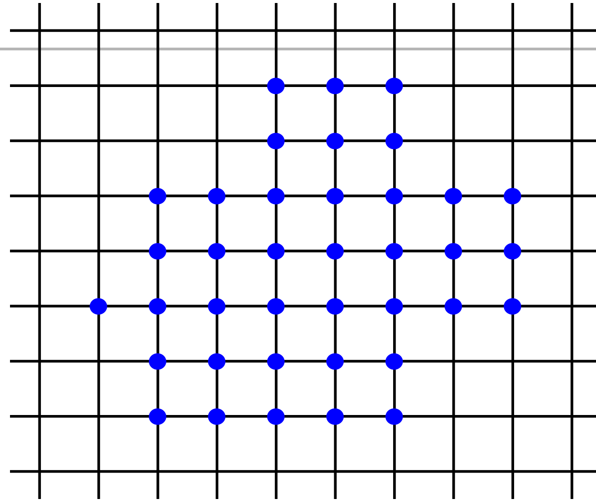


(d) 形态学梯度

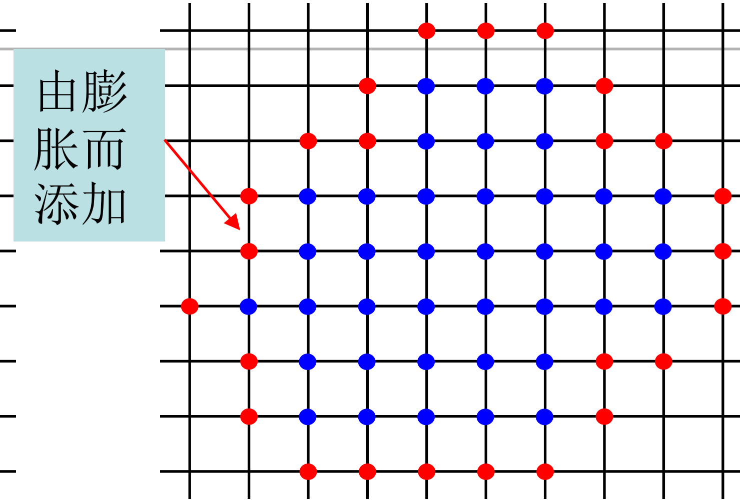
二值形态学处理的一些例子（形态学梯度）

用原点弱邻接像素模板得到弱连通边界。

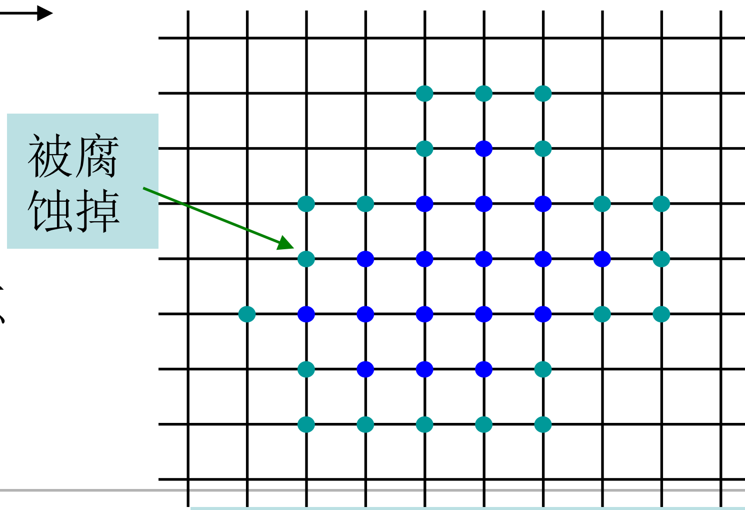


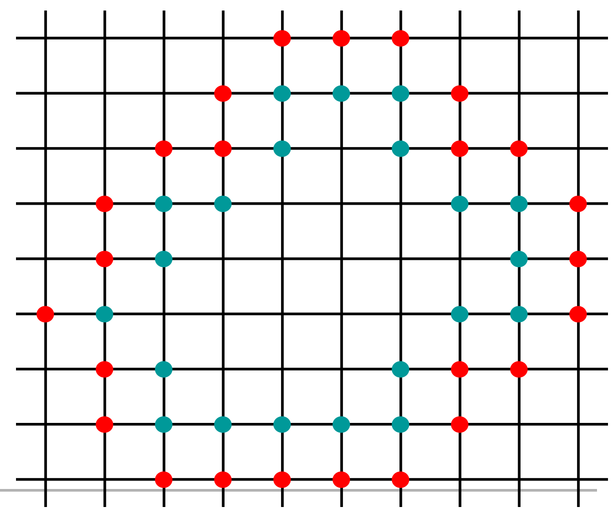


(a) 输入图像



(b) 膨胀/弱连通外边界





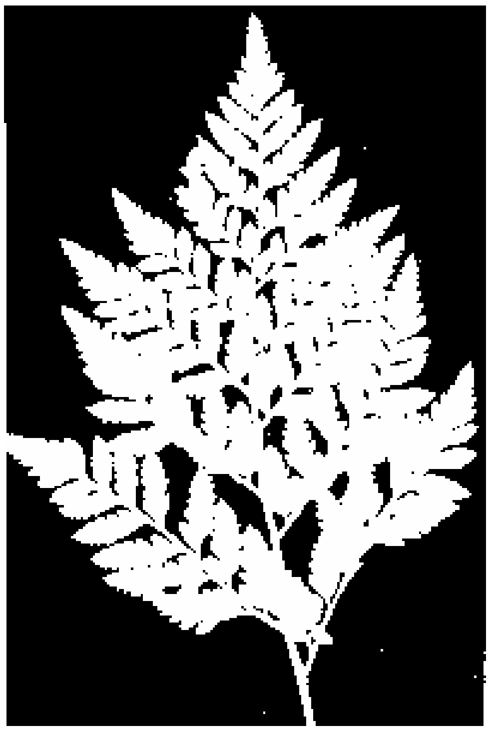
(c) 腐蚀/弱连通内边界

(d) 形态学梯度：膨胀-腐蚀

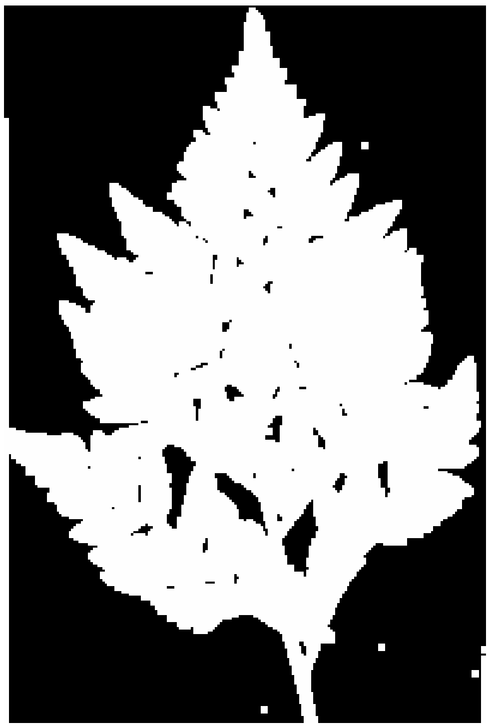
二值形态学处理的一些例子

结构元大小对膨胀的影响

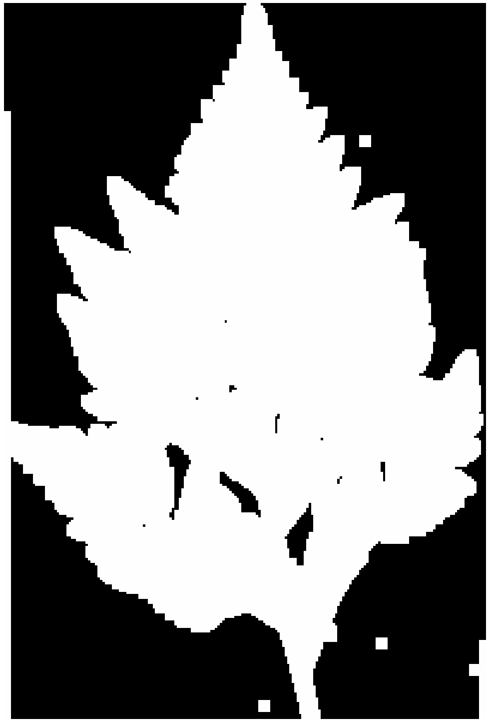
E1=3*3方形结构元　E2=5*5方形结构元



原图



E1膨胀后图像



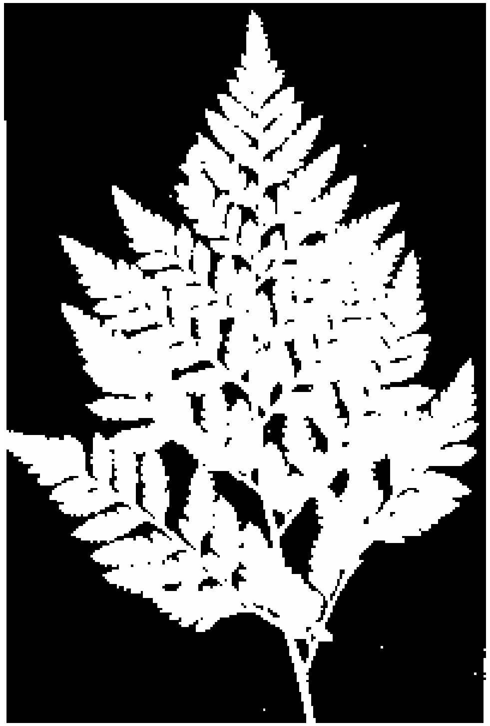
E2膨胀后图像

结构元越大，通过膨胀，在原图像的孔洞或外边缘附近被添加的像素越多

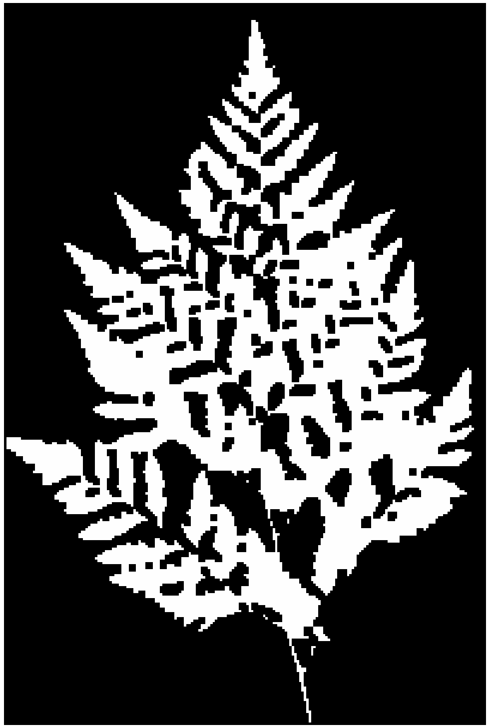
二值形态学处理的一些例子

结构元大小对腐蚀的影响

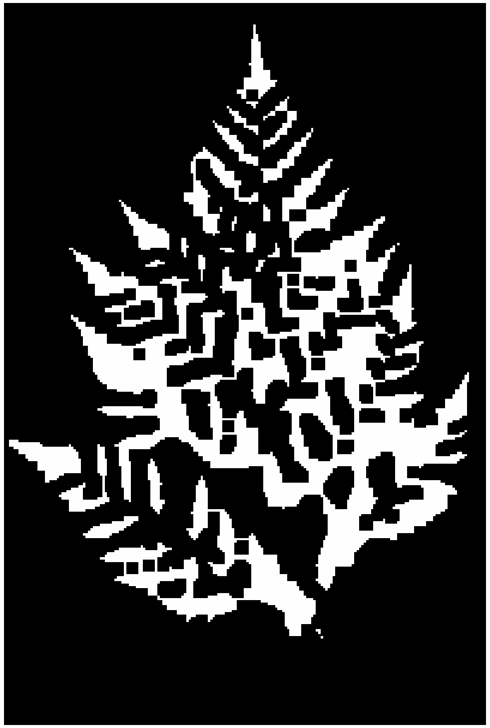
E1=3*3方形结构元　E2=5*5方形结构元



原图



E1腐蚀后图像



E2腐蚀后图像

结构元越大，通过腐蚀，在原图像的内部或内边界处被减少的像素越多

形态学算法用于灰度图像处理

- 灰度膨胀
- 灰度腐蚀
- 灰度开运算
- 灰度闭运算
- 灰度形态学处理的应用

灰度图像膨胀

邻域的大小及形状
由结构元定

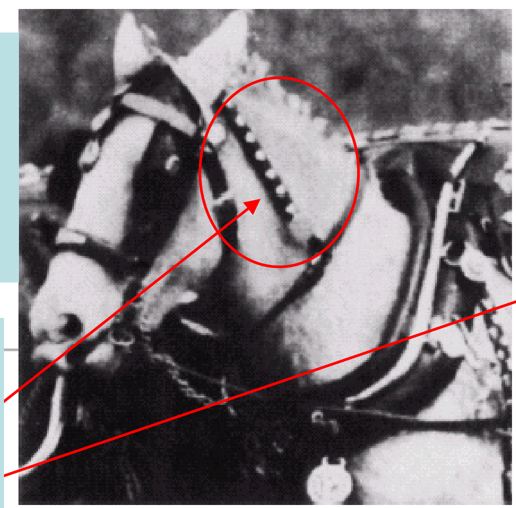
- 结构元b(x, y)对灰度图像f(x, y)的灰度膨胀定义为: (邻域内的灰度最大值)

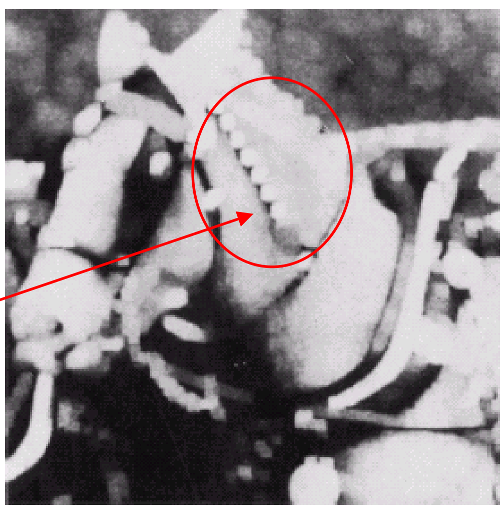
$$(f \oplus b)(s,t)=\max\{f(s-x,t-y)\mid(s-x,t-y)\in D_f;(x,y)\in D_b\}$$

- 与二值图像的膨胀相似，只是这里变成了取最大值；二值图像的膨胀可看做灰度图像膨胀的特例（最大值为1）。
- 实现与二值图像膨胀相似，对结构元b求转置或反转 $\hat{b}$，然后求卷积。
- b中结构元素取1或0，是卷积要考虑的项；不考虑的项的结构元素可为非0且非1的任意正整数，如2。
- 当b的原点取值为1时，膨胀后的图像灰度不小于原来的图像灰度。
- 由于最大值具有可分解性，可对结构元进行分解以提高运算速度。

最大值可分解：
区域内的全局
最大=所有局部
最大中的最大

箭头所指区域
灰度明显改变：
原亮区域扩大





$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1_{\Delta} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

课程

5*5结构元

灰度图像腐蚀

邻域的大小及形状
由结构元定

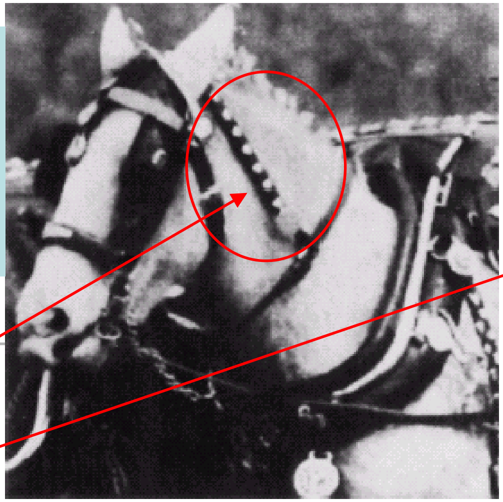
- 结构元b(x, y)对灰度图像f(x, y)的灰度腐蚀定义为： (邻域内的灰度最小值)

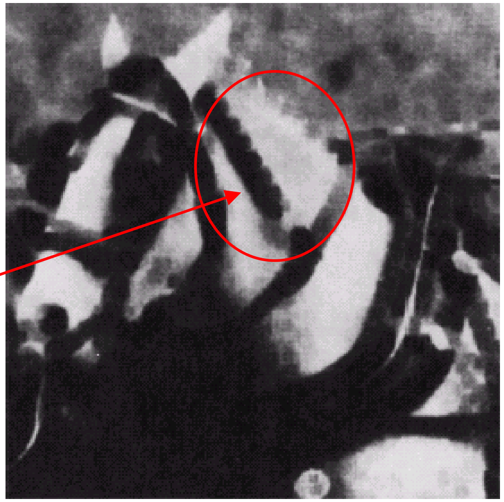
$$(f \Theta b)(s,t) = \min\{ f(s+x, t+y) \mid (s+x, t+y) \in D_f; (x,y) \in D_b \}$$

- 与二值图像的腐蚀相似，只是这里变成了取最小值；二值图像的腐蚀可看做灰度图像腐蚀的特例（最小值为0）。
- 实现与二值图像腐蚀相似，对结构元b求卷积。
- b中结构元素取1或0，是卷积要考虑的项；不考虑的项的结构元素可为非0且非1的任意正整数，如2。
- 当b的原点取值为1时，腐蚀后的图像灰度不大于原来的图像灰度。
- 由于最小值具有可分解性，可对结构元进行分解以提高运算速度。

最小值可分解：
区域内的全局
最小=所有局部
最小中的最小

箭头所指区域
灰度明显改变：
原暗区域扩大





$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1_{\Delta} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

.课程

5*5结构元

灰度图像开运算和闭运算

- 开运算：用同一结构元先腐蚀再膨胀 $f \circ b = (f \Theta b) \oplus b$
- 闭运算：用同一结构元先膨胀后腐蚀 $f \bullet b = (f \oplus b) \Theta b$
- 开、闭运算对补集和结构元转置操作成对偶关系 $(f \bullet b)^c = f^c \circ \hat{b}$
- 开运算通常用于去除（相对于结构元尺寸而言）小的亮细节，而保留总体的灰度及大的亮的区域。
- 闭运算通常用于去除（相对于结构元尺寸而言）小的暗细节，而保留总体的灰度及大的暗的区域。

原图　　开运算　　闭运算

红色区域内的暗区域变大了(开)

红色区域内的亮区域变大了(闭)

5*5方形结构元

结构元的分解

- 结构元b(x, y)的分解是基于如下的事实（可以证明）

$$(f(x,y)\Theta B_1)\Theta B_2 = f(x,y)\Theta(B_1 \oplus B_2)$$

$$(f(x,y)\oplus B_1)\oplus B_2 = f(x,y)\oplus(B_1 \oplus B_2)$$

- 这表明连续的膨胀或腐蚀操作可以转化为一次膨胀或腐蚀操作，而一次操作的结构元是所用结构元B_1对B_2的膨胀。
- 实际中快速实现是反过来的，即对大结构元的腐蚀或膨胀操作将其转化为对小结构元的多次操作。下面的例子说明了这样做的优势！
- B_1、B_2分别是水平及垂直的结构元，各含5个像素，结构元原点在中间，

$B = B_1 \oplus B_2$

- 我们来比较一下计算量：

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1_{\Delta} & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1_{\Delta} \\ 1 \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1_{\Delta} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

  用两个小的结构元 5+5=10（每个像素）求最大/小
  用一个大的结构元 5*5=25 (每个像素）求最大/小
  用分解的小的结构元要省时得多(2.5倍）！
- 常用的全为1的矩形结构元可以分解。

灰度图像的腐蚀与膨胀例

原图　　　　腐蚀　　　　膨胀

结构元 为5*5全1的结构，原点在中心

Original

Eroded

Dilated

腐蚀将放大暗区域

膨胀将放大亮区域

灰度形态学处理的应用

- 形态学平滑
- 形态学梯度
- Top-hat 顶帽变换
- 纹理分割
- 粒子测度 (granulometry)

灰度形态学处理应用：形态学平滑

开运算后接一闭运算操作，用于消除图像中小于结构元的亮和暗的结构

注意：这是非线性运算
结果好坏很大程度上取决于结构元的选取

原图

闭+开，结构元5*5全1

平滑后，

无小于结构元大小的亮区域了

也无小于结构元大小的暗区域了

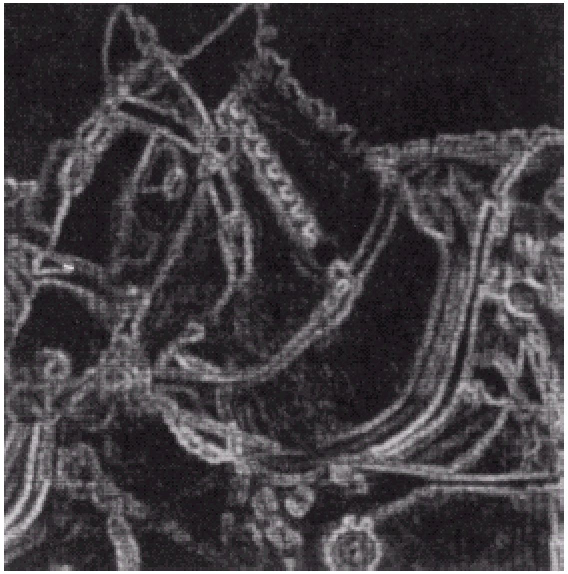
灰度形态学处理应用：形态学梯度

- 基于形态学的梯度定义（不唯一）$g(x,y)=(f(x,y)\oplus b)-(f(x,y)\Theta b)$

可能的定义：膨胀-腐蚀，膨胀-原图，原图-腐蚀

- 效果：突出图像中灰度尖锐过渡的区域；当使用对称结构元时，该算法对边缘方向性的依赖比空间增强技术中的梯度算子更小。
- 讨论：依赖于结构元，基于膨胀与腐蚀的高梯度区域被加宽。

原图



膨胀与腐蚀的差

灰度形态学处理应用：顶帽变换

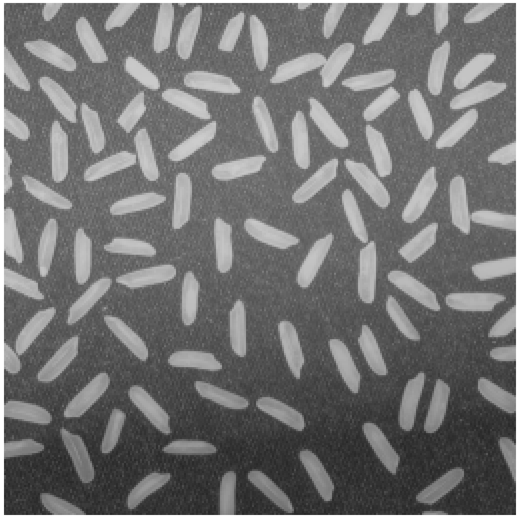
有两种顶帽变换(Top Hat Transform)（原图与开/闭运算的差）

白顶帽变换（WTH）： $WTH(f_B(x,y)) = f(x,y) - f(x,y) \circ B$

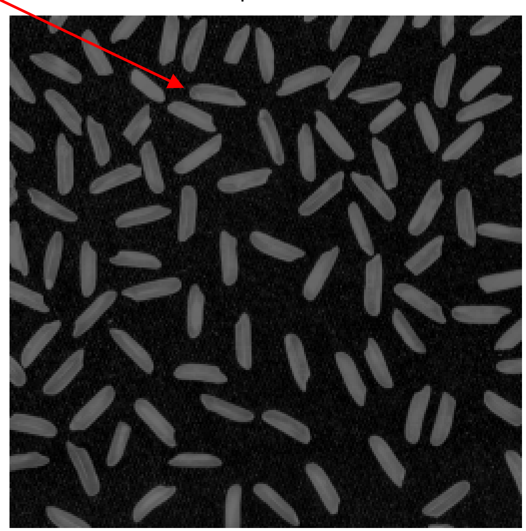
黑顶帽变换（BTH）： $BTH(f_B(x,y)) = f(x,y) \bullet B - f(x,y)$

白顶帽变换使**亮细节得到加强**。（消除不均匀的大背景，结构元大于亮细节尺寸）

黑顶帽变换使**暗细节得到增强**。（结构元大于暗细节的尺寸）



原图



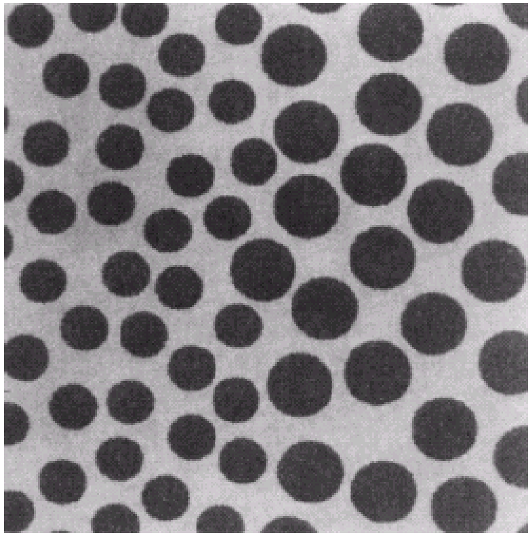
白顶帽变换

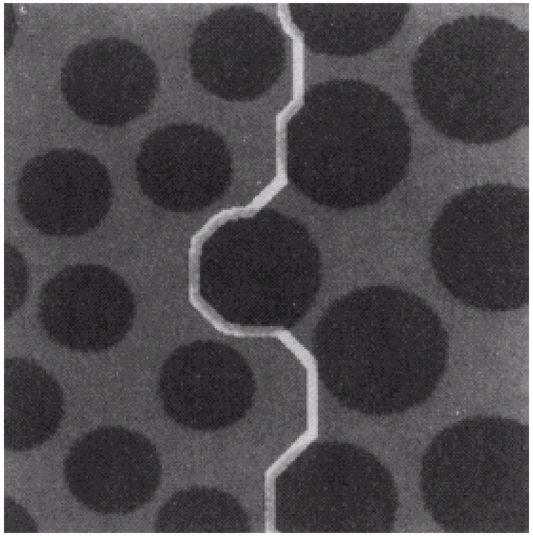
灰度形态学处理应用：增强或抑制灰度结构

- **先看处理任务：分开下图中由不同大小圆球组成的两个纹理区域。**
- **实现方法：**
  - 用与图像左边球大小相当（略大）的结构元对图像进行闭操作来消除小球(此时左边的球相当于暗细节)，左边只留下亮背景，右边基本不变。
  - 用大于大球间距离的结构元对上述结果做开运算，此时图像右边的背景区域（即亮细节）被消除，致使图像右边全成了黑色。这样就得到左边为白色，右边为黑色的一幅简单图像。
  - 简单的灰度阈值操作就产生右下图的边界（白折线）。

讨论

- 能够选择合适的结构元进行结构的区分是关键
- 基本的原理是开能连接低信号区域、闭能连接高信号区域、膨胀能放大高信号区域、腐蚀能放大低信号区域





灰度形态学处理应用：粒子测度

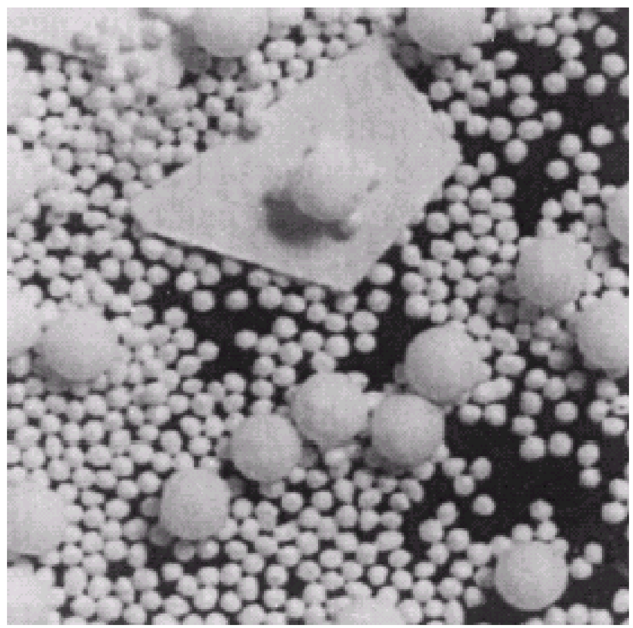
- ■ **粒子测度是一种对图像中粒子的尺度分布进行测量的操作。**
- ■ **原理：开操作对输入图像中与结构元尺度相似的粒子的亮区域影响最大。**

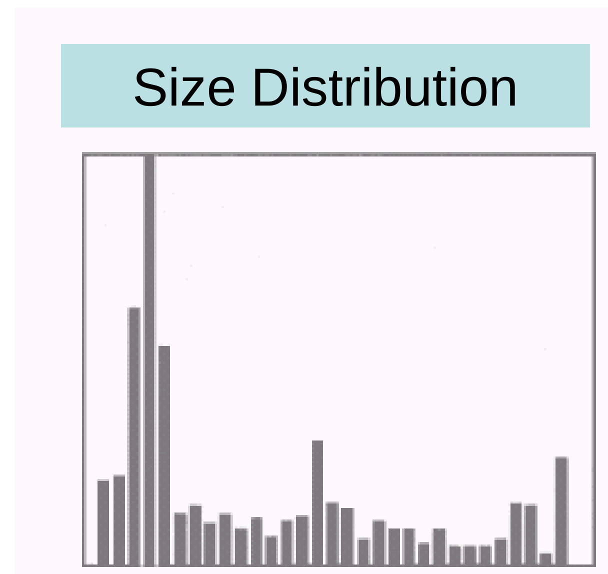
步骤

- ➢ 用尺寸增加的结构元对图像进行开运算；
- ➢ 对每一次开运算，原图像减开运算得到差图像. (主要反映这一尺度下的亮区域粒子)
- ➢ 把所得的所有差规一化，并根据归一化差构建粒子尺寸分布的直方图。

讨论

- ➢ 这是数学形态学的一种典型应用，即分离尺度的分布。
- ➢ 对于低亮度的尺度分布，可考虑结构元逐步增加的闭运算，与原图相减（即黑顶帽变换）。





差的面积除以结构元大小得到分布频率

数学形态学综合题：粒子测度实现（1学时）

对图像Chapter5_1.bmp，计算粒子大小分布，并画出分布图

提示：

1) 选择合适的开运算结构元大小及增量步长，结构元取元素全为1的正方形结构元
2) 原始图像与图像开运算后相减后，还要做灰度阈值处理，只考虑哪些灰度差足够大的区域
3) 分布频率对应于灰度显著变化的区域的面积除以结构元大小

WTH为白顶帽变换