$[1, n]$ в $[1, n]$, при этом коэффициент μ_α определяется суммой

$$\mu_\alpha = \sum_{\epsilon_i \in \{0,1\}} (-1)^{\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_n} \epsilon_{\alpha(1)} \ldots \epsilon_{\alpha(n)}.$$

Если α — перестановка, коэффициент μ_α равен $(—1)^n$, поскольку единственный ненулевой член суммы — это тот, для которого все ϵ_i, равны 1. В противном случае можно разложить μ_α следующим образом:

$$\sum_{\epsilon_i, i \neq k} (-1)^{\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_n} \sum_{\epsilon_k = 0,1} (-1)^{\epsilon_k} \epsilon_{\alpha(1)} \ldots \epsilon_{\alpha(n)},$$

где k — элемент из $[1, n]$, который не принадлежит образу α, и хорошо видно, что внутренний член (сумма по ϵ_k) равен нулю; это доказывает, что μ_α в этом случае равно нулю. Второе искомое выражение (суммы которого записываются на множествах) просто выводится из первого, исключением ненулевых ϵ_i, появляющихся в сумме.

$$\sum\nolimits_{E'} = \sum\nolimits_{E} + (-1)^{|E'|} \prod_{1 \leq i \leq n} S_i(E'). \tag{7}$$

Вклад наименьшего элемента $\emptyset$ в эту сумму — нулевой; значит, начнем с его последователя, который может быть $\{1\}$, $\{n\}$ или какое-нибудь одноэлементное множество в соответствии с порядком, заданным на $[1, n]$. Можно заметить, что $S_i(E') = S_i(E) \pm a_{ij}$, где $\{j\} = E \triangle E'$.

В этой записи, как в алгоритме 12, $\pm$ должен пониматься как $+$, если $E \subset E'$ и $-$, если $E' \subset E$.

Чтобы оценить $\sum_{E'}$, исходя из $\sum_E$ с использованием соотношения (7), нужно осуществить n сложений (для подсчета каждого $S_i(E')$), затем $n-1$ перемножений: $S_1(E') \times \cdots \times S_n(E')$, и, наконец, 1 сложение. Имеем $2^n - 2$ операций для осуществления (7), при этом первый член $\sum = -\prod_{1 \leq i \leq n} \alpha_{in}$ требует $n-1$ перемножений; это доказывает сформулированный результат о сложности. Сложность $O(n2^n)$ значительна, но остается того же порядка, что и сложность, индуцированная определением ($n!(n-1)$ перемножений и $n!-1$ сложений). Формула Стирлинга позволяет сравнить эти два значения сложности: $n \cdot n!/(n \cdot 2^n) \approx (n/2e)^n \sqrt{2\pi n}$.

22. Перманент матрицы (продолжение)

a. Правая часть может рассматриваться как многочлен (от переменных a_{ij}), равный $\sum_\alpha \mu_\alpha a_{1\alpha(1)} ... a_{n\alpha(n)}$, где сумма распространяется на все отображения [1, n] в [1, n]. Коэффициент μ_α задан формулой

$$\mu_\alpha = \sum_\omega \mu_\alpha(\omega) \quad \text{с} \quad \mu_\alpha(\omega) = \omega_1 \,...\, \omega_{n-1}\omega_{\alpha(1)} \,...\, \omega_{\alpha(n)},$$

в которой полагаем $\omega_n = 1$. Если α — перестановка, то каждое $\mu_\alpha(\omega)$, присутствующее в сумме μ_α, равно 1 и, следовательно, $\mu_\alpha = 2^{n-1}$. Напротив, если α не является перестановкой, то сумма μ_α — нулевая. Действительно, образ α отличен от [1, n], и различаем два случая:

(i) $\exists\ k < n$, не принадлежащий образу α,

(ii) $\exists\ k < n$, дважды полученный из α.

В обоих случаях члены $\mu_\alpha(\omega)$, присутствующие в сумме, группируются попарно, один соответствуя $\omega_k = 1$, другой — $\omega_k = -1$, и взаимно уничтожаются (в случае (ii) $\mu_\alpha(\omega) = \omega_k$).

b. Формула пункта **a** может быть записана в следующем виде:

$$\frac{per A}{2} = \sum \omega_1 \,...\, \omega_{n-1} \prod_{1 \leq i \leq n} (a_{in} + \omega_1 a_{i1} + \cdots + \omega_{n-1} a_{in-1})/2.$$

Как и в предыдущем упражнении, вычисление перманента получается генерированием перебора при линейной упорядоченности на $\{-1, 1\}^{n-1}$, в которой два последовательных элемента отличаются только одной компонентой. Если для $\omega \in \{-1, 1\}^{n-1}$ и $i \leq n$ положить

$$S_i(\omega) = (a_{in} + \omega_1 a_{i1} + \cdots + \omega_{n-1} a_{in-1})/2,$$