

$[1, n]$  в  $[1, n]$ , при этом коэффициент  $\mu_\alpha$  определяется суммой

$$\mu_\alpha = \sum_{\epsilon_i \in \{0,1\}} (-1)^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n} \epsilon_{\alpha(1)} \dots \epsilon_{\alpha(n)}.$$

Если  $\alpha$  — перестановка, коэффициент  $\mu_\alpha$  равен  $(-1)^n$ , поскольку единственный ненулевой член суммы — это тот, для которого все  $\epsilon_i$ , равны 1. В противном случае можно разложить  $\mu_\alpha$  следующим образом:

$$\sum_{\epsilon_i, i \neq k} (-1)^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n} \sum_{\epsilon_k=0,1} (-1)^{\epsilon_k} \epsilon_{\alpha(1)} \dots \epsilon_{\alpha(n)},$$

где  $k$  — элемент из  $[1, n]$ , который не принадлежит образу  $\alpha$ , и хорошо видно, что внутренний член (сумма по  $\epsilon_k$ ) равен нулю; это доказывает, что  $\mu_\alpha$  в этом случае равно нулю. Второе искомое выражение (суммы которого записываются на множествах) просто выводится из первого, исключением ненулевых  $\epsilon_i$ , появляющихся в сумме.

**b.** // here goes some text and code

$$\sum_{E'} = \sum_E + (-1)^{|E'|} \prod_{1 \leq i \leq n} S_i(E'). \quad (7)$$

Вклад наименьшего элемента  $\emptyset$  в эту сумму — нулевой; значит, начнем с его последователя, который может быть  $\{1\}$ ,  $\{n\}$  или какое-нибудь одноэлементное множество в соответствии с порядком, заданным на  $[1, n]$ . Можно заметить, что  $S_i(E') = S_i(E) \pm a_{ij}$ , где  $\{j\} = E \triangle E'$ .

В этой записи, как в алгоритме 12,  $\pm$  должен пониматься как  $+$ , если  $E \subset E'$  и  $-$ , если  $E' \subset E$ .

Чтобы оценить  $\sum_{E'}$ , исходя из  $\sum_E$  с использованием соотношения (7), нужно осуществить  $n$  сложений (для подсчета каждого  $S_i(E')$ ), затем  $n - 1$  перемножений:  $S_1(E') \times \dots \times S_n(E')$ , и, наконец, 1 сложение. Имеем  $2^n - 2$  операций для осуществления (7), при этом первый член  $\sum = -\prod_{1 \leq i \leq n} \alpha_{in}$  требует  $n - 1$  перемножений; это доказывает сформулированный результат о сложности. Сложность  $O(n2^n)$  значительна, но остается того же порядка, что и сложность, индуцированная определением ( $n!(n - 1)$  перемножений и  $n! - 1$  сложений). Формула Стирлинга позволяет сравнить эти два значения сложности:  $n \cdot n! / (n \cdot 2^n) \approx (n/2e)^n \sqrt{2\pi n}$ .

## 22. Перманент матрицы (продолжение)

**а.** Правая часть может рассматриваться как многочлен (от переменных  $a_{ij}$ ), равный  $\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} a_{1\alpha(1)} \dots a_{n\alpha(n)}$ , где сумма распространяется на все отображения  $[1, n]$  в  $[1, n]$ . Коэффициент  $\mu_{\alpha}$  задан формулой

$$\mu_{\alpha} = \sum_{\omega} \mu_{\alpha}(\omega) \quad \text{с} \quad \mu_{\alpha}(\omega) = \omega_1 \dots \omega_{n-1} \omega_{\alpha(1)} \dots \omega_{\alpha(n)},$$

в которой полагаем  $\omega_n = 1$ . Если  $\alpha$  — перестановка, то каждое  $\mu_{\alpha}(\omega)$ , присутствующее в сумме  $\mu_{\alpha}$ , равно 1 и, следовательно,  $\mu_{\alpha} = 2^{n-1}$ . Напротив, если  $\alpha$  не является перестановкой, то сумма  $\mu_{\alpha}$  — нулевая. Действительно, образ  $\alpha$  отличен от  $[1, n]$ , и различаем два случая:

- (i)  $\exists k < n$ , не принадлежащий образу  $\alpha$ ,
- (ii)  $\exists k < n$ , дважды полученный из  $\alpha$ .

В обоих случаях члены  $\mu_{\alpha}(\omega)$ , присутствующие в сумме, группируются попарно, один соответствуя  $\omega_k = 1$ , другой —  $\omega_k = -1$ , и взаимно уничтожаются (в случае (ii)  $\mu_{\alpha}(\omega) = \omega_k$ ).

**б.** Формула пункта **а** может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\text{per} A}{2} = \sum \omega_1 \dots \omega_{n-1} \prod_{1 \leq i \leq n} (a_{in} + \omega_1 a_{i1} + \dots + \omega_{n-1} a_{in-1}) / 2.$$

Как и в предыдущем упражнении, вычисление перманента получается генерированием перебора при линейной упорядоченности на  $\{-1, 1\}^{n-1}$ , в которой два последовательных элемента отличаются только одной компонентой. Если для  $\omega \in \{-1, 1\}^{n-1}$  и  $i \leq n$  положить

$$S_i(\omega) = (a_{in} + \omega_1 a_{i1} + \dots + \omega_{n-1} a_{in-1}) / 2,$$

то можно, благодаря перебору на  $\{-1, 1\}^{n-1}$ , вычислить последовательно  $\sum_{\omega} = \sum_{\rho \leq \omega} \dots$ , используя формулу

$$\sum_{\omega'} = \sum_{\omega} + \omega'_1 \dots \omega'_{n-1} \prod_{1 \leq i \leq n} S_i(\omega'), \quad (8)$$

где  $\omega'$  — последователь для  $\omega$  в  $\{-1, 1\}^{n-1}$ .

Если  $j$  является индексом, по которому различаются два слова  $\omega$  и  $\omega'$ , то сумма  $S_i(\omega')$  вычисляется, исходя из  $S_i(\omega)$ , через  $S_i(\omega') = S_i(\omega) - a_{ij}$ , если  $\omega_j = 1$ , и через  $S_i(\omega') = S_i(\omega) + a_{ij}$ , если  $\omega_j = -1$ .

*// here goes some code*

**Алгоритм 13.** Вычисление перманента в кольце, где 2 обратимо

С практической точки зрения для генерации адекватного перебора  $\{-1, 1\}^{n-1}$ , выбираем соответствие между  $\{0, 1\}$  и  $\{-1, 1\}$  вида  $\epsilon \mapsto (-1)^\epsilon$  и классическую генерацию кода Грея на  $\{0, 1\}^{n-1}$ , что достигается с помощью алгоритма 13. Мультипликативная сложность получается, если заметить, что нужно вычислить  $2^n - 1$  членов  $\sum_{\omega}$ , каждый из которых требует  $n - 1$  перемножений (см. формулу (8)), значит, всего  $2^{n-1}(n - 1)$  произведений, к которым нужно добавить последнее умножение на 2. С точки зрения сложений первоначальный член  $\sum_{(1, \dots, 1)}$  требует  $n(n - 1)$  сложений и  $n$  делений на 2, тогда как общий член  $\sum_{\omega}$  вычисляется, исходя из предыдущего, с помощью  $n$  сложений; наконец, нужно сложить все эти члены, что требует в целом  $n(n - 1) + (2^{n-1} - 1)(n + 1)$  сложений и  $n$  делений на 2. Заметим относительно предыдущего упражнения, что сложность была приблизительно разделена на 2.

с. Рассмотрения полностью аналогичны предыдущему пункту, если только невозможно деление на 2; деление (точное) на  $2^{n-1}$  будет иметь место уже в конце. Результатом является алгоритм 14.

*// here goes some code*

## 23. Массив инверсий подстановки

д. Массив инверсий перестановки  $\alpha$  имеет вид (0, 0, 0, 1, 4, 2, 1, 5, 7). Свойство  $0 \leq \alpha_k < k$  легко получается из того, что имеется точно  $k-1$  целых чисел, заключенных строго между 0 и  $k$ . Массив инверсий возрастающей перестановки интервала  $[1, n]$  есть, очевидно, (0, 0, ..., 0), и таблица для единственной убывающей перестановки — (0, 1, 2, ..., n).

е. Можно использовать тот факт, что  $a_{\alpha(j)}$  есть число индексов таких, что  $i > j$  и  $\alpha(i) < \alpha(j)$ , что приводит к нижеследующему алгоритму:

*// here goes some code*

Сложность полученного способа, конечно, имеет порядок квадрата длины перестановки.

**f.** Пусть  $a$  — элемент из  $[0, 1[ \times [0, 2[ \times \dots \times [0, n[$ . Построим перестановку  $\alpha$ , для которой  $a$  является массивом инверсий, следующим способом:

- элемент  $n$  помещаем в массив, индексированный с помощью  $[1, n]$ , представляющий  $\alpha$ , оставляя  $a_n$  **пустых ячеек** справа от  $n$ ; это означает в точности, что  $\alpha^{-1}(n) = n - a_n + 1$ ;

- затем помещаем  $n - 1$  в массив  $\alpha$ , оставляя  $\alpha_{n-1}$  **пустых ячеек** справа от  $n - 1$ ;

- продолжаем, зная, что на  $k$ -м этапе этого процесса  $k - 1$  величин уже размещены в массиве, следовательно, в массиве  $\alpha$  остается  $n - k$  свободных мест, и, с другой стороны, величина  $\alpha_{n-k}$  строго меньше, чем  $n - k$ .

*// here goes some code*

В алгоритме 15 использована оптимизация: свободные места в массиве, представляющем перестановку  $\alpha$ , отмечены числами 1, что позволяет не помещать это последнее значение в массив, представляющий  $\alpha$ , в конце алгоритма.

## 24. Перебор перестановок транспозициями $(i, i + 1)$

**a.** Рассуждаем индукцией по  $n$ , при этом случаи  $n = 1$  и  $n = 2$  очевидны. С помощью перестановки  $\sigma$  интервала  $[1, n]$  можно построить  $n + 1$  перестановок  $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n+1}$  интервала  $[1, n + 1]$ , где перестановка  $\sigma^i$  получается включением в  $\sigma$  элемента  $n + 1$  на  $i$ -ое место; например,

если  $\sigma = (52413)$ , то

$$\sigma^1 = (\underline{6} \ 5 \ 2 \ 4 \ 1 \ 3), \quad \sigma^2 = (5 \ \underline{6} \ 2 \ 4 \ 1 \ 3), \dots, \\ \sigma^5 = (5 \ 2 \ 4 \ 1 \ \underline{6} \ 3), \quad \sigma^6 = (5 \ 2 \ 4 \ 1 \ 3 \ \underline{6}).$$

Если  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n!}$  и есть такая последовательность перестановок на  $[1, n]$ , то соответствующую последовательность перестановок интервала  $[1, n+1]$  получаем следующим образом:

$$\sigma_1^1, \sigma_1^2, \dots, \sigma_1^{n+1}, \quad \sigma_2^{n+1}, \sigma_2^n, \dots, \sigma_2^1 \\ \sigma_3^1, \sigma_3^2, \dots, \sigma_3^{n+1}, \quad \sigma_4^{n+1}, \sigma_4^n, \dots, \sigma_4^1 \text{ и т.д.}$$

**б.** Действуем индукцией по  $n$ ; знаем, что  $b$  — последующий элемент для  $a$  в знакопеременном лексикографическом порядке — получается изменением *одной* компоненты. Предположим сначала, что эта компонента — последняя; тогда имеем  $b_n = a_n \pm 1$  и  $b_j = a_j$  для  $1 \leq j \leq n-1$ . Если  $i$  — индекс  $n$  в  $\alpha$  (т.е.  $\alpha(i) = n$ ), то имеем  $\beta = \alpha \circ (i, i-1)$  в случае  $b_n = a_n + 1$ , и  $\beta = \alpha \circ (i, i+1)$  в случае  $b_n = a_n - 1$ , при этом запись  $(j, k)$  означает транспозицию индексов  $j$  и  $k$ .

Теперь предположим, что компонента, по которой различаются  $a$  и  $b$ , не является последней. Поскольку  $b$  — последующий элемент для  $a$  в знакопеременном лексикографическом порядке, имеем  $a_n = b_n = 0$  или  $a_n = b_n = n$  и  $b_{[1..n-1]}$  есть последующий элемент для  $a_{[1..n-1]}$  в лексикографическом знакопеременном произведении  $[0, 1] \times [0, 2] \times \dots \times [0, n-1]$ , причем компонентой с самым большим индексом массива инверсий является та, которая меняется быстрее всех во время перебора в лексикографическом знакопеременном порядке. Если  $\alpha'$  (соответственно,  $\beta'$ ) означает перестановку  $[1, n-1]$ , для которой  $a_{[1..n-1]}$  (соответственно,  $b_{[1..n-1]}$ ) массив инверсий, то  $\beta'$  получается из  $\alpha'$  транспозицией двух последовательных элементов (гипотеза индукции). Тогда утверждение верно также и для  $\alpha$  и  $\beta$ , поскольку элемент  $n$  находится в этих перестановках либо на месте  $n$  (случай  $a_n = b_n = 0$ ), либо на месте 1 (случай  $a_n = b_n = n$ ).

**с.** Пусть  $\alpha$  — перестановка интервала  $[1, n]$  и  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  — ее массив инверсий. По предыдущему сигнатура перестановки  $\alpha$  является также сигатурой  $a$  в знакопеременном лексикографическом произведении. Алгоритм вычисления последующего элемента в знакопеременном лексикографическом произведении приводит к алгоритму 16-А.

В начале тела основного цикла этого алгоритма делается попытка опустить элемент  $q$  (применить транспозицию  $(\alpha^{-1}(q) - 1, \alpha^{-1}(q))$  к перестановке  $\alpha$ ) или же поднять его.

Фактически, бесполезно приниматься за предварительное вычисление массива инверсий  $a$ . Достаточно вычислить при необходимости элемент  $a_q$ , что может быть реализовано одновременно с вычислением  $\alpha^{-1}(q)$  благодаря алгоритму 16-В. В этом втором алгоритме результирующим значением  $i$  является  $\alpha^{-1}(q)$ .

*// here goes some code*

## 25. Принцип включения-исключения или формула решета

**a.** Первая формула удобно получается индукцией по  $|I|$ , числу элементов  $I$ , с использованием хорошо известной формулы  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ . Вторая получается переходом к дополнениям. Чтобы получить формулу Сильвестра, достаточно записать:

$$\bigcap_{i \in I} \overline{X_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} X_i} = X - \bigcup_{i \in I} X_i,$$

затем применить первую формулу.

**b.** Пусть  $X$  — множество всех перестановок на  $[1, n]$  и  $X_i$  — множество перестановок, имеющих  $i$  фиксированной точкой,  $1 \leq i \leq n$ . Искомое число  $\sigma_n$ :

$$\sigma_n = \left| \bigcup_{i \in [1, n]} \overline{X_i} \right| = \sum_{J \subset [1, n]} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{i \in J} X_i \right|.$$

Множество  $\bigcap X_i$  есть множество  $J$  перестановок на  $[1, n]$  и, следовательно, содержит  $(n - |J|)!$  элементов, откуда:

$$\sigma_n = \sum_{J \subset [1, n]} (-1)^{|J|} (n - |J|)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n - k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

**с.** Положим здесь  $X$  равным интервалу  $[1, n]$  и для  $1 \leq i \leq k$  пусть  $X_i$  — множество элементов из  $X$ , которые кратны  $p_i$ . Тогда имеем:

$$\phi(n) = \left| \bigcap_{i \in [1, k]} \overline{X_i} \right| = \sum_{J \subset [1, k]} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{i \in J} X_i \right|$$

Множество  $\bigcap X_i$  здесь является множеством элементов из  $X$ , кратных  $\prod_{i \in J} p_i$ ; но если  $d$  является делителем  $n$ , имеется точно  $n/d$  элементов из  $X$ , кратных  $d$ , откуда:

$$\phi(n) = n \sum_{J \subset [1, k]} \frac{(-1)^{|J|}}{\prod_{i \in J} p_i} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

**д.** Обозначим через  $X$  множество всех отображений из  $[1, n]$  в  $[1, n]$  и для  $1 \leq i \leq n$  через  $X_i$  — множество отображений из  $X$ , не имеющих  $i$  в их образе; выберем в качестве весовой функции на  $X$  функцию  $p(\alpha) = a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \dots a_{n\alpha(n)}$ : тогда нужно вычислить вес множества  $S_n$  всех перестановок на  $[1, n]$ . Заметим, что  $S_n = \bigcap_{i \in [1, n]} \overline{X_i}$  и, значит,  $per A = \sum_{J \subset [1, n]} (-1)^{|J|} p(\bigcap_{i \in J} X_i)$ . Но  $\bigcap_{i \in J} X_i$  есть множество всех отображений, образы которых не встречаются в  $J$ , следовательно:

$$p\left(\bigcap_{i \in J} X_i\right) = \sum_{\alpha: [1, n] \rightarrow \overline{J}} a_{1\alpha(1)} \dots a_{n\alpha(n)} = \sum_{j \notin J} a_{1j} \sum_{j \notin J} a_{2j} \dots \sum_{j \notin J} a_{nj}$$

отсюда получаем формулу  $per A = \sum_{J \subset [1, n]} (-1)^{|J|} \prod_{i=1}^n \sum_{j \notin J} a_{ij}$ , которая при замене  $J$  его дополнением дает формулу Райзера.

## 26. Произведение многочленов, заданных массивами

**а.** Алгоритм справа дает функцию умножения двух многочленов и  $Q$ , где многочлен  $R$  степени  $\deg + \deg Q$  (который дает результат в конце алгоритма) должен быть предварительно инициализирован нулем.

**б.** Изучая предыдущий алгоритм, устанавливаем, что его сложность, как по числу перемножений, так и сложений, равна произведению высот двух многочленов:  $(\deg P + 1) \times (\deg Q + 1)$  — обычно высо-