

$[1, n]$ в $[1, n]$, при этом коэффициент μ_α определяется суммой

$$\mu_\alpha = \sum_{\epsilon_i \in \{0,1\}} (-1)^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n} \epsilon_{\alpha(1)} \dots \epsilon_{\alpha(n)}.$$

Если α — перестановка, коэффициент μ_α равен $(-1)^n$, поскольку единственный ненулевой член суммы — это тот, для которого все ϵ_i , равны 1. В противном случае можно разложить μ_α следующим образом:

$$\sum_{\epsilon_i, i \neq k} (-1)^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n} \sum_{\epsilon_k=0,1} (-1)^{\epsilon_k} \epsilon_{\alpha(1)} \dots \epsilon_{\alpha(n)},$$

где k — элемент из $[1, n]$, который не принадлежит образу α , и хорошо видно, что внутренний член (сумма по ϵ_k) равен нулю; это доказывает, что μ_α в этом случае равно нулю. Второе искомое выражение (суммы которого записываются на множествах) просто выводится из первого, исключением ненулевых ϵ_i , появляющихся в сумме.

b. *// here goes some text and code*

$$\sum_{E'} = \sum_E + (-1)^{|E'|} \prod_{1 \leq i \leq n} S_i(E'). \quad (7)$$

Вклад наименьшего элемента \emptyset в эту сумму — нулевой; значит, начнем с его последователя, который может быть $\{1\}$, $\{n\}$ или какое-нибудь одноэлементное множество в соответствии с порядком, заданным на $[1, n]$. Можно заметить, что $S_i(E') = S_i(E) \pm a_{ij}$, где $\{j\} = E \triangle E'$.

В этой записи, как в алгоритме 12, \pm должен пониматься как $+$, если $E \subset E'$ и $-$, если $E' \subset E$.

Чтобы оценить $\sum_{E'}$, исходя из \sum_E с использованием соотношения (7), нужно осуществить n сложений (для подсчета каждого $S_i(E')$), затем $n - 1$ перемножений: $S_1(E') \times \dots \times S_n(E')$, и, наконец, 1 сложение. Имеем $2^n - 2$ операций для осуществления (7), при этом первый член $\sum = -\prod_{1 \leq i \leq n} \alpha_{in}$ требует $n - 1$ перемножений; это доказывает сформулированный результат о сложности. Сложность $O(n2^n)$ значительна, но остается того же порядка, что и сложность, индуцированная определением ($n!(n - 1)$ перемножений и $n! - 1$ сложений). Формула Стирлинга позволяет сравнить эти два значения сложности: $n \cdot n! / (n \cdot 2^n) \approx (n/2e)^n \sqrt{2\pi n}$.

22. Перманент матрицы (продолжение)

а. Правая часть может рассматриваться как многочлен (от переменных a_{ij}), равный $\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} a_{1\alpha(1)} \dots a_{n\alpha(n)}$, где сумма распространяется на все отображения $[1, n]$ в $[1, n]$. Коэффициент μ_{α} задан формулой

$$\mu_{\alpha} = \sum_{\omega} \mu_{\alpha}(\omega) \quad \text{с} \quad \mu_{\alpha}(\omega) = \omega_1 \dots \omega_{n-1} \omega_{\alpha(1)} \dots \omega_{\alpha(n)},$$

в которой полагаем $\omega_n = 1$. Если α — перестановка, то каждое $\mu_{\alpha}(\omega)$, присутствующее в сумме μ_{α} , равно 1 и, следовательно, $\mu_{\alpha} = 2^{n-1}$. Напротив, если α не является перестановкой, то сумма μ_{α} — нулевая. Действительно, образ α отличен от $[1, n]$, и различаем два случая:

- (i) $\exists k < n$, не принадлежащий образу α ,
- (ii) $\exists k < n$, дважды полученный из α .

В обоих случаях члены $\mu_{\alpha}(\omega)$, присутствующие в сумме, группируются попарно, один соответствуя $\omega_k = 1$, другой — $\omega_k = -1$, и взаимно уничтожаются (в случае (ii) $\mu_{\alpha}(\omega) = \omega_k$).

б. Формула пункта **а** может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\text{per} A}{2} = \sum \omega_1 \dots \omega_{n-1} \prod_{1 \leq i \leq n} (a_{in} + \omega_1 a_{i1} + \dots + \omega_{n-1} a_{in-1}) / 2.$$

Как и в предыдущем упражнении, вычисление перманента получается генерированием перебора при линейной упорядоченности на $\{-1, 1\}^{n-1}$, в которой два последовательных элемента отличаются только одной компонентой. Если для $\omega \in \{-1, 1\}^{n-1}$ и $i \leq n$ положить

$$S_i(\omega) = (a_{in} + \omega_1 a_{i1} + \dots + \omega_{n-1} a_{in-1}) / 2,$$

то можно, благодаря перебору на $\{-1, 1\}^{n-1}$, вычислить последовательно $\sum_{\omega} = \sum_{\rho \leq \omega} \dots$, используя формулу

$$\sum_{\omega'} = \sum_{\omega} + \omega'_1 \dots \omega'_{n-1} \prod_{1 \leq i \leq n} S_i(\omega'),$$

где ω' — последователь для ω в $\{-1, 1\}^{n-1}$. (8)

Если j является индексом, по которому различаются два слова ω и ω' , то сумма $S_i(\omega')$ вычисляется, исходя из $S_i(\omega)$, через $S_i(\omega') = S_i(\omega) - a_{ij}$, если $\omega_j = 1$, и через $S_i(\omega') = S_i(\omega) + a_{ij}$, если $\omega_j = -1$.

// here goes some code

Алгоритм 13. Вычисление перманента в кольце, где 2 обратимо

С практической точки зрения для генерации адекватного перебора $\{-1, 1\}^{n-1}$, выбираем соответствие между $\{0, 1\}$ и $\{-1, 1\}$ вида $\epsilon \mapsto (-1)^\epsilon$ и классическую генерацию кода Грея на $\{0, 1\}^{n-1}$, что достигается с помощью алгоритма 13. Мультипликативная сложность получается, если заметить, что нужно вычислить $2^n - 1$ членов \sum_{ω} , каждый из которых требует $n - 1$ перемножений (см. формулу (8)), значит, всего $2^{n-1}(n - 1)$ произведений, к которым нужно добавить последнее умножение на 2. С точки зрения сложений первоначальный член $\sum_{(1, \dots, 1)}$ требует $n(n - 1)$ сложений и n делений на 2, тогда как общий член \sum_{ω} вычисляется, исходя из предыдущего, с помощью n сложений; наконец, нужно сложить все эти члены, что требует в целом $n(n - 1) + (2^{n-1} - 1)(n + 1)$ сложений и n делений на 2. Заметим относительно предыдущего упражнения, что сложность была приблизительно разделена на 2.