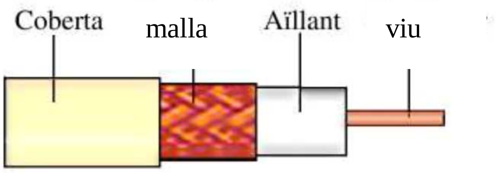
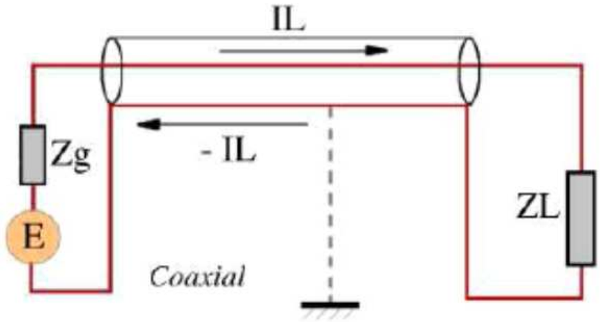
Física II. Problemes Full 8. Tema Camp i Inducció Magnètica

1) Un *cable coaxial* està format per un fil conductor central anomenat 'viu' i un conductor extern en forma de superfície cilíndrica anomenat 'malla' , que envolta el cable central i amb el mateix eix que aquest. Un esquema del cable es veu a la figura de l'esquerra. Suposem que el radi del viu és R_1 i el radi de la malla és R_2 ($>R_1$), suposem que els dos cables estan separats per un material aïllant dielèctric de permitivitat relativa $\varepsilon_r>1$, però que no manifesta cap comportament magnètic diferent del buit, és a dir amb $\mu_r=1$.

Considera el cable de llargada D, molt més llarg que ample, $D>R_2$





Els cables coaxials s'usen en enginyeria com a medi de transmissió de senyals elèctrics a freqüències elevades i a molta distància. Tal com veiem a la figura de la dreta, el funcionament del cable és el següent: un senyal es transmet des de la font generadora (de senyal) E situada a un extrem del cable, fins a la impedància[1] de càrrega Z_L a l'altre extrem del cable. El corrent d'anada I_L va pel viu i torna per la malla distribuït uniformement per tota la seva superfície lateral. L'objectiu del problema és calcular l'autoinducció L del cable coaxial de llargada D.

Per a fer-ho seguim els següents passos:

a) Calcula el camp magnètic generat pels corrents I_L que va pel viu i $-I_L$ que torna per la malla, en la regió situada entre els dos cables, tot aplicant el teorema d' Ampere. Descriu la direcció i sentit del camp en els diferents punts.

Solució: $B(r) = \dfrac{\mu_0 \cdot I_L}{2\pi r}$ per $R_1 < r < R_2$.

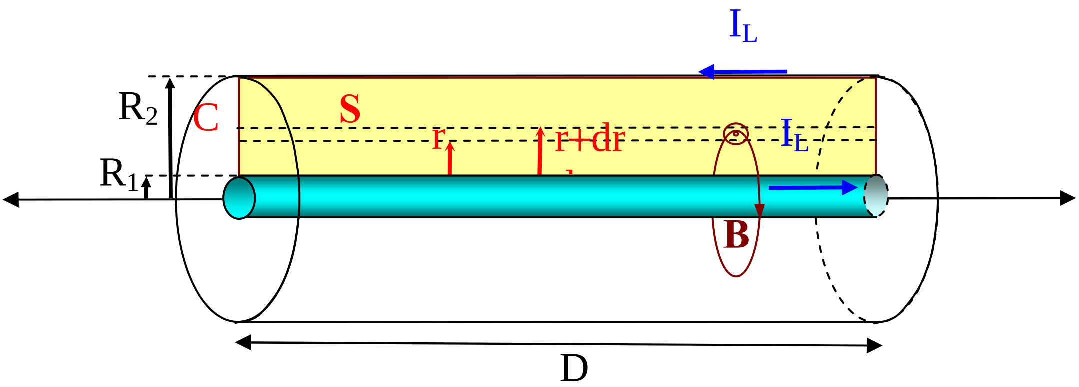
El camp és rotatori al voltant de l'eix amb el sentit d'avançament del tirabuixó segons I_L

b) Calcula el camp magnètic a la regió externa al cable. Conclusió.

Solució: $B(r) = 0$ per $R_2 < r$. El cable no deixa passar camp magnètic a l'exterior, $\Rightarrow$ no crea interferències electromagnètiques.

c) Considerem que el camp B intern de l'apartat a) travessa la superfície tancada S (marcada en groc) de la figura següent, anem a calcular el flux magnètic φ que aquest camp fa sobre aquesta superfície tancada.

[1] impedància =generalització d'una resistència i també es mesura en Ω



Per a fer-ho considerem S subdividit en superfícies diferencials, com la situada entre r i r+dr a la figura.

Calcula el diferencial de flux $d\varphi$ del camp B, a través de la superfície situada entre r i r+dr.

Solució: $d\varphi = B(r)\cdot dS = B(r)\cdot D dr = \dfrac{\mu_0 \cdot I_L}{2\pi r} D dr \quad (\text{per } R_1 < r < R_2)$

d) Calcula el flux total a base d'integrar els diferencials de flux anteriors al llarg de la superfície S.

Solució:

$$\varphi = \int_S d\varphi = \int_S B(r)\cdot dS = \int_{r=R_1}^{r=R_2} B(r)\cdot D dr = \frac{\mu_0 \cdot I_L \cdot D}{2\pi}\int_{r=R_1}^{r=R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \cdot I_L \cdot D}{2\pi}\left[\ln(r)\right]_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot I_L \cdot D}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

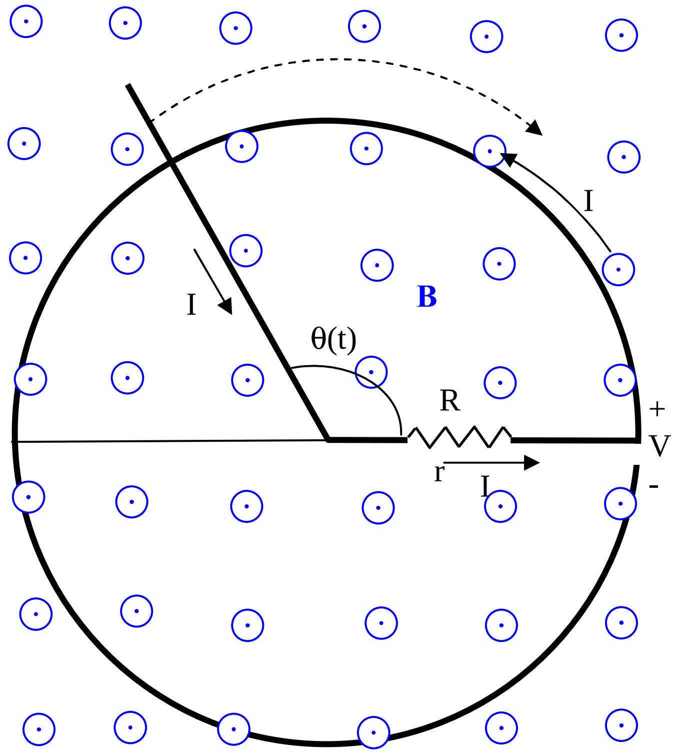
e) A partir del resultat anterior calcula l'autoinducció L i d'aquí l'autoinducció L' del cable coaxial per unitat de longitud = D:

Solució: $L = \dfrac{\varphi}{I_L} = \dfrac{\mu_0 D}{2\pi}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) \quad ==> \quad L' = \dfrac{L}{D} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$

2) Considerem un circuit conductor quasi[2] circular de radi R, sobre el qual hi superposem dos segments conductors posats com si fossin un radi. Un dels segments és fix i horitzontal i l'altre és mòbil i pot rotar al voltant del centre. Com que els conductors són metàl·lics i fan contacte elèctric en els punts de juxtaposició, defineixen un circuit tancat C en forma de sector circular d'angle $\theta(t)$ en cada instant. El

[2] No és circular del tot ja que li falta un petit trosset a la dreta, per tal que els dos conductors a ambdós costats de la R no estiguin curtcircuitats. Això implica un curt instant de temps on desapareix el corrent, just quan la barra passa pel trosset, però que no obstant negligirem.

circuit sencer es troba en una regió amb un camp magnètic B uniforme perpendicular al pla del circuit i en sentit cap enfora del dibuix



a) A partir de la dependència de l'angle θ(t) en el temps, calcula el corrent I(t) induït per aquest moviment, coneixent el valor de la resistència elèctrica r del tram horitzontal (considerem negligible la resistència dels altres trams)

$$e = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\cdot\vec{S}(t))}{dt}$$

$$= -\frac{d(B\cdot S(t))}{dt} = -B\cdot\frac{dS(t)}{dt} =$$

$$= -B\cdot\frac{d}{dt}\left(\pi R^2\frac{\theta(t)}{2\pi}\right) = -B\frac{R^2}{2}\frac{d\theta(t)}{dt}$$

I(t) = e(t)/r   si θ(t) disminueix

llavors I(t) és en el sentit de

la figura

b) concretament si l'angle varia disminuint de forma uniforme amb el temps: θ(t)= -ω· t + π (rad), calcula el corrent I.

$$I = \frac{e}{r} = -\frac{B}{r}\cdot\frac{R^2}{2}\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{B}{r}\cdot\frac{R^2}{2}\frac{d(-\omega\cdot t+\pi)}{dt} = \frac{B}{r}\cdot\frac{R^2}{2}\omega$$

c) Quin és el valor de la fem i del corrent continu que generaríem si el conductor mòbil anés donant tombs tota l'estona a 3000 rev/min en un camp de 100 mT, si el diàmetre és de D=2,378 m i la resistència de r=10 Ω.

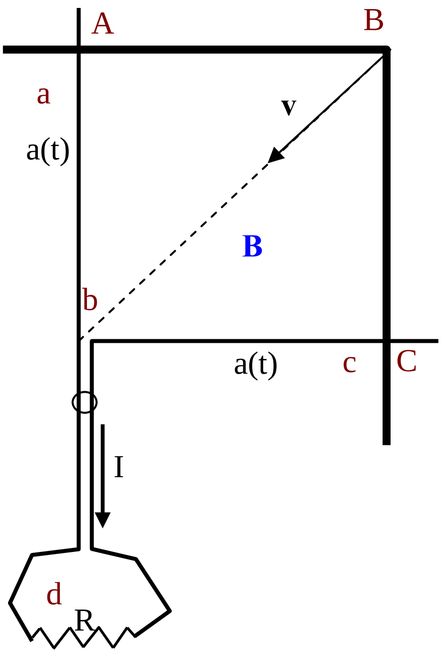
$$e = -B\frac{R^2}{2}\frac{d\theta(t)}{dt} = -B\frac{R^2}{2}\omega = -100\,\mathrm{m\,T}\,\frac{1}{2}\left(\frac{2{,}375\,\mathrm{m}}{2}\right)^2 3000\cdot\frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}} = -22{,}15\,\mathrm{V}$$

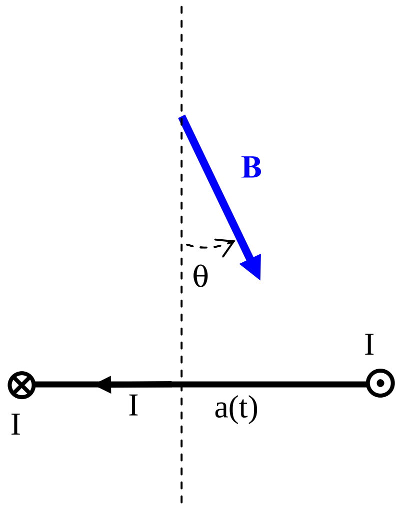
$$i = \frac{e}{r} = -\frac{22{,}15\,\mathrm{V}}{10\,\Omega} = -2{,}215\,\mathrm{A}$$

si θ(t) disminueix llavors I(t) és en el sentit de la figura

3) Considerem un circuit quadrat de costat a(t) fet a base de fils conductors, tal com s'indica a la figura esquerra. El circuit està format per dues peces:

1. la peça fixa amb un primer tram que va de punt a al b, després li segueix un tram b-d addicional extern amb el resistor R) i finalment un tram b-c que forma 90 ° amb el tram a-b.





2. La peça mòbil que te dos trams de A-B i B-C que formen un angle recte entre sí.

La peça mòbil (A-B-C) es mou a una velocitat **v** constant cap endins seguint la diagonal del quadrat tot lliscant sobre els punts a i c del tram 1 fix, de manera que l'àrea disminueix.

Per altra banda el circuit és travessat per un camp magnètic uniforme B que forma un angle θ (inferior a 90°) amb la perpendicular al circuit quadrat a-b-c-B. Mirem la figura de la dreta. Es demana:

a) Calcula una expressió del costat del quadrat a(t) en funció del temps. a partir d'aquí una expressió de l'àrea decreixent del circuit (negligeix l'àrea del tram extern amb la resistència). Suposem que a l'instant inicial els costats valien un a_0>0.

$$a(t) = a_0 - v_x \cdot t = a_0 - v \cdot \cos(45^\circ) \cdot t = a_0 - \frac{v}{\sqrt{2}} \cdot t$$

$$S(t) = a(t)^2 = \left(a_0 - \frac{v}{\sqrt{2}} \cdot t \right)^2$$

b) Calcula una expressió del flux magnètic Φ(t) a través del circuit anterior considerant flux positiu el que travessa de dalt a baix (és a dir el vector **S** l'agafem cap a baix)

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S(t) \cdot \cos(\theta) = B \cdot \left(a_0 - \frac{v}{\sqrt{2}} \cdot t \right)^2 \cdot \cos(\theta)$$

c) Calcula una expressió de la

força electromotriu induïda al circuit anterior.

Per Faraday-Lenz:

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -B\cdot\cos(\theta)\cdot\frac{d}{dt}\left(a_0 - \frac{v}{\sqrt{2}}\cdot t\right)^2 = -B\cdot\cos(\theta)\cdot 2\left(a_0 - \frac{v}{\sqrt{2}}\cdot t\right)\left(-\frac{v}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= 2B\cdot\frac{v}{\sqrt{2}}\cos(\theta)\cdot\left(a_0 - \frac{v}{\sqrt{2}}\cdot t\right)$$

d) Calcula una expressió del corrent I(t) que passa pel circuit, considerant negligibles les resistències dels conductors (és a dir la resistència total del circuit és la R).

$$I(t) = \frac{e(t)}{R} = 2\frac{B}{R}\frac{v}{\sqrt{2}}\cos(\theta)\cdot\left(a_0 - \frac{v}{\sqrt{2}}\cdot t\right)$$

e) Quin és el signe del corrent en un instant immediatament posterior a 0. segons l'expressió matemàtica anterior?. Quin serà per tant el sentit del corrent I(t) respecte al corrent I marcat a la figura?. Es correspon aquest sentit del corrent amb el que sortiria usant arguments físics, és a dir, pel fet que la llei de Faraday-Lenz estableix que la fem induïda s'ha d'oposar a la variació del flux?

Evidentment el signe de I(t) per t petit és positiu segons l'expressió anterior. Això significaria de manera matemàtica directa que el corrent va a igual a com l'hem plantejat inicialment a la figura.

Es correspon això també al signe que hi hauria pensant físicament amb els sentit usant el que diu la llei de Faraday-Lenz? Vejam:

El flux és positiu segons l'expressió anterior. És a dir cap a baix.

Per altra banda la seva variació o derivada temporal és,

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -2B\cdot\frac{v}{\sqrt{2}}\cos(\theta)\cdot\left(a_0 - \frac{v}{\sqrt{2}}\cdot t\right)$$,que és negativa per temps petits, el qual vol dir que el flux decreix. La reacció del circuit (i això és el significat real del signe – a la llei de Faraday-Lenz) ha de ser tal que s'oposi a aquest canvi. Per la qual cosa ha de crear un flux induït que l'ajudi a no decréixer tant cap a baix, o el que és el mateix un camp induït B_i també cap a baix que se li sumarà. La única manera de generar aquest camp és per mitjà d'un corrent induït I_i en sentit horari (vist des de dalt), és a dir, en el mateix sentit que el I de la figura. Per tant surt el mateix sentit que amb la interpretació matemàtica.

f) Suposem ara que fem girar el camp magnètic amb un angle decreixent a partir de 90° (π/2 rad): $\theta(t)=\pi/2-\alpha\cdot t$. Calcula una expressió del mòdul i el signe de la fem induïda a un instant t lleugerament posterior a l'instant inicial.

Per Faraday-Lenz trobem la fem induïda:

De nou agafant el sentit positiu del flux cap avall

$$\Phi(t) = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot S(t)\cdot\cos(\theta(t)) = B\cdot\left(a_0 - \frac{v}{\sqrt{2}}\cdot t\right)^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha t\right)$$

El flux és positiu per un instant lleugerament posterior a 0 (els dos termes ho són)

La derivada del flux és però:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = B\cdot\left[\left(-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)2\left(a_0 - \frac{v}{\sqrt{2}}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha t^2\right) + \left(a_0 - \frac{v}{\sqrt{2}}\cdot t\right)^2\cdot(-\alpha)\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha t^2\right)\right)\right]$$

que per un instant lleugerament posterior a zero (t molt petit) és aproximadament igual a

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} \approx B\alpha\left[(a_0)^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = B\alpha\cdot a_0^{\,2} > 0 \quad \text{positiva}$$

per la qual cosa, ara el flux positiu (cap a baix) augmenta en el temps, amb la qual cosa la reacció del circuit ha de ser crear un flux que s'oposi a que creixi tant. Llavors ha de ser un flux en sentit contrari i per tant cap a dalt, i per tant el corrent: $|I(t)| = \left|\frac{e(t)}{R}\right| = \left|-\frac{1}{R}\frac{d\Phi(t)}{dt}\right|$ ara surt negatiu respecte la I pintada a la figura.

4) Tenim un transformador format per un nucli de secció rectangular i de forma també rectangular com el de la figura on s'hi posen les dimensions. El material magnètic del nucli és ferro dolç amb una μ_r=4000.

Les dimensions del transformador que es resumeixen a la figura estan referides a la llargada de l'entreferro: h=1 mm.

Injectem un corrent al bobinat primari p de valor I_1=1 A, aquest bobinat te N_1=500 voltes. De moment pel secundari no hi passa corrent.

a) Calculeu la densitat de flux de camp magnètic B_e a l'entreferro i al nucli en el secundari B_n.

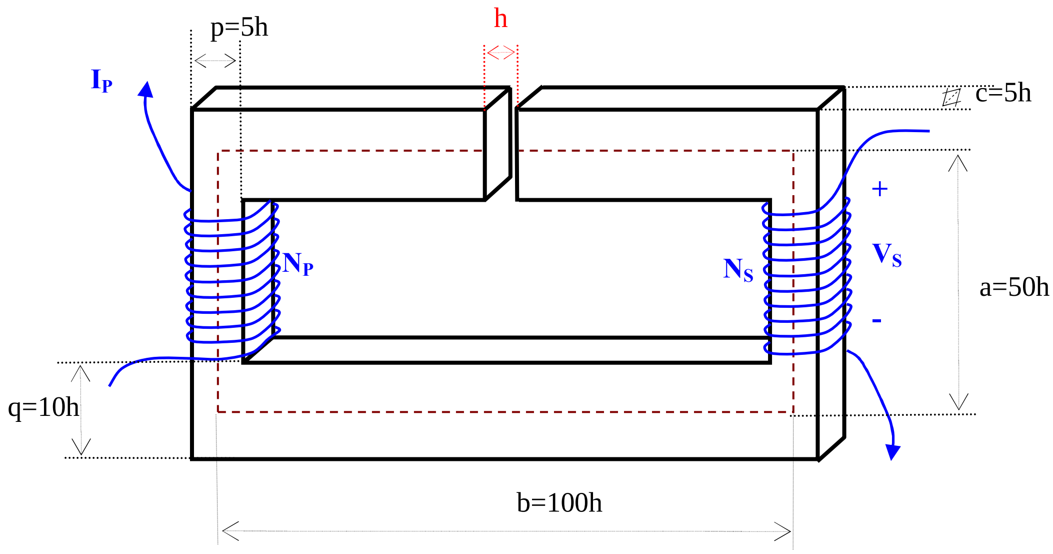
b) Calculeu la densitat de flux de camp magnètic B_n al secundari si no hi hagués entreferro.

Suposem que estem en el cas en que hi ha entreferro, contesta les següents preguntes referides als fenòmens d'inducció:

c) Calcula una expressió i també el valor numèric del coeficient d'inducció mútua que va del primari al secundari M_{ps} suposant que el bobinat del secundari te N_s=2000 voltes.

d) Calcula una expressió i també el valor numèric del coeficient d'autoinducció del primari: L_p (considera que pel secundari no hi passaria corrent)

e) Si el corrent al primari és senoidal de valor de pic 10 A i de freqüència 50 Hz, calcula la tensió de pic i la freqüència al secundari.



a) Si només passa corrent pel primari, les ínies de camp B surten per la part superior del primari i entren per la inferior, i per tant rodegen al nucli + entreferro en sentit horari. Considerem que el flux Φ de tot el sistema és positiu en aquest sentit. Amb això:

el flux és la força contraelectromotriu dividida per la reluctància total

$$\Phi \cdot (\Re_n + \Re_e) = N_P \cdot I_P \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{N_P \cdot I_P}{\Re_n + \Re_e}$$

on la reluctància del nucli es troba sumant les dels 4 trams rectilinis dels que està format:

$$\Re_n = \sum_{i=1}^{4} \frac{L_{ni}}{S_{ni}\mu_0\mu_r} = \frac{100h}{10h \cdot 5h\mu_0\mu_r} + \frac{99h}{10h \cdot 5h\mu_0\mu_r} + \frac{50h}{5h \cdot 5h\mu_0\mu_r} + \frac{50h}{5h \cdot 5h\mu_0\mu_r}$$

passant a comú denominador i sumant els numeradors

$$\Re_n = \frac{399h}{50h^2 \cdot \mu_0\mu_r} = \frac{399}{50h \cdot \mu_0 4000} = \frac{3{,}99}{2000 \cdot 1\,mm \cdot 4\pi x10^{-7}\ \frac{N}{A^2}} \approx 1\,587\,571 \frac{A_v}{Wb}$$

Calculem ara la reluctància de l'entreferro:

$$\Re_e = \frac{h}{10h \cdot 5h \mu_0 \cdot 1} = \frac{1}{50h \cdot \mu_0} = \frac{1}{50 \cdot 1\,mm \cdot 4\pi x10^{-7}\ \frac{N}{A^2}} \approx 15\,915\,494\ \frac{A_v}{Wb}$$

La reluctància de l'entreferro (malgrat sigui molt més curt) surt unes 10 vegades superior a la del nucli sencer, això és degut a la baixa μ_r=1 que te en comparació amb la del nucli de 4000.

A partir d'aquí calculem el flux:

$$\Phi = \frac{N_P \cdot I_P}{\Re_n + \Re_e} = \frac{500 \cdot 1\ A}{1\,587\,571\ \frac{A_v}{Wb} + 15\,915\,494\ \frac{A_v}{Wb}} = \frac{500 \cdot 1\ A}{17\,503\,065\ \frac{A_v}{Wb}} = 28{,}6\ \mu Wb$$

I a partir del flux obtenim la densitat de flux B a cada punt del circuit magnètic:

$$B_s = \frac{\Phi}{S_s} = \frac{28{,}6\ \mu Wb}{5h \cdot 5h} = \frac{28{,}6\ \mu Wb}{5h \cdot 5h} = \frac{28{,}6\ \mu Wb}{25x10^{-6}\ m^2} = 1{,}14\ T$$

$$B_e = \frac{\Phi}{S_e} = \frac{28{,}6\ \mu Wb}{10h \cdot 5h} = \frac{29{,}9\ \mu Wb}{10h \cdot 5h} = \frac{29{,}9\ \mu Wb}{50x10^{-6}\ m^2} = 0{,}57\ T$$

b) Si no hi hagués entreferro la reluctància total seria només la del nucli:

$$\Re_n = \sum_{i=1}^{4} \frac{L_{ni}}{S_{ni}\mu_0\mu_r} = \frac{100h}{10h \cdot 5h\mu_0\mu_r} + \frac{100h}{10h \cdot 5h\mu_0\mu_r} + \frac{50h}{5h \cdot 5h\mu_0\mu_r} + \frac{50h}{5h \cdot 5h\mu_0\mu_r} =$$

$$= \frac{400h}{50h^2 \cdot \mu_0\mu_r} = 1\,591\,549\ \frac{A_v}{Wb}$$

i per tant:

$$\Phi = \frac{N_P \cdot I_P}{\Re_n} = \frac{500 \cdot 1\ \mathrm{A}}{1\,591\,549\ \frac{\mathrm{A_v}}{\mathrm{Wb}}} = 314{,}2\ \mu\mathrm{Wb}$$

i el camp al nucli al tram del secundari seria:

$$B_s = \frac{\Phi}{S_s} = \frac{314{,}2\ \mu\mathrm{Wb}}{5h \cdot 5h} = \frac{628{,}3\ \mu\mathrm{Wb}}{25\mathrm{x}10^{-6}\ \mathrm{m}^2} = 12{,}57\ \mathrm{T}\ !!$$

Hem de pensar que el ferro dolç se satura al voltant dels 2,2 T, per tant si usem aquest valor per la tensió de pic el ferro estaria més que saturat i llavors ens trobaríem amb una gran histèresi i les pèrdues energètiques que això comporta, per tant en el present transformador és millor posar-hi entreferro.

c) $$\Phi_s = N_s \cdot \Phi = N_s \cdot \frac{N_P \cdot I_P}{\Re_n + \Re_e} \Rightarrow M_{ps} = \frac{\Phi_s}{I_p} = \frac{N_S \cdot N_P}{\Re_n + \Re_e} = \frac{500 \cdot 2000}{17\,503\,065\ \frac{\mathrm{A_v}}{\mathrm{Wb}}} = 57{,}1\ \mathrm{mH}$$

d) $$\Phi_p = N_p \cdot \Phi = N_p \cdot \frac{N_P \cdot I_P}{\Re_n + \Re_e} \Rightarrow L_p = \frac{\Phi_p}{I_p} = \frac{N_P^{\ 2}}{\Re_n + \Re_e} = \frac{500^2}{17\,503\,065\ \frac{\mathrm{A_v}}{\mathrm{Wb}}} = 14{,}3\ \mathrm{mH}$$

si pel secundari no hi passa corrent, $I_S=0$, el camp B_s creat per la bobina del secundari no existeix i per tant no contribueix al flux d'enlloc. Així, el flux total és només degut al corrent I_P del primari, que se'l fa a si mateix: $L_p \cdot I_P$, i al secundari: $M_{ps} \cdot I_P$.

e)

$$v_s(t) = -\frac{d\Phi_p(t)}{dt} = -M_{ps} \cdot \frac{d(i_p(t))}{dt} = -M_{ps} \cdot \frac{d(I_p \cdot \cos(\omega \cdot t))}{dt} = M_{ps} \cdot I_p\ \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) =$$

$$= 57{,}1\ \mathrm{mH} \cdot 10\ \mathrm{A} \cdot 2\pi \cdot 50\ \mathrm{s}^{-1} \cdot \sin(\omega \cdot t) = 57{,}1\ \mathrm{mH} \cdot 10\ \mathrm{A} \cdot 2\pi \cdot 50\ \mathrm{s}^{-1} \cdot \sin(\omega \cdot t) = 179{,}4\ \mathrm{V} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

179,4 V de pic i la mateixa freqüència de f=50 Hz o bé $\omega=2\pi \cdot 50\ \mathrm{s}^{-1}$.

5) Generalment a les centrals elèctriques no es genera corrent continu sinó corrent altern sinusoïdal de 50 Hz (=50 períodes /s). Per a això s'utilitza un alternador.

Un alternador consisteix en una bobina de N espires de superfície S, donant tombs a velocitat angular uniforme ω al voltant d'un eix situat en el mateix pla de les espires i en el sí d'un camp magnètic uniforme B.

a) Calcula una expressió de la fem induïda per l'alternador:

$$e = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -\frac{d\,(\vec{B}\cdot\vec{S})}{dt} = -\frac{d\,(B\cdot N\cdot S\cdot\cos\theta(t))}{dt} = -B\cdot N\cdot S\cdot\frac{d(\cos(\omega\cdot t+\theta_0))}{dt} =$$
$$= B\cdot N\cdot S\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t+\theta_0)$$

b) Considerem N=1 espires amb un camp de B=100 mT i una superfície de la bobina de 1 m^2 , la velocitat angular de rotació és també de 3000 rpm, calcula la freqüència f, l'amplitud de pic V_P de la tensió generada i la tensió eficaç $V_{ef}=V_P/\sqrt{2}$ que li correspon.

ω=3000 rpm= 3000·2·π(rad)/(60 s) = 314,16 (rad)/s ⇒

f=ω/(2π)=314,15 (rad)/s /(2π)= 50 Hz

$$V_P = B\cdot N\cdot S\cdot\omega = 100\,mT\cdot 1\cdot 1\,m^2\cdot 314{,}16\,(rad)/s = 31{,}416\,V$$

$$V_{ef} = \frac{V_P}{\sqrt{2}} = \frac{31{,}416\,V}{\sqrt{2}} = 22{,}21\,V$$

c) Posem N=10,35 espires enlloc de una, amb això la tensió eficaç generada es multiplica per N. Quan val? De que et sona aquesta tensió?

$V'_{ef} = N\cdot V_{ef} = 10{,}35\cdot 22{,}21$ V= 230 V

és la tensió de la xarxa elèctrica domèstica convencional.

d) Volem transportar aquesta tensió a un lloc llunyà i per això elevem la tensió generada a d) amb un transformador que te una relació de espires de N_2/N_1=2000. Quina és la tensió generada?

$Ve_2=Ve_1\cdot N_2/N_1$= 230 V·2000 = 460 kV (considerada molt alta tensió).

e) La central elèctrica sencera genera una potència de 1 GW. I n'envia la dècima part (100 MW) per cada ramal de molt alta tensió. Quin corrent generaria per una tensió de sortida de 460 kV?. I per una tensió de 230 V?

$I_{460\ kV} = P/460\ kV = 10^8\ W/460\ kV = 217{,}4\ A$

$I_{230V} = P/230\ V = 10^8\ W/230\ V = 434{,}8\ kA$

f) Si el cable de transport de la molt alta tensió generada te un diàmetre de 6 cm i està fet d'alumini (ρ_{Al}=2,82 x$10^{-8}\ \Omega\cdot m$). Quina és la resistència per a cada km de línia?. Quina és la caiguda de tensió per cada km de línia per les dues tensions de transport de l'apartat anterior?. Quina és la pèrdua de potència per km de línia per les dues tensions de transport de l'apartat anterior?. Treu conclusions de la comparació.

Resistència per cada km $R_{1\ km}=\rho_{Al}\cdot 1\ km/(\pi(3\ cm)^2) \approx 0{,}01\ \Omega$

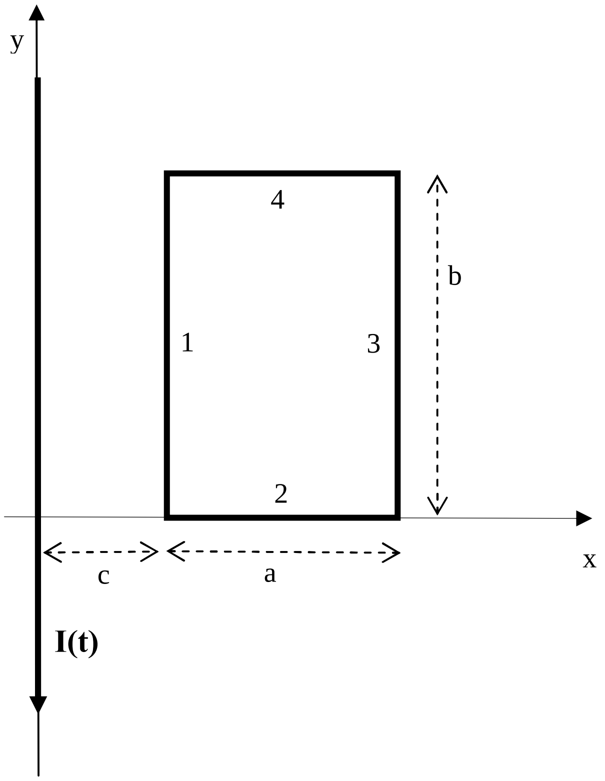
Caiguda de tensió per cada km: $V_{1\ km}=R_{1\ km}\cdot I$

Potència dissipada per cada km: $P_{1\ km}=R_{1\ km}\cdot I^2$

Pels dos casos de tensió de sortida obtenim la taula següent:

V_{ef0} **sortida (V)**	I_0 **sortida (A)**	$\Delta V_{1\ km}$ **(V)**	$P_{d\ 1\ km}$ **(W)**	**Conclusió**
	$=100\ MW/V_{ef0}$	$=I_0\cdot R_{1\ km}$	$=\Delta V_{1\ km}\cdot I_0$	
230	434,8 x10^3	4348	1,89 x10^9	pèrdues totals
460000	217,4	2,174	473	pèrdues moderades (4,7 ppm per km)

11) Suposem que tenim un fil rectilini infinit situat verticalment al llarg de l'eix y, pel qual hi passa un corrent I de dalt a baix, és a dir en la direcció de les y negatives.



En el x-y hi situem una espira rectangular de costats a i b i separada una distància c del fil paral·lela al fil (vegeu la figura).

Es demana:

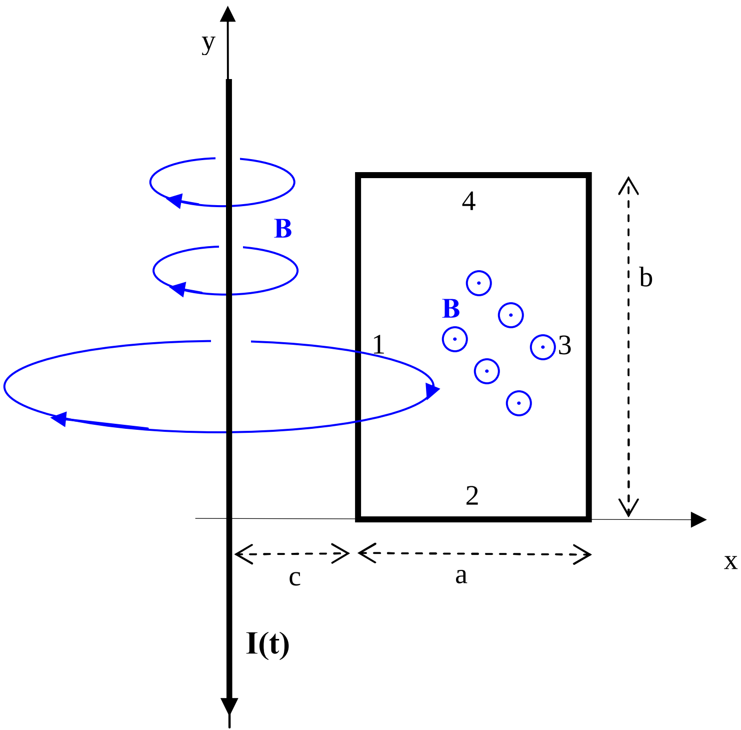
a) Dibuixa les línies tancades de camp B fet pel fil. Concreta la direcció i sentit del camp en els punts interiors de l'espira.

b) Dóna una expressió del mòdul camp en funció de la distància x al fil.

c) Calcula una expressió del flux total fet pel camp B del fil a dins de l'espira.

d) Suposem que I varia amb el temps en una funció creixent: $I(t)=\alpha+\beta\cdot t$, calcula una expressió de la força electromotriu induïda a sobre de l'espira. Dóna el sentit del corrent I' que es produirà sobre ella a causa d'aquesta fem. Raona aquest sentit.

e) Pel fet de passar-hi aquest corrent I', el camp magnètic del fil li està fent una força sobre cada costat de l'espira. Indica i raona el sentit de la força a cada costat. Dues d'aquestes forces s'anul·len entre sí i les altres dues no. Quines s'anul·len i perquè?



f) Calcula per l'instant t=0, una expressió de la resultant de les altres dues forces que no s'anul·len, cap a on va la resultant, cap al fil o allunyant-se del fil?.

SOLUCIÓ:

a) El camp **B** al voltant d'un fil de corrent infinit te línies rotatòries al voltant del fil seguint el sentit del tirabuixó, tal com es mostra a la figura.

Per tant al passar pel pla interior de l'espira el camp te un sentit perpendicular però sortint cap enfora. També es mostra a la figura.

b) El camp al voltant d'un fil infinit és constant al moure's al llarg del fil, ja que el fil és infinit. Per la simetria de la distribució, el seu mòdul no varia amb l'angle de revolució al voltant del fil. Si que varia amb la distància al fil d'acord amb l'equació ja deduïda:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s}$$ on I és el corrent del fil i s la distància (perpendicular) a aquest.

En el nostre cas pel que fa als punt de l'interior de l'espira, la s es transforma en la coordenada x, per tant:

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$$

c) Per a trobar el flux d'aquest camp a través de l'espira hauríem de fer la integral que defineix el flux:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

la cosa és que com que ara el camp no és uniforme dins del recinte d'integració (sup. de l'espira), ja que varia amb la x, caldrà integrar-lo de totes totes (no podrem fer **Φ**=**B**·**S** simplement). La millor manera d'integrar-lo és subdividir l'àrea de l'espira en diferencials d'àrea consistents en rectangles verticals que vagin de dalt a baix (alçada b) però d'amplada diferencial: dx. En ells el camp és pràcticament constant i per tant ja es poden usar com a elements d'integració.

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_S B\cdot ds = \int_{x=c}^{x=c+a} B(x)\cdot b\,dx = b\int_c^{c+a}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}\cdot dx =$$

$$= b\frac{\mu_0}{2\pi}I\int_c^{c+a}\frac{dx}{x} = b\frac{\mu_0}{2\pi}I[\ln x]_c^{c+a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot b\cdot\ln\left(\frac{c+a}{c}\right)$$

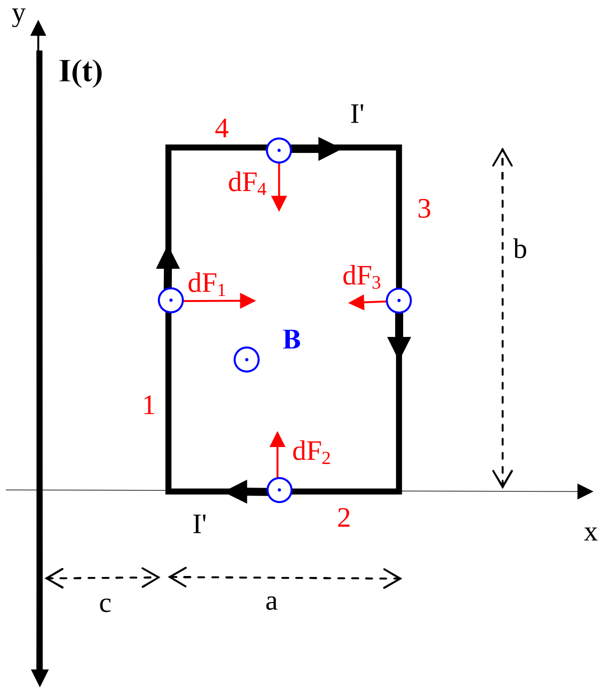
d) Si el corrent I varia amb el temps I(t)=α+β·t, llavors el flux a través de l'espira serà variable $$\Phi(t) = \frac{\mu_0\cdot I(t)}{2\pi}\cdot b\cdot\ln\left(\frac{c+a}{c}\right) = \frac{\mu_0\cdot(\alpha+\beta\cdot t)}{2\pi}\cdot b\cdot\ln\left(\frac{c+a}{c}\right)$$

I per la llei de Faraday-Lenz es generarà una força electromotriu a l'espira:

$$e = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0\cdot(\alpha+\beta\cdot t)}{2\pi}\cdot b\cdot\ln\left(\frac{c+a}{c}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\mu_0\cdot}{2\pi}\cdot b\cdot\ln\left(\frac{c+a}{c}\right)\frac{d}{dt}(\alpha+\beta\cdot t) = -\frac{\mu_0\cdot}{2\pi}\cdot b\cdot\ln\left(\frac{c+a}{c}\right)\beta < 0$$

Quin és el sentit del corrent produït a l'espira per aquesta fem?



Per a trobar-lo hem de tenir en compte que la fem induïda ha de ser tal que el seu corrent s'oposi als canvis de flux. En principi el flux net és perpendicular a l'espira i cap a sobre (cap a nosaltres o sentit z positiu), però aquest flux està augmentant (d'acord amb $\alpha+\beta\cdot t$). Per tant la reacció de l'espira és fer que **no augmenti** tant: el camp induït $\mathbf{B_i}$ ha d'anar en sentit invers al camp extern **B**, és a dir allunyant-se de nosaltres. La única manera de produir un camp així (segons la regla del tirabuixó) és amb un corrent en sentit horari sobre de l'espira. Anomenem aquest corrent I'.

És evident que segons la llei d'Ohm I'=e/R on R seria la resistència total de l'espira, però la R no la sabem, per tant a partir d'ara usarem la I' directament.

e) Com que hi ha un corrent I' en sentit horari a través de l'espira i un camp **B** perpendicular cap a sobre, es produeix una força (força de Lorentz) a sobre de cada element de l'espira. L'expressió és per a cada element diferencial d**l:**

$$d\mathbf{F} = I\,(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

així, aplicant la regla del tirabuixó, vàlida pel producte vectorial d**l**x**B**, la direcció i sentit dels diferencials de força sobre els elements de cada tram són les $d\mathbf{F_1}$, $d\mathbf{F_2}$, $d\mathbf{F_3}$ i $d\mathbf{F_4}$ assenyalades a sobre del dibuix anterior. Com veiem surten totes cap endins.

Després caldria integrar al llarg de cada segment de l'espira $\vec{F}_i = \int_{segment\ i} d\vec{F}_i$ per a trobar la força total sobre tal segment.

Amb això ja es veu que la força total sobre l'element 2, $\mathbf{F_2}$ ↑, i la força total sobre l'element 4, $\mathbf{F_4}$ ↓, seran iguals en mòdul ja que recorrem dos segments idèntics en llargada, al llarg de la direcció x i amb els mateixos valors del camp a cada punt x; però com que són contràries en direcció la suma de les dues s'anul·la: $\mathbf{F_2}=-\mathbf{F_4} \Rightarrow \mathbf{F_2}+\mathbf{F_4}=0$

f) En canvi les altres dues forces totals: $\mathbf{F_1}$ i $\mathbf{F_3}$, encara que contràries, són diferents. En efecte, el camp B(x=c) al llarg de 1 és més fort que el camp B(x=c+a) al llarg de 3:

$$B(c) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{c}$$

que el camp B(c+a) al llarg de 3:

$$B(c+a)=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{c+a}$$

I per tant les dues forces són també $F_1>F_3$:

$$F_1=\left|\int_{segm.\ 1} I'd\vec{l}x\vec{B}\right|=\int_{segm.\ 1} I'dl\,B(c)=I'B(c)\int_{segm.\ 1} dl=I'B(c)\cdot b=I'\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi}\frac{b}{c}$$

$$F_3=\left|\int_{segm.\ 3} I'd\vec{l}x\vec{B}\right|=\int_{segm.\ 3} I'dl\cdot B(c+a)=I'\cdot B(c+a)\cdot\int_{segm.\ 3} dl=I'\cdot B(c+a)\cdot b=I'\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi}\frac{b}{c+a}$$

I la força resultant es troba restant, ja que són contràries:

$$F=F_1-F_3=I'\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi}\frac{b}{c}-I'\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi}\frac{b}{c+a}=I'\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi}b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+a}\right)>0$$

Que és evidentment cap a la dreta, és a dir, en sentit allunyant-se del fil infinit.