Posición relativa de subespacios afines, paralelismo

Definición

Dos subespacios afines $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}''$ de $\mathcal{A}$ son paralelos si y solo si ellos tienen la misma dirección.

Definición

Dos subespacios afines $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}''$ de $\mathcal{A}$ son paralelos si y solo si ellos tienen la misma dirección.

Notación

$\mathcal{A}'//\mathcal{A}''$ significa que $\mathcal{A}'$ es paralelo a $\mathcal{A}''$.

Sobre la terminología

- Con esta definición de paralelismo, dos subespacios $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ pueden ser disjuntos sin ser paralelos.

Sobre la terminología

- Con esta definición de paralelismo, dos subespacios $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ pueden ser disjuntos sin ser paralelos.
- En particular, una recta nunca es paralela a un plano, mientras en un plano dos rectas que no se intercepten son paralelas.

Sobre la terminología

- Con esta definición de paralelismo, dos subespacios $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ pueden ser disjuntos sin ser paralelos.
- En particular, una recta nunca es paralela a un plano, mientras en un plano dos rectas que no se intercepten son paralelas.
- En algunos casos se puede usar el término "débilmente paralelo" para describir dos subespacios que satisfacen $F' \subseteq F''$. En tal caso diremos que $\mathcal{A}'$ es débilmente paralelo a $\mathcal{A}''$.

Sobre la terminología

- Con esta definición de paralelismo, dos subespacios $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ pueden ser disjuntos sin ser paralelos.
- En particular, una recta nunca es paralela a un plano, mientras en un plano dos rectas que no se intercepten son paralelas.
- En algunos casos se puede usar el término "débilmente paralelo" para describir dos subespacios que satisfacen $F' \subseteq F''$. En tal caso diremos que $\mathcal{A}'$ es débilmente paralelo a $\mathcal{A}''$.
- Nótese que el paralelismo es una relación de equivalencia, mientras el paralelismo débil no lo es.

Sobre la terminología

- Con esta definición de paralelismo, dos subespacios $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ pueden ser disjuntos sin ser paralelos.
- En particular, una recta nunca es paralela a un plano, mientras en un plano dos rectas que no se intercepten son paralelas.
- En algunos casos se puede usar el término "débilmente paralelo" para describir dos subespacios que satisfacen $F' \subseteq F''$. En tal caso diremos que $\mathcal{A}'$ es débilmente paralelo a $\mathcal{A}''$.
- Nótese que el paralelismo es una relación de equivalencia, mientras el paralelismo débil no lo es.
- Muchos autores identifican paralelismo con paralelismo débil.

Ejercicio

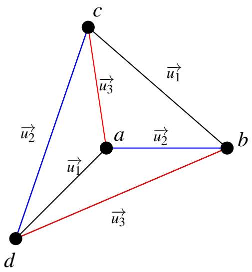
Determina las rectas paralelas en el plano afín de 4 puntos.

Ejercicio

Determina las rectas paralelas en el plano afín de 4 puntos.

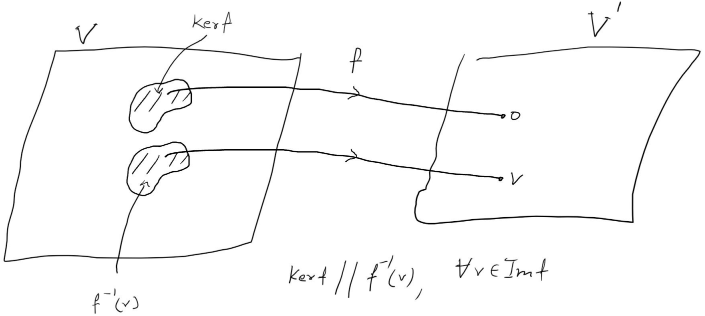
Solución

El plano afín de 4 puntos está asociado a un espacio vectorial de dimensión dos sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$. De ahí que tiene 6 rectas, cada recta tiene dos puntos, y hay tres pares de paralelas. En la figura se representan las paralelas con el mismo color.



Ejemplo

Si $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal, entonces para todo $\overrightarrow{v} \in Imf$ los subespacios afines naturales $f^{-1}(\overrightarrow{v})$ son paralelos, ya que todos están dirigidos por $\ker f$. Lo vimos antes en un ejercicio.



Proposición

Sean $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ dos subespacios afines de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}' // \mathcal{A}''$, entonces $A' = A''$ o bien $A' \cap A'' = \varnothing$.

Proposición

Sean $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ dos subespacios afines de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}' // \mathcal{A}''$, entonces $A' = A''$ o bien $A' \cap A'' = \varnothing$.

Demostración

Asumimos $\mathcal{A}' // \mathcal{A}''$.

Proposición

Sean $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ dos subespacios afines de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}' // \mathcal{A}''$, entonces $A' = A''$ o bien $A' \cap A'' = \varnothing$.

Demostración

Asumimos $\mathcal{A}' // \mathcal{A}''$. Si $A' \cap A'' = \varnothing$, entonces ya estamos.

Proposición

Sean $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ dos subespacios afines de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}' // \mathcal{A}''$, entonces $A' = A''$ o bien $A' \cap A'' = \varnothing$.

Demostración

Asumimos $\mathcal{A}' // \mathcal{A}''$. Si $A' \cap A'' = \varnothing$, entonces ya estamos.
Sea $a \in A' \cap A''$.

Proposición

Sean $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ dos subespacios afines de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}' // \mathcal{A}''$, entonces $A' = A''$ o bien $A' \cap A'' = \varnothing$.

Demostración

Asumimos $\mathcal{A}' // \mathcal{A}''$. Si $A' \cap A'' = \varnothing$, entonces ya estamos.
Sea $a \in A' \cap A''$. Por definición de subespacio afín, $\varphi_a^{-1}(A') = F'$ y $\varphi_a^{-1}(A'') = F''$.
Como $F' = F''$, obtenemos

$$A' = \{a + \overrightarrow{u} : \overrightarrow{u} \in F'\} = a + F' = a + F'' = \{a + \overrightarrow{v} : \overrightarrow{v} \in F''\} = A'',$$

lo que completa la prueba.

Del resultado anterior, si a es un punto que pertenece a dos rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ que son ambas paralelas a otra recta $\mathbb{L}$ que no contiene a a, entonces $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. Por tanto, se obtiene el siguiente resultado.

Del resultado anterior, si a es un punto que pertenece a dos rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ que son ambas paralelas a otra recta $\mathbb{L}$ que no contiene a a, entonces $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. Por tanto, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario

Por cualquier punto de un espacio afín pasa una única recta paralela a una recta dada.

Definición axiomática de plano afín, donde los objetos primarios son los puntos y las rectas.

Definición axiomática de plano afín, donde los objetos primarios son los puntos y las rectas.

- Dos puntos distintos cualesquiera pertenecen simultáneamente a una única recta.
- Dados un punto y una recta, existe una única recta que contiene al punto y es paralela a la recta.
- Existen tres puntos no colineales.

Ejercicio

Considerar el plano afín asociado al espacio vectorial $V = \mathbb{K}^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Determinar las clases de rectas paralelas.

Ejercicio

Considerar el plano afín asociado al espacio vectorial $V = \mathbb{K}^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Determinar las clases de rectas paralelas.

Puntos y rectas vectoriales

Como $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0,1,2\}$, los puntos de este plano (y los vectores de V) se denotan por

$$00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22.$$

Las rectas vectoriales son

Ejercicio

Considerar el plano afín asociado al espacio vectorial $V = \mathbb{K}^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Determinar las clases de rectas paralelas.

Puntos y rectas vectoriales

Como $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$, los puntos de este plano (y los vectores de V) se denotan por

$$00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22.$$

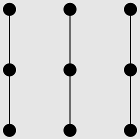
Las rectas vectoriales son

$$\begin{aligned} E =& \{00, 01, 02\} \\ F =& \{00, 10, 20\} \\ G =& \{00, 11, 22\} \\ H =& \{00, 12, 21\}. \end{aligned}$$

Rectas paralelas en la dirección de $E = \{00, 01, 02\}$

Rectas paralelas en la dirección de $E = \{00, 01, 02\}$

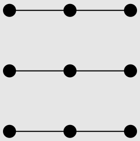
$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 =& \{00, 01, 02\} = E \\
\mathcal{E}_2 =& \{10, 11, 12\} = 10 + E = 11 + E = 12 + E \\
\mathcal{E}_3 =& \{20, 21, 22\} = 20 + E = 21 + E = 22 + E.
\end{aligned}$$



Rectas paralelas en la dirección de $F = \{00, 10, 20\}$

Rectas paralelas en la dirección de $F = \{00, 10, 20\}$

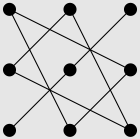
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 =& \{00, 10, 20\} = F \\
\mathcal{F}_2 =& \{01, 11, 21\} = 01 + F = 11 + F = 21 + F \\
\mathcal{F}_3 =& \{02, 12, 22\} = 02 + F = 12 + F = 22 + F.
\end{aligned}$$



Rectas paralelas en la dirección de $G = \{00, 11, 22\}$

Rectas paralelas en la dirección de $G = \{00, 11, 22\}$

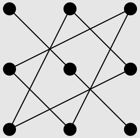
$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1 =& \{00, 11, 22\} = G \\
\mathcal{G}_2 =& \{10, 21, 02\} = 10 + G = 21 + G = 02 + G \\
\mathcal{G}_3 =& \{20, 01, 12\} = 20 + G = 01 + G = 12 + G.
\end{aligned}$$



Rectas paralelas en la dirección de $H = \{00, 12, 21\}$

Rectas paralelas en la dirección de $H = \{00, 12, 21\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 &= \{00, 12, 21\} = H\\
\mathcal{H}_2 &= \{10, 22, 01\} = 10 + H = 22 + H = 01 + H\\
\mathcal{H}_3 &= \{20, 02, 11\} = 20 + H = 02 + H = 11 + H.
\end{aligned}$$



Suma de subespacios vectoriales

Sea U y W dos subespacios vectoriales de V.

Suma de subespacios vectoriales

Sea U y W dos subespacios vectoriales de V.
¿Cómo se define el subespacio $U+W$?

Suma de subespacios vectoriales

Sea U y W dos subespacios vectoriales de V.
¿Cómo se define el subespacio $U+W$?

$$U+W=\{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}:\ \overrightarrow{u}\in U \text{ y } \overrightarrow{w}\in W\}.$$

Proposición

Sean $\mathcal{B} = (B,U)$ y $\mathcal{C} = (C,W)$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathcal{A}$. Sean $b \in B$ y $c \in C$ dos puntos. Entonces $B \cap C \neq \varnothing$ si y solo si $\overrightarrow{bc} \in U + W$.

Proposición

Sean $\mathcal{B} = (B, U)$ y $\mathcal{C} = (C, W)$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathcal{A}$. Sean $b \in B$ y $c \in C$ dos puntos. Entonces $B \cap C \neq \varnothing$ si y solo si $\overrightarrow{bc} \in U + W$.

Demostración ($\Leftarrow$)

Sean $\overrightarrow{u} \in U$ y $\overrightarrow{w} \in W$ tales que $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$.

Proposición

Sean $\mathcal{B} = (B, U)$ y $\mathcal{C} = (C, W)$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathcal{A}$. Sean $b \in B$ y $c \in C$ dos puntos. Entonces $B \cap C \neq \emptyset$ si y solo si $\overrightarrow{bc} \in U + W$.

Demostración ($\Leftarrow$)

Sean $\overrightarrow{u} \in U$ y $\overrightarrow{w} \in W$ tales que $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$. Como $\mathcal{B} = (B, U)$ es un subespacio afín, existe $x \in B$ tal que $b + \overrightarrow{u} = x$.

Proposición

Sean $\mathcal{B} = (B, U)$ y $\mathcal{C} = (C, W)$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathcal{A}$. Sean $b \in B$ y $c \in C$ dos puntos. Entonces $B \cap C \neq \varnothing$ si y solo si $\overrightarrow{bc} \in U + W$.

Demostración ($\Leftarrow$)

Sean $\overrightarrow{u} \in U$ y $\overrightarrow{w} \in W$ tales que $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$. Como $\mathcal{B} = (B, U)$ es un subespacio afín, existe $x \in B$ tal que $b + \overrightarrow{u} = x$. Entonces,

$$c = b + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = (b + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{w} = x + \overrightarrow{w}.$$

Proposición

Sean $\mathcal{B} = (B, U)$ y $\mathcal{C} = (C, W)$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathcal{A}$. Sean $b \in B$ y $c \in C$ dos puntos. Entonces $B \cap C \neq \varnothing$ si y solo si $\overrightarrow{bc} \in U + W$.

Demostración ($\Leftarrow$)

Sean $\overrightarrow{u} \in U$ y $\overrightarrow{w} \in W$ tales que $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$. Como $\mathcal{B} = (B, U)$ es un subespacio afín, existe $x \in B$ tal que $b + \overrightarrow{u} = x$. Entonces,

$$c = b + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = (b + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{w} = x + \overrightarrow{w}.$$

Como $\mathcal{C} = (C, W)$ es un subespacio afín, concluimos que $x \in C$. Por lo tanto, $B \cap C \neq \varnothing$, ya que $x \in B \cap C$.

Proposición

Sean $\mathcal{B} = (B, U)$ y $\mathcal{C} = (C, W)$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathcal{A}$. Sean $b \in B$ y $c \in C$ dos puntos. Entonces $B \cap C \neq \varnothing$ si y solo si $\overrightarrow{bc} \in U + W$.

Proposición

Sean $\mathcal{B} = (B, U)$ y $\mathcal{C} = (C, W)$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathcal{A}$. Sean $b \in B$ y $c \in C$ dos puntos. Entonces $B \cap C \neq \varnothing$ si y solo si $\overrightarrow{bc} \in U + W$.

Demostración ($\Rightarrow$)

Asumiremos ahora que $B \cap C \neq \varnothing$.

Proposición

Sean $\mathcal{B} = (B, U)$ y $\mathcal{C} = (C, W)$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathcal{A}$. Sean $b \in B$ y $c \in C$ dos puntos. Entonces $B \cap C \neq \varnothing$ si y solo si $\overrightarrow{bc} \in U + W$.

Demostración $(\Rightarrow)$

Asumiremos ahora que $B \cap C \neq \varnothing$. Para todo $x \in B \cap C$, existen $\overrightarrow{u} \in U$ y $\overrightarrow{w} \in W$ tales que $b + \overrightarrow{u} = x$ y $x + \overrightarrow{w} = c$.

Proposición

Sean $\mathcal{B} = (B, U)$ y $\mathcal{C} = (C, W)$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathcal{A}$. Sean $b \in B$ y $c \in C$ dos puntos. Entonces $B \cap C \neq \varnothing$ si y solo si $\overrightarrow{bc} \in U + W$.

Demostración $(\Rightarrow)$

Asumiremos ahora que $B \cap C \neq \varnothing$. Para todo $x \in B \cap C$, existen $\overrightarrow{u} \in U$ y $\overrightarrow{w} \in W$ tales que $b + \overrightarrow{u} = x$ y $x + \overrightarrow{w} = c$. Así, por la propiedad aditiva,
$\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{bx} + \overrightarrow{xc} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \in U + W$. □

Corolario

Sea $\mathcal{B} = (B, U)$ y $\mathcal{C} = (C, W)$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathcal{A} = (A, V)$. Si $U + W = V$, entonces toda variedad lineal paralela a $\mathcal{B}$ intercepta a $\mathcal{C}$ en alguna parte.

Corolario

Sea $\mathcal{B} = (B, U)$ y $\mathcal{C} = (C, W)$ dos variedades lineales de un espacio afín $\mathcal{A} = (A, V)$. Si $U + W = V$, entonces toda variedad lineal paralela a $\mathcal{B}$ intercepta a $\mathcal{C}$ en alguna parte.

Demostración

- Sea $\mathcal{B}' = (B', U')$ un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$.
- Si $\mathcal{B}'//\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}'$ tiene la dirección de U, y por eso $U' = U$.
- Por la proposición anterior, si $V = U + W$, entonces $B' \cap C \neq \emptyset$. $\square$

Ejercicio

Demuestra que para cualquier par de rectas no paralelas en un plano afín, existe un único punto de intersección.

Ejercicio

Demuestra que para cualquier par de rectas no paralelas en un plano afín, existe un único punto de intersección.

Solución

- Si (A', F) y (A'', G) son dos rectas no paralelas de un plano afín (A, V), entonces $V = F + G$, y por la proposición de antes, $A' \cap A'' \neq \varnothing$.

Ejercicio

Demuestra que para cualquier par de rectas no paralelas en un plano afín, existe un único punto de intersección.

Solución

- Si (A', F) y (A'', G) son dos rectas no paralelas de un plano afín (A, V), entonces $V = F + G$, y por la proposición de antes, $A' \cap A'' \neq \varnothing$.
- Por lo tanto, dos rectas no paralela de un plano se cortan.

Ejercicio

Demuestra que para cualquier par de rectas no paralelas en un plano afín, existe un único punto de intersección.

Solución

- Si (A', F) y (A'', G) son dos rectas no paralelas de un plano afín (A, V), entonces $V = F + G$, y por la proposición de antes, $A' \cap A'' \neq \varnothing$.
- Por lo tanto, dos rectas no paralela de un plano se cortan. Como dos puntos determinan una única recta, el punto de corte es único. $\square$

¿Qué es un paralelogramo?

¿Qué es un paralelogramo?

- Decimos que cuatro puntos diferentes no colineales a, b, c, d, en este orden, forman un *paralelogramo* si la recta ab es paralela a la recta cd y la recta bc es paralela a la recta ad.

¿Qué es un paralelogramo?

- Decimos que cuatro puntos diferentes no colineales a, b, c, d, en este orden, forman un *paralelogramo* si la recta ab es paralela a la recta cd y la recta bc es paralela a la recta ad.
- En algunos contextos, estas rectas se llaman lados del paralelogramo $abcd$, mientras que las rectas ac y bd se llaman diagonales. Algunos autores consideran que las 6 rectas son diagonales.

¿Qué es un paralelogramo?

- Decimos que cuatro puntos diferentes no colineales a, b, c, d, en este orden, forman un *paralelogramo* si la recta ab es paralela a la recta cd y la recta bc es paralela a la recta ad.
- En algunos contextos, estas rectas se llaman lados del paralelogramo $abcd$, mientras que las rectas ac y bd se llaman diagonales. Algunos autores consideran que las 6 rectas son diagonales.
- En otros contextos, la anterior terminología usada para las rectas se traslada a los segmentos correspondientes.

Ejercicio

Demuestra que si cuatro puntos diferentes a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

Ejercicio

Demuestra que si cuatro puntos diferentes a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

Solución

Sean $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ad}$. Sea $\mathbb{L}_{ab}$ la recta que pasa por a y b y sea $\mathbb{L}_{dc}$ y la recta que pasa por d y c.

- Como $\mathbb{L}_{ab}//\mathbb{L}_{dc}$, tenemos que $\overrightarrow{dc} = \lambda\overrightarrow{u}$ para algún escalar λ. De igual forma se deduce que existe un escalar λ' tal que $\overrightarrow{bc} = \lambda'\overrightarrow{v}$.
- Como $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc}$, tenemos que $(\lambda' - 1)\overrightarrow{v} = (\lambda - 1)\overrightarrow{u}$.
- Como los puntos a, b, c y d no son colineales, tenemos que $\lambda = 1$ o $\lambda' = 1$.
- Nótese que $\lambda = 1$ implica $\lambda' = 1$ y viceversa. $\square$

Ejercicio

Demuestra (por una vía deferente a la de antes) que si cuatro puntos diferentes a,b,c y d, en ese orden, forman un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

Ejercicio

Demuestra (por una vía deferente a la de antes) que si cuatro puntos diferentes a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

Solución

Sean $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ad}$. La recta que pasa por a y b es

$$\mathbb{L}_{ab} = a + \langle \overrightarrow{u} \rangle = b + \langle \overrightarrow{u} \rangle.$$

Ejercicio

Demuestra (por una vía deferente a la de antes) que si cuatro puntos diferentes a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

Solución

Sean $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ad}$. La recta que pasa por a y b es

$$\mathbb{L}_{ab} = a + \langle \overrightarrow{u} \rangle = b + \langle \overrightarrow{u} \rangle.$$

Análogamente,

$$\mathbb{L}_{ad} = a + \langle \overrightarrow{v} \rangle = d + \langle \overrightarrow{v} \rangle \text{ y } \mathbb{L}_{bc} = b + \langle \overrightarrow{v} \rangle = c + \langle \overrightarrow{v} \rangle.$$

Ejercicio

Demuestra (por una vía deferente a la de antes) que si cuatro puntos diferentes a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

Solución

Sean $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ad}$. La recta que pasa por a y b es

$$\mathbb{L}_{ab} = a + \langle \overrightarrow{u} \rangle = b + \langle \overrightarrow{u} \rangle.$$

Análogamente,

$$\mathbb{L}_{ad} = a + \langle \overrightarrow{v} \rangle = d + \langle \overrightarrow{v} \rangle \text{ y } \mathbb{L}_{bc} = b + \langle \overrightarrow{v} \rangle = c + \langle \overrightarrow{v} \rangle.$$

Sea $x \in \mathbb{L}_{dc}$ tal que $d + \overrightarrow{u} = x$. Por la regla del paralelogramo, $\overrightarrow{bx} = \overrightarrow{v}$ y por eso $\mathbb{L}_{ad} // \mathbb{L}_{bx}$.

Ejercicio

Demuestra (por una vía deferente a la de antes) que si cuatro puntos diferentes a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

Solución

Sean $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ad}$. La recta que pasa por a y b es

$$\mathbb{L}_{ab} = a + \langle \overrightarrow{u} \rangle = b + \langle \overrightarrow{u} \rangle.$$

Análogamente,

$$\mathbb{L}_{ad} = a + \langle \overrightarrow{v} \rangle = d + \langle \overrightarrow{v} \rangle \text{ y } \mathbb{L}_{bc} = b + \langle \overrightarrow{v} \rangle = c + \langle \overrightarrow{v} \rangle.$$

Sea $x \in \mathbb{L}_{dc}$ tal que $d + \overrightarrow{u} = x$. Por la regla del paralelogramo, $\overrightarrow{bx} = \overrightarrow{v}$ y por eso $\mathbb{L}_{ad} // \mathbb{L}_{bx}$. Como hay una única recta paralela a $\mathbb{L}_{ad}$ que pasa por b, tenemos $\mathbb{L}_{bc} = \mathbb{L}_{bx}$,

Ejercicio

Demuestra (por una vía deferente a la de antes) que si cuatro puntos diferentes a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

Solución

Sean $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ad}$. La recta que pasa por a y b es

$$\mathbb{L}_{ab} = a + \langle \overrightarrow{u} \rangle = b + \langle \overrightarrow{u} \rangle.$$

Análogamente,

$$\mathbb{L}_{ad} = a + \langle \overrightarrow{v} \rangle = d + \langle \overrightarrow{v} \rangle \text{ y } \mathbb{L}_{bc} = b + \langle \overrightarrow{v} \rangle = c + \langle \overrightarrow{v} \rangle.$$

Sea $x \in \mathbb{L}_{dc}$ tal que $d + \overrightarrow{u} = x$. Por la regla del paralelogramo, $\overrightarrow{bx} = \overrightarrow{v}$ y por eso $\mathbb{L}_{ad} // \mathbb{L}_{bx}$. Como hay una única recta paralela a $\mathbb{L}_{ad}$ que pasa por b, tenemos $\mathbb{L}_{bc} = \mathbb{L}_{bx}$, y así $x, c \in \mathbb{L}_{dc} \cap \mathbb{L}_{bc}$.

Ejercicio

Demuestra (por una vía deferente a la de antes) que si cuatro puntos diferentes a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

Solución

Sean $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ad}$. La recta que pasa por a y b es

$$\mathbb{L}_{ab} = a + \langle \overrightarrow{u} \rangle = b + \langle \overrightarrow{u} \rangle.$$

Análogamente,

$$\mathbb{L}_{ad} = a + \langle \overrightarrow{v} \rangle = d + \langle \overrightarrow{v} \rangle \text{ y } \mathbb{L}_{bc} = b + \langle \overrightarrow{v} \rangle = c + \langle \overrightarrow{v} \rangle.$$

Sea $x \in \mathbb{L}_{dc}$ tal que $d + \overrightarrow{u} = x$. Por la regla del paralelogramo, $\overrightarrow{bx} = \overrightarrow{v}$ y por eso $\mathbb{L}_{ad} // \mathbb{L}_{bx}$. Como hay una única recta paralela a $\mathbb{L}_{ad}$ que pasa por b, tenemos $\mathbb{L}_{bc} = \mathbb{L}_{bx}$, y así $x, c \in \mathbb{L}_{dc} \cap \mathbb{L}_{bc}$. Como el punto de corte de dos rectas no paralelas es único, $x = c$,

Ejercicio

Demuestra (por una vía deferente a la de antes) que si cuatro puntos diferentes a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

Solución

Sean $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ad}$. La recta que pasa por a y b es

$$\mathbb{L}_{ab} = a + \langle \overrightarrow{u} \rangle = b + \langle \overrightarrow{u} \rangle.$$

Análogamente,

$$\mathbb{L}_{ad} = a + \langle \overrightarrow{v} \rangle = d + \langle \overrightarrow{v} \rangle \text{ y } \mathbb{L}_{bc} = b + \langle \overrightarrow{v} \rangle = c + \langle \overrightarrow{v} \rangle.$$

Sea $x \in \mathbb{L}_{dc}$ tal que $d + \overrightarrow{u} = x$. Por la regla del paralelogramo, $\overrightarrow{bx} = \overrightarrow{v}$ y por eso $\mathbb{L}_{ad} // \mathbb{L}_{bx}$. Como hay una única recta paralela a $\mathbb{L}_{ad}$ que pasa por b, tenemos $\mathbb{L}_{bc} = \mathbb{L}_{bx}$, y así $x, c \in \mathbb{L}_{dc} \cap \mathbb{L}_{bc}$. Como el punto de corte de dos rectas no paralelas es único, $x = c$, lo que implica que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$. □

- ¿Qué es un segmento?

- ¿Qué es un segmento?
- Dados dos puntos a y b, ¿cómo podemos definir el segmento $\overline{ab}$?

- ¿Qué es un segmento?
- Dados dos puntos a y b, ¿cómo podemos definir el segmento $\overline{ab}$?

Definición

En un espacio afín $\mathcal{A} = (A, V)$ real, para todo $a, b \in A$ y $\overrightarrow{u} \in V$ tales que $a + \overrightarrow{u} = b$, el **segmento** $\overline{ab}$ se define como

$$\overline{ab} = \{a + \lambda \overrightarrow{u} : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Obviamente, $\overline{ab} = \overline{ba}$.

¿Cómo podemos definir punto medio de un segmento?

¿Cómo podemos definir punto medio de un segmento?

Definición

El **punto medio** del segmento $\overline{ab}$ se define como

$$m_{\overline{ab}} = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}.$$

Nótese que $m_{\overline{ab}} = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} = b + \frac{1}{2}\overrightarrow{ba}$.

Ejercicio

Prueba que si cuatro puntos a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo en un plano afín real, entonces $\overline{ac} \cap \overline{db} = \{m_{\overline{ac}}\} = \{m_{\overline{db}}\}$.

Ejercicio

Prueba que si cuatro puntos a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo en un plano afín real, entonces $\overline{ac} \cap \overline{db} = \{m_{\overline{ac}}\} = \{m_{\overline{db}}\}$.

Solución

Nótese que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$, por el ejercicio anterior.

- $m_{\overline{ac}} = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ac} = a + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc}) = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{dc}.$

Ejercicio

Prueba que si cuatro puntos a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo en un plano afín real, entonces $\overline{ac} \cap \overline{db} = \{m_{\overline{ac}}\} = \{m_{\overline{db}}\}$.

Solución

Nótese que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$, por el ejercicio anterior.

- $m_{\overline{ac}} = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ac} = a + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc}) = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{dc}$.
- $m_{\overline{db}} = d + \frac{1}{2}\overrightarrow{db} = d + \frac{1}{2}(\overrightarrow{da} + \overrightarrow{ab}) = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{dc}$.

Ejercicio

Prueba que si cuatro puntos a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo en un plano afín real, entonces $\overline{ac} \cap \overline{db} = \{m_{\overline{ac}}\} = \{m_{\overline{db}}\}$.

Solución

Nótese que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$, por el ejercicio anterior.

- $m_{\overline{ac}} = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ac} = a + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc}) = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{dc}$.
- $m_{\overline{db}} = d + \frac{1}{2}\overrightarrow{db} = d + \frac{1}{2}(\overrightarrow{da} + \overrightarrow{ab}) = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{dc}$.
- Por lo tanto, $m_{\overline{ac}} = m_{\overline{db}} \in \overline{ad} \cap \overline{db}$.

Ejercicio

Prueba que si cuatro puntos a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo en un plano afín real, entonces $\overline{ac} \cap \overline{db} = \{m_{\overline{ac}}\} = \{m_{\overline{db}}\}$.

Solución

Nótese que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$, por el ejercicio anterior.

- $m_{\overline{ac}} = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ac} = a + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc}) = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{dc}$.
- $m_{\overline{db}} = d + \frac{1}{2}\overrightarrow{db} = d + \frac{1}{2}(\overrightarrow{da} + \overrightarrow{ab}) = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{dc}$.
- Por lo tanto, $m_{\overline{ac}} = m_{\overline{db}} \in \overline{ad} \cap \overline{db}$.
- Sea $\mathbb{L}_1$ la recta que contiene $\overline{ac}$ y $\mathbb{L}_2$ la que contiene $\overline{db}$.

Ejercicio

Prueba que si cuatro puntos a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo en un plano afín real, entonces $\overline{ac} \cap \overline{db} = \{m_{\overline{ac}}\} = \{m_{\overline{db}}\}$.

Solución

Nótese que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$, por el ejercicio anterior.

- $m_{\overline{ac}} = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ac} = a + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc}) = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{dc}$.
- $m_{\overline{db}} = d + \frac{1}{2}\overrightarrow{db} = d + \frac{1}{2}(\overrightarrow{da} + \overrightarrow{ab}) = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{dc}$.
- Por lo tanto, $m_{\overline{ac}} = m_{\overline{db}} \in \overline{ad} \cap \overline{db}$.
- Sea $\mathbb{L}_1$ la recta que contiene $\overline{ac}$ y $\mathbb{L}_2$ la que contiene $\overline{db}$.
- Como $\varnothing \neq \overline{ac} \cap \overline{db} \subseteq \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$, y dos rectas no paralelas se cortan en un único punto, tenemos que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{m_{\overline{ac}}\} = \{m_{\overline{db}}\}$.

Ejercicio

Prueba que si cuatro puntos a, b, c y d, en ese orden, forman un paralelogramo en un plano afín real, entonces $\overline{ac} \cap \overline{db} = \{m_{\overline{ac}}\} = \{m_{\overline{db}}\}$.

Solución

Nótese que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$, por el ejercicio anterior.

- $m_{\overline{ac}} = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ac} = a + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc}) = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{dc}$.
- $m_{\overline{db}} = d + \frac{1}{2}\overrightarrow{db} = d + \frac{1}{2}(\overrightarrow{da} + \overrightarrow{ab}) = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} = m_{\overline{ad}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{dc}$.
- Por lo tanto, $m_{\overline{ac}} = m_{\overline{db}} \in \overline{ad} \cap \overline{db}$.
- Sea $\mathbb{L}_1$ la recta que contiene $\overline{ac}$ y $\mathbb{L}_2$ la que contiene $\overline{db}$.
- Como $\varnothing \neq \overline{ac} \cap \overline{db} \subseteq \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$, y dos rectas no paralelas se cortan en un único punto, tenemos que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{m_{\overline{ac}}\} = \{m_{\overline{db}}\}$.
- Por lo tanto, $\overline{ac} \cap \overline{db} = \{m_{\overline{db}}\} = \{m_{\overline{ac}}\}$. $\square$

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín real. Demuestra que si $B \subseteq A$ es un conjunto que contiene todas las rectas que pasan por todo par de puntos de B, entonces $\mathcal{B} = (B, \varphi_o^{-1}(B))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$ para todo $o \in B$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín real. Demuestra que si $B \subseteq A$ es un conjunto que contiene todas las rectas que pasan por todo par de puntos de B, entonces $\mathcal{B} = (B, \varphi_o^{-1}(B))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$ para todo $o \in B$.

Solución

- Sea $B \subseteq A$ un conjunto que cumple las premisas. Sea $o \in B$ y $F = \{\overrightarrow{ox} : x \in B\}$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín real. Demuestra que si $B \subseteq A$ es un conjunto que contiene todas las rectas que pasan por todo par de puntos de B, entonces $\mathcal{B} = (B, \varphi_o^{-1}(B))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$ para todo $o \in B$.

Solución

- Sea $B \subseteq A$ un conjunto que cumple las premisas. Sea $o \in B$ y $F = \{\overrightarrow{ox} :\ x \in B\}$.
- Como $\varphi_o^{-1}(B) = F$, debemos probar que F es un s. e. vectorial de V.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín real. Demuestra que si $B \subseteq A$ es un conjunto que contiene todas las rectas que pasan por todo par de puntos de B, entonces $\mathcal{B} = (B, \varphi_o^{-1}(B))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$ para todo $o \in B$.

Solución

- Sea $B \subseteq A$ un conjunto que cumple las premisas. Sea $o \in B$ y $F = \{\overrightarrow{ox} : \; x \in B\}$.
- Como $\varphi_o^{-1}(B) = F$, debemos probar que F es un s. e. vectorial de V.
- Sean $a, b \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\mathbb{L}_{oa} \subseteq B$, tenemos que $\lambda\overrightarrow{oa} \in F$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín real. Demuestra que si $B \subseteq A$ es un conjunto que contiene todas las rectas que pasan por todo par de puntos de B, entonces $\mathcal{B} = (B, \varphi_o^{-1}(B))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$ para todo $o \in B$.

Solución

- Sea $B \subseteq A$ un conjunto que cumple las premisas. Sea $o \in B$ y $F = \{\overrightarrow{ox} : x \in B\}$.
- Como $\varphi_o^{-1}(B) = F$, debemos probar que F es un s. e. vectorial de V.
- Sean $a, b \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\mathbb{L}_{oa} \subseteq B$, tenemos que $\lambda\overrightarrow{oa} \in F$.
- Falta ver que $\overrightarrow{oc} \in F$ para todo $c \in A \setminus (\mathbb{L}_{oa} \cup \mathbb{L}_{ob})$ tal que $\overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oc}$ con $a, b \in B$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín real. Demuestra que si $B \subseteq A$ es un conjunto que contiene todas las rectas que pasan por todo par de puntos de B, entonces $\mathcal{B} = (B, \varphi_o^{-1}(B))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$ para todo $o \in B$.

Solución

- Sea $B \subseteq A$ un conjunto que cumple las premisas. Sea $o \in B$ y $F = \{\overrightarrow{ox} : x \in B\}$.
- Como $\varphi_o^{-1}(B) = F$, debemos probar que F es un s. e. vectorial de V.
- Sean $a, b \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\mathbb{L}_{oa} \subseteq B$, tenemos que $\lambda\overrightarrow{oa} \in F$.
- Falta ver que $\overrightarrow{oc} \in F$ para todo $c \in A \setminus (\mathbb{L}_{oa} \cup \mathbb{L}_{ob})$ tal que $\overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oc}$ con $a, b \in B$.
- Como o, a, c, b forma un paralelogramo, donde $\overrightarrow{ob} = \overrightarrow{ac}$, tenemos que $m_{\overline{oc}} = m_{\overline{ab}} \in \mathbb{L}_{ab} \subseteq B$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín real. Demuestra que si $B \subseteq A$ es un conjunto que contiene todas las rectas que pasan por todo par de puntos de B, entonces $\mathcal{B} = (B, \varphi_o^{-1}(B))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$ para todo $o \in B$.

Solución

- Sea $B \subseteq A$ un conjunto que cumple las premisas. Sea $o \in B$ y $F = \{\overrightarrow{ox} : x \in B\}$.
- Como $\varphi_o^{-1}(B) = F$, debemos probar que F es un s. e. vectorial de V.
- Sean $a, b \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\mathbb{L}_{oa} \subseteq B$, tenemos que $\lambda \overrightarrow{oa} \in F$.
- Falta ver que $\overrightarrow{oc} \in F$ para todo $c \in A \setminus (\mathbb{L}_{oa} \cup \mathbb{L}_{ob})$ tal que $\overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oc}$ con $a, b \in B$.
- Como o, a, c, b forma un paralelogramo, donde $\overrightarrow{ob} = \overrightarrow{ac}$, tenemos que $m_{\overline{oc}} = m_{\overline{ab}} \in \mathbb{L}_{ab} \subseteq B$.
- Por lo tanto, $m_{\overline{oc}} \in B$, y como $c \in \mathbb{L}_{om_{\overline{oc}}} \subseteq B$, concluimos que $\overrightarrow{oc} \in F$. $\square$

Observación

La afirmación anterior es una generalización de un resultado conocido en la geometría euclidiana tridimensional:

- Un conjunto de puntos que contiene todas las rectas que pasan por dos puntos del conjunto, es una recta, o un plano, o todo el espacio tridimensional.