# Problemes d'Equacions Diferencials II

Grau en Enginyeria Matemàtica i Física

## BLOC 1: Teoria Fonamental

**1.** Siguin $X$ i $Y$ dos camps vectorials de classe $C^1$ en $\mathbb{R}^n$. Siguin $p$ i $q$ punts d'equilibri dels respectius camps i suposeu que existeix una conjugació de $X$ a $Y$ de classe $C^1$ d'un entorn de $p$ a un entorn de $q$. Proveu que $DX(p)$ i $DY(q)$ són aplicacions lineals semblants.

**2.** Sigui $f : U \subset\longrightarrow$ de classe $C^2$ i tal que $0 \in U$, $f(0) = 0$ i $f'(0) = a$ amb $a > 0$ (respectivament, $a < 0$). Demostreu que el camp vectorial unidimensional $\dot{x} = f(x)$ és localment topològicament conjugat a $\dot{x} = x$ (respectivament, $\dot{x} = -x$). Per fer això:
a) Demostreu que $\dot{x} = f(x)$ és localment $C^1$ conjugat a $\dot{x} = ax$. (Indicació: Escriviu $f(x) = x\bar{f}(x)$ per una funció $\bar{f}$ adequada).
b) Demostreu que $\dot{x} = ax$ amb $a > 0$ (respectivament, $a < 0$) és topològicament conjugat a $\dot{x} = x$ (respectivament, $\dot{x} = -x$).

Nota: Aquest resultat és una versió senzilla del Teorema de Hartman. Es tracta només del cas 1-dimensional, amb hipòtesis de diferenciabilitat més fortes.

**3.** Sigui $F : I \subset\longrightarrow$, de classe $\mathcal{C}^1$. Considerem el *sistema conservatiu unidimensional* $\ddot{x} = F(x)$, o equivalentment, el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = F(x). \end{cases} \tag{1}$$

Proveu:

a) L'energia $E = T + V$ és una integral primera de (1), on $T(v) = \frac{v^2}{2}$ (energia cinètica) i $V' = -F$ ($V$ és l'energia potencial).

b) Els punts d'equilibri són sobre l'eix $x$, i tota òrbita periòdica és simètrica respecte a l'eix $x$ i el talla.

c) Si $V(x_1) = V(x_2) = h$, $V'(x_1)V'(x_2) \neq 0$ i $V(x) < h$ quan $x_1 < x < x_2$, llavors (1) té una òrbita periòdica passant pels punts $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$.

d) Si $F(x) \neq 0$ per tot $x$ tal que $0 < |x - x_0| < a$ i $F(x_0) = 0$, llavors (1) té un centre (respectivament, una sella) en $(x_0, 0)$ si $V''(x_0) > 0$ (respectivament, $< 0$). Què passa si $x_0$ és un punt d'inflexió de $V$?

**4.** Estudieu l'espai de fases de:

a) $x'' = -x$ (molla), b) $x'' = -\sin x$ (pèndol), c) $x'' = -\frac{1}{x^2}$ (gravitació).

**5.** Feu l'esquema del retrats de fase en cadascun dels següents casos:

a) $\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \sin\theta = 0$ (pèndol amortit, $\alpha > 0$);

b) $\ddot{\theta} + \sin\theta = \beta$ (pèndol sotmès a un moment de força constant), distingint els casos $|\beta| < 1$ i $|\beta| > 1$;

c) $\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \sin\theta = \beta$ (pèndol amortit i sotmès a un moment de força constant). Els pèndols sense amortiment tenen òrbites periòdiques i òrbites homoclíniques (connexions de punts fixos). En poden tenir els amortits?

**6.** Siguin $X_1$ i $X_2$ camps vectorials de classe $\mathcal{C}^1$ a oberts $\Delta_1, \Delta_2 \subset^n$ respectivament. Veure que si $X_1$ i $X_2$ són topològicament conjugats i $X_1$ te una integral primera, aleshores també en té $X_2$.

**7.** Sigui $\gamma = \{\phi(t, p_0),\ t \in [0, T]\}$ una òrbita periòdica de $x' = f(x)$, on $x \in U \subset^n$ i $f$ és una funció de classe $C^r$, $r \geqslant 1$. Proveu que $\frac{\partial}{\partial p_0}\phi(T, p_0)$ sempre té $f(p_0)$ com a vector propi de valor propi 1.

**8.** Sigui $X :^2 \longrightarrow^2$ el camp donat per $(x, y) \longmapsto \big(-y + (1 - x^2 - y^2)x, x + (1 - x^2 - y^2)y\big)$. Trobeu les òrbites periòdiques i l'aplicació de Poincaré associada.

**9.** Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x' = xy + 12, \\ y' = x^2 + y^2 - 25. \end{cases}$$

(a) Determineu els punts d'equilibri del sistema i estudieu la seva estabilitat.

(b) Demostreu que existeix una òrbita $\gamma$ continguda en el quart quadrant tal que té com $\alpha-$límit un punt $P$ i $\omega-$límit un punt $Q$, amb $P \neq Q$. Passa el mateix en el segon quadrant?

**10.** El següent sistema d'equacions diferencials modela dues poblacions en competència pels recursos:

$$x(1-x-\frac{1}{2}y),y(2-x-2y),$$

on $x(t)$ i $y(t)$ denoten el número d'individus de les respectives poblacions a temps $t$.

(a) Trobeu els punts fixos del sistema i determineu el seu caràcter.

(b) Proveu que el model està ben definit, és a dir, que el primer quadrant (incloent els eixos), és invariant.

(c) Feu un esbós qualitatiu del retrat de fase del sistema al primer quadrant. (Buscant, a més, les isoclines horitzontals i verticals).

(d) Quins són els conjunts omega límit dels punts del primer quadrant? Poden ser òrbites periòdiques?

(e) Interpreteu el model i els resultats obtinguts.

**11.** (a) Donada l'equació $(x^2-y^2-1)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$, trobeu un factor integrant i resoleu-la.

(b) Considereu el sistema d'equacions

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y, \\ y' = -x^2 + y^2 + 1. \end{array} \right.$$

Calculeu els punts d'equilibri i estudieu el seu caràcter lineal.

(c) Dibuixeu el retrat de fase (varietats lineals, punts d'equilibri, ...) usant *tota* la informació anterior.

(d) Descriviu els conjunts $\alpha$-límit i $\omega$-límit dels punts del pla.

**12.** Proveu que el sistema d'equacions

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - x^5 - xy^4, \\ y' = y - y^3 - yx^2, \end{array} \right.$$

no té cap òrbita periòdica. (Indicació: Estudieu els eixos de coordenades.)

**13.** Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x' = x(y^2-4), \\ y' = y(x^2-4). \end{cases}$$

(a) Trobeu els punts d'equilibri i determineu el seu caràcter.

(b) Trobeu *totes* les rectes *invariants* del sistema, i justifiqueu el mètode que feu servir per trobar-les. (Una recta del pla és invariant pel sistema si conté tota la òrbita de cada un dels seus punts).

(c) Trobeu les isoclines horitzontals i verticals del sistema i estudieu les direccions del camp restringides a aquestes isoclines.

(d) Demostreu que el sistema no té cap òrbita periòdica.

(e) A partir de la informació dels apartats anteriors feu un esbós qualitatiu del retrat de fases del sistema.

**14.** Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 3, \\ y' = xy + y^2. \end{cases}$$

(a) Trobeu els punts d'equilibri i determineu el seu caràcter lineal.

(b) Trobeu les isoclines horitzontals i verticals del sistema, i esbrineu si alguna d'elles és a més una recta invariant del sistema. Determineu les direccions del camp sobre aquestes isoclines.

(c) Aquest sistema té quatre rectes invariants amb pendent diferent de zero. Trobeu-les. (Indicació: Observeu que el camp és simètric respecte a l'origen. Penseu també com han de ser els punts de tall entre rectes invariants i/o isoclines.)

(d) Fent ús de l'apartat anterior i d'algún resultat vist a teoria, demostreu que el sistema no té òrbites periòdiques.

(e) Usant els apartats anteriors, feu un esbós qualitatiu del retrat de fase del sistema.

**15.** Sigui $\dot{x} = X(x)$ un camp vectorial $\mathcal{C}^1$ definit a un obert $U$ de ${}^2$. Sigui $\gamma$ una òrbita periòdica tal que la component connexa acotada de ${}^2 \setminus \{\gamma\}$, diem $D$, és dins $U$. Demostreu que

$$\int_D \mathrm{div} X(x) dx \;=\; 0.$$

Quina és la propietat de $\partial D$ que utilitzem realment?

**16.** Considerem el sistema d'equacions al pla

$$(1-x^2)(x+2y),(1-y^2)(-2x+y).$$

(a) Trobeu 4 rectes invariants i dibuixeu la dinàmica sobre les mateixes.

(b) Calculeu els punts fixos, feu la seva classificació lineal i afegiu aquesta informació al dibuix anterior. (Nota: Hi ha 9 punts fixos, agrupats en tres famílies, i no fa falta fer l'anàlisi de tots, només d'un representant de cada família.)

(c) Escriviu el sistema en coordenades polars i vegeu que queda de la forma

$$\begin{cases} \dot{r} = r - f(\theta) r^3, \\ \dot{\theta} = -2 + g(\theta) r^2. \end{cases}$$

Es pot veure, a més, que $\frac{3-\sqrt{5}}{4} \leqslant f(\theta) \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{4}$. (Això és informació que us donem).

(d) Considerem el cercle de radi $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$, centrat a l'origen. Demostreu que la divergència és positiva a l'interior d'aquest cercle i, per tant, no pot contenir cap òrbita periòdica. Demostreu que el cercle és negativament invariant, és a dir, que el camp vectorial sobre la seva frontera apunta "cap enfora".

(e) Observeu que la integral de la divergència del camp sobre el quadrat $[-1,1] \times [-1,1]$ és zero. Demostreu llavors que el camp vectorial no té cap òrbita periòdica. Quins són llavors els conjunts $\alpha$ i $\omega$-límit de punts de $(-1,1) \times (-1,1)$?