Coloración: ejercicios

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

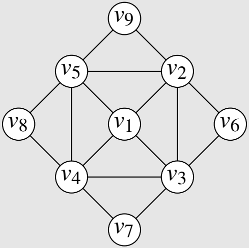
Ejercicio

En un curso de verano se han programado 9 conferencias, $v_1, v_2, ..., v_9$, de una hora cada una. El comité organizador dispone de aulas suficientes para hacer conferencias simultáneas. Al pedir a los participantes que seleccionen las conferencias que les interesan, se han obtenido las siguientes solicitudes $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_4, v_5\}$, $\{v_3, v_4, v_7\}$, $\{v_4, v_5, v_8\}$, $\{v_2, v_5, v_9\}$ y $\{v_2, v_3, v_6\}$.

1. Calcula el mínimo número de horas necesarias para distribuir las conferencias de modo que todos los participantes puedan asistir a todas las conferencias que les interesan.
2. Calcula el número de aulas necesarias para impartir las conferencias en el mínimo número de horas de modo que todos los participantes puedan asistir a todas las conferencias que les interesan.
3. Supongamos ahora que disponemos de x horas para hacer las conferencias y queremos hacer un horario de conferencias para entregarlo a los estudiantes. ¿Cuántos horarios diferentes podemos hacer de modo que cada estudiante pueda asistir a todas las conferencias que le interesan?

Solución

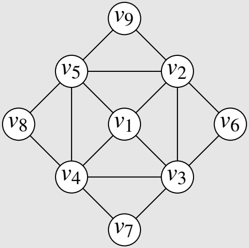
Podemos representar esta situación mediante el grafo G de la figura.



1. Se trata de buscar el número cromático de G que es $\chi(G) = 3$.

Solución

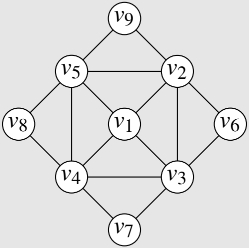
Podemos representar esta situación mediante el grafo G de la figura.



1. Se trata de buscar el número cromático de G que es $\chi(G) = 3$.
2. En toda 3-coloración de G el vértice central tendrá el mismo color que los vértices de grado dos. Por lo tanto, son necesarias 5 aulas.

Solución

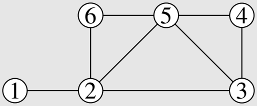
Podemos representar esta situación mediante el grafo G de la figura.



1. Se trata de buscar el número cromático de G que es $\chi(G) = 3$.
2. En toda 3-coloración de G el vértice central tendrá el mismo color que los vértices de grado dos. Por lo tanto, son necesarias 5 aulas.
3. Se trata de buscar $P_G(x) = P_{K_1+C_4}(x)(x-2)^4$. Esto es, $P_{K_1+C_4}(x) = xP_{C_4}(x-1) = x((x-2)^4 + (x-2)) = x(x-1)(x-2)(x^2-5x+7)$. Por lo tanto, $P_G(x) = P_{K_1+C_4}(x)(x-2)^4 = x(x-1)(x-2)^5(x^2-5x+7)$.

Ejercicio

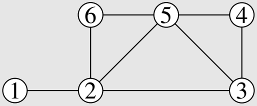
Considera el grafo G de la siguiente figura.



1. Determina $P_G(x)$.
2. Calcula el número cromático de $G+Q_3$, donde Q_3 denota el cubo estándar.

Ejercicio

Considera el grafo G de la siguiente figura.



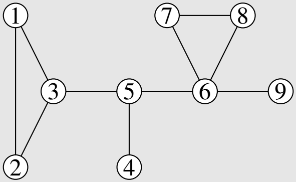
1. Determina $P_G(x)$.
2. Calcula el número cromático de $G+Q_3$, donde Q_3 denota el cubo estándar.

Solución

1. $P_G(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$.
2. $\chi(G+Q_3) = \chi(G)+\chi(Q_3) = 5$.

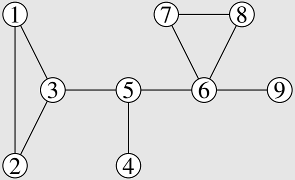
Ejercicio

Determina el polinomio cromático del grafo de la figura.



Ejercicio

Determina el polinomio cromático del grafo de la figura.

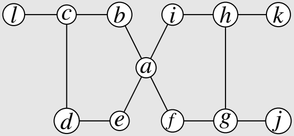


Solución

$P_G(x) = P_T(x)(x-2)^2 = x(x-1)^6(x-2)^2$

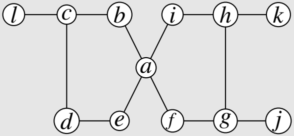
Ejercicio

Calcula el polinomio cromático del grafo G de la figura.

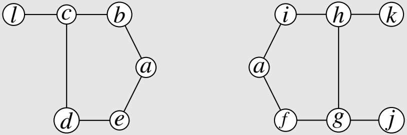


Ejercicio

Calcula el polinomio cromático del grafo G de la figura.



Solución:



$$P_{G_1}(x) = P_{C_5}(x)(x-1) = x(x-1)^2(x-2)(x^2-2x+2),$$
$$P_{G_2}(x) = P_{C_5}(x)(x-1)^2 = x(x-1)^3(x-2)(x^2-2x+2),$$
$$P_G(x) = \frac{P_{G_1}(x)P_{G_2}(x)}{P_{K_1}(x)} = x(x-1)^5(x-2)^2(x^2-2x+2)^2.$$

Ejercicio

Dos grafos son cromáticamente equivalentes si tienen el mismo polinomio cromático. Un grafo unicíclico es un grafo conexo que contiene exactamente un ciclo. ¿Qué grafos unicíclicos del mismo orden son cromáticamente equivalentes?

Ejercicio

Dos grafos son cromáticamente equivalentes si tienen el mismo polinomio cromático. Un grafo unicíclico es un grafo conexo que contiene exactamente un ciclo. ¿Qué grafos unicíclicos del mismo orden son cromáticamente equivalentes?

Solución:

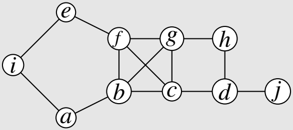
Sea G un grafo unicíclico de orden n cuyo ciclo tiene longitud k. El polinomio cromático de C_k es $P_{C_k}(x) = (x-1)^k + (-1)^k(x-1)$. De ahí que el polinomio cromático de G es

$$P_G(x) = P_{C_k}(x)(x-1)^{n-k} = (x-1)^n + (-1)^k(x-1)^{n-k+1}.$$

Por lo tanto, dos grafos unicíclicos de orden n son cromáticamente equivalentes si y sólo si sus ciclos tienen la misma longitud. □

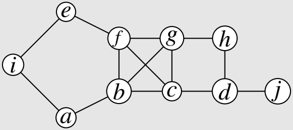
Ejercicio

Determina el polinomio cromático.

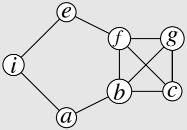


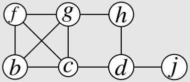
Ejercicio

Determina el polinomio cromático.



Solución:

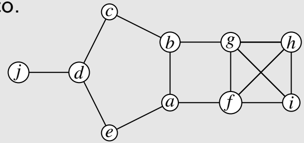




$$P_{G_1}(x) = (x-2)(x-3)P_{C_5}(x) = x(x-1)(x-2)^2(x-3)(x^2-2x+2),$$
$$P_{G_2}(x) = (x-1)(x-2)(x-3)P_{C_4}(x) = x(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-3x+3),$$
$$P_G(x) = \frac{P_{G_1}(x)P_{G_2}(x)}{P_{K_4}(x)} = x(x-1)^2(x-2)^2(x-3)(x^2-2x+2)(x^2-3x+3).$$

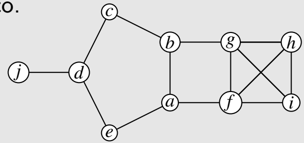
Ejercicio

Calcula el polinomio cromático.

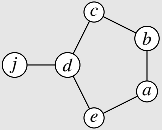


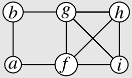
Ejercicio

Calcula el polinomio cromático.



Solución:





$P_{G_1}(x) = P_{C_5}(x)(x-1) = x(x-1)^2(x-2)(x^2-2x+2),$
$P_{G_2}(x) = P_{C_4}(x)(x-2)(x-3) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x^2-3x+3),$
$P_G(x) = \frac{P_{G_1}(x)P_{G_2}(x)}{P_{K_2}(x)} = x(x-1)^2(x-2)^2(x-3)(x^2-2x+2)(x^2-3x+3).$

Ejercicio

Determina el polinomio cromático de $K_{2,4}$

Ejercicio

Determina el polinomio cromático de $K_{2,4}$

Solución

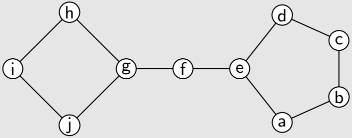
Nótese que $K_{2,4} = N_2 + N_4$. Sea x el número de colores. Consideramos dos casos; las coloraciones de $N_2 + N_4$ donde los vértices de N_2 tienen el mismo color, que son $x(x-1)^4$; y las coloraciones donde los vértices de N_2 tienen diferente color, que son $x(x-1)(x-2)^4$. Por el principio de la adición,

$$P_{K_{2,4}}(x) = x(x-1)^4 + x(x-1)(x-2)^4 = x(x-1)((x-1)^3 + (x-2)^4).$$

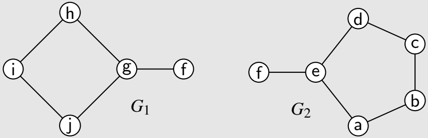
$\square$

Ejercicio

Determina el polinomio cromático del siguiente grafo.



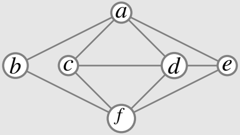
Solución



$P_{G_1}(x) = P_{C_4}(x)(x-1) = x(x-1)^2(x^2-3x+3),$
$P_{G_2}(x) = P_{C_5}(x)(x-1) = x(x-1)^2(x-2)(x^2-2x+2),$
$P_G(x) = \frac{P_{G_1}(x)P_{G_2}(x)}{P_{K_1}(x)} = x(x-1)^4(x-2)(x^2-3x+3)(x^2-2x+2).$

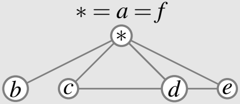
Ejercicio

Determina el polinomio cromático del siguiente grafo.

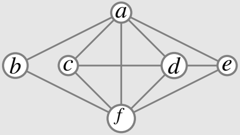


Solución

Considera los siguientes grafos



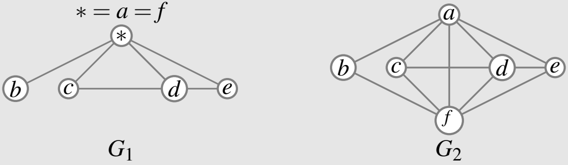
G_1



G_2

Solución

Considera los siguientes grafos



Then we have $P_G(x) = P_{G_1}(x) + P_{G_1}(x)$. Furthermore,

$$G_1 \cong K_1 + (K_1 \cup P_3) \text{ and } G_2 \cong K_1 + (K_1 + (K_1 \cup P_3)) = K_1 + G_1.$$

Hence,

$$P_{G_1}(x) = xP_{K_1 \cup P_3}(x-1) = x(x-1)^2(x-2)^2,$$
$$P_{G_2}(x) = xP_{G_1}(x-1) = x(x-1)(x-2)^2(x-3)^2.$$

Therefore, the chromatic polynomial of G is

$$\begin{aligned} P_G(x) =& x(x-1)^2(x-2)^2 + x(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \\ =& x(x-1)(x-2)^2(x^2-5x+8). \end{aligned}$$

El mundo que hemos creado es un proceso de nuestro pensamiento. No se puede cambiar sin cambiar nuestra forma de pensar.

Albert Einstein