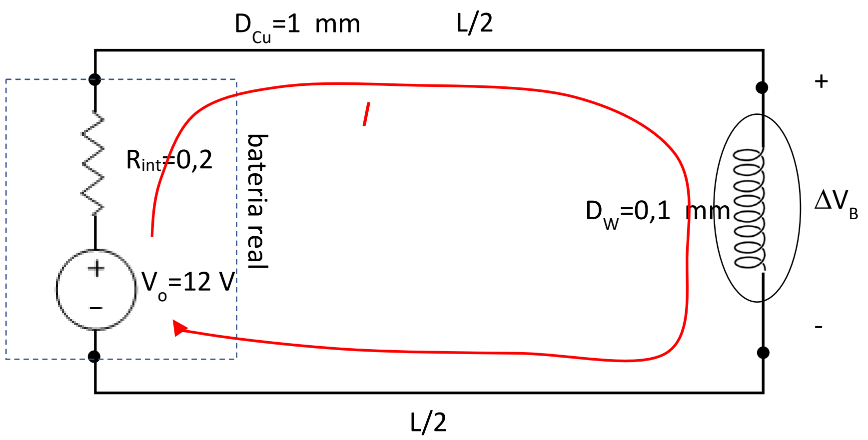
Considerem el circuit de la figura, en el qual tenim una bateria de Pb-àcid (les de cotxe normal) de contínua de V_0=12 V ideals, però amb una resistència interna de R_{int}=0,2 Ω . El conjunt de la bateria real és el que està tancat dins del rectangle en línia discontínua.



En les seves dues bornes hi connectem sengles cables de coure (Cu) de D_{Cu}=1 mm de diàmetre, que transporten el corrent elèctric fins a una bombeta (B) de buit fet amb un filament prim de tungstè (W) de diàmetre D_W= 0,1 mm. La bombeta s'encén pel pas del corrent i per l'efecte joule, que dissipa tanta calor per unitat de volum que entra en incandescència. El cable de coure te una llargada L/2 en l'anada + L/2 en la tornada. Anem a caracteritzar i acabar de dissenyar tot el sistema a partir de les següents dades:

resistivitat del Cu: ρ_{Cu}=1,68 x 10^{-8} Ω·m ; **densitat del Cu:** d_{Cu}=8,96 g/cm^3 ; **pes molar del Cu**: M_{Cu}=63,54 g/mol

resistivitat del W: ρ_W=5,6 x 10^{-8} Ω·m ; **densitat del W:** d_W=19,25 g/cm^3 ; **pes molar del W**: M_W=183,85 g/mol

nombre d'Avogadre=N_A=6,022X10^{23}

I de les següents consideracions:

1. Sabem que si a la bombeta hi connectéssim els 12 V ideals de la bateria, llavors dissiparia P_L=100 W.
2. Volem que a la bombeta hi caigui una tensió V_L superior o igual al 70 % de la ideal de V_0=12 V de la bateria, o sinó hi hauria massa pèrdues pel camí i s'aprofitaria poca energia allà on realment volem usar-la que és per encendre la bombeta.

Solució.

Anàlisi macroscòpic del circuit:

A partir de la fórmula de la potència dissipada a la bombeta (efecte joule)

$$P_L = \frac{{V_L}^2}{R_L}$$

i a partir de les dades de 1. podem extreure la resistència del filament de tungstè.

$$R_L = \frac{{V_L}^2}{P_L} = \frac{(12\ V)^2}{100\ W} = 1{,}44\ \Omega$$

Calculem la secció (circular) del filament de tungstè a partir de diàmetre del fil, D_W= 0,1 mm.:

$$S_W = \pi \cdot \frac{{D_W}^2}{4} = 7{,}85x10^{-9}\ m^2 = 0{,}00785\ mm^2$$

A partir de la fórmula de la resistència del filament de tungstè:

$$R_L = \rho_W \frac{L_W}{S_W}$$

Calcularem la llargada del filament, L_W:

$$L_W = \frac{S_W \cdot R_L}{\rho_W} = \frac{7{,}85x10^{-9}\, m^2 \cdot 1{,}44\, \Omega}{5{,}6\, x\, 10^{-8}\, \Omega \cdot m} = 0{,}202\, m = 20{,}2\, cm$$

Lògicament aquests 20 cm estan caragolats de forma helicoidal dins la bombeta.

Per a trobar la llargada del fil de Cu que tenim hem d'atendre a la condició 2. que diu que a la bombeta hi ha de caure almenys el 70 % dels 12 V.

Si plantegem la fórmula del corrent global , I, del circuit (que ve de la llei de Kirchhoff de les tensions de la malla):

$$I = \frac{V_0}{R_{int} + R_{Cu} + R_L}$$

i la multipliquem per R_L obtindrem la tensió V_L que vau a la bombeta:

$$V_L = \frac{R_L}{R_{int} + R_{Cu} + R_L} V_0$$

I segons la condició 2. volem que $V_L \geq 0{,}7 \cdot V_0$. Per tant:

$$\frac{R_L}{R_{int} + R_{Cu} + R_L} \geq 0{,}7 \;\Rightarrow\; \frac{1{,}44\, \Omega}{0{,}2\, \Omega + R_{Cu} + 1{,}44\, \Omega} \geq 0{,}7 \;\Rightarrow\; \frac{1{,}44\, \Omega}{0{,}7} \geq 1{,}64\, \Omega + R_{Cu}$$

$$\Rightarrow R_{Cu} \leq \frac{1{,}44\, \Omega}{0{,}7} - 1{,}64\, \Omega = 0{,}42\, \Omega$$

Això ens dona la resistència màxima del fil de coure, i per tant la longitud màxima L d'aquest:

Calculem primer la secció del fil de coure a partir del seu diàmetre, D_{Cu}= 1 mm

$$S_{Cu} = \pi \cdot \frac{{D_{Cu}}^2}{4} = 7{,}85x10^{-7}\, m^2 = 0{,}785\, mm^2$$

llavors:

$$R_{Cu} = \rho_{Cu} \frac{L}{S_{Cu}} \;\Rightarrow\; \mathrm{L} \leq \frac{R_{Cu} \cdot S_{Cu}}{\rho_{Cu}} = \frac{0{,}42\, \Omega \cdot 7{,}85x10^{-7}\, m^2}{1{,}68\, x\, 10^{-8}\, \Omega \cdot m} = 19{,}625\, m$$

La llargada del tram d'anada i de tornada ha de ser la meitat d'això:

$$\mathrm{L}/2 \leq\; = 9{,}81\, m$$

Això és la distància més allunyada de la bateria a la qual podem posar la bombeta.

Si instal·lem exactament la llargada de coure màxima (19,625 m), el corrent total, I, el podrem calcular ara que ja sabem totes les resistències del circuit:

$$I = \frac{V_0}{R_{int} + R_{Cu} + R_L} = \frac{12\ V}{0{,}2\ \Omega + 0{,}42\ \Omega + 1{,}44\ \Omega} = \frac{12\ V}{2{,}06\ \Omega} = 5{,}825\ A$$

Calculem subsidiàriament les potències dissipades a cada tram i generades a la font

A la bombeta:

$$P_L = \frac{{V_L}^2}{R_L} = \frac{(0{,}7 \cdot V_0)^2}{R_L} = \frac{(0{,}7 \cdot 12\ V)^2}{1{,}44\ \Omega} = 49\ W$$

Al cable de coure:

$$P_{Cu} = R_{Cu} \cdot I^2 = 0{,}42\ \Omega \cdot (5{,}825\ A)^2 = 14{,}25\ W$$

A la resistència interna de la font:

$$P_{int} = R_{int} \cdot I^2 = 0{,}2\ \Omega \cdot (5{,}825\ A)^2 = 6{,}75\ W$$

Generats per la font ideal:

$$P_0 = V_0 \cdot I = 12\ V \cdot 5{,}825\ A = 70\ W$$

Com veiem es compleix el balanç de potències:

$$P_0 = P_{int} + P_{Cu} + P_L$$

Quant a potències a la bombeta també s'hi dissipa el 70% de la potència generada per la font:

$$\frac{P_L}{P_0} = \frac{49\ W}{70\ W} = 0{,}7$$

Les tensions que cauen a cada element són:

A la bombeta:

$$V_L = R_L \cdot I = 1{,}44\ \Omega \cdot 5{,}825\ A = 8{,}388\ V \quad (el\ 70\ \%\ dels\ 12\ V\ ideals\ de\ la\ font)$$

Al cable de coure:

$$V_{Cu} = R_{Cu} \cdot I = 0{,}42\ \Omega \cdot 5{,}825\ A = 2{,}447\ V \quad (el\ 20{,}3\ \%\ dels\ 12\ V\ ideals\ de\ la\ font)$$

A la resistència interna de la font:

$$V_{int} = R_{int} \cdot I = 0{,}2\ \Omega \cdot 5{,}825\ A = 1{,}165\ V \quad (el\ 9{,}7\ \%\ dels\ 12\ V\ ideals\ de\ la\ font)$$

Anàlisi microscòpic del circuit:

Això que hem calculat són les magnituds extensives o globals, que és el que es fa quan es fa típicament una anàlisi d'un circuit.

Però també podem estimar unes quantes magnituds intensives, locals o microscòpiques:

Una d'elles és la densitat de corrent j. Sabem que el corrent global és I=5,825 A, per tant les densitats de corrent en mòdul equivalen al corrent total dividit per la secció de cada tram:

Fil de coure:

$$j_{Cu} = \frac{I}{S_{Cu}} = \frac{5{,}825\ A}{7{,}85x10^{-7}\ m^2} = 7{,}42x10^6\ \frac{A}{m^2} = 742\ \frac{A}{cm^2} = 7{,}42\ \frac{A}{mm^2}$$

Fil de tungstè:

$$j_W = \frac{I}{S_W} = \frac{5{,}825\ A}{7{,}85x10^{-9}\ m^2} = 7{,}42x10^8\ \frac{A}{m^2} = 74200\ \frac{A}{cm^2} = 742\ \frac{A}{mm^2}$$

Com veiem $j_W=100\cdot j_{Cu}$ ja que la secció del fil de tungstè és 100 vegades menor que la del fil de Cu, ja que el diàmetre n'és 10 vegades inferior.

Ara calcularem les velocitats mitjanes o de deriva, v_d, dels portadors (en aquest cas electrons lliures, ja que es tracta de metalls) a cada fil.

Per a fer-ho usarem l'expressió que ja vam demostrar a teoria:

$$j = q \cdot n \cdot v_d$$

Per tant:

$$v_d = \frac{j}{q \cdot n}$$

on $q=1{,}602x10^{-19}$ C és el valor absolut de la càrrega de l'electró lliure portador.

n és la densitat de portadors.

Per a calcular n, anem a suposar que cada àtom emet un sol electró lliure, per n serà igual a la densitat d'àtoms metàl·lics de cada material. Per a calcular aquesta densitat atòmica, usarem com a dades la densitat de cada material, el seu pes molar i el nombre d'Avogadre. Recordem:

densitat del Cu: $d_{Cu}=8{,}96$ g/cm^3 ; **pes molar del Cu**: $M_{Cu}=63{,}54$ g/mol

densitat del W: $d_W=19{,}25$ g/cm^3 ; **pes molar del W**: $M_W=183{,}85$ g/mol

nombre d'Avogadre=$N_A=6{,}022x10^{23}$ (àtoms) /mol

Així per exemple al coure:

$$n_{Cu} = \frac{d_{Cu}}{M_{Cu}} \cdot N_A = \frac{8{,}96\ g/cm^3}{63{,}54\ g/mol} \cdot 6{,}022x10^{23}\ (\text{à}toms)/mol = 8{,}49x10^{22}\ (\text{à}toms)/cm^3$$

I al tungstè:

$$n_W = \frac{d_W}{M_W} \cdot N_A = \frac{19{,}25\ g/cm^3}{183{,}85\ g/mol} \cdot 6{,}022x10^{23}\ (\text{à}toms)/mol = 6{,}305x10^{22}\ (\text{à}toms)/cm^3$$

NOTA: el tungstè és més dens, però cada àtom pesa més, com a compensació encara hi ha quelcom menys d'àtoms per cm^3 que en el coure

Així doncs

$$v_{d,Cu} = \frac{j_{Cu}}{q \cdot n_{Cu}} = \frac{742\ \frac{A}{cm^2}}{1{,}602x10^{-19}\ \underbrace{C}_{A\cdot s} \cdot 8{,}49x10^{22}\ (\text{àtoms})/cm^3} = 0{,}0545\ \frac{cm}{s}$$

$$v_{d,W} = \frac{j_W}{q \cdot n_W} = \frac{74200\ \frac{A}{cm^2}}{1{,}602x10^{-19}\ \underbrace{C}_{A\cdot s} \cdot 6{,}305x10^{22}\ (\text{àtoms})/cm^3} = 7{,}346\ \frac{cm}{s}$$

La velocitat de deriva dels electrons va 135 vegades més de pressa en el tungstè que en el coure però realment les dues són molt petites!!.

Per a calcular els camps elèctrics (uniformes) a cada fil, cal dividir la diferència de potencial de cada tram, per la llargada d'aquest tram.

$$E_{Cu} = \frac{V_{Cu}}{L_{Cu}} = \frac{2{,}447\ V}{19{,}625\ m} = 0{,}1247\ \frac{V}{m} = 0{,}001247\ \frac{V}{cm}$$

$$E_W = \frac{V_W}{L_W} = \frac{8{,}388\ V}{0{,}202\ m} = 41{,}52\ \frac{V}{m} = 0{,}4152\ \frac{V}{cm}$$

A partir dels camps i de la velocitat de deriva podem calcular les mobilitats de cada material usant la relació:

De manera que:

$$\mu = \frac{v_d}{E}$$

Així en el coure:

$$\mu_{Cu} = \frac{v_{d,Cu}}{E_{Cu}} = \frac{0{,}0545\ \frac{cm}{s}}{0{,}001247\ \frac{V}{cm}} = 43{,}7\ \frac{cm^2}{V \cdot s}$$

I en el tungstè:

$$\mu_W = \frac{v_{d,W}}{E_W} = \frac{7{,}346\ \frac{cm}{s}}{0{,}4152\ \frac{V}{cm}} = 17{,}7\ \frac{cm^2}{V \cdot s}$$

NOTA: sense utilitzar el camp també podríem haver trobat les mobilitats a partir de la fórmula de la conductivitat:

$$\sigma = q \cdot n \cdot \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\sigma}{q \cdot n} = \frac{1}{q \cdot n \cdot \rho}$$