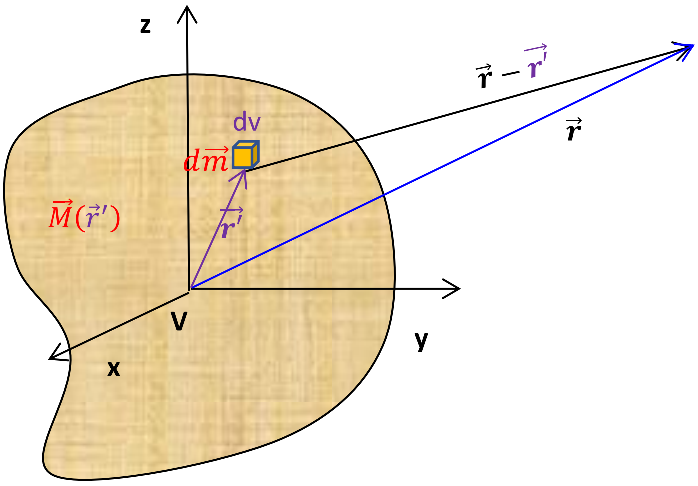
# Materials magnètics.

## Volum ple d'espires de mida molecular polaritzades o distribució volúmica de moments dipolars magnètics.




Sigui una distribució de petites espires de corrent de mides moleculars dins d'un volum **V**. Cada molècula te un moment dipolar individual molt petit de $\vec{m}_0$ . Si ara agafem un volum diferencial dv al voltant d'un punt $\vec{r}'$ dins de la distribució, i ens dediquem a sumar tots els petits moments dipolars, $\sum_m \vec{m}_0$, de totes les molècules que hi ha dins, i això ho dividim pel valor del volum diferencial dv, obtenim l'anomenat *vector densitat de moment dipolar magnètic* també dit *densitat de magnetització* o *camp de magnetització,* $\vec{M}(\vec{r}')$ :

$$\vec{M}(\vec{r}') \equiv \frac{\sum_m \vec{m}_0}{dv} = \frac{d\vec{m}}{dv}$$

Si re-multipliquem $\vec{M}(\vec{r}')$ pel diferencial de volum dv obtenim el diferencial de moment dipolar magnètic total $d\vec{m}$ dins del volum dv:

$$d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}')dv$$

Vist això, tractarem cadascú d'aquests $d\vec{m}$ com a dipols individuals, i com ja sabem d'un document anterior, el potencial vector lluny del dipol es calcula aproximadament com:

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{m}\ x\ (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dv\vec{M}(\vec{r}')\ x\ (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad (1)$$

En ser els volums diferencials dv molt petits, quasi qualsevol punt de l'espai $\vec{\boldsymbol{r}}$ es pot considerar un punt llunyà al dipol $d\vec{p}$ i per tant l'anterior expressió (1) de $dV(\vec{r})$ és molt exacta. L'agafarem com a exacta a efectes pràctics.

Així doncs el potencial produït per tota la distribució volúmica de $\vec{M}$ és:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}')\ x\ (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv' = \left| Usant\text{: } \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right| =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{M}(\vec{r}')\ x\ \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)x\ \vec{M}(\vec{r}')\ dv'$$

$$= \left| \begin{array}{c} Usant \\ \vec{\nabla}' x\left(\varphi(\vec{r}')\vec{M}(\vec{r}')\right) =^{1} \\ = \vec{\nabla}'\left(\varphi(\vec{r}')\right) x\ \vec{M}(\vec{r}') + \varphi(\vec{r}')\ \vec{\nabla}' x \vec{M}(\vec{r}') \\ amb\ \varphi(\vec{r}') = \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{array} \right| = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left( \vec{\nabla}' x \underbrace{\left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)}_{\vec{F}(\vec{r}')} - \frac{\vec{\nabla}' x\ \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) dv' =$$

---

[1] Es pot demostrar simplement calculant el rotacional de $\varphi\vec{M}$ i veure terme a terme que és igual a $\vec{\nabla}\varphi\ x\ \vec{M} + \varphi\ \vec{\nabla} x \vec{M}$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}' x\, \vec{F}(\vec{r}')dv' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\nabla}' x\, \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$$

$$= \left| \begin{array}{c} Usant\ un\ nou\ teorema^2\text{:}\ \int_V dv \cdot \vec{\nabla} x\, \vec{F}(\vec{r}) = \oint_S d\vec{S}\, x\, \vec{F}(\vec{r}') \\ Per\ a\ convertir\ la\ integral\ de\ volum\ del\ rotacional \\ a\ una\ integral\ al\ llarg\ de\ la\ superfície\ \boldsymbol{S} \\ del\ contorn\ exterior\ tancat\ \boldsymbol{del\ volum\ V} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S dS \cdot \hat{n}_e\, x \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\nabla}' x\, \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}')\, x\, \hat{n}_e}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot d\vec{S}' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\nabla}' x\, \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$$

Essent $\hat{n}_e$ el vector normal a cada punt de la superfície externa S apuntant cap enfora ('e' d'extern). Llavors fem les següents definicions de càrregues de polarització:

$$= \left| \begin{array}{c} Definim\text{:}\qquad \vec{M}(\vec{r}')\, x\, \hat{n}_e \equiv \vec{k}_m(\vec{r}') \qquad (2) \\ com\ a\ densitat\ superficial\ de\ corrent\ de\ magnetització\ a\ la\ superfície\ externa\ S \\ (és\ un\ corrent\ per\ unitat\ de\ longitud) \\ Definim\text{:}\qquad \vec{\nabla}' x\, \vec{M}(\vec{r}') \equiv \vec{j}_m(\vec{r}') \qquad (3) \\ com\ a\ densitat\ volúmica\ de\ corrent\ de\ magnetització\ al\ volum\ V \end{array} \right|$$

L'expressió del potencial creat per aquestes distribucions de càrrega de polarització serà:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{k}_m(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot dS' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}_m(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' \qquad (4)$$

Per a obtenir el camp només cal prendre menys el rotacional del potencial.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\, x\, \vec{A}(\vec{r})$$

Podem veure que:

$$\vec{\nabla}\, x \left(\frac{\vec{C}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) x\, \vec{C} = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, x\, \vec{C}$$

llavors

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\, x\, \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{(\vec{r}-\vec{r}')\, x\, \vec{k}_m(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\cdot dS' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{(\vec{r}-\vec{r}')x\, \vec{j}_m(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv' \qquad (4')$$

És a dir el volum dielèctric ple de moments dipolars o petits dipols per tot arreu en el seu conjunt equival a

una distribució de: <u>densitats volúmiques de corrent</u> $\vec{j}_m(\vec{r}')$ **+** <u>densitats de corrent superficials</u> $\vec{k}_m(\vec{r}')$, de magnetització les dues.

A aquest camp i potencial cal afegir-l'hi els efectes de les densitats de corrent volúmiques i superficials reals de corrents normals (no de magnetització) també dits corrents lliures: $\vec{j}_{ll}$ i $\vec{k}_{ll}$.

Així escrivint el teorema d'Ampere diferencial per a aquest cas:

---

2 Si apliquem el simple teorema de la divergència a cadascú dels 3 vectors següents: $(0, F_z, -F_y)$ ; $(-F_z, 0, F_x)$ i $(F_y, -F_x, 0)$ obtenim respectivament les tres components del nou teorema aquí citat

$$\vec{\nabla}\, x\, \vec{B} = \mu_0(\vec{\jmath}_{ll} + \vec{\jmath}_m) = \mu_0\left(\vec{\jmath}_{ll} + \vec{\nabla}\, x\, \vec{M}\right)$$

⇒

$$\vec{\nabla}\, x \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{\jmath}_{ll}$$

definint:

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad (5)$$

Com el camp vectorial anomenat intensitat de camp magnètic.

llavors el teorema d'Ampere en versió diferencial, en presència de materials magnètics, en termes d'aquest nou camp vectorial $\vec{\mathrm{H}}$ s'escriu només usant les densitats de corrent lliures i sense la permeabilitat:

$$\boxed{\vec{\nabla}\, x\, \vec{\mathrm{H}} = \vec{\jmath}_{ll}} \qquad (6)$$

Integrem $\vec{\mathrm{H}}$ al llarg d'una línia tancada C. Igualem aquesta integral, pel teorema del rotacional, a la integral de la superfície interna S, de $\vec{\nabla}\, x\, \vec{\mathrm{H}}$ i canviant $\vec{\nabla}\, x\, \vec{\mathrm{H}}$ per $\vec{\jmath}_{ll}$ segons (6), podem escriure'n la versió integral del teorema d'Ampere en $\vec{\mathrm{H}}$:

$$\oint_C \vec{\mathrm{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{l}} = \oint_S \vec{\nabla}\, x\, \vec{\mathrm{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \oint_S \vec{\jmath}_{ll} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} =$$

És a dir:

$$\boxed{\oint_C \vec{\mathrm{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{l}} = \oint_S \vec{\jmath}_{ll} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}} \qquad (7)$$

Recordem (5):

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

o equivalentment:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \qquad (8)$$

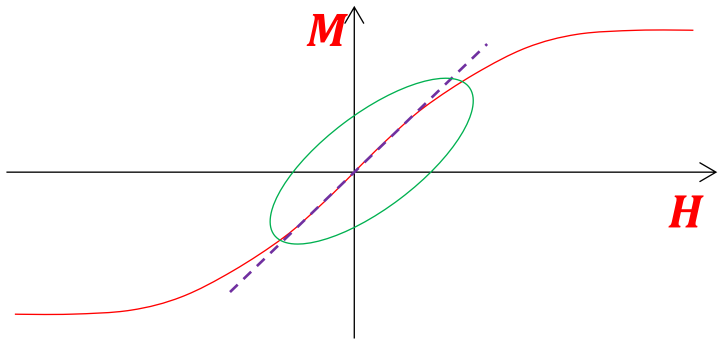
A partir de (7) ja veiem que, **H** te les mateixes dimensions que **M**, és a dir

$$[H] = [M] = \frac{[B]}{[\mu_0]} = \frac{\frac{N}{Am}}{\frac{N}{A^2}} = \frac{A}{m}$$

que també són les unitats de $\vec{k}$ (corrent per unitat de llargada en una superfície). És a dir:

$$[H] = [M] = [k] = \frac{A}{m}$$

## Resposta polaritzadora magnètica del material




Com hem vist, tenim tres camps: $\vec{B}, \vec{M}$ $i$ $\vec{H}$

I una relació (5) $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ entre ells, cal una segona relació que permeti posar-ho tot en funció d'un sol camp si ens convé.

Aquesta segona relació la dona el comportament o resposta sota polarització del material, és a dir, sota quina funció es genera magnetització $\vec{M}$ en funció del camp $\vec{H}$

En *materials isotròpics* (ho són la majoria) els dipols s'orienten en mitjana, en la mateixa direcció del camp, per tant la conseqüència, $\vec{M}$, te la mateixa direcció i sentit que la causa, $\vec{H}$ , que la produeix. Com a més causa hi haurà més conseqüència, per tant, podem deduir que la funció de $\vec{M}$ vs. $\vec{H}$ és creixent, i canvia de signe si $\vec{H}$ també canvia de signe, i que per $\vec{H}$ nul també tindrem també $\vec{M}$ nul. En resum, la funció serà quelcom així:

Ara bé, amb camps magnètics suficientment baixos (la majoria dels que s'usen a la pràctica) no ens movem de la part central de la corba anterior i podem dir ***M*** i ***H*** són aproximadament proporcionals

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} \qquad (9)$$

On $\chi_m$ és un factor adimensional que s'anomena *susceptibilitat magnètica* del que depèn del material

A partir de (7): $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ i substituint-hi (9):

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \left| \begin{array}{c} \text{definint: } \mu_r \equiv 1 + \chi_m > 1 \\ \text{com la } \textit{permeabilitat relativa} \\ \text{(adimensional) del material} \end{array} \right| = \mu_0 \mu_r \vec{H} =$$

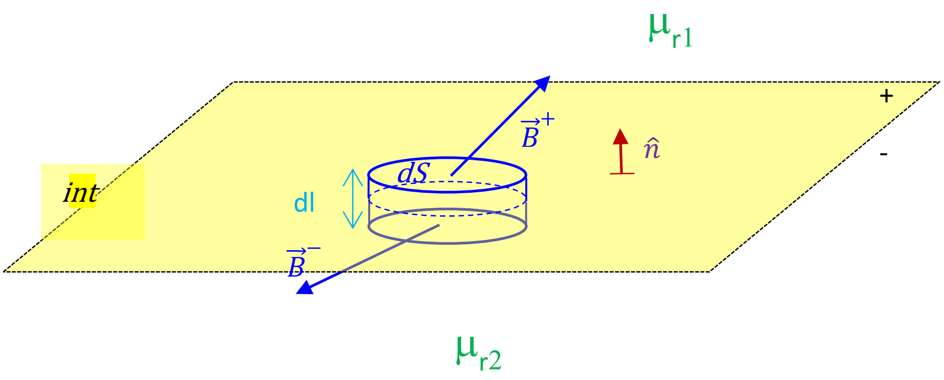
$$= \left| \begin{array}{c} \text{definint: } \mu \equiv \mu_0 \mu_r \\ \text{com la } \textit{permeabilitat absoluta} \\ \text{(dimensions de } \mu_0\text{) del material} \end{array} \right| = \mu \vec{H}$$

i podem reescriure el teorema d'Ampere com:

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \vec{j}_{ll} \qquad (10)$$

## Equacions a les interfícies entre dues zones de dos materials diferents

### Component normal de $\vec{B}$




Considerem una interfície (int) entre dos medis materials diferents amb permeabilitats relatives diferents $\mu_{r1}$ (dalt) i $\mu_{r2}$ (baix).

Posem una superfície tancada en forma de cilindre travessat perpendicularment a la superfície (com es veu a al figura) amb la base superior (+) i la base inferior (-) molt a prop de la superfície, la + per dalt i la – per baix. La distància entre ambdues bases és un dl diferencial.

Calculem el flux del camp $\vec{B}$ a través d'aquest cilindre. Negligim el flux a través de la superfície lateral per ser dl molt petit. Tal com diu el teorema de solenoidabilitat del camp $\vec{B}$ (o teorema de gauss del magnetisme), aquest flux ha de ser nul completament.

El flux serà per tant el de les dues bases $dS^{+}$ i $dS^{-}$

$$d\phi = \vec{B}^{+}\cdot\hat{n}\, dS - \vec{B}^{-}\cdot\hat{n}\, dS = \left(\hat{n}\cdot\vec{B}^{+} - \hat{n}\cdot\vec{B}^{-}\right) dS = |igualant - lo\ \ a\ \ zero| = 0$$

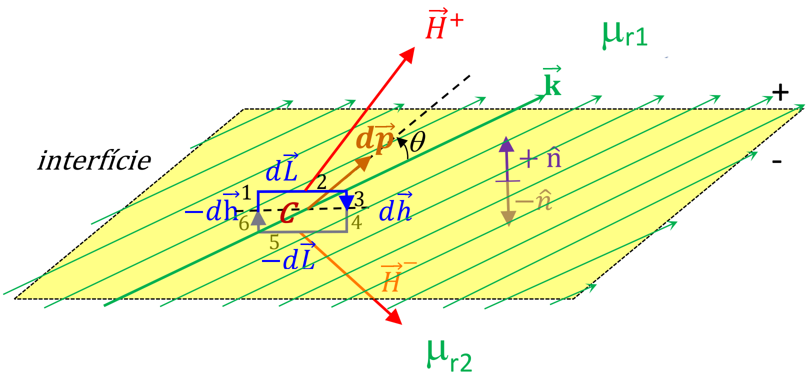
Per tant:

$$\boxed{\hat{n}\cdot\left(\vec{B}^{+} - \vec{B}^{-}\right) = 0} \qquad (11)$$

És a dir, la component normal del camp $\vec{B}$ és contínua en travessar la interfície.

### Component tangencial de $\vec{H}$

Que passa però amb la **component tangencial del camp**?. És a dir, la component paral·lela a la interfície. Com veurem no és contínua, sinó que la seva diferència és proporcional al corrent lliure total $\vec{\mathbf{k}}$ (corrent per unitat de llargada) del qual se'n mostren les línies de corrent en verd a la figura. Per a demostrar-ho usarem el teorema d'Ampere integral del camp $\vec{H}$

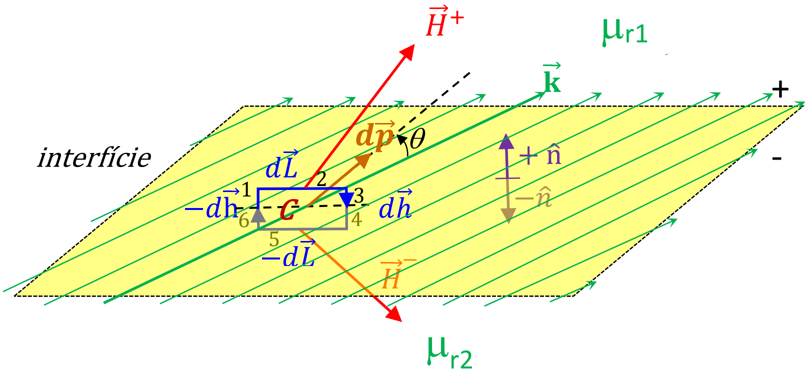



Considerem una línia d'Ampere tancada ***C*** en forma de rectangle situada perpendicularment a la superfície. Aquest rectangle està format pels 4 segments diferencials que en ordre de circulació són: $d\vec{L}$ , $d\vec{h}$ , $-d\vec{L}$ i $-d\vec{h}$ tal i com es veu a la figura de l'esquerra.

També podríem descriure la línia tancada per mitjà de 6 trams, 1, 2 i 3 per sobre de la interfície (regió del material $\mu_{r1}$ ) i 4, 5 i 6 per sota de la interfície (regió del material $\mu_{r2}$ ). Com que te unes mides diferencials: El camp present just a sobre de la interfície es pot considerar pràcticament uniforme a la regió de la línia i l'anomenem: $\vec{H}^{+}$. Igualment, el camp present just a sota de la interfície es pot considerar pràcticament uniforme a la regió de la línia i l'anomenem: $\vec{H}^{-}$

Amb tot això calculem la integral de $\vec{H}$ al llarg de la línia tancada ***C***:

$$\oint_{C} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \vec{H}^{+}\cdot\left(-d\vec{h}/2 + d\vec{L} + d\vec{h}/2\right) + \vec{H}^{-}\cdot\left(+d\vec{h}/2 - d\vec{L} - d\vec{h}/2\right) = \vec{H}^{+}\cdot d\vec{L} - \vec{H}^{-}\cdot d\vec{L}$$
$$= \left(\vec{H}^{+} - \vec{H}^{-}\right)\cdot d\vec{L}$$




Usant el teorema d'Ampere integral del camp $\vec{H}$, podem afirmar que aquesta circulació és igual al producte escalar de la densitat de corrent superficial $\vec{k}_{ll}$ que travessa el camí ***C*** pel vector $d\vec{p}$ perpendicular a la superfície de ***C*** i de mòdul igual a l'amplada dL : $\vec{k}_{ll}\cdot d\vec{p}$

Però: $d\vec{p} = \hat{n}\; x\; d\vec{L}$

Per tant:

$$\left(\vec{H}^{+} - \vec{H}^{-}\right)\cdot d\vec{L} = \vec{k}_{ll}\cdot\left(\hat{n}\; x\; d\vec{L}\right)$$
$$= d\vec{L}\cdot\left(\vec{k}_{ll}\; x\; \hat{n}\right) \qquad (12)$$

Com que això és vàlid per a qualsevulla direcció $d\vec{L}$ paral·lela a la interfície, podem afirmar sens cap mena de dubte que traient el producte escalar per $d\vec{L}$ a (11) també s'esdevé una igualtat vàlida:

$$\left(\vec{H}^{+} - \vec{H}^{-}\right)_{t} = \vec{k}_{ll}\; x\; \hat{n} \qquad (13)$$

Multiplicant (13) vectorialment per $\hat{n}$ a l'esquerra.

$$\hat{n}\; x\left(\vec{H}^{+} - \vec{H}^{-}\right) = \hat{n}\; x\;\left(\vec{k}_{ll}\; x\; \hat{n}\right) = \vec{k}_{ll}\underbrace{(\hat{n}\cdot\hat{n})}_{1} - \hat{n}\underbrace{\left(\vec{k}_{ll}\cdot\hat{n}\right)}_{0} = \vec{k}_{ll}$$

En resum, la discontinuïtat de la component tangencial de $\vec{H}$ és igual a densitat de càrrega superficial $\vec{k}_{ll}$

$$\boxed{\hat{n}\; x\left(\vec{H}^{+} - \vec{H}^{-}\right) = \vec{k}_{ll}} \qquad (14)$$

**Resum final de les equacions de la magnetostàtica amb materials magnètics inclosos**

En el volum (o bulk):

**3. bulk)** $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{ll}$ : Teorema d'Ampere en termes de $\vec{H}$ i $\vec{j}_{ll}$

**4. bulk)** $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ : Solenoidabilitat del camp $\vec{B}$

A les interfícies:

**3. interfície)** $\hat{n}\, x(\vec{H}^{+} - \vec{H}^{-}) = \vec{k}_{ll}$ : Discontinuïtat de la component tangencial de $\vec{H}$ igual a la $\vec{k}_{ll}$

**4. interfície)** $\hat{n} \cdot (\vec{B}^{+} - \vec{B}^{-}) = 0$ : Continuïtat de la component normal de $\vec{B}$

A més tenim les relacions entre els tres camps, que valen en qualsevol punt i depenen de les propietats particulars del material on estiguem:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad ; \quad \vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0}\vec{B} \quad \text{amb } \mu_r = 1 + \chi_m$$

Tot usant aquestes equacions ens estalviem d'haver de tenir en compte els corrents de magnetització:

$$\vec{M}\, x\, \hat{n}_e \equiv \vec{k}_m$$

$$\vec{\nabla}\, x\, \vec{M} \equiv \vec{j}_m$$

**Recordatori de les equacions de l'electrostàtica amb dielèctrics inclosos (final tema 2)**

En el volum (o bulk):

**1. bulk)** $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ : Conservativitat del camp $\vec{E}$

**2. bulk)** $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{ll}$ : Teorema de Gauss en termes de $\vec{D}$ i $\rho_{ll}$

A les interfícies:

**1. interfície)** $\hat{n}\, x(\vec{E}^{+} - \vec{E}^{-}) = 0$ : Continuïtat de la component tangencial de $\vec{E}$ .

**2. interfície)** $\hat{n} \cdot (\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}) = \sigma_{ll}$ : Discontinuïtat de la component normal de $\vec{D}$ igual a la $\sigma_{ll}$

A més tenim les relacions entre els tres camps, que valen en qualsevol punt i depenen de les propietats particulars del material on estiguem:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad ; \quad \vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{amb } \varepsilon_r = 1 + \chi$$

Tot usant aquestes equacions ens estalviem d'haver de tenir en compte les càrregues de polarització:

$$\vec{P} \cdot \hat{n}_e \equiv \sigma_P$$

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \equiv \rho_P$$