Anàlisi Matemàtica 1 (AM1)
GEMiF

E3.2 Exercicis: Derivació

1. Trobar les derivades de les següents funcions:

35. $y = \tan 5x$

36. $y = \sin(x^2 + 4x)$

37. $y = x\cos(1 - 3x)$

38. $y = \sin(x^2)\cos(x^2)$

39. $y = (4t + 9)^{1/2}$

40. $y = \sin(\cos\theta)$

41. $y = (x^3 + \cos x)^{-4}$

42. $y = \sin(\cos(\sin x))$

43. $y = \sqrt{\sin x \cos x}$

44. $y = x^2 \tan 2x$

45. $y = (z + 1)^4(2z - 1)^3$

46. $y = 3 + 2s\sqrt{s}$

47. $y = (x + x^{-1})\sqrt{x + 1}$

48. $y = \cos^2(8x)$

49. $y = (\cos 6x + \sin x^2)^{1/2}$

50. $y = \dfrac{(x + 1)^{1/2}}{x + 2}$

51. $y = \tan^3 x + \tan(x^3)$

52. $y = \sqrt{4 - 3\cos x}$

53. $y = \sqrt{\dfrac{z + 1}{z - 1}}$

54. $y = (\cos^3 x + 3\cos x + 7)^9$

55. $y = \dfrac{\cos(1 + x)}{1 + \cos x}$

56. $y = \sec(\sqrt{t^2 - 9})$

57. $y = \cot^7(x^5)$

58. $y = \dfrac{\cos(x^2)}{1 + x^2}$

59. $y = (1 + (x^2 + 2)^5)^3$

60. $y = \left(1 + \cot^5(x^4 + 1)\right)^9$

61. $y = 4e^{-x} + 7e^{-2x}$

62. $y = e^{\tan\theta}$

63. $y = (2e^{3x} + 3e^{-2x})^4$

64. $y = \dfrac{1}{1 - e^{-3t}}$

65. $y = \cos(te^{-2t})$

66. $y = \tan(e^{5-6x})$

67. $y = e^{(x^2+2x+3)^2}$

68. $y = e^{e^x}$

2. Trobeu les derivades:

(a) $y = x^x$
(b) $y = x^{(x^2)}$

3. Trobeu $f'(x)$ i també $f'(x+3)$ en els següents casos:

(a) $f(x) = (x+3)^5$.

(b) $f(x+3) = x^5$.

(c) $f(x+3) = (x+5)^7$.

4. Troba les derivades de $f(g(x))$ i de $g(f(x))$ per:

19. $f(u) = \cos u, \quad g(x) = x^2 + 1$

20. $f(u) = u^3, \quad g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

5. Calcular $\frac{df}{dx}$ si sabem que $\frac{df}{du} = 2$, i $\frac{du}{dx} = 6$

6. (a) Demostreu que Galileu es va equivocar: si un cos cau una distància $s(t)$ en t segons, i $s'(t)$ (és a dir, $ds(t)/dt$) és proporcional a $s(t)$, aleshores $s(t)$ no pot ser una funció de la forma $s(t) = c\,t^2$.

(b) Demostreu que les afirmacions següents sobre s són certes, si $s(t) = \left(\frac{a}{2}\right)t^2$ (la primera afirmació demostrarà per què hem fet el canvi de c a $a/2$):
(i) $s''(t) = a$ (l'acceleració és constant).
(ii) $[s'(t)]^2 = 2a\,s(t)$.

(c) Si s es mesura en peus, el valor de a és 32. Quants segons tens per evitar una bombeta que cau del sostre, des d'una alçada de 400 peus? Si no t'apartes, quina serà la velocitat de la bombeta quan et caigui a sobre? A quina altura es trobava la bombeta quan es desplaçava a la meitat d'aquesta velocitat?

7. Una esfera en expansió té un radi $r = 2t$ cm en el temps t (en segons). Sigui V el volum de l'esfera. Trobeu $\frac{dV}{dt}$ quan

(a) $r = 3$ cm
(b) $t = 3$ s

8. Segons el model atmosfèric estàndard dels EUA, desenvolupat per la National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) per al seu ús al disseny d'avions i coets, la temperatura atmosfèrica T (en graus centígrads), la pressió P (en kPa, on

1kPa = 1,000 Pascals) i l'altitud h (metres), estan relacionades per les fórmules (vàlides a la troposfera $h \le 11{,}000$ m):

$$T = 15.04 - 0.000649h \quad i \quad P = 101.29 + \left(\frac{T + 273.1}{288.08}\right)^{5.256}$$

Calculeu dP/dh. A continuació, estimeu el canvi de P (en Pascals, Pa) per metre addicional d'altitud quan $h = 3{,}000$ m.

9. Conservació de l'energia: La posició en el temps t (en segons) d'un objecte de massa m que oscil·la al final d'una molla és $x(t) = L\sin(2\pi f t)$. Aquí, L és la longitud màxima de la molla, i f la freqüència (nombre d'oscil·lacions per segon). Siguin v i a la velocitat i l'acceleració del pes.

   (a) Per la llei de Hooke, la molla exerceix una força de magnitud $F = -kx$ sobre l'objecte, on k és la constant de la molla. Utilitzeu la segona Llei de Newton, $F = ma$, per demostrar que

   $$2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

   (b) El pes té energia cinètica $K = \frac{1}{2}mv^2$ i energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$. Demostreu que l'energia total $E = K + U$ es conserva, és a dir, $\frac{dE}{dt} = 0$.

10. Calcula els següents límits:

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

2. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1 - x}$.

3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$.

4. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

5. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{\sin 2x}$.

6. $\lim_{x\to a} \frac{x - a}{x^n - a^n}$.

7. $\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x}$.

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$.

9. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{1/2} - x^{1/4}}{x - 1}$.

10. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x(1+x)}$.

11. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

12. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x}$.

13. $\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin \pi x}{x - \sin \pi x}$.

14. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - (a+1)^x}{x}$.

15. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$.

16. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{1 - \cos 2x}$.

17. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan \pi x}{e^x - 1}$.

18. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$.

19. $\lim_{x\to 0} \frac{1 + x - e^x}{x(e^x - 1)}$.

20. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sec x)}{x^2}$.

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \tan x}{x - \sin x}$.

22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x e^{nx} - x}{1 - \cos nx}$.

23. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^3}}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin \pi x}{4x^2 - 1}$.

25. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$.

26. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sin \sqrt{x}}$.

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{\sin (x^2)}$.

28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}{x}$.

29. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sec^2 x - 2 \tan x}{1 + \cos 4x}$.

30. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$.

31. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{\arctan 2x}$.

32. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

11. Troba la fal·làcia:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 + x + \sin x}{x^3 + x - \cos x} \overset{*}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{3x^2 + 1 + \sin x} \overset{*}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{6x + \cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

12. Troba els valors de a i b que fan certes aquests límits:

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - b}{2x^2} = -4.$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + ax + bx^3}{x^3} = 0.$$

13. Calcula aquests límits (si depenen de paràmetres, considera els seus diferents valors) que tenen diferents tipus d'indeterminació:

(a)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$$

(b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^k}$$

(c)

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$$

(d)
$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\tan x - \sec x).$$

(e)
$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

(f)
$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}$$

(g)
$$\lim_{x\to\infty} (a^x + b^x)^{1/x}$$ per $1 < a < b$

14. Troba els límits:

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{1-x}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{20x}{x^2+1}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{1-x^3}$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{2-x}$.

5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^k}{x}$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\tan 5x}{\tan x}$.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x \ln|\sin x|)$.

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{2x}$.

10. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x \sin\frac{\pi}{x}\right)$.

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}[x(\ln|x|)^2]$.

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$.

14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$.

15. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right]$.

16. $\lim_{x\to 0}|\sin x|^x$.

17. $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$.

18. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

19. $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

20. $\lim_{x\to\pi/2}|\sec x|^{\cos x}$.

21. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$.

22. $\lim_{x\to\infty}(x^2+a^2)^{(1/x)^2}$.

23. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$.

24. $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3$.

25. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

26. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$.

27. $\lim_{x\to\infty}(x^3+1)^{1/\ln x}$.

28. $\lim_{x\to\infty}(e^x+1)^{1/x}$.

29. $\lim_{x\to\infty}(\cosh x)^{1/x}$.

30. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$.

31. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

32. $\lim_{x\to 0}(e^x+3x)^{1/x}$.

33. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)$.

34. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{1/x}$.

15. L'equació diferencial que satisfà la velocitat d'un objecte de massa m que cau des del repòs sota l'acció de la gravetat i amb resistència de l'aire directament proporcional a la velocitat es pot escriure com

$$m\frac{dv}{dt}+k\,v=m\,g$$

on $k>0$ és la constant de proporcionalitat, g la constant de la gravetat i $v(0)=0$. La velocitat de l'objecte al temps t és

$$v(t)=\frac{m\,g}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

(a) Fixa t i calcula

$$\lim_{k\to 0^+} v(t)$$

(b) Posa $k=0$ a l'equació diferencial i soluciona-la per $v(0)=0$. Encaixa el resultat amb el que has trobat a l'apartat (a)?

16. Donat el polinomi genèric de grau n

$$P(x)=x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

calcula

$$\lim_{x\to\infty}\left([P(x)]^{1/n}-x\right)$$