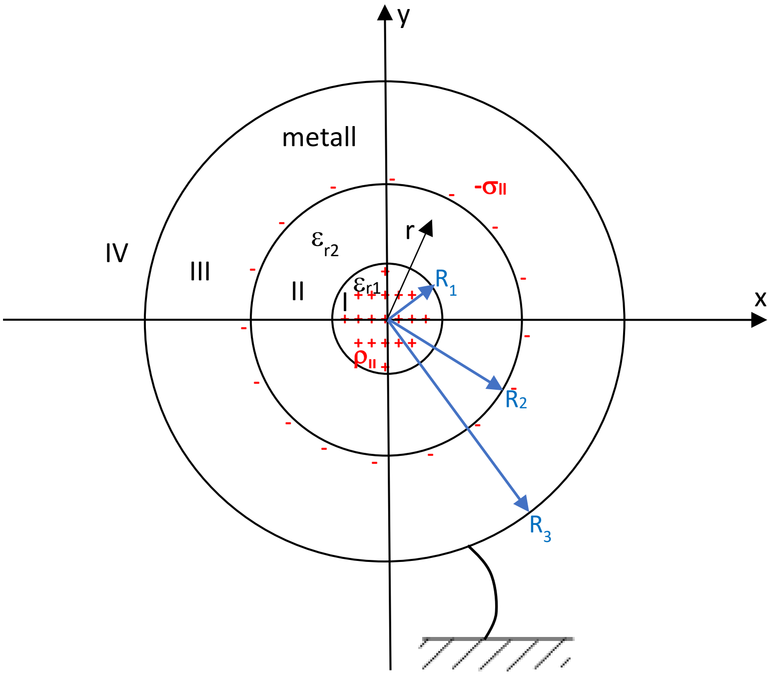
Problema de distribució amb simetria cilíndrica amb dielèctrics.



Considerem un sistema amb simetria cilíndrica, el qual el veiem en secció a la figura de l'esquerra (és a dir, la mateixa distribució s'estén cap enfora del pla del dibuix i cap endins (eix z) fins als infinits.

La primera capa ($0 \leq r \leq R_1$) o regió I, està formada per un material dielèctric de permitivitat relativa ε_{r1} i ple de càrrega lliure volúmica positiva homogèniament distribuïda per tot el volum: ρ_{ll}

La segona capa ($R_1 \leq r \leq R_2$) o regió II, està formada per un altre material dielèctric de permitivitat relativa ε_{r2} sense càrrega lliure volúmica.

La tercera capa ($R_2 \leq r \leq R_3$) o regió III, està formada per un material metàl·lic conductor (permitivitat relativa ε_r=1, com en el buit o aire). Te possibilitats de càrregues només immediatament per sota de les seves superfícies. La connectem al terra com es veu a la figura per tal que adquireixi a través d'aquesta unió conductora tota la càrrega que necessiti.

La resta externa ($R_3 \leq r < \infty$) o regió IV, està formada per buit o aire.

Resoldrem aquest problema usant 2 grans mètodes:

Mètode 1.

Usant per a $\vec{D}$ les equacions en **versió diferencial)**

1.a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{ll}$: Teorema de Gauss en versió diferencial en termes de $\vec{D}$ i ρ_{ll}

1.b) $\hat{n} \cdot \left(\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}\right) = \sigma_{ll}$: Discontinuïtat de la component normal de $\vec{D}$ igual a la σ_{ll}

Així aplicant 1.a) a les diferents regions del nostre problema, les equacions vàlides són:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{ll}$ a la regió I i $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ a la regió II i $\vec{D} = 0$ a la regió III

Per altra banda sabem que per simetria cilíndrica les úniques solucions de $\vec{D}(\vec{r})$ han de ser radials i el seu mòdul només pot dependre del radi r, és a dir:

$$\vec{D}(\vec{r}) = D(r)\,\hat{r} = D(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$$

Essent $\vec{r} = (x, y)$ el vector en direcció cap enfora en cada punt, $\hat{\mathrm{r}} = \frac{\vec{r}}{r}$ el seu vector unitari i $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ el seu mòdul.

Calculem la divergència de $\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}})$ amb una $\vec{\mathrm{D}}$ d'aquesta forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\,\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\,\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\,\frac{y}{r}\right)$$

Calculem primer:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\,\frac{x}{r}\right) = \frac{\partial \mathrm{D}(\mathrm{r})}{\partial x}\,\frac{x}{r} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{r}} + \mathrm{D}(\mathrm{r})x\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}(\mathrm{r})}{dr}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial x}\,\frac{x}{r} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\frac{1}{r} + \mathrm{D}(\mathrm{r})x\left(-\frac{1}{\mathrm{r}^2}\right)\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial x}$$
$$= \left| \begin{array}{c} \mathit{Però} \\ \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{r} = \frac{x}{r} \end{array} \right| = \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}(\mathrm{r})}{dr}\frac{x}{r}\frac{x}{r} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\frac{1}{r} - \mathrm{D}(\mathrm{r})\frac{x}{\mathrm{r}^2}\frac{x}{r}$$
$$= \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}(\mathrm{r})}{dr}\frac{x^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{\mathrm{r}^3}\right)$$

Anàlogament:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\,\frac{y}{r}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}(\mathrm{r})}{dr}\frac{y^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{\mathrm{r}^3}\right)$$

Sumant els dos obtenim la divergència:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\,\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\,\frac{y}{r}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}(\mathrm{r})}{dr}\frac{x^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{\mathrm{r}^3}\right) + \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}(\mathrm{r})}{dr}\frac{y^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{\mathrm{r}^3}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}(\mathrm{r})}{dr}\frac{x^2+y^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{2}{r} - \frac{x^2+y^2}{\mathrm{r}^3}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}(\mathrm{r})}{dr}\frac{r^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{2}{r} - \frac{r^2}{\mathrm{r}^3}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}(\mathrm{r})}{dr} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\mathrm{r}}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}(\mathrm{r})}{dr} + \frac{\mathrm{D}(\mathrm{r})}{r}$$

• En el cas de la regió II:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}(\mathrm{r})}{dr} + \frac{\mathrm{D}(\mathrm{r})}{r} = 0 \;\; \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{D}} = -\frac{dr}{r} \quad \mathit{integrant\ ambdós\ membres\ entre}\ R_1\ i\ r \quad \int_{D(R_1^+)}^{D(r)} \frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{D}} = -\int_{R_1}^{r} \frac{dr'}{r'}$$

On $D(R_1^+)$ és el valor de D a un punt immediatament per sobre de R_1 (ja dins la regió II); r està situat entre R_1 i R_2 (regió II). Fent les integrals que es resolen amb el logaritme neperià:

$$ln\frac{D(r)}{D(R_1^+)} = -ln\frac{r}{R_1} = \, ln\frac{R_1}{r}$$

i traient els logaritmes (o sigui, fent l'exponencial $e^{(\;)}$ a banda i banda)

$$\frac{D(r)}{D(R_1^+)} = \frac{R_1}{r} \;\Rightarrow D^{II}(r) = \frac{R_1 \cdot D(R_1^+)}{r} = \frac{B}{r}$$

essent B=$R_1 \cdot D(R_1^+)$ una constant que caldrà ajustar més endavant.

• En el cas de la regió I:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{dD(r)}}{dr} + \frac{\mathrm{D(r)}}{r} = \rho_{ll}$$

Ara és una equació inhomogènia, per tant la solució de l'equació diferencial es fa fent la suma de l'equació general de l'homogènia $\frac{\mathrm{dD}_h(\mathrm{r})}{dr} + \frac{\mathrm{D}_h(\mathrm{r})}{r} = 0$ + una solució particular de $\frac{\mathrm{dD}_p(\mathrm{r})}{dr} + \frac{\mathrm{D}_p(\mathrm{r})}{r} = \rho_{ll}$ qualsevol

La solució general de l'homogènia és com la de la regió II:

$D_h(r) = \frac{A}{r}$ i una solució particular qualsevol podria ser: $D_p(r) = \frac{\rho_{ll}}{2} r$ com es pot veure per simple substitució.

Així, la solució general de l'equació diferencial a la regió I és:

$$D^I(r) = \frac{A}{r} + \frac{\rho_{ll}}{2} r$$

però la constant arbitrària ha de valer A=0, ja que si calculem $D^I(r=0)$ que és el camp en el centre, no pot ser infinit, ja que si fem les superfícies de gauss cada cop més petites en radi, arribaríem a no tenir càrrega interna i per tant el flux hauria de valer zero (diferent seria el cas en el que hi ha una càrrega puntual Q al centre, en que sempre hi ha càrrega interna igual a Q llavors hi apareix un terme d'aquest tipus). Per tant:

$$D^I(r) = \frac{\rho_{ll}}{2} r$$

• Aplicant ara la relació de continuïtat (1.b) entre la regió I i la II referida a la component normal de $\vec{D}$ a la interfície:

$$\hat{\mathrm{n}} \cdot \left(\vec{D}^+ - \vec{D}^-\right) = \sigma_{ll} \quad \text{(1.b)}$$

que diu que hi ha una discontinuïtat de la component normal de $\vec{D}$ igual a la densitat superficial de càrrega lliure a la interfície. En el cas de la interfície entre I i II (r=R_1) no hi ha densitat superficial de càrrega lliure i simplement $\sigma_{ll} = 0$, és a dir la component normal és contínua.

Cal tenir en compte que com que en simetria cilíndrica $\vec{D}$ sempre te direcció radial, llavors el seu mòdul és justament la component normal a la interfície, per tant, aquesta continuïtat s'escriu en termes dels mòduls a banda i banda:

$$D^I(R_1^-) = D^{II}(R_1^+)$$

Substituint els valors trobats dels camps a R_1 d'ambdues regions I i II:

$$\frac{B}{R_1} = \frac{\rho_{ll}}{2} R_1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\rho_{ll}}{2} {R_1}^2$$

i amb això ja hem determinat la constant B i la forma final del camp a la regió II.

$$D^{II}(r) = \frac{B}{r} = \frac{\frac{\rho_{ll}}{2} {R_1}^2}{r}$$

• Pel que fa a la capa III o regió del metall, sabem que en un conductor el camp $\vec{E}$ i el camp $\vec{D}$ són nuls al seu interior. El conductor incorpora distribucions de càrrega sota les seves superfícies fins que ho aconsegueix (i aquest fenomen s'anomena equilibri electrostàtic).

Per tant si $\vec{D}$ és zero el flux d'aquesta a través d'un cilindre concèntric tancat de radi r a la regió III és nul, i aplicant el teorema de gauss en versió integral resulta que la càrrega interna lliure també ha de ser zero.

Així doncs, hi ha d'haver una càrrega negativa per unitat de llargada (en forma de $-\sigma_{ll}$) a la capa interna del conductor per a compensar la càrrega positiva per unitat de llargada de la barra dielèctrica central ρ_{ll}

La igualtat entre els valors absoluts d'aquestes dues càrregues per unitat de llargada s'estableix així:

$$2\pi R_2 \sigma_{ll} = \pi {R_1}^2 \rho_{ll} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ll} = \frac{{R_1}^2}{R_2} \frac{\rho_{ll}}{2} \qquad (3)$$

Aquesta és la $-\sigma_{ll}$ (en funció de ρ_{ll}) que es veu obligat a recollir el conductor a la seva cara interna per tal d'assolir el camp nul en tot el seu interior.

En canvi també es veu que la densitat de càrrega a sota de la superfície externa ($r=R_3$) és zero, no n'hi ha ja que no li cal per assolir camp nul. La que hi hauria d'haver hagut ha pogut fugir pel cable que el connecta a terra.

• Pel que fa a la regió IV (exterior), aplicant el teorema de Gauss integral (superfícies de gauss amb $r>R_3$) el flux ha de ser nul ja que la càrrega interna per unitat de llargada és nul·la segons la compensació que acabem de dir (entre σ_{ll} i ρ_{ll} que es compensen exactament). Per tant el camp continua sent nul:

$$D^{IV} = 0$$

• Aplicant ara la relació de continuïtat o equació (1.b) a la interfície, entre la regió II i la III:

$$\hat{n} \cdot \left(\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}\right) = \sigma_{ll} \qquad (1.b)$$

Ara sí que tenim discontinuïtat a causa de la presència de la σ_{ll} i per tant hi escriurem (1.b) com:

$$D^{III}(R_2^{+}) - D^{II}(R_2^{-}) = -\sigma_{ll}$$

O el que és el mateix:

$$0-\frac{B}{R_2}=-\sigma_{ll}$$

$$0-\frac{\frac{\rho_{ll}}{2}{R_1}^2}{R_2}=-\sigma_{ll}$$

Relació equivalent a la (3) que ve de la compensació de la σ_{ll} amb la ρ_{ll} en al metall, i que per tant ja es compleix d'ofici

Resum del camps $\mathbf{D}(\mathbf{r})$:

$$\mathrm{D}(\mathrm{r})=\begin{cases}\frac{\rho_{ll}}{2}r & ,regió\ I\\ \frac{\rho_{ll}}{2}{R_1}^2\frac{1}{r} & ,regió\ II\\ 0 & ,regió\ III\\ 0 & ,regió\ IV\end{cases}$$

Pel que fa als camps $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ hem de tenir en compte que s'obtenen a partir del D per mitjà de la relació amb les permitivitats dels dielèctrics: $\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})=\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}})$. Així:

$$\mathrm{E}(\mathrm{r})=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\frac{\rho_{ll}}{2}r & ,regió\ I\\ \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\frac{\rho_{ll}}{2}{R_1}^2\frac{1}{r} & ,regió\ II\\ 0 & ,regió\ III\\ 0 & ,regió\ IV\end{cases}$$

Com es pot veure ara, $\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})$ ja no és continu a r=R_1 (quan per $\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}})$ si que ho era) per culpa de que $\varepsilon_{r1}\neq\varepsilon_{r2}$ en tractar-se de 2 dielèctrics diferents!!

Pel que fa als camps $\vec{\mathrm{P}}(\vec{\mathrm{r}})$ hem de tenir en compte que s'obtenen a partir del $\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})$ per mitjà de la relació amb la susceptibilitat dels dielèctrics: $\vec{\mathrm{P}}(\vec{\mathrm{r}})=\varepsilon_0\chi\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})=\frac{\chi}{\varepsilon_r}\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}})=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}})=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}})$. Així:

$$\mathrm{P}(\mathrm{r})=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\frac{\rho_{ll}}{2}r & ,regió\ I\\ \left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)\frac{\rho_{ll}}{2}{R_1}^2\frac{1}{r} & ,regió\ II\\ 0 & ,regió\ III\\ 0 & ,regió\ IV\end{cases}$$

Com es pot veure ara, $\vec{\mathrm{P}}(\vec{\mathrm{r}})$ tampoc és continu a r=R_1 per culpa de que $\varepsilon_{r1}\neq\varepsilon_{r2}$ en tractar-se de 2 dielèctrics diferents!!.

El valor de $\vec{P} \cdot \hat{n}_e$ a sota de cadascuna de les dues superfícies que conflueixen a la interfície r=R_2 donaria la densitat superficial de càrrega de polarització segons la fórmula d'aquesta: $\sigma_P \equiv \vec{P} \cdot \hat{n}_e$

Així respectivament aquestes densitats de càrrega de polarització són:

$$\sigma_{P(R_1^+)} = \vec{P}(R_1^+) \cdot \hat{n}_{e+} = \vec{P}(R_1^+) \cdot (-\hat{r}) = -\mathrm{P}(\mathrm{R}_1^+) = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)\frac{\rho_{ll}}{2}{R_1}^2 \frac{1}{R_1} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)\frac{\rho_{ll}}{2} R_1 < 0$$

$$\sigma_{P(R_1^-)} \quad = \vec{P}(R_1^-) \cdot \hat{n}_{e-} = \vec{P}(R_1^-) \cdot (+\hat{r}) = \mathrm{P}(\mathrm{R}_1^-) = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\frac{\rho_{ll}}{2} R_1 > 0$$

Així, si per exemple: $\varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2}$ Resultarà que: $\sigma_{P(R_1^-)} > -\sigma_{P(R_1^+)}$ i la càrrega neta de polarització a la interfície serà netament positiva

Mètode 2.

Usant **el teorema de gauss** en **versió integral)**

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{int,\ total} = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_{int,\ P} + Q_{int,\ ll})$$

Que per a $\vec{\mathrm{D}}$ s'escriu, només amb la càrrega lliure i sense la ε_0:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{int,\ ll}$$

Llavors fent el mateix que en els problemes de teorema de Gauss del full 2, és a dir plantejant superfícies de gauss tancades en forma de cilindres concèntrics, de llargada finita=L i de radi r que va passant per totes les regions, i calculant llavors el flux amb la fórmula vàlida per a simetria cilíndrica:

$$\phi_{cil} = 2\pi r L \cdot D(r)$$

I igualant-lo a la càrrega lliure interna de cada cilindre obtenim també de forma més fàcil les expressions del mòdul de D a les diferents regions. Fem-ho!

- Regió I:

$$2\pi r L \cdot D^I(r) = \rho_{ll} \pi r^2 L$$

$$D^I(r) = \frac{\rho_{ll}}{2} r$$

- Regió II:

$$2\pi r L \cdot D^{II}(r) = \rho_{ll} \pi {R_1}^2 L$$

$$D^{II}(r) = \frac{\rho_{ll}}{2}\frac{{R_1}^2}{r}$$

Com es pot veure per a r=R_1 ambdues expressions donen el mateix, per tant D és contínua a aquesta interfície ja que no hi ha σ_{ll}

- Regió III: aquí no hi ha dubte, III és un metall i per tant $D^{III}(r) = 0$

A la interfície r=R_2 hi ha una clara discontinuïtat de D, que és igual a:

$$D^{III}(R_2^{+}) - D^{II}(R_2^{-}) = 0 - \frac{\rho_{ll}}{2}\frac{R_1^{\,2}}{R_2}$$

Per tant d'acord amb $\hat{\mathrm{n}} \cdot (\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}) = \sigma_{ll}$ (1.b)

Això significa que s'hi ha de formar una $-\sigma_{ll}$ tal que:

$$-\sigma_{ll} = -\frac{\rho_{ll}}{2}\frac{R_1^{\,2}}{R_2} \qquad (4)$$

que és la mateixa relació que hem trobat per l'altre mètode.

- Regió IV:

$$2\pi r L \cdot D^{IV}(r) = \rho_{ll}\pi R_1^{\,2} L - \sigma_{ll} 2\pi R_2 L$$

Però segons la relació (4) això és zero, per tant:

$$D^{IV}(r) = 0$$

En resum:

$$\mathrm{D}(\mathrm{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_{ll}}{2} r & ,regió\ I \\ \frac{\rho_{ll}}{2}\frac{R_1^{\,2}}{r} & ,regió\ II \\ 0 & ,regió\ III \\ 0 & ,regió\ IV \end{cases}$$

Que és el mateix que pel **mètode 1** anterior.

Gràfica de D(r):