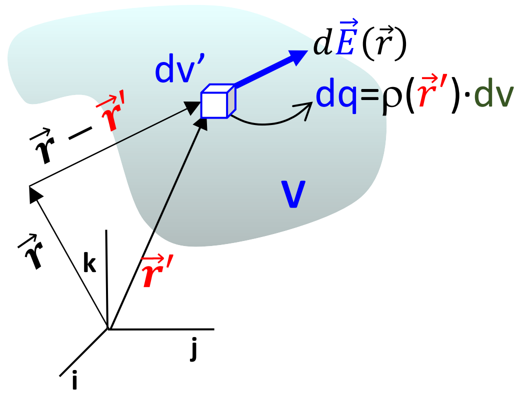
Resum de l'electrostàtica en el buit.

Permitivitat del buit: $\varepsilon_0 \approx 8{,}8541878176 \times 10^{-12}$ $C^2/(Nm^2)$

Llei de Coulomb per a calcular camp elèctric d'una distribució de càrrega:

La forma típica d'enunciar la llei de Coulomb (inclòs Teorema de Superposició) escrita en termes de distribucions volúmiques de càrrega és:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho(\vec{r}')dv' \qquad (0)$$

Fixem-nos que cada terme $\rho(\vec{r}')dv'$ dins de la integral (densitat de càrrega pel diferencial de volum dv') és el dq (diferencial de càrrega) situat dins del dv', i que cadascú d'ells genera un terme diferencial de camp:

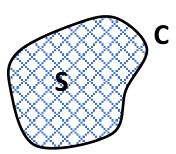
$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\underbrace{\rho(\vec{r}')dv'}_{dq}$$

Cosa que no és més que la llei de Coulomb pel dq. La integral de volum $\int_V d\vec{E}(\vec{r})$ simplement en fa la Superposició dels camps diferencial $d\vec{E}(\vec{r})$ al llarg de tots els dv' que recorren el volum V. Tot això s'explica també a la transparència o pàgina 2 del document Camp Elèctric 2a. Classe.

Lleis bàsiques del Camp Elèctric

Per altra banda, a partir de la Llei de Coulomb+ Superposició, se'n dedueixen dues lleis o teoremes fonamentals del camp electrostàtic. Aquestes dues lleis en forma integral són: la Conservativitat del Camp Electrostàtic i El Teorema de Gauss. Això s'ha anat veient als vídeos. Ara tornem a plantejar-los, en la forma integral, els passarem a forma diferencial i de pas en farem la demostració:

1. **Conservativitat del camp Electrostàtic**



$\vec{E}$ és conservatiu $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \forall\, C \text{ camí tancat}} \qquad (1.\text{int})$$

; que és la *llei integral del camp conservatiu*

Aquesta llei o propietat s'ha demostrat, a partir de la llei de Coulomb, pel cas d'una càrrega puntual en el centre (transparència o pàgina 12 del document Camp Elèctric 1a. Classe). A partir d'aquí es pot raonar que per simple superposició, valdrà per qualsevol sistema de càrregues, sigui aquesta contínua (formada per diferencials de q o 'dq') o discreta (formada per càrregues puntuals q_i situades a $\vec{r}_i$. En realitat només hi ha distribucions contínues, ja que assimilem una càrrega puntual a una distribució $\rho_i(\vec{r}') = q_i\delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)$ on s'usa la delta de Dirac $\delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$ per a indicar una distribució concentrada al punt $\vec{r}_i$ de volum zero, però de pes 1.

A partir d'aquí i suposant certa la llei de conservativitat, la integral de línia tancada C es pot transformar, usant el teorema del rotacional, en una integral de flux a qualsevol de les superfícies internes S de la línia C:

$$0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \left| \begin{matrix} pel\ teorema \\ del\ rotacional \end{matrix} \right| = \int_S \vec{\nabla} x \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla} x \vec{E}(\vec{r}) = 0} \qquad \text{(1.dif)}$$

que és la *llei diferencial del camp conservatiu*: que diu que el camp electrostàtic te rotacional nul a tots els seus punts. Les dues formes: (1.int) i (1.dif) són equivalents entre si via el teorema del rotacional.

Aquesta equivalència entre els dues lleis també es podria haver fet a l'inrevés:

Podríem primer demostrar que $\vec{\nabla} x \vec{E}(\vec{r}) = 0$ i via el teorema del rotacional queda feta per una altra via la demostració de $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

En efecte, demostrem primer que:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} x \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^n} = 0$$

Ho deixem pel lector, és relativament fàcil si calculem adequadament els 3 termes del rotacional i fem les derivades parcials tenint en compte que: $r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

Seguidament, tenint en compte que $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ veu a $\vec{r}'$ com una constant, i per tant no la deriva, podem veure que també

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} x \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^n} = 0$$

I d'aquí comprovem finalment que (ara n és 3):

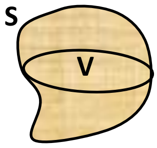
$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} x \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}')dv' \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}} x \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{0} = 0$$

Valgui aquest raonament com una demostració de la conservativitat del camp electrostàtic.

2. Teorema o Llei de Gauss

Aquesta Llei, en la seva versió integral, s'ha explicat ja als vídeos i PDF de Camp Elèctric 3a classe. No s'ha demostrat, ja que la demostració a partir de la llei integral és llarga i de caràcter molt geomètric. Es pot demostrar també a partir de la seva versió diferencial, la qual cosa resulta més fàcil i serà el que farem.

El *teorema de Gauss integral* s'aplica a una superfície tancada S, que te un volum intern V i és:



$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\cdot dv \quad \forall\, S\ tancat} \qquad (2.int)$$

Però la integral tancada de la superfície es pot transformar a una integral en el volum interior tot aplicant el teorema de la divergència:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \left|\begin{matrix} pel\ teorema \\ de\ la\ divergència \end{matrix}\right| = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\cdot dv$$

Per tant:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\cdot dv = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\cdot dv$$

Igualant els dos integrands a cada punt $\vec{r}$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \qquad (2.dif)$$

Que és el *teorema de Gauss diferencial*

Aquesta equivalència entre els dues lleis també es podria haver fet a l'inrevés:

Podríem primer demostrar que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ i via el teorema de la divergència demostrem per una altra camí que: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\cdot dv \quad \forall\, S\ tancat$

Abans de fer això caldrà demostrar la relació matemàtica següent:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 4\pi\,\delta(\vec{r})$$

Calculem aquesta divergència:

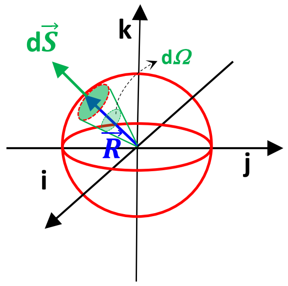
$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{x}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{y}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{z}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\mathrm{x}^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right) + \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\mathrm{y}^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\mathrm{z}^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right) = \frac{3}{|\vec{r}|^3} - 3\frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^5} = \frac{3}{|\vec{r}|^3} - \frac{3}{|\vec{r}|^3} = 0$$

Per a $\vec{r} \neq 0$ el resultat és zero com es pot comprovar a l'anterior càlcul. Però per a $\vec{r} = 0$ el càlcul ens donaria una indeterminació tipus: $\infty - \infty$. Cal per tant calcular explícitament el valor al qual tendeix $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ per a $\vec{r} \to 0$

Per a fer-ho usarem de nou el teorema de la divergència aplicat al "camp", $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, sobre una esfera de radi R centrada a l'origen de coordenades. Anomenem S(R) a la superfície d'aquesta esfera, i V(R) al seu volum intern. El teorema d ela divergència diu:

$$\int_{V(R)} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot dv = \oint_{S(R)} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{S}$$



Calculem el membre, de flux, de la dreta, tenint en compte que els $d\vec{S}$, són perpendiculars a cada porció diferencial de superfície, de la superfície esfèrica de radi R, i per tant, es poden escriure com: $d\vec{S} = \hat{R}\, R^2 d\Omega$, essent, R el radi, $\hat{R}$ el vector unitari en la direcció radial cap enfora i $d\Omega$ el diferencial d'angle sòlid que ocupa la porció $d\vec{S}$, per tant:

$$\oint_{S(R)} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{S} = \oint_{S(R)} \frac{\vec{R}}{\mathrm{R}^3} \cdot \hat{R}\, R^2 d\Omega = \left|\vec{R} \cdot \hat{R} = R\right| = \oint_{S(R)} \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}^3} R^2 d\Omega = \oint_{S(R)} d\Omega$$
$$= \left| \begin{matrix} angle\ sòlid \\ esfèric\ total \end{matrix} \right| = 4\pi$$

Per tant $\int_{V(R)} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot dv = 4\pi$ i això és independent del radi R de l'esfera. Fent el límit quan R→0 d'aquesta esfera i d'aquesta integral tenim tota l'estona un resultat de 4π. És a dir:

$$\lim_{R \to 0} \int_{V(R)} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot dv = 4\pi$$

Això vol dir que aquest pes de 4π s'acumula a la darrera de les esferes, la de radi R=0. És per tant el pes del punt r=0

La manera matemàtica d'expressar una distribució, que compleixi aquestes propietats és, justament dir que l'integrand d'aquesta darrera integral de volum sigui:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 4\pi\, \delta(\vec{r})$$

On $\delta(\vec{r})$ és la distribució anomenada Delta de Dirac que te valor nul a tot arreu excepte a $\vec{r} = \vec{0}$, on te un valor infinit i un pes acumulat sota la distribució, en aquest únic punt, de 1.

Fent la mateixa divergència, tot canviant: $\vec{r}$ per $\vec{r} - \vec{r}'$, tenint en compte que $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ només deriva per $\vec{r}$

T i considera a $\vec{r}'$constant.

Obtenim la relació:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}\prime}{|\vec{r} - \vec{r}\prime|^3} = 4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Ara ja estem en condicions de calcular la divergència del camp elèctric:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dv'\rho(\vec{r}')\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dv'\rho(\vec{r}')4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$

Que és la forma diferencial del teorema de Gauss, que amb tot això queda demostrada.

Existència del potencial electrostàtic:

Si $\vec{E}$ conservatiu llavors la integral de línia entre dos punts, és independent del camí usat per a anar-hi. Per tant sempre existirà una funció potencial escalar, $V(\vec{r})$, tal que

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}(V(\vec{r}))} \qquad (3)$$

en efecte, proposem una funció escalar $V(\vec{r})$ com la que es veu a continuació:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' \qquad (4)$$

I ara comprovem que compleix la relació (3) essent el camp la expressió (0) de la Llei de Coulomb.

Calculem, per tant: $\vec{\nabla}_{\vec{r}}\big(V(\vec{r})\big) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dv'\rho(\vec{r}')\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Calculem prèviament el gradient de 1/r :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}|} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{1}{2}\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{1}{2}\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Per tant també:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

I amb això, ja podem veure que menys el gradient del potencial (4) és el camp (0).

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\big(V(\vec{r})\big) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dv'\rho(\vec{r}')\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dv'\rho(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\vec{E}(\vec{r})$$

Amb al qual cosa queda demostrada la relació diferencial (3) entre el camp i el potencial.

Equivalències entre les lleis.

Amb tot això ja es pot veure que les dues lleis

1. conservativitat del camp electrostàtic + 2. Teorema de Gauss
   Són equivalents a la Llei de Coulomb (0)

$$\textbf{Llei de Coulomb} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Conservativitat\ del\ camp} \\ + \\ \boldsymbol{Teorema\ de\ Gauss} \end{cases}$$

Equació de Poisson.

Combinant el teorema de Gauss diferencial (2.dif): $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

Amb la relació diferencial entre el camp i el potencial (3): $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}(V(\vec{r}))$.

Obtenim:

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(V(\vec{r})) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} V(\vec{r}), \frac{\partial}{\partial y} V(\vec{r}), \frac{\partial}{\partial z} V(\vec{r})\right)$$
$$= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(\vec{r}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(\vec{r}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(\vec{r})\right)$$

O el que és el mateix

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad (5)$$

L'operador diferencial de segon ordre del parèntesi s'anomena Laplaciana i s'escriu amb el símbols: $\vec{\nabla}^2\ o\ \Delta$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \vec{\nabla}^2 \equiv \Delta \ \ (laplaciana)$$

Així l'equació (5) s'anomena equació de Poisson:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \qquad (5)$$

Que és una equació diferencial de 2on ordre que permet trobar el potencial (un escalar) en funció de la densitat de càrrega (un altre escalar) que suposem coneguda. Per tant, serviria per a resoldre tots els problemes de l'electrostàtica usant només camps escalars (més fàcil que usar camps vectorials com $\vec{E}(\vec{r})$).

A partir d'aquí, per a re-obtenir el camp n'hi hauria prou amb aplicar (3): $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}(V(\vec{r}))$