Producto vectorial

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

Ejercicio

Sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores no proporcionales de $\mathbb{R}^3$. Determina un vector no nulo $\overrightarrow{n} = (x, y, z)$ tal que $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$.

Ejercicio

Sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores no proporcionales de $\mathbb{R}^3$. Determina un vector no nulo $\overrightarrow{n} = (x, y, z)$ tal que $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$.

Solución

Tenemos $\begin{cases} u_1x + u_2y = -u_3z \\ v_1x + v_2y = -v_3z. \end{cases}$

Podemos asumir, sin perder generalidad, que $u_1v_2 - v_1u_2 \neq 0$, y por eso

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -u_3z & u_2 \\ -v_3z & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} = z\frac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & -u_3z \\ v_1 & -v_3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} = -z\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}.$$

Por lo tanto,

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{u_2v_3 - v_2u_3}{u_1v_2 - v_1u_2}z, -\frac{u_1v_3 - v_1u_3}{u_1v_2 - v_1u_2}z, z \right).$$

En su lugar, podemos tomar $\overrightarrow{n} = (u_2v_3 - v_2u_3, -(u_1v_3 - v_1u_3), u_1v_2 - v_1u_2)$.

Producto vectorial

Sea $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con orientación positiva. Dados dos vectores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ expresados en la base anterior, el producto vectorial $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se define como

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{i}(u_2v_3 - v_2u_3) - \overrightarrow{j}(u_1v_3 - v_1u_3) + \overrightarrow{k}(u_1v_2 - v_1u_2).$$

Producto vectorial

Sea $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con orientación positiva. Dados dos vectores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ expresados en la base anterior, el producto vectorial $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se define como

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{i}(u_2 v_3 - v_2 u_3) - \overrightarrow{j}(u_1 v_3 - v_1 u_3) + \overrightarrow{k}(u_1 v_2 - v_1 u_2).$$

El producto vectorial puede escribirse en una notación abreviada que toma la forma de un determinante:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

El producto vectorial puede escribirse en una notación abreviada que toma la forma de un determinante:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

El producto vectorial puede escribirse en una notación abreviada que toma la forma de un determinante:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Observación

- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si y solo si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son proporcionales.
- En el caso no nulo, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y su orientación está determinada por la regla de la mano derecha.
- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$.

Ejercicio (Longitud de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$)

Demuestra que si α es el ángulo entre $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, entonces $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| |\sin\alpha|$.

Ejercicio (Longitud de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$)

Demuestra que si α es el ángulo entre $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, entonces $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin\alpha|$.

Solución

Por definición de norma y producto escalar en $\mathbb{R}^3$ se deduce que

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2.$$

Por otro lado, $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}$, lo que implica que

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2}.$$

Así, $\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2\sin^2\alpha$.
Por lo tanto, $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin\alpha|$. $\square$

Ejercicio (Área del triángulo)

Demuestra que si a, b y c son tres puntos no colineales de un espacio euclidiano, entonces el área del triángulo abc está dada por

$$Area(abc) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{ab}\|\|\overrightarrow{ac}\|\sin\alpha,$$

donde α es el ángulo entre $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{ac}$.

Ejercicio (Área del triángulo)

Demuestra que si a, b y c son tres puntos no colineales de un espacio euclidiano, entonces el área del triángulo abc está dada por

$$Area(abc) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{ab}\|\|\overrightarrow{ac}\|\sin\alpha,$$

donde α es el ángulo entre $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{ac}$.

Solución

Sea c' la proyección ortogonal de c sobre el lado ab. Asumiremos, sin pérdida de generalidad, quet c' es un punto del segmento $\overline{ab}$. Así, si α es el ángulo entre $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{ac}$, entonces $\sin\alpha = \frac{\|\overrightarrow{c'c}\|}{\|\overrightarrow{ac}\|}$. De ahí que

$$\|\overrightarrow{ab}\|\|\overrightarrow{ac}\|\sin\alpha = \|\overrightarrow{ab}\|\|\overrightarrow{c'c}\| = 2Area(abc).$$

Por lo tanto, el resultado se cumple. □

Ejercicio (Área del triángulo en $\mathbb{R}^3$)

Demuestra que si$a$, b y c son tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^3$, entonces el área del triángulo abc está dada por

$$Area(abc) = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ac} \right\|.$$

Ejercicio (Área del triángulo en $\mathbb{R}^3$)

Demuestra que si$a$, b y c son tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^3$, entonces el área del triángulo abc está dada por

$$Area(abc) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ac}\right\|.$$

Solución

El resultado se obtiene a partir de los dos ejercicios anteriores. $\square$

Ejercicio (Área del triángulo en $\mathbb{R}^3$)

Demuestra que si a, b y c son tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^3$, entonces el área del triángulo abc está dada por

$$Area(abc) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ac}\right\|.$$

Solución

El resultado se obtiene a partir de los dos ejercicios anteriores. □

Área de un paralelogramo

Obviamente, el área de un paralelogramo a, b, c, d está determinada por los vectores $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{ad}$, y está dada por $\left\|\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ad}\right\|$.

Ejercicio (Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$)

Demuestra que la distancia de un punto p a una recta L de $\mathbb{R}^3$ está dada por $d(p,L) = \dfrac{\|\overrightarrow{mp} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}$, donde m es un punto de L y $\overrightarrow{v}$ es un vector director de L.

Ejercicio (Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$)

Demuestra que la distancia de un punto p a una recta L de $\mathbb{R}^3$ está dada por $d(p,L) = \dfrac{\|\overrightarrow{mp} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}$, donde m es un punto de L y $\overrightarrow{v}$ es un vector director de L.

Solución

Si $p \in L$, ya estamos. Asumiremos que $p \notin L$. Sea a la proyección ortogonal de p sobre L. Si α es el ángulo entre $\overrightarrow{mp}$ y $\overrightarrow{v}$, entonces

$$\|\overrightarrow{mp} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{mp}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin\alpha|.$$

Por otro lado,

$$\sin\alpha = \frac{\|\overrightarrow{pa}\|}{\|\overrightarrow{mp}\|}.$$

Entonces, $\|\overrightarrow{mp} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{pa}\|\|\overrightarrow{v}\|$. Por lo tanto,

$$d(p,L) = \|\overrightarrow{pa}\| = \frac{\|\overrightarrow{mp} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|} \quad \square$$

Ejercicio (Distancia de un punto a un plano)

Demuestra que la distancia de un punto p a un plano P está dada por

$$d(p,P) = |\overrightarrow{pm} \cdot \overrightarrow{v}|,$$

donde m es un punto de P y $\overrightarrow{v} \perp P$ es un vector unitario.

Ejercicio (Distancia de un punto a un plano)

Demuestra que la distancia de un punto p a un plano P está dada por

$$d(p,P) = |\overrightarrow{pm} \cdot \overrightarrow{v}|,$$

donde m es un punto de P y $\overrightarrow{v} \perp P$ es un vector unitario.

Solución

Si $p \in P$, ya estamos. Asumiremos que $p \notin P$. Sea a la proyección ortogonal de p sobre P. Si α es el ángulo entre $\overrightarrow{pm}$ y $\overrightarrow{pa}$, entonces $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{pm} \cdot \overrightarrow{pa}}{\|\overrightarrow{pm}\| \|\overrightarrow{pa}\|}$. Por otro lado, $\cos\alpha = \dfrac{\|\overrightarrow{pa}\|}{\|\overrightarrow{pm}\|}$. Así, para $\overrightarrow{v} \perp P$ unitario,

$$d(p,P) = \|\overrightarrow{pa}\| = \|\overrightarrow{pm}\| \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{pm} \cdot \overrightarrow{pa}}{\|\overrightarrow{pa}\|} = |\overrightarrow{pm} \cdot \overrightarrow{v}|.$$

$\square$

Ejercicio (Distancia entre rectas no paralelas)

Sean L_1 y L_2 dos rectas no paralelas. Asumimos que L_1 está dada por un punto p y un vector director $\overrightarrow{u}$. Análogamente, L_2 está dada por un punto q y un vector director $\overrightarrow{v}$. Demuestra que la distancia entre L_1 y L_2 está dada por

$$d(L_1, L_2) = \frac{|(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{pq}|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|}.$$

Ejercicio (Distancia entre rectas no paralelas)

Sean L_1 y L_2 dos rectas no paralelas. Asumimos que L_1 está dada por un punto p y un vector director $\overrightarrow{u}$. Análogamente, L_2 está dada por un punto q y un vector director $\overrightarrow{v}$. Demuestra que la distancia entre L_1 y L_2 está dada por

$$d(L_1, L_2) = \frac{|(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{pq}|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|}.$$

Solución

Sea P el plano que contienen a L_2 y tiene la dirección de $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$. Observa que la distancia entre L_1 y L_2 es igual a la distancia entre el plano P y la recta L_1. Como $\frac{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|}$ es un vector unitario, y ortogonal a P,

$$d(L_1, L_2) = d(p, P) = \frac{|(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{pq}|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|}.$$

$\square$

Ejercicio (Volumen de un paralelepípedo)

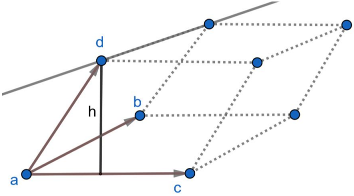
Demuestra que el volumen del paralelepípedo generado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, y $\overrightarrow{w}$ está dado por $V = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}|$.

Ejercicio (Volumen de un paralelepípedo)

Demuestra que el volumen del paralelepípedo generado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, y $\overrightarrow{w}$ está dado por $V = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}|$.

Solución

Considera la figura donde $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ac}$, y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{ad}$. En este caso, el volumen es igual al área de la base por la altura.

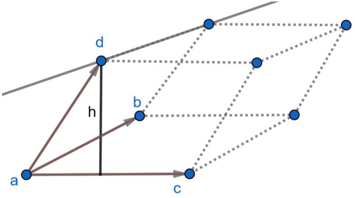


Ejercicio (Volumen de un paralelepípedo)

Demuestra que el volumen del paralelepípedo generado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, y $\overrightarrow{w}$ está dado por $V = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}|$.

Solución

Considera la figura donde $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ac}$, y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{ad}$. En este caso, el volumen es igual al área de la base por la altura.



El área de la base es $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|$, mientras la altura es $h = \frac{|(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|}$, que es la fórmula de la distancia entre rectas no paralelas. $\square$

El plano en el espacio

Ecuación del plano

Sea $\mathbb{P}$ un plano determinado por los puntos $p = (x_0, y_0, z_0)$, $q = (x_1, y_1, z_1)$ y $r = (x_2, y_2, z_2)$, i.e.,

$$\mathbb{P} = \{p + \lambda_1 \overrightarrow{pq} + \lambda_2 \overrightarrow{pr}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

El plano $\mathbb{P}$ tiene ecuación

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 (x', y', z') + \lambda_2 (x'', y'', z''), \tag{1}$$

donde

- $(x', y', z') = \overrightarrow{pq} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$,
- $(x'', y'', z'') = \overrightarrow{pr} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$

son vectores directores de $\mathbb{P}$.

Ecuación general del plano

Sea $\mathbb{P}$ un plano determinado por los puntos $p = (x_0, y_0, z_0)$, $q = (x_1, y_1, z_1)$ y $r = (x_2, y_2, z_2)$.

Ecuación general del plano

Sea $\mathbb{P}$ un plano determinado por los puntos $p = (x_0, y_0, z_0)$, $q = (x_1, y_1, z_1)$ y $r = (x_2, y_2, z_2)$.

Sea $H = \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr} \rangle$ y $H^{\perp} = \langle \overrightarrow{n} \rangle = \langle (a, b, c) \rangle$. Como para todo punto $q = (x, y, z) \in \mathbb{P}$ tenemos $\overrightarrow{pq} \perp \overrightarrow{n}$, podemos concluir que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{pq} = 0$, y por eso la ecuación general del plano está dada por

$$ax + by + cz = d,$$

donde d se obtiene al sustituir en esta ecuación las coordenadas de cualquier punto del plano.

Ecuación general del plano

Sea $\mathbb{P}$ un plano determinado por los puntos $p=(x_0,y_0,z_0)$, $q=(x_1,y_1,z_1)$ y $r=(x_2,y_2,z_2)$.

Sea $H=\langle\overrightarrow{pq},\overrightarrow{pr}\rangle$ y $H^{\perp}=\langle\overrightarrow{n}\rangle=\langle(a,b,c)\rangle$. Como para todo punto $q=(x,y,z)\in\mathbb{P}$ tenemos $\overrightarrow{pq}\perp\overrightarrow{n}$, podemos concluir que $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{pq}=0$, y por eso la ecuación general del plano está dada por

$$ax+by+cz=d,$$

donde d se obtiene al sustituir en esta ecuación las coordenadas de cualquier punto del plano.

Observación

- Nótese que si $ax+by+cz=d$ es la ecuación de un plano P, entonces (a,b,c) es ortogonal a los vectores directores de P.
- En particular, (a,b,c) se obtiene como el producto vectorial de dos vectores directores de P.
- El vector $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$ se conoce como vector normal al plano.

Ejercicio

Determina la ecuación general del plano dado por los puntos $(2,-1,1)$, $(-2,1,3)$ y $(3,2,-2)$.

Ejercicio

Determina la ecuación general del plano dado por los puntos $(2,-1,1)$, $(-2,1,3)$ y $(3,2,-2)$.

Solución

$6x+5y+7z=14.$ □

Ejercicio

Determina la ecuación general del plano que contiene el punto $(-2,-1,5)$ y es ortogonal a la recta dada por los puntos $(2,-1,2)$ y $(-3,1,-2)$.

Ejercicio

Determina la ecuación general del plano que contiene el punto $(-2,-1,5)$ y es ortogonal a la recta dada por los puntos $(2,-1,2)$ y $(-3,1,-2)$.

Solución

$5x-2y+4z=12.$ □

Ejercicio

Representa los planos de ecuación,

(a) $x = 3$

(b) $y = x$

(c) $x + y = 5$

(d) $x + 2y + 3z = 6$

Ejercicio (Simetría especular)

Sea $\mathbb{P}$ un plano de ecuación $ax+by+cx+d=0$. demuestra que la imagen de un punto $q=(x,y,z)$ por la simetría especular $\sigma_{\mathbb{P}}$ satisface

$$\sigma_{\mathbb{P}}(q)=\begin{pmatrix} \frac{-a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ac}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2ab}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2ac}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{-2ad}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2bd}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2cd}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio (Simetría especular)

Sea $\mathbb{P}$ un plano de ecuación $ax+by+cx+d=0$. demuestra que la imagen de un punto $q=(x,y,z)$ por la simetría especular $\sigma_{\mathbb{P}}$ satisface

$$\sigma_{\mathbb{P}}(q)=\begin{pmatrix} \frac{-a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ac}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2ab}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2ac}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{-2ad}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2bd}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2cd}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}.$$

Solución

Ver los detalles en los apuntes...

La recta en el espacio

La recta

Sea l una recta determinada por los puntos $p=(x_0,y_0,z_0)$ y $q=(x_1,y_1,z_1)$, i.e.,

$$l=\{p+\lambda\overrightarrow{pq},\quad \lambda\in\mathbb{R}\}.$$

La recta

Sea l una recta determinada por los puntos $p=(x_0,y_0,z_0)$ y $q=(x_1,y_1,z_1)$, i.e.,

$$l=\{p+\lambda\overrightarrow{pq}, \quad \lambda\in\mathbb{R}\}.$$

Ecuación de la recta

La recta l tiene ecuación

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(x',y',z'), \tag{2}$$

donde $(x',y',z')=\overrightarrow{pq}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$ es un vector director de l.

¿Cómo determinar el ángulo que forma una recta con los ejes de coordenadas?

Ángulos directores

Sea L una recta en $\mathbb{R}^3$ determinada por los puntos p_0 y p_1. Los ángulos directores de la recta L, orientada por el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p_0p_1}$, son los ángulos α, β y γ formados por el vector $\overrightarrow{u}$ y los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ángulos directores

Sea L una recta en $\mathbb{R}^3$ determinada por los puntos p_0 y p_1. Los ángulos directores de la recta L, orientada por el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p_0p_1}$, son los ángulos α, β y γ formados por el vector $\overrightarrow{u}$ y los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Cosenos directores

Los cosenos directores de la recta L, orientada por el vector $\overrightarrow{u}$, son $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$.

Ángulos directores

Sea L una recta en $\mathbb{R}^3$ determinada por los puntos p_0 y p_1. Los ángulos directores de la recta L, orientada por el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p_0p_1}$, son los ángulos α, β y γ formados por el vector $\overrightarrow{u}$ y los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Cosenos directores

Los cosenos directores de la recta L, orientada por el vector $\overrightarrow{u}$, son $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$.

Observación

Si damos a L la orientación de $-\overrightarrow{u}$, entonces los cosenos directores son $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$ y $-\cos\gamma$.

Ejercicio

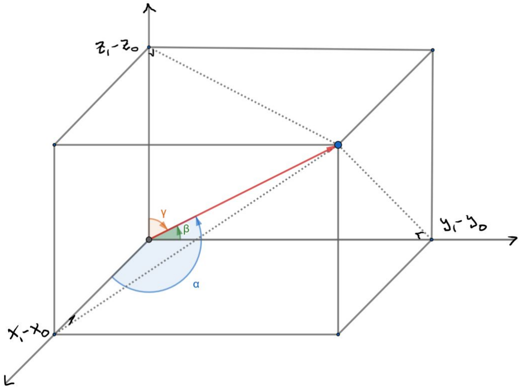
Prueba que si una recta L pasa por los puntos $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$, y está orientada por el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p_0 p_1}$, los cosenos directores están dados por

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_0}{d}, \ \cos\beta = \frac{y_1 - y_0}{d} \ \text{ y } \ \cos\gamma = \frac{z_1 - z_0}{d},$$

donde $d = \|\overrightarrow{p_0 p_1}\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$.

Solución

A partir de los triángulos rectángulos mostrados en la figura, donde el vector $\overrightarrow{p_0p_1}$ aparece en rojo, se deduce el resultado aplicando la definición de coseno de un ángulo como razón trigonométrica. $\square$



Corolario

Si α, β y γ son los ángulos directores de una recta, entonces

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ejercicio

Determina los cosenos directores de una recta sabiendo que dos de sus ángulos directores son $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\beta = \frac{\pi}{6}$.

Ejercicio

Determina los cosenos directores de una recta sabiendo que dos de sus ángulos directores son $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\beta = \frac{\pi}{6}$.

Solución

$\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y 0. $\square$

Ángulo entre dos rectas

El ángulo entre dos rectas orientadas L_1 y L_2 es el ángulo entre los subespacios vectoriales L_1' y L_2' que definen su dirección y orientación.

Ejercicio

Sean L_1 y L_2 dos rectas orientadas en $\mathbb{R}^3$. Sean $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$ y $\cos\gamma_i$ los cosenos directores de L_i para $i \in \{1,2\}$, y sea θ el ángulo entre L_1 y L_2. Demuestra que

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

Ejercicio

Sean L_1 y L_2 dos rectas orientadas en $\mathbb{R}^3$. Sean $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$ y $\cos\gamma_i$ los cosenos directores de L_i para $i \in \{1,2\}$, y sea θ el ángulo entre L_1 y L_2. Demuestra que

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

Solución

- Se $\overrightarrow{u}_i = (x_i, y_i, z_i)$ un vector que determina la dirección y la orientación de L_i para $i = 1,2$.
- Sabemos que $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{\|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|}$.
- Por último, el resultado se deduce ya que $\cos\alpha_i = \dfrac{x_i}{\|\overrightarrow{u_i}\|}$, $\cos\beta_i = \dfrac{y_i}{\|\overrightarrow{u_i}\|}$ y $\cos\gamma_i = \dfrac{z_i}{\|\overrightarrow{u_i}\|}$ para $i = 1,2$. $\square$

Ejercicio

Sea r la recta que pasa por el origen en la dirección de $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$. Sea $R_{(r,\overrightarrow{u},\alpha)}$ una rotación de ángulo α y eje r orientado por el vector $\overrightarrow{u}$.

(a) Si $q = (x,y,z)$, determina un fórmula para $R_{(r,\overrightarrow{u},\alpha)}(q)$.

(b) Determina $R_{(r,\overrightarrow{u},\alpha)}(q)$ para $q = (0,3,0)$ y $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Solución (a)

A partir de $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{u}^{\perp} = \langle (1,1,-2),(-1,1,0) \rangle$ formamos la base ortonormal

$$B = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3) = \left(\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right).$$

La matriz de cambio de base de B a la canónica es

Solución (a)

A partir de $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{u}^{\perp} = \langle (1,1,-2), (-1,1,0) \rangle$ formamos la base ortonormal

$$B = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3) = \left(\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right).$$

La matriz de cambio de base de B a la canónica es

$$M_{B\to C} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Solución (a)

A partir de $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{u}^{\perp} = \langle (1,1,-2), (-1,1,0) \rangle$ formamos la base ortonormal

$$B = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3) = \left(\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right).$$

La matriz de cambio de base de B a la canónica es

$$M_{B\to C} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Como $\det(M_{C\to B}) = \frac{1}{\det(M_{B\to C})} > 0$, la base B preserva la orientación del espacio. Por tanto,

$$R_{(r,\overrightarrow{u},\alpha)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6}x + \frac{\sqrt{6}}{6}y - \frac{\sqrt{6}}{3}z \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{\sqrt{3}}{3}z \end{pmatrix}.$$

Solución (b)

En particular, si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, entonces

$$R_{(r,\overrightarrow{u},\alpha)}(0,3,0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $R_{(r,\overrightarrow{u},\frac{2\pi}{3})}(0,3,0) = (0,0,3)$. □

Solución (b)

En particular, si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, entonces

$$R_{(r,\overrightarrow{u},\alpha)}(0,3,0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $R_{(r,\overrightarrow{u},\frac{2\pi}{3})}(0,3,0) = (0,0,3)$. □

Solución (b)

En particular, si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, entonces

$$R_{(r,\overrightarrow{u},\alpha)}(0,3,0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $R_{(r,\overrightarrow{u},\frac{2\pi}{3})}(0,3,0) = (0,0,3)$. $\square$

Observación: si el eje r de rotación se orienta por el vector $-\overrightarrow{u}$, entonces tenemos que tomar la base $B' = (\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_1, -\overrightarrow{v}_3)$ y en tal caso se obtiene $R_{(r,-\overrightarrow{u},\frac{2\pi}{3})}(0,3,0) = (3,0,0)$.