El producte vectorial.

$\vec{\mathbf{A}}\,X\,\vec{\mathbf{B}}$ és l'anomenat *producte vectorial* de dos vectors $\vec{\mathbf{A}}$ i $\vec{\mathrm{B}}$. El resultat és $\vec{\mathrm{C}}$ un altre vector que és calcula per mitjà de la combinació de productes de components de $\vec{\mathbf{A}}$ i $\vec{\mathrm{B}}$ seguint la recepta del determinant, tal com es mostra a continuació:

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}}\,X\,\vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_x & \mathrm{A}_y & \mathrm{A}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \end{vmatrix} = \left(\mathrm{A}_y B_z\text{-}\mathrm{A}_z B_y\right)\hat{\boldsymbol{i}} + \left(\mathrm{A}_z B_x\text{-}\mathrm{A}_x B_z\right)\hat{\boldsymbol{j}} + \left(\mathrm{A}_x B_y\text{-}\mathrm{A}_y B_x\right)\hat{\boldsymbol{k}}$$

O bé anomenant per números, 1, 2 i 3 a les tres components x, y i z:

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}}\,X\,\vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \end{vmatrix} = \left(\underbrace{A_2 B_3 - A_3 B_2}_{C_1} \;;\; \underbrace{\mathrm{A}_3 B_1\text{-}\mathrm{A}_1 B_3}_{C_2} \;;\; \underbrace{\mathrm{A}_1 B_2\text{-}\mathrm{A}_2 B_1}_{C_3} \right) \qquad (1)$$

El que equival a sumar els productes de components de $\vec{\mathbf{A}}$ i de $\vec{\mathbf{B}}$ tot usant com a factor el famós *tensor de Levi-Civita*: $\varepsilon_{i,j,k}$

$$\boldsymbol{C_i} = \sum_{j=1}^{\mathbf{3}} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} \cdot \mathrm{A}_j \cdot B_k \qquad (2)$$

on el tensor de Levi-Civita te com a valors:

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} \mathbf{+1}, & si \;\; i,j,k \;\; \text{és una permutació parella (feta amb un nombre parell de transposicions)} \\ \mathbf{-1}, & si \;\; i,j,k \;\; \text{és una permutació imparella (feta amb un nombre imparell de transposicions)} \\ \mathbf{0}, & si \;\; i,j,k \;\; \text{te almenys dos índexos repetits} \end{cases}$$

Tots els exemples del primer i del segon cas són 3 i 3, de les 6 permutacions possibles amb índexs diferents:

$$\varepsilon_{1,2,3} = \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = +1$$

$$\varepsilon_{1,3,2} = \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1$$

Exemples del tercer cas (índexs repetits), en mostrem 3 d'un total de 21:

$$\varepsilon_{1,1,3} = \varepsilon_{2,1,2} = \varepsilon_{3,3,3} = \; \ldots = \; 0$$

A partir d'aquestes definicions es podrien demostrar una sèrie de propietats del producte vectorial. Les 7 primeres que demostrarem fan referència a una visió geomètrica equivalent del producte vectorial

1. El producte vectorial és anti-commutatiu (pròpiament dit s'hauria de dir antisimètric):

$$\vec{\mathbf{A}}\,X\,\vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}}\,\boldsymbol{X}\,\vec{\mathbf{A}}$$

En efecte: si intercanviem dues files (o columnes) d'un determinant, com el de (1), els resultat és el mateix canviat de signe.

2. Si fem el producte escalar de $\vec{\mathbf{A}}$ per $\vec{\mathbf{A}}\,X\,\vec{\mathbf{B}}$ el resultat és nul: $\vec{\mathbf{A}} \cdot \left(\vec{\mathbf{A}}\,X\,\vec{\mathbf{B}}\right) = \mathbf{0}$

En efecte:

$\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{A}}\, X\, \vec{\mathbf{B}}) = (A_1\,,\ A_2\,, A_3) \cdot \left((A_2B_3 - A_3B_2),\ (A_3B_1\text{-}A_1B_3),\ (A_1B_2\text{-}A_2B_1) \right) = A_1(A_2B_3 - A_3B_2)\ +\ A_2(A_3B_1\text{-}A_1B_3)\ +\ A_3(A_1B_2\text{-}A_2B_1) = \left| \begin{matrix} es\ pot\ desenvolupar\ terme\ a\ terme \\ i\ veure\ que\ tots\ s'anul \cdot len\ 2\ a\ 2 \end{matrix} \right| = 0$

3. Anàlogament ho veuríem per $\vec{\mathbf{B}}$: $\vec{\mathbf{B}} \cdot (\vec{\mathbf{A}}\, X\, \vec{\mathbf{B}}) = \mathbf{0}$

4. Per tant, **2.** i **3.** ens diuen que el producte vectorial és perpendicular alhora a $\vec{\mathbf{A}}$ i a $\vec{\mathbf{B}}$ i per tant, per tant, d'aquí es pot deduir que és perpendicular al pla format per $\vec{\mathbf{A}}$ i $\vec{\mathbf{B}}$

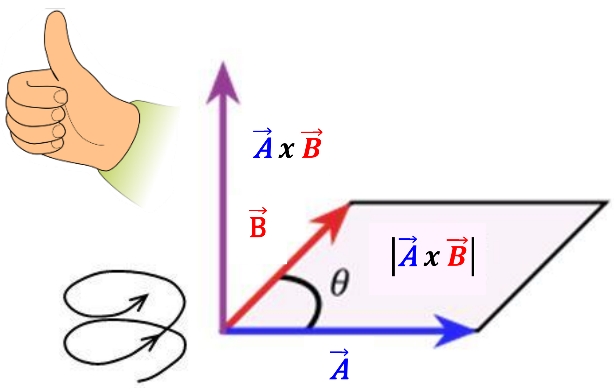
Hi ha dos possibles sentits perpendiculars a un pla donat, per a decidir quin dels dos és el resultat del producte $\vec{\mathbf{A}}\, X\, \vec{\mathbf{B}}$, hem d'analitzar els productes vectorials dels vectors unitaris d'un sistema ortogonal:

$$\hat{\imath}\ x\ \hat{\jmath} = \hat{k}$$
$$\hat{\jmath}\ x\ \hat{k} = \hat{\imath}$$
$$\hat{k}\ x\ \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

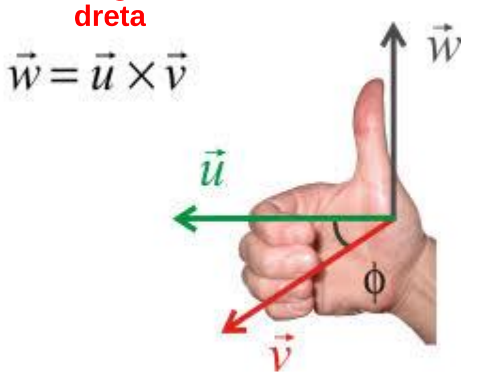
La qual cosa satisfà la regla de la ma dreta o del tirabuixó. Si girem del primer al segon seguint l'angle més curt (90°) , el tirabuixó avança cap al tercer. Igualment si girem els quatre dits (sense el polze) de la ma dreta del primer al segon, el polze apunta cap al tercer.

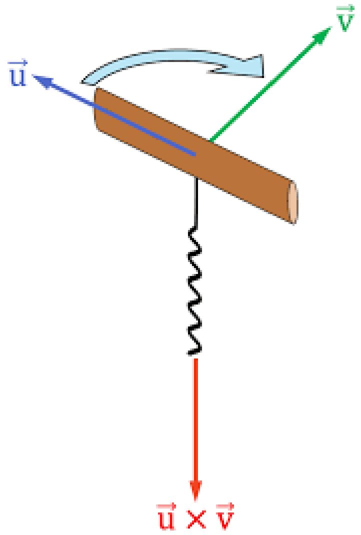
5. Per tant i per superposició de resultats podem deduir que també el producte vectorial de $\vec{\mathbf{A}}\, X\, \vec{\mathbf{B}}$

, és perpendicular al pla format per $\vec{\mathbf{A}}$ i $\vec{\mathbf{B}}$, però en el sentit tal que si girem del primer al segon seguint l'angle, θ, (més curt o l'inferior o igual a 180°) que formen els dos vectors, el tirabuixó avança cap al tercer. Igualment si girem els quatre dits (sense el polze) de la ma dreta del primer al segon, el polze apunta cap al tercer. Aquestes dues regles s'anomenen *regla del tirabuixó* o *regla de la ma dreta* indistintament, ja que són la mateixa.



Regla de la ma dreta





Regla del tirabuixó

6. Calculem ara el mòdul al quadrat del vector resultant del producte vectorial:

$$\left|\vec{A}\, x\, \vec{B}\right|^2 = \left(\vec{A}\, x\, \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{A}\, x\, \vec{B}\right) =$$

$$= \left((A_2B_3 - A_3B_2)\,,(A_3B_1\text{-}A_1B_3)\,,(A_1B_2\text{-}A_2B_1)\right) \cdot \left((A_2B_3 - A_3B_2)\,,(A_3B_1\text{-}A_1B_3)\,,(A_1B_2\text{-}A_2B_1)\right)$$

$$= \ (A_2B_3 - A_3B_2)^2 + (A_3B_1 - A_1B_3)^2 + \ (A_1B_2 - A_2B_1)^2 =$$

$$= (A_2^2B_3^2 - 2A_2B_3A_3B_2 + A_3^2B_2^2\ ) + (A_3^2B_1^2 - 2A_3B_1A_1B_3 + A_1^2B_3^2\ ) + (A_1^2B_2^2 - 2A_1B_2A_2B_1 + A_2^2B_1^2\ )$$

$$= A_2^2(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) + A_3^2(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) + A_1^2(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) - 2A_2B_3A_3B_2 - 2A_3B_1A_1B_3 - 2A_1B_2A_2B_1 - A_1^2B_1^2 - A_2^2B_2^2 - A_3^2B_3^2$$

$$= (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) - A_1^2B_1^2 - A_2^2B_2^2 - A_3^2B_3^2 - 2A_2B_3A_3B_2 - 2A_3B_1A_1B_3 - 2A_1B_2A_2B_1$$

$$= (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) - (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)^2$$

$$= (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)\left[1 - \frac{(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)^2}{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)}\right]$$

On reconeixem:

$$\frac{(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}}$$

Com la definició del cos de l'angle θ que formen els dos vectors $\vec{\mathbf{A}}$ i $\vec{\mathbf{B}}$ (el cosθ de l'angle entre dos vectors és el producte escalar dividit pel producte de mòduls, ja que

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \left|\vec{\mathbf{A}}\right|\left|\vec{\mathbf{B}}\right| \cos\theta$$

Per tant, tal i com anàvem calculant:

$$\left|\vec{A}\, x\, \vec{B}\right|^2 = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)\left[1 - \frac{(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)^2}{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)}\right] = \left|\vec{\mathbf{A}}\right|^2\left|\vec{\mathbf{B}}\right|^2[1 - \cos^2(\theta)]$$

$$= \left|\vec{\mathbf{A}}\right|^2\left|\vec{\mathbf{B}}\right|^2\sin^2(\theta)$$

Prenent l'arrel quadrada obtenim el mòdul del producte vectorial com:

$$|\vec{A}\ x\ \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \cdot \sin(\theta)$$

També dit com:

$$|\vec{A}\ x\ \vec{B}| = A \cdot B \cdot \sin(\theta)$$

És a dir, el producte vectorial te com a magnitud el producte dels mòduls $A \cdot B$ pel sinus de l'angle que formen $\vec{A}$ amb $\vec{B}$

7. A partir d'aquesta darrera propietat geomètrica, podem veure que el major mòdul del producte vectorial $|\vec{A}\ x\ \vec{B}| = A \cdot B$ és quan els dos vectors formen 90° ja que sin 90°=1. En contrapartida, el menor mòdul, que serà zero, $|\vec{A}\ x\ \vec{B}| = 0$, és quan formen 0° o 180° . És a dir quan els dos vectors estan alineats en el mateix sentit (0°) o en sentit contrari (180°).

Altres propietats interessants del producte vectorial:

8. Calculem el doble producte vectorial entre 3 vectors:

$$\vec{A}x(\vec{B}\ x\ \vec{C})$$

$$\vec{A}x(\vec{B}\ x\ \vec{C}) = (A_1, A_2, A_3)\ x\ \left((B_2C_3 - B_3C_2), (B_3C_1 - B_1C_3), (B_1C_2 - B_2C_1)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - B_1C_3)\ , \\ A_3(B_2C_3 - B_3C_2) - A_1(B_1C_2 - B_2C_1)\ , \\ A_1(B_3C_1 - B_1C_3) - A_2(B_2C_3 - B_3C_2) \end{pmatrix} =$$

Calculem ara:

$$\vec{B}\,(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{C} = \vec{B}\,(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)\,\vec{C} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)C_1\ , \\ B_2(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)C_2\ , \\ B_3(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)C_3 \end{pmatrix} = \left|\begin{matrix} \text{cancel}\cdot\text{lant termes iguals} \\ \text{sumant i restant} \end{matrix}\right|$$

$$= \begin{pmatrix} B_1(A_2C_2 + A_3C_3) - (A_2B_2 + A_3B_3)C_1\ , \\ B_2(A_1C_1 + A_3C_3) - (A_1B_1 + A_3B_3)C_2\ , \\ B_3(A_1C_1 + A_2C_2) - (A_1B_1 + A_2B_2)C_3 \end{pmatrix} =$$

Que conté els mateixos termes que $\vec{A}x(\vec{B}\ x\ \vec{C})$**.** Per tant podem afirmar sense cap mena de dubtes que:

$$\vec{A}x(\vec{B}\ x\ \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{C} \qquad (8)$$

9. El producte vectorial no és associatiu:
Acabem de veure que:

$$\vec{A}x(\vec{B}\,x\,\vec{C}) = \vec{B}\,(\vec{A}\cdot\vec{C}\,) - (\vec{A}\cdot\vec{B}\,)\,\vec{C}$$

Però: $(\vec{A}x\vec{B})\,x\,\vec{C} = -\,\vec{C}\,x\,(\vec{A}x\vec{B}) = |segons\ la\ propietat\ anterior| = -\,\vec{A}\,(\vec{C}\cdot\vec{B}\,) + (\vec{C}\cdot\vec{A}\,)\,\vec{B}$
i ja no coincideix amb: $\vec{A}x(\vec{B}\,x\,\vec{C}) = \vec{B}\,(\vec{A}\cdot\vec{C}\,) - (\vec{A}\cdot\vec{B}\,)\,\vec{C}$
Per tant no satisfà la propietat associativa.

10. Usant la propietat **8.** Podem veure que:

$$\vec{A}x(\vec{B}\,x\,\vec{C}) + \vec{C}x(\vec{A}\,x\,\vec{B}) + \vec{B}x(\vec{C}\,x\,\vec{A}) = 0$$

És el que s'anomena *propietat cíclica*.

Deixem els detalls de la demostració pel lector, ja que només s'ha d'aplicar (**8**) reiteradament i veure que al final tots els termes es cancel·len.

Aplicació de la propietat 9. Quan dos dels vectors són nabla

Calculem:

$$\vec{\nabla}\,x\,(\vec{\nabla}\,x\,\vec{A})$$

On com sabem el vector nabla és: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$$\vec{\nabla}\,x\,(\vec{\nabla}\,x\,\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\,x\,(\vec{\nabla}\,x\,\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{A}$$

Que es llegeix:

$$\boldsymbol{\vec{\nabla}}\,x\,(\boldsymbol{\vec{\nabla}}\,x\,\boldsymbol{\vec{A}}) \quad = \quad \boldsymbol{\vec{\nabla}}(\boldsymbol{\vec{\nabla}}\cdot\boldsymbol{\vec{A}}\,) \quad - \quad (\boldsymbol{\vec{\nabla}}\cdot\boldsymbol{\vec{\nabla}})\,\boldsymbol{\vec{A}}$$

El rotacional del (rotacional de $\vec{\mathbf{A}}$) és igual a el gradient de la divergència de $\vec{\mathbf{A}}$ menys la divergència del gradient de $\vec{\mathbf{A}}$

Que és la divergència del gradient de $\vec{\mathbf{A}}$?

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{A} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\right)\vec{A} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{A}$$

L'operador: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

que conté les tres derivades parcials dobles i sumades, s'anomena laplaciana i s'escriu simbòlicament com:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\ ) = \vec{\nabla}^2(\ ) = \Delta(\ ) = laplaciana\ de\ (\ )$$

En el seu argument ( ) , hi podria anar tant un vector com $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{r})$ com un escalar, tal com és el potencial electrostàtic V($\vec{r}$). Recordem per exemple que combinant el teorema de gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ i la relació $\vec{E} = -\vec{\nabla}(V)$, sortia que $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})V = \vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ que és *l'equació de Poisson*.