Anàlisi Matemàtica 1 (AM1)
GEMiF

E4.1 Exercicis: Sèries i criteris de convergència

1. Solucions

(i) (Absolutely) convergent, since $|(\sin n\theta)/n^2| \leq 1/n^2$.

(iii) Divergent, since the first $2n$ terms have sum $\frac{1}{2} + \cdots + 1/n$. (Leibniz's Theorem does not apply since the terms are not decreasing in absolute value.)

(v) Divergent, since

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} \geq \frac{1}{n^{2/3}}.$$

(vii) Convergent, since

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2/(n+1)!}{n^2/n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = 0.$$

(ix) Divergent, since $1/(\log n) > 1/n$.

(xi) Convergent, since $1/(\log n)^n < \dfrac{1}{2^n}$ for $n > 9$.

(xiii) Divergent, since

$$\frac{n^2}{n^3+1} > \frac{1}{2n}$$

for large enough n.

(xvii) Convergent, since $1/n^2(\log n) < 1/n^2$ for $n > 2$.

(xix) Convergent, since

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{2^n n!/n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e}$$

and $2/e < 1$

(ii) Convergent, by Leibnitz's Theorem. The series is not absolutely convergent, since

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right).$$

(iv) Convergent, by Leibnitz's Theorem. (The function $f(x) = (\log x)/x$ is decreasing for $x \geq e$, since $f'(x) = (1-\log x)/x^2$.) The series is not absolutely convergent (see (viii)).

(vi) Divergent, since

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} \geq \frac{1}{2n^{2/3}}.$$

(viii) Divergent, ja que per a $n > 3$,

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$$

(xii) (Absolutely) convergent, by (xi).

(xiv) Divergent, since

$$\sin\frac{1}{n} > \frac{1}{2n},$$

for sufficiently large n.

(xviii) Convergent, since

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

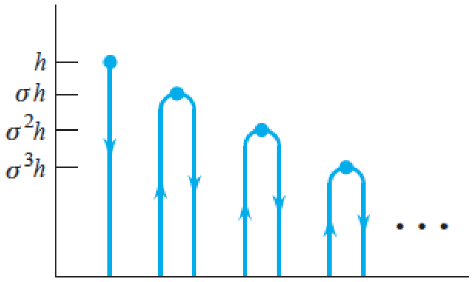
and $1/e < 1$

(xx) Divergent, since

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{3^n n!/n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e}$$

and $3/e > 1$

2. Una pilota caiguda des d'una alçada h toca el terra i rebota a una alçada proporcional a h, és a dir, a una alçada σh amb $\sigma < 1$. Aleshores torna a caure des de l'alçada σh, colpeja el terra i rebota fins a l'alçada $\sigma(\sigma h) = \sigma^2 h$, i així successivament. Troba la longitud total del camí de la pilota. Quina és aquesta longitud si al deixar-la caure des d'una alçada de 6 metres el segon rebot és de 3 metres?



Segons la informació que ens donen i atenent a la figura, veiem que la pilota farà una primera caiguda d'alçada h, i successives caigudes de recorregut $2\sigma h, 2\sigma^2 h, 2\sigma^3 h, \ldots$ Per tant la longitud del camí la podem escriure com:

$$L = h + 2\sigma h + 2\sigma^2 h + 2\sigma^3 h + \cdots = h + \sum_{i=1}^{\infty} 2\,\sigma^i h$$

Observem que el sumatori és similar al de la sèrie geomètrica, però l'índex comença a 1, no a 0. Això ens indica que el primer terme de la sèrie que hauria de correspondre al 0, el podem sumar i restar, per tant traiem factor comú $2h$ i estructurem el sumatori tal com:

$$L = h + \left(2h \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i\right) - (2h\sigma^0) = h + \left(2h \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i\right) - 2h$$

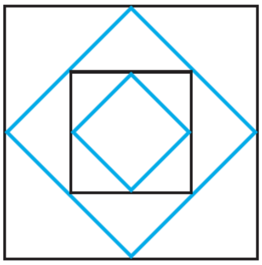
Aplicant la suma de la sèrie geomètrica, per $\sigma < 1$, tenim:

$$L = -h + \left(2h \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i\right) = -h + 2h\frac{1}{1-\sigma} = h\frac{1+\sigma}{1-\sigma}$$

Per al cas concret d'alçada inicial de 6 m, i rebot de 3 m, tindríem que $\sigma = 1/2$, per tant:

$$L = h\frac{1+\sigma}{1-\sigma} = 6\frac{3/2}{1/2} = 18$$

3. Comenceu amb un quadrat que tingui costats 4 unitats de longitud. Uneix al punts mitjans dels costats del quadrat per formar un segon quadrat dins el primer. A continuació, uneix els punts mitjans dels costats del segon quadrat per formar un tercer quadrat, i així successivament infinites vegades (veure figura). Troba la suma de les àrees dels quadrats.



Farem l'exercici per a un quadrat de qualsevol longitud de costat, diguem-li c. Llavors ens demanen l'àrea de la suma de tots els quadrats construïts com els de la figura, és a dir: $A_{\text{total}} = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$

Sabem $A_1 = c^2$. Per construcció (aplicant teorema de Pitàgoras) el costat del primer quadrat interior serà $c' = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{c\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{\sqrt{2}}$ i així successivament per la resta de quadrats, és a dir, $c'' = \frac{c'}{\sqrt{2}} = \frac{c}{(\sqrt{2})^2}$, etc.

Llavors, l'àrea que ens demanen la podem escriure com:

$$A_{total} = c^2 + \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{8} + \cdots = c^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

La sèrie geomètrica resultant te com a solució:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

Per tant l'àrea

$$A_{\text{total}} = 2c^2$$

Si el quadrat inicial tenia una longitud de costat $c = 4$, l'àrea total serà $A_{\text{total}} = 32$.