Problemes del Tema 2: Cinemàtica i Moviment Relatiu

1.- La velocitat d'una partícula que es mou en el pla XY és: $\vec{v} = (2\,t - 1)\,\vec{i} + 4\,t\,\vec{j}$, en unitats del sistema internacional. En l'instant t = 1s es troba en la posició (1,2). Es demana:

a) L'equació de la trajectòria.

b) L'acceleració normal, tangencial i total de la partícula.

c) El radi de curvatura de la trajectòria en funció del temps.

Resultats:

a) $2y = (2x-2)^2 - 2y\,(2x-2) + y^2$

$4x^2 + y^2 - 4xy - 8x - 2y + 4 = 0$, equació d'una quadrica.

b) $\vec{a}_{total} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ m/s^2

$a_{tang.}(t) = \dfrac{20t - 2}{\sqrt{20t^2 - 4t + 1}}$ m/s^2, vector unitari $\dfrac{\vec{v}}{v}$

$a_n(t) = \dfrac{4}{\sqrt{20t^2 - 4t + 1}}$ m/s^2

c) $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho(t) = \dfrac{\sqrt{(20t^2 - 4t + 1)^3}}{4}$ m

2.- El vector posició d'una partícula ve donat per: $\vec{r} = (R\cos\omega t\ , R\sin\omega t\ , 0)$. Es demana:

a) L'equació de la trajectòria.

b) L'acceleració de la partícula.

Resultats:

a) $x^2 + y^2 = R^2$, una circumferència.

b) $\vec{a} = -R\omega^2\,\vec{n}$; $\vec{n} = \cos\omega t \cdot \vec{i} + \sin\omega t \cdot \vec{j}$

3.- El vector posició d'una partícula ve donat per:

$$\vec{r} = \left(R\cos\left(\omega t - a\frac{t^2}{2}\right), R\sin\left(\omega t - a\frac{t^2}{2}\right), 0\right)$$

Es demana:

a) L'equació de la trajectòria.
b) El vector velocitat.
c) L'acceleració total i els components tangencial i normal.

Resultats:

a) $x^2+y^2=R^2$, equació d'una circumferència

b) $\vec{v} = R\left[-(\omega - at)\sin\left(\omega t - \frac{at^2}{2}\right); (\omega - at)\cos\left(\omega t - \frac{at^2}{2}\right); 0\right]$

$\vec{v} \perp \vec{r}$; $|\vec{v}| = R(\omega - at)$.

c) $\vec{a} = Ra \cdot \vec{t} - R(\omega - at)^2 \vec{n}$

$$\frac{dv}{dt} = Ra \; ; \; \frac{v^2}{R} = R(\omega - at)^2$$

4.- Un tren es mou amb velocitat V_A per una via recta. Per la mateixa via, movent-se en sentit contrari avança un altre tren amb velocitat V_B. Quan els maquinistes veuen l'altre tren movent-se en sentit contrari comencen a frenar, el primer amb acceleració de frenada a_A i el segon amb acceleració de frenada a_B. Es demana quina és la distància crítica entre els dos trens en el moment de començar a frenar, a partir de la qual, per distàncies més grans, els trens no xocarien. Doneu aquesta distància en funció de V_A, V_B, a_A i a_B.

Resultat:

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{v_A^2}{a_A} + \frac{v_B^2}{a_B}\right)$$

5.- En aigües tranquil·les, una persona pot remar en una barca assolint una velocitat de 5 Km/h. La persona vol travessar el riu en barca arribant a un punt situat a l'altra banda del riu enfront del punt de partida. El riu té un corrent de 3 Km/h. Es demana:

a) Quina direcció ha de donar a la barca per arribar al punt oposat al punt de partida.

b) La velocitat de la barca respecte a terra.

c) Quant de temps trigarà la barca a creuar un riu de 100 m d'amplada?

d) Si la barca es dirigeix riu amunt (en sentit contrari al corrent), durant 100 m i torna al punt de partida, quant de temps trigarà?

Resultats:

a) $\alpha = 36{,}9°$, en + respecte a la $\perp$ de la vorera

b) $v = 1.11$ m/s

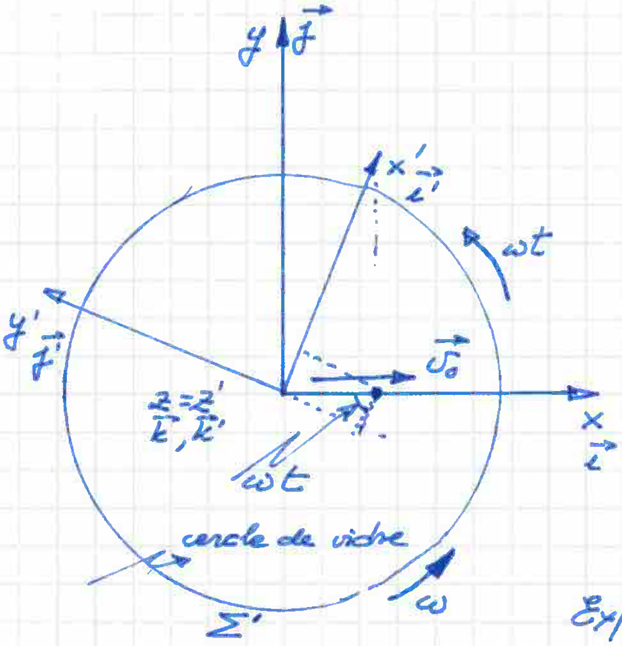
c) $t = 90$ s

d) $t_{total} = 223{,}65$ s

6.- Una partícula es mou en un sistema de referència inercial amb velocitat constant V_o., al llarg de l'eix x, de forma que la seva trajectòria queda definida per:

$$x = V_o t \, , \; y = 0, \; z = 0$$

Quina trajectòria veuria un observador situat en un sistema de referència que gira amb velocitat angular ω constant, en sentit antihorari, al voltant de l'eiz z?



$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Leftarrow \vec{r} \Rightarrow \begin{array}{l} x' = v_0 t \cos\omega t \\ y' = -v_0 \cdot t \sin\omega t \\ z = 0 \end{array}$$

$$\vec{r} = \cancel{\vec{R}_{0'}} + \vec{r}\,'$$

Expresat en Σ' : $\left.\begin{array}{l} x' = v_0 t \cos\omega t \\ y' = -v_0 t \sin\omega t \end{array}\right\}$ equació en paramètriques.

$$\Downarrow$$

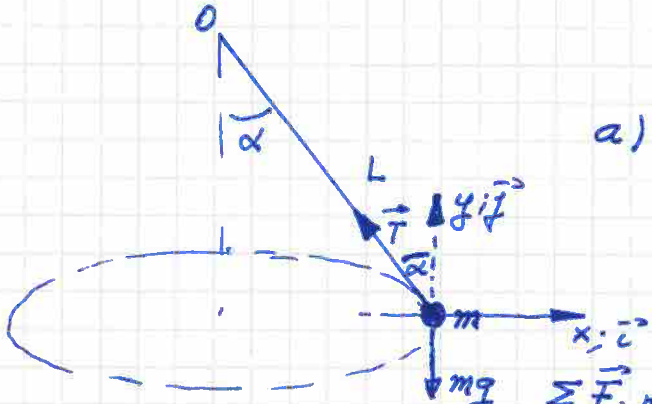
$$\begin{array}{rl} & x'^2 = v_0^2 t^2 \cos^2\omega t \\ + & y'^2 = v_0^2 t^2 \sin^2\omega t \\ \hline & x'^2 + y'^2 = v_0^2 t^2 \end{array}$$

equació d'una espiral. $\Leftarrow$ $x'^2 + y'^2 = v_0^2 t^2$

7.- Una massa puntual m està suspesa mitjançant un fil de longitud L i massa menyspreable, d'un punt fixe O, de forma que el sistema pot girar al voltant d'un eix vertical. Es demana:

a) La relació entre la velocitat angular (ω) del sistema i l'angle que forma el fil amb la vertical.

b) La tensió del fil.



a) Sistema de referència solidari a la m.

NO INERCIAL !

$$\sum \vec{F}_i \text{ reals} + \sum \vec{F}_i \text{ de inercia} = m\vec{a} = 0$$

$$\sum \vec{F} \text{ inercia} = -m\, a_{\text{centrípeta}} = m \cdot \underbrace{(-a_{\text{centrípeta}})}_{a_{\text{centrífuga}}} = m\omega^2 R\, \vec{i}$$

$$\sum \vec{F}_i \text{ reals} = (T_x \vec{i} + T_y \vec{j}) + -mg\vec{j}$$

Per tant:

$$T_x + m\omega^2 R = 0 \Rightarrow T_x = -m\omega^2 R$$

$$T_y - mg = 0 \Rightarrow T_y = mg \quad (*)$$

$$tg\,\alpha = \frac{\cancel{m}\omega^2 R}{\cancel{m}g} = \frac{\omega^2 \cdot L \sin\alpha}{g}$$

$$\sin\alpha = \frac{R}{L} \rightarrow L\sin\alpha = R$$

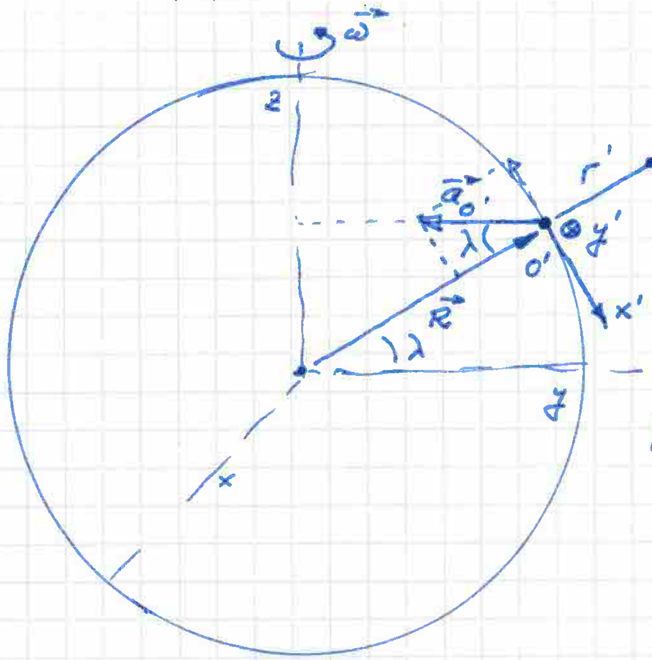
$$\frac{\cancel{\sin\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 L \cancel{\sin\alpha}}{g} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}}$$

b) T ?

$$T_y = T\cos\alpha \;; \text{ i de } (*) \Rightarrow T\cos\alpha = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

$$T = \frac{m\cancel{g}}{\cancel{g}/\omega^2 L} = \underline{\underline{m\omega^2 L}}$$

8.- Degut a la rotació de la Terra, la plomada no apunta cap al centre de la Terra directament, sinó que està una mica desviada (excepte als pols i a l'Equador). Doneu la desviació de la plomada en funció de la latitud del lloc.



$$\vec{a}_F = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \cancel{\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'} + \cancel{2\vec{\omega}\times\vec{v}'} + \cancel{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')}$$

$$|\vec{a}_{O'}| = \omega^2 R\cos\lambda$$

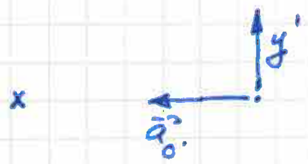
$$a_{O'})_{x'} = -\,\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda\,(\vec{i}')$$

$$a_{O'})_{y'} = 0$$

$$a_{O'})_{z'} = -\,\omega^2 R\cos\lambda\cos\lambda\,(\vec{k}')$$

Per tant

$$\vec{a}_F = \vec{a}' + (-\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda,\ 0,\ -\omega^2 R\cos^2\lambda)$$



$$\vec{a}_F = (0,\ 0,\ -g)$$

$$\vec{a}' = (\underbrace{+\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda}_{\text{comp. } x'},\ 0,\ \underbrace{-g+\omega^2 R\cos^2\lambda}_{\text{comp. } z'})\ (*)$$

$$|\vec{a}'| = \sqrt{(\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda)^2 + (\omega^2 R\cos^2\lambda)^2 + g^2 + \dots - 2\omega^2 R\cos^2\lambda\cdot g}$$

$$|\vec{a}'| = \sqrt{\omega^4 R^2\cos^2\lambda\sin^2\lambda + \omega^4 R^2\cos^2\lambda\cos^2\lambda + g^2 - 2\omega^2 R\cos^2\lambda\, g}$$

$$|\vec{a}'| = \sqrt{\omega^4 R^2\cos^2\lambda + g^2 - 2\omega^2 R\cos^2\lambda\, g}$$

mòdul acel. relativa

$$|\vec{a}'| = \sqrt{\omega^2 R\cos^2\lambda(\omega^2 R - 2g) + g^2}\quad (**)$$

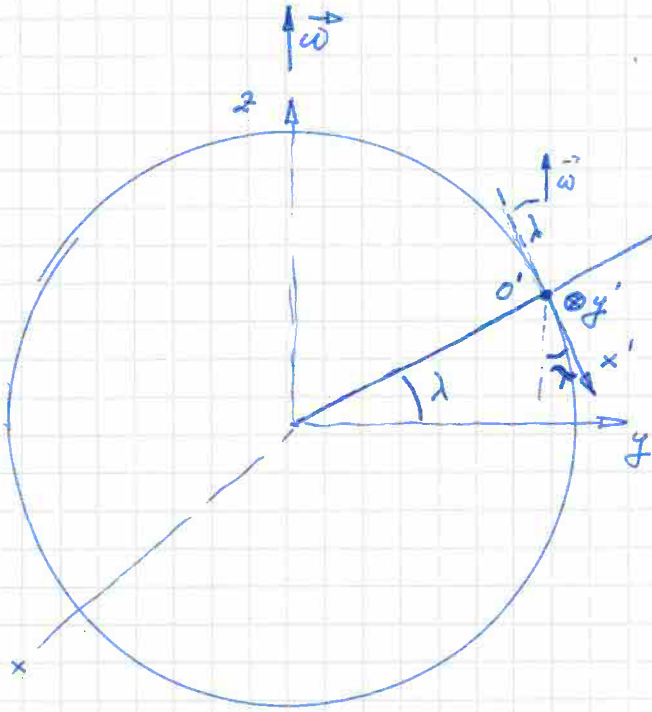
$$\cos\beta = \frac{(0,0,-g)\cdot(**)}{g\cdot\sqrt{\omega^2 R\cos^2\lambda(\omega^2 R-2g)+g^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{g^2 - g\,\omega^2 R\cos^2\lambda}{g\cdot\sqrt{\ }} \Rightarrow \beta = \arccos \text{ —}$$

9.- A l'Hemisferi Nord, un cotxe de massa 1000 Kg circula en línia recta per una carretera en direcció cap al Nord, en una zona de latitud 40°, amb una velocitat de 90 Km/h. Es demana:

a) La velocitat i acceleració absoluta del cotxe en aquest instant, considerant només el moviment de rotació de la Terra al voltant del seu eix polar.

b) La força de Coriolis en aquest instant.



a) $\vec{v}_F$?, $\vec{a}_F$?

$\vec{v}' = (-v', 0, 0) = (-90\ \text{Km/h}, 0, 0)$

$\vec{v}' = (-25\ \text{m/s}, 0, 0)$

$\vec{v}_F = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

el desplaçament r', pot ser diferencial al voltant de O' $(dr') \rightarrow r' \to 0 \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r}' = 0$

$\vec{v}_F = \vec{v}' + \vec{v}_{O'}$

Utilitzant el sistema Σ' per escriure aquests vectors:

$\vec{v}_F = (?, ?, ?)$; $\vec{v}' = (-v', 0, 0)$; $\vec{v}_{O'} = (0, \omega \cdot R\cos\lambda, 0)$

Per tant:
$$\boxed{\vec{v}_F = (-v', \omega R\cos\lambda, 0)_{\Sigma'}}$$

$$\vec{a}_F = \vec{a}' + \vec{a}_{F}(O') + \cancel{\vec{\alpha} \times \vec{r}'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \cancel{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}$$

$\vec{a}' = 0$; $\vec{a}_F(O') = (-\omega^2 R\cos\lambda \sin\lambda, 0, -\omega^2 R\cos\lambda\cos\lambda)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\omega} = (-\omega\cos\lambda, 0, \omega\sin\lambda) \\ \vec{v}' = (-v', 0, 0) \end{array}\right\} \quad \vec{\omega} \times \vec{v}' = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ -v' & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$\vec{\omega} \times \vec{v}' = (0, -v'\omega\sin\lambda, 0)$

$2(\vec{\omega} \times \vec{v}') = (0, -2v'\omega\sin\lambda, 0)$

Per tant:

$$\vec{a}_F = \vec{a}_F(o') + 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$\vec{a}_F = (-\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda,\ 0,\ -\omega^2 R\cos^2\lambda) + (0,\ -2v'\omega\sin\lambda,\ 0)$$

$$\boxed{\vec{a}_F = (\underbrace{-\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda}_{\vec{i}'},\ \underbrace{-2v'\omega\sin\lambda}_{\vec{j}'},\ \underbrace{-\omega^2 R\cos^2\lambda}_{\vec{k}'})}$$

aquesta és l'acceleració del cotxe respecte al sistema fixe, però expresa en coordenades projectades en el sistema mòbil.