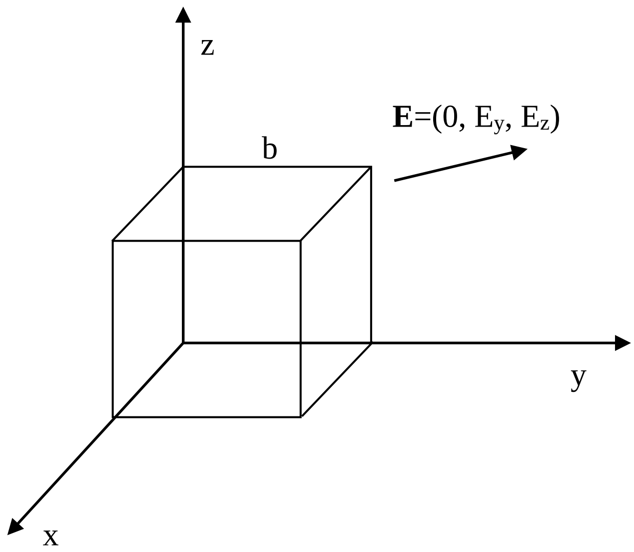
Física II. Problemes Sessió 2. Tema <u>Camp Elèctric</u> 2

1) Considera un superfície tancada, delimitada per sis cares quadrades planes de costat ‘b’ que formen un cub en que un dels vèrtex es troba a l’origen i les tres arestes que en surten estan dirigides segons els semieixos positius de coordenades. A tots els punts de l’espai hi actua un camp elèctric uniforme de components $(0, E_y, E_z)$.



a) Dedueix una expressió del flux a través de cadascuna de les dues cares paral·leles al pla x-y. Per això, dona primer una expressió del vector de superfície que correspon a cadascuna d’aquestes cares.

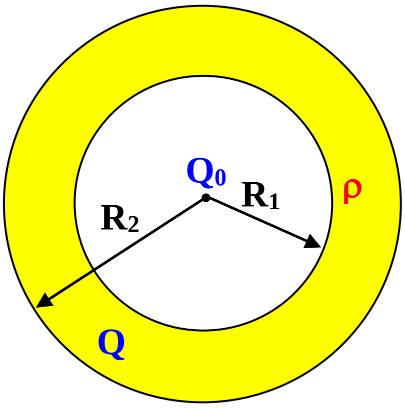
b) Dedueix una expressió del flux a través de cadascuna de les cares paral·leles al pla x-z.

c) Dedueix una expressió del flux a través de cadascuna de les cares paral·leles al pla y-z.

d) Considera ara la superfície tancada en forma de cub formada per la unió de les sis cares. A partir dels resultats anteriors, dedueix una expressió del flux total a través d’aquesta superfície tancada. Recorda que en superfícies tancades, el flux sortint té signe positiu. El resultat està d’acord amb el Teorema de Gauss?

e) Considera ara que, a més del camp **E**, es situen tres càrregues en diferents punts de l’espai: i) una de q_1=3 nC a la posició (b/2,b/3,b/4), ii) una de q_2=-1 nC a la posició (b/3,b/4,b/2) i iii) una de q_3=10 nC a la posició (2b, b/3, b/5). Calcula (numèricament) ara el flux total que surt de la superfície.

2. Tenim una distribució contínua de càrregues consistent en una corona esfèrica de radi intern R_1 i extern R_2. Te una densitat total de càrrega ρ uniformement dins del seu volum.
Tenim a més una càrrega puntual de valor Q_0 en el centre.



a) Calcula una expressió de la càrrega total de la corona esfèrica a partir de ρ i d'altres paràmetres si convé.

b) Calcula expressions per al camp elèctric en direcció radial a les 3 diferents regions de l'espai: I ($r < R_1$) ; II ($R_1 < r < R_2$) i III ($R_2 < r$). Comprova la continuïtat del camp elèctric a la superfície de l'esfera interna. Fer una representació gràfica de E(r). Considera el cas:

$\rho>0$, $R_1 = 1$ m i $R_2 = 2\cdot R_1$, $Q_0=2\cdot\rho\cdot 4/3\pi R_1^3$

c) A partir de l'expressió del camp calcula les expressions del potencial elèctric a les 3 regions. Agafa origen de potencial a l'infinit. Fes una representació gràfica del potencial.

d) Calcula la diferència de potencial ΔV entre la superfície de l'esfera interna i l'esfera externa. Si dividim Q per aquesta diferència de potencial ΔV obtenim el que s'anomena *capacitat* C=Q/ΔV). Comprova que l'expressió de la capacitat és independent de la càrrega Q. Calcula-la per $R_1 = 1$ m i $R_2 = 2\cdot R_1$, $Q_0=2\cdot\rho\cdot 4/3\pi R_1^3$

SOLUCIÓ 2

a) Tenint en compte que la càrrega +Q es distribueix uniformement pel volum de l'esfera interior de radi R_1, i que la càrrega -Q es distribueix uniformement per la superfície de l'esfera exterior de radi R_2.

$$\rho_1 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} \quad ; \quad -\sigma_2 = -\frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

b) • Camp de la regió I ($r<R_1$). Col·loquem una superfície de Gauss com la d'una esfera concèntrica de radi $r<R_1$. Per simetria esfèrica el camp és perpendicular a la superfície d'aquesta esfera i el mòdul només depèn del radi r. Per tant els elements de flux **E·dS** són només productes de mòdul: E(r)·dS amb E(r) constant al llarg de tota l'esfera de Gauss.

Així

$$\Phi_r = \oint_r E^I(r)\cdot dS = E^I(r)\cdot\oint_r dS = E^I(r)\cdot 4\pi r^2$$

Igualant aquest flux al que diu el teorema de Gauss:

$$\Phi_r = E^I(r)\cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_e q_{int} = 4\pi k_e \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_1$$

$$\Longrightarrow \quad E^I(r) = \frac{4\pi k_e \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_1}{4\pi r^2} = k_e \frac{4}{3}\pi \cdot \rho_1 \cdot r = k_e \frac{Q}{R_1^3} \cdot r$$

Concretament a la superfície de l'esfera interna $r=R_1$:

$$E^I(R_1) = k_e \frac{4}{3}\pi \cdot \rho_1 \cdot R_1 = k_e \frac{Q}{R_1^2}$$

• Camp de la regió II ($R_1<r<R_2$). Ara la superfície de Gauss és una esfera concèntrica de radi $R_1<r<R_2$. Tenim les mateixes simetries esfèriques, per tant:

$$\Phi_r = \oint_r E^{II}(r)\cdot dS = E^{II}(r)\cdot \oint_r dS = E^{II}(r)\cdot 4\pi r^2$$

Igualant aquest flux al que diu el teorema de Gauss:

$$\Phi_r = E^{II}(r)\cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_e q_{int} = 4\pi k_e Q$$

$$\Longrightarrow \quad E^{II}(r) = \frac{4\pi k_e Q}{4\pi r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}$$

El mateix que si tota la càrrega Q estigués concentrada en el centre r=0 (una càrrega puntual).

Ara amb les expressions de les regions I i II ja es veu que el camp és continu per $r=R_1$: $E^I(R_1)=E^{II}(R_1)$

Concretament a la superfície de l'esfera externa $r=R_2$ (de gruix negligible):

$$E^{II}(R_2) = k_e \frac{Q}{R_2^2}$$

• Camp de la regió III ($R_2<r$). Ara la superfície de Gauss és una esfera concèntrica de radi $R_2<r$. Tenim les mateixes simetries esfèriques, per tant:

$$\Phi_r = \oint_r E^{III}(r)\cdot dS = E^{III}(r)\cdot \oint_r dS = E^{III}(r)\cdot 4\pi r^2$$

Igualant aquest flux al que diu el teorema de Gauss:

$$\Phi_r = E^{III}(r)\cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_e q_{int} = 4\pi k_e (Q-Q) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad E^{III}(r) = 0$$

El camp és nul a fora .

Ara el camp ja no és continu a $r= R_2$:

immediatament a dins val $E^{II}(R_2) = k_e \frac{Q}{R_2^2}$ i a fora val $E^{III}(r)=0$.

No hi ha d'haver continuïtat quan hi hagi distribucions superficials σ (també passa en distribucions lineals λ o en distribucions puntuals, com càrregues puntuals). En canvi sempre hi ha d'haver continuïtat del camp quan hi ha distribucions volúmiques ρ.

c) Tenim l'origen de potencial a l' ∞ $V(r\rightarrow\infty)=0$

• Com que ∞ és un punt de la regió III començarem calculant el potencial als punts d'aquesta regió III ($R_2<r$):

$$V(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^{r} E^{III}(r')\cdot dr' = 0 - \int_{\infty}^{r} 0 \cdot dr' = 0$$

El potencial continua sent zero a tota la regió III i concretament $V(R_2)=0$.

• Calculem el potencial a la regió II ($R_1<r<R_2$), agafarem com a referència el potencial a R_2.

$$V(r) = V(R_2) - \int_{R_2}^{r} E^{II}(r')\cdot dr' = 0 - \int_{R_2}^{r} k_e \frac{Q}{r'^2}\cdot dr' = -k_e Q \int_{R_2}^{r} \frac{dr'}{r'^2} = k_e Q\left[\frac{1}{r'}\right]_{R_2}^{r} = k_e Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Concretament a $r=R_1$

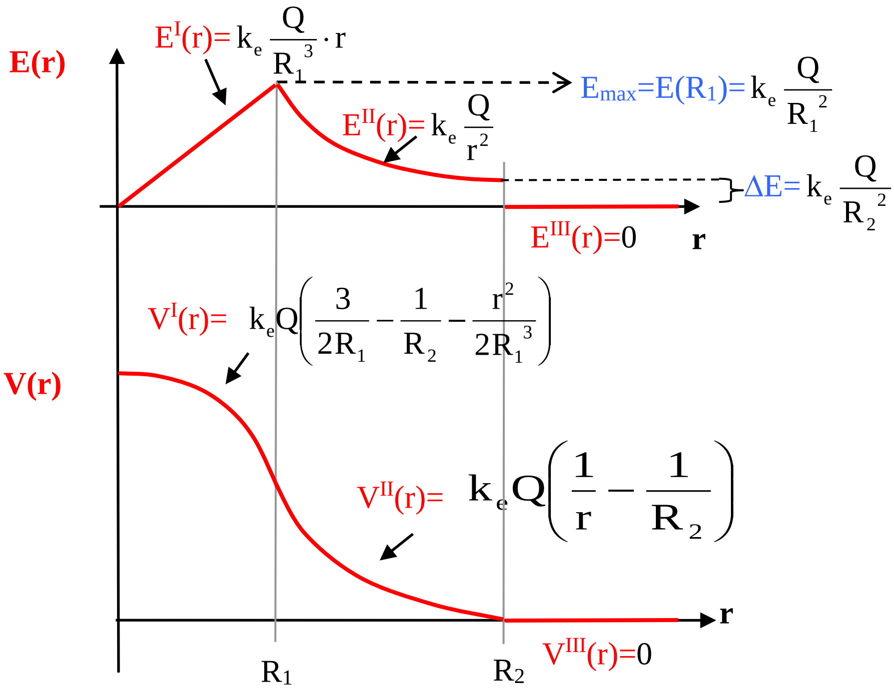
$$V(R_1) = k_e Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

• Calculem el potencial a la regió I ($r<R_1$), agafarem com a referència el potencial a R_1 que acabem de calcular: $V(R_1)$

$$V(r) = V(R_1) - \int_{R_1}^{r} E^{I}(r')\cdot dr' = V(R_1) - \int_{R_1}^{r} k_e \frac{Q}{R_1^3}\cdot r'\cdot dr' = V(R_1) - k_e \frac{Q}{R_1^3}\cdot \int_{R_1}^{r} r'\cdot dr' =$$

$$= V(R_1) - k_e \frac{Q}{R_1^3}\cdot\left[\frac{r'^2}{2}\right]_{R_1}^{r} = k_e Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - k_e \frac{Q}{R_1^3}\cdot\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R_1^2}{2}\right) = k_e Q\left(\frac{3}{2R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{r^2}{2R_1^3}\right)$$

Representació gràfica del camp i el potencial



d) Capacitat C?

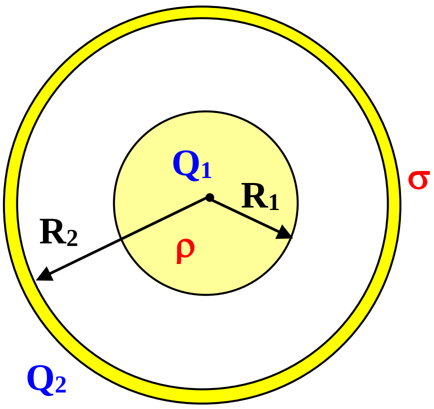
$$C\equiv\frac{Q}{V(R_1)-V(R_2)}=\frac{Q}{k_eQ\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}=\frac{1}{k_e\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

Només depèn de les característiques geomètriques del sistema (i de k_e que és ct.)

e) Calcula la capacitat per R_1= 10 m i R_2 = 10,5 m

$$C=\frac{1}{k_e\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}=\frac{1}{8{,}9875\times10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}\left(\frac{1}{10\text{ m}}-\frac{1}{10{,}5\text{ m}}\right)}=2{,}34\times10^{-8}\,\frac{C}{\frac{Nm}{C}}=23{,}4\text{ nF}$$

3. Tenim una distribució contínua de càrregues consistent en una esfera de radi R_1 que amb una densitat volúmica de càrrega ρ distribuïda uniformement dins del seu volum.



Aquesta esfera està rodejada concèntricament per una altra superfície esfèrica de radi $R_2>R_1$ (considerem-la una corona esfèrica de gruix negligible) que té una densitat superficial de càrrega σ distribuïda uniformement per la seva àrea.

a) Calcula expressions per a la Càrrega total Q_1 de l'esfera central a partir de ρ i d'altres paràmetres si convé, i de la càrrega total Q_2 de la superfície esfèrica externa a partir de σ i dels paràmetres que convinguin.

b) Calcula expressions per al camp elèctric en direcció radial a les 3 diferents regions de l'espai: I ($r < R_1$) ; II ($R_1 < r < R_2$) i III ($R_2 < r$). Comprova la continuïtat del camp elèctric a la superfície de l'esfera interna. Fer una representació gràfica de E(r). Considera el cas:

$\rho > 0$, $R_1 = 1$ m i $R_2 = 2 \cdot R_1$, $Q_2 = -2 \cdot Q_1$

c) A partir de l'expressió del camp calcula les expressions del potencial elèctric a les 3 regions. Agafa origen de potencial a l'infinit. Fes una representació gràfica del potencial.

d) Calcula la diferència de potencial ΔV entre la superfície de l'esfera interna i l'esfera externa. Considera el cas: $\rho > 0$, $R_1 = 1$ m i $R_2 = 2 \cdot R_1$, $Q_2 = -2 \cdot Q_1$

SOLUCIÓ 3

a) Tenint en compte que la càrrega +Q es distribueix uniformement pel volum de l'esfera interior de radi R_1, i que la càrrega -Q es distribueix uniformement per la superfície de l'esfera exterior de radi R_2.

$$\rho_1 = \frac{Q}{{}^4/_3 \pi R_1{}^3}\,; \quad -\sigma_2 = -\frac{Q}{4\pi R_2{}^2}$$

b) • Camp de la regió I ($r<R_1$). Col·loquem una superfície de Gauss com la d'una esfera concèntrica de radi $r<R_1$. Per simetria esfèrica el camp és perpendicular a la superfície d'aquesta esfera i el mòdul només depèn del radi r. Per tant els elements de flux **E·dS** són només productes de mòdul: E(r)·dS amb E(r) constant al llarg de tota l'esfera de Gauss.

Així

$$\Phi_r = \oint_r E^I(r) \cdot dS = E^I(r) \cdot \oint_r dS = E^I(r) \cdot 4\pi r^2$$

Igualant aquest flux al que diu el teorema de Gauss:

$$\Phi_r = E^I(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_e q e \frac{4^3}{3}{}_{1int}$$

$$==> \; E^I(r) = \frac{4\pi k_e \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_1}{4\pi r^2} = k_e \frac{4}{3} \pi \cdot \rho_1 \cdot r = k_e \frac{Q}{R_1{}^3} \cdot r$$

Concretament a la superfície de l'esfera interna $r=R_1$:

$$E^I(R_1) = k_e \frac{4}{3}\pi \cdot \rho_1 \cdot R_1 = k_e \frac{Q}{{R_1}^2}$$

• Camp de la regió II ($R_1<r<R_2$). Ara la superfície de Gauss és una esfera concèntrica de radi $R_1<r<R_2$. Tenim les mateixes simetries esfèriques, per tant:

$$\Phi_r = \oint_r E^{II}(r) \cdot dS = E^{II}(r) \cdot \oint_r dS = E^{II}(r) \cdot 4\pi r^2$$

Igualant aquest flux al que diu el teorema de Gauss:

$$\Phi_r = E^{II}(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_e q e_{int}$$

$$==> \ E^{II}(r) = \frac{4\pi k_e Q}{4\pi r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}$$

El mateix que si tota la càrrega Q estigués concentrada en el centre r=0 (una càrrega puntual).
Ara amb les expressions de les regions I i II ja es veu que el camp és continu per $r=R_1$:
$E^I(R_1)=E^{II}(R_1)$

Concretament a la superfície de l'esfera externa $r=R_2$ (de gruix negligible):

$$E^{II}(R_2) = k_e \frac{Q}{{R_2}^2}$$

• Camp de la regió III ($R_2<r$). Ara la superfície de Gauss és una esfera concèntrica de radi $R_2<r$. Tenim les mateixes simetries esfèriques, per tant:

$$\Phi_r = \oint_r E^{III}(r) \cdot dS = E^{III}(r) \cdot \oint_r dS = E^{III}(r) \cdot 4\pi r^2$$

Igualant aquest flux al que diu el teorema de Gauss:

$$\Phi_r = E^{III}(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_e q e_{int}$$

$$==> \ E^{III}(r) = 0$$

El camp és nul a fora .

Ara el camp ja no és continu a $r= R_2$:

immediatament a dins val $E^{II}(R_2) = k_e \frac{Q}{{R_2}^2}$ i a fora val E^{III} (r) =0.

No hi ha d'haver continuïtat quan hi hagi distribucions superficials σ (també passa en distribucions lineals λ o en distribucions puntuals, com càrregues puntuals). En canvi sempre hi ha d'haver continuïtat del camp quan hi ha distribucions volúmiques ρ.

c) Tenim l'origen de potencial a l' ∞ $V(r\rightarrow\infty)=0$

• Com que ∞ és un punt de la regió III començarem calculant el potencial als punts d'aquesta regió III (R_2<r):

$$V(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^{r} E^{III}(r') \cdot dr' = 0 - \int_{\infty}^{r} 0 \cdot dr' = 0$$

El potencial continua sent zero a tota la regió III i concretament $V(R_2)=0$.

• Calculem el potencial a la regió II ($R_1<r<R_2$), agafarem com a referència el potencial a R_2.

$$V(r) = V(R_2) - \int_{R_2}^{r} E^{II}(r') \cdot dr' = 0 - \int_{R_2}^{r} k_e \frac{Q}{r'^2} \cdot dr' = -k_e Q \int_{R_2}^{r} \frac{dr'}{r'^2} = k_e Q \left[\frac{1}{r'}\right]_{R_2}^{r}$$

$$= k_e Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Concretament a $r=R_1$

$$V(R_1) = k_e Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

• Calculem el potencial a la regió I ($r<R_1$), agafarem com a referència el potencial a R_1 que acabem de calcular: $V(R_1)$

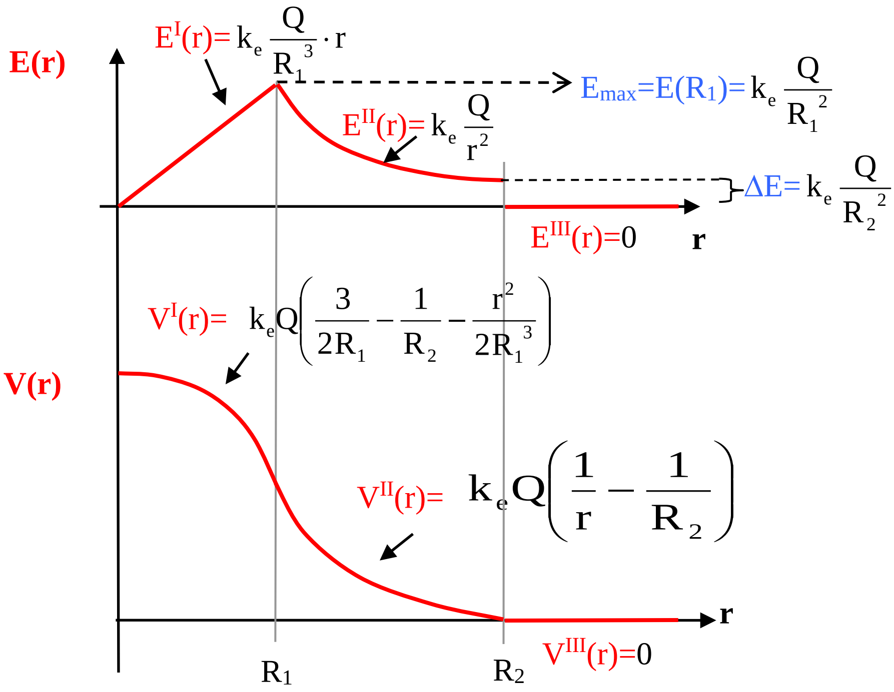
$$V(r) = V(R_1) - \int_{R_1}^{r} E^{I}(r') \cdot dr' = V(R_1) - \int_{R_1}^{r} k_e \frac{Q}{{R_1}^3} \cdot r' \cdot dr'$$

$$= V(R_1) - k_e \frac{Q}{{R_1}^3} \cdot \int_{R_1}^{r} r' \cdot dr' =$$

$$= V(R_1) - k_e \frac{Q}{{R_1}^3} \cdot \left[\frac{r'^2}{2}\right]_{R_1}^{r} = k_e Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - k_e \frac{Q}{{R_1}^3} \cdot \left(\frac{r^2}{2} - \frac{{R_1}^2}{2}\right)$$

$$= k_e Q \left(\frac{3}{2R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{r^2}{2{R_1}^3}\right)$$

Representació gràfica del camp i el potencial



d) Diferència de potencial entre R_1 i R_2?

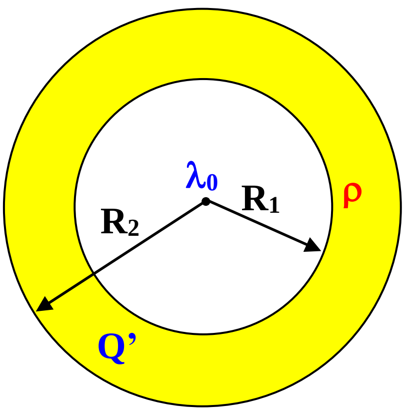
Només depèn de les característiques geomètriques del sistema (i de k_e que és ct.)

e) Calcula la capacitat per R_1= 10 m i R_2 = 10,5 m

$$C=\frac{1}{k_e\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}=\frac{1}{8{,}9875\text{x}10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\left(\frac{1}{10\text{ m}}-\frac{1}{10{,}5\text{ m}}\right)}=2{,}34\text{x}10^{-8}\ \frac{\text{C}}{\frac{\text{Nm}}{\text{C}}}=23{,}4\text{ nF}$$

4. Tenim una distribució contínua de càrregues consistent en una corona cilíndrica de radi intern R_1 i extern R_2. Te una densitat total de càrrega ρ uniformement dins del seu volum.

Tenim a més, a l'eix un fil rectilini carregat a l'eix de densitat lineal de càrrega λ_0 uniforme.



a) Calcula una expressió de la càrrega Q' de la corona cilíndrica per unitat de llargada a partir de ρ i d'altres paràmetres si convé.

b) Calcula expressions per al camp elèctric en direcció radial a les 3 diferents regions de l'espai: I ($r < R_1$) ; II ($R_1 < r < R_2$) i III ($R_2 < r$). Comprova la continuïtat del camp elèctric a la superfícies del cilindre interna. Fer una representació gràfica de E(r). Considera el cas:

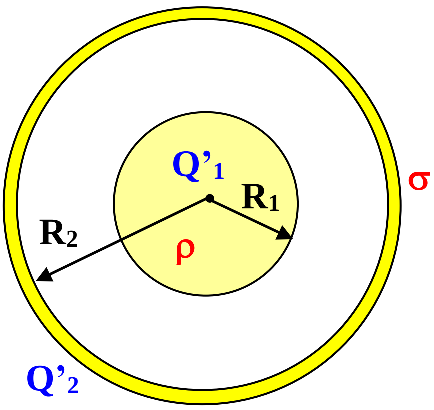
$\rho>0$, $R_1 = 1$ cm i $R_2 = 3/2 \cdot R_1$, $\lambda_0 = \rho \cdot \pi R_1^2$

c) A partir de l'expressió del camp calcula les expressions del potencial elèctric a les 3 regions. Agafa origen de potencial a la superfície externa de la corona ($R=R_2$). Fes una representació gràfica del potencial.

d) Calcula la diferència de potencial ΔV entre les dues superfícies de la corona cilíndrica. Calcula-la per $\rho>0$, $R_1 = 1$ cm i $R_2 = 3/2 \cdot R_1$, $\lambda_0 = \rho \cdot \pi R_1^2$

5. Tenim una distribució contínua de càrregues consistent en una barra cilíndrica de radi R_1 amb una densitat volúmica de càrrega ρ distribuïda uniformement dins del seu volum.

Aquesta barra està rodejada concèntricament per una altra superfície cilíndrica de radi $R_2 > R_1$ (sense gruix) que té una densitat superficial de càrrega σ distribuïda uniformement per la seva àrea.



a) Calcula expressions per a les càrregues unitat de llargada Q'_1 i Q'_2 de la barra central i de la superfície cilíndrica externa respectivament partir de ρ i de σ i dels paràmetres que convinguin.

b) Calcula expressions per al camp elèctric en direcció radial a les 3 diferents regions de l'espai: I ($r < R_1$) ; II ($R_1 < r < R_2$) i III ($R_2 < r$). Comprova la continuïtat del camp elèctric a la superfície de l'esfera interna. Fer una representació gràfica de E(r). Considera el cas:

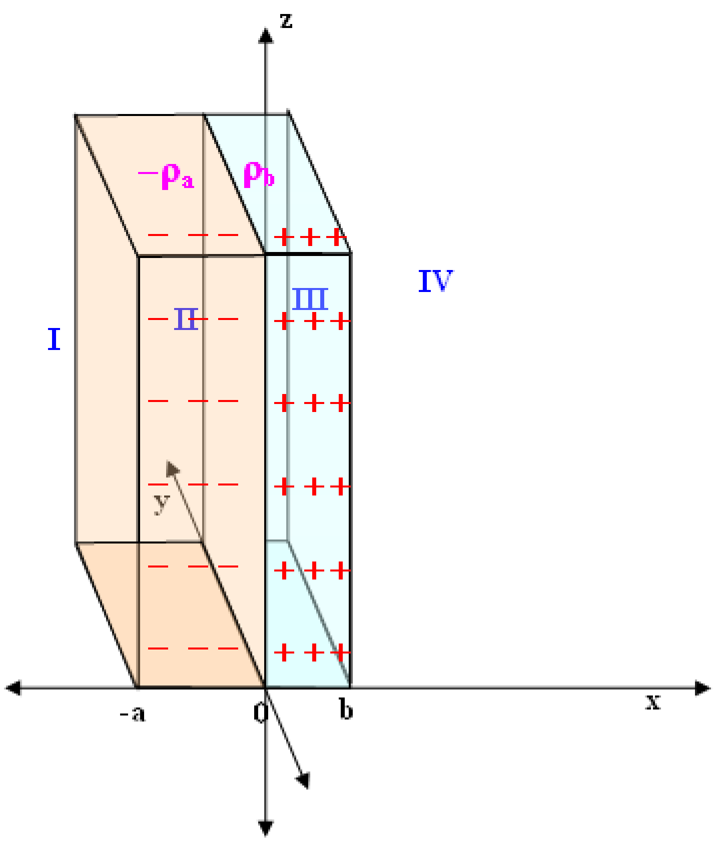
$\rho>0$, $R_1 = 1$ m i $R_2 = 2 \cdot R_1$, $Q_2 = -2 \cdot Q_1$

c) A partir de l'expressió del camp calcula les expressions del potencial elèctric a les 3 regions. Agafa origen de potencial al centre. Fes una representació gràfica del potencial.

d) Calcula la diferència de potencial ΔV entre la superfície de l'esfera interna i l'esfera externa. Considera el cas: $\rho>0$, $R_1 = 1$ m i $R_2 = 2 \cdot R_1$, $Q_2 = -2 \cdot Q_1$

6. Tenim un sistema de distribució contínua volúmica de càrregues consistent en una banda plana de gruix 'a' carregada amb densitat uniforme negativa $-\rho_a$ enganxada cara contra cara amb una altra banda plana de gruix 'b' i amb densitat positiva ρ_b també uniforme.
Les bandes s'estenen sobre el pla y-z tal com es veu a la figura i són molt més extenses que gruixudes (per a nosaltres és com si les consideréssim d'extensió infinita en el pla y-z). Considerem, per tant, que l'eix x és perpendicular a les bandes i posem l'origen x=0, just al punt d'unió de la banda 1 amb la banda 2.

DADA: es dona la circumstància que la càrrega per unitat d'àrea de la banda 1 és la mateixa que la de la banda 2 canviada de signe, és a dir : $\rho_a \cdot a = \rho_b \cdot b$



a) Agafant l'expressió del camp que genera una banda carregada uniformement, i per superposició de les dues bandes, calcula el camp elèctric a les regions de fora de les bandes , I (x< -a) i IV (x>b) i demostra que valen zero. Per arguments de simetria demostra que les components y i z del camp són nul·les a totes les regions.

b) A partir del camp **E**=0 de la regió 1, i per mitjà del teorema de Gauss, calcula una expressió per a la dependència en x de la component x del camp $E_x(x)$ a la regió II (-a<x<0).

c) calcula el camp a la unió entre bandes x=0.

d) per mitjà del teorema de Gauss calcula la dependència en x del camp a la regió III (0<x<b). Amb aquesta expressió calcula el camp a x=b i comprova que dóna 0 tal i com s'havia vist per la regió IV a l'apartat **a)**. Fes una representació gràfica de E(x) per a totes les regions.

e) Considerem l'origen de potencial V=0 a la regió I. A partir d'aquí i integrant les expressions del camp, calcula les expressions del potencial V en funció de x per a les restants regions. Fes una representació gràfica del potencial V(x) per a totes les regions.

f) Pel cas $\rho_a = 100\ C/m^3$, $\rho_b = 300\ C/m^3$, a= 0,3 μm i b=0,1 μm, calcula el valor del camp màxim E(0) i del potencial de barrera, V(x=b).

SOLUCIÓ 6

a) Tenint en compte el camp uniforme que una banda plana infinita de gruix d (verticalment situada) i densitat uniforme ρ fa a les dues meitats externes, esquerra i dreta de l'espai: $E_x^{esquerra} = -\dfrac{d \cdot \rho}{2\varepsilon_0}$; $E_x^{dreta} = \dfrac{d \cdot \rho}{2\varepsilon_0}$ i considerant la distribució del problema com a superposició de dues bandes planes infinites de gruixos a i b i densitats $-\rho_a$ i ρ_b respectivament, podem trobar els camps a les regions I i IV ja que són externes a ambdues bandes.

$$E_x^{I}(x<-a) = E_{xa}^{esquerra} + E_{xb}^{esquerra} = \frac{a \cdot \rho_a}{2\varepsilon_0} + \frac{-b \cdot \rho_b}{2\varepsilon_0} = 0$$

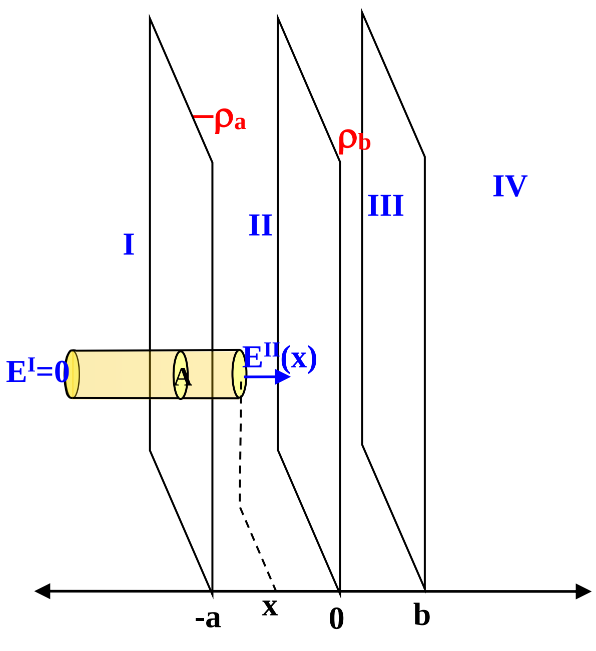
$$E_x^{IV}(b<x) = E_{xa}^{dreta} + E_{xb}^{dreta} = \frac{-a \cdot \rho_a}{2\varepsilon_0} + \frac{b \cdot \rho_b}{2\varepsilon_0} = 0$$

Hem aplicat la condició d'igualtat de densitat de càrrega superficial: $\rho_a \cdot a = \rho_b \cdot b$ per a veure que els camps són nuls a aquestes dues regions.

Les components y i z són nul·les a tots els punts ja que el camp només pot tenir direcció x. Si el camp tingués alguna alineació lateral dirigida cap a una direcció del pla y,z en algun punt seria incoherent ja que perquè hauria de tenir aquesta i no una altra, si la distribució que veu és la mateixa cap a tots els costats (és infinita).

Per altra banda pel fet de ser infinit el camp en direcció x només pot dependre de la distància x a les bandes però no de la posició y o z, ja que són totes iguals per ser la distribució plana i infinita.

b) • Camp de la regió II (-a<x<0). Col·loquem una superfície de Gauss com la d'un cilindre de base A com el de la figura. El flux a través de l'àrea lateral és nul. Només queden les bases.



$\Phi_S = A \cdot E_x^{II}(x) - A \cdot E_x^{I}$ =|com que $E^I=0$|
$= A \cdot E_x^{II}(x)$

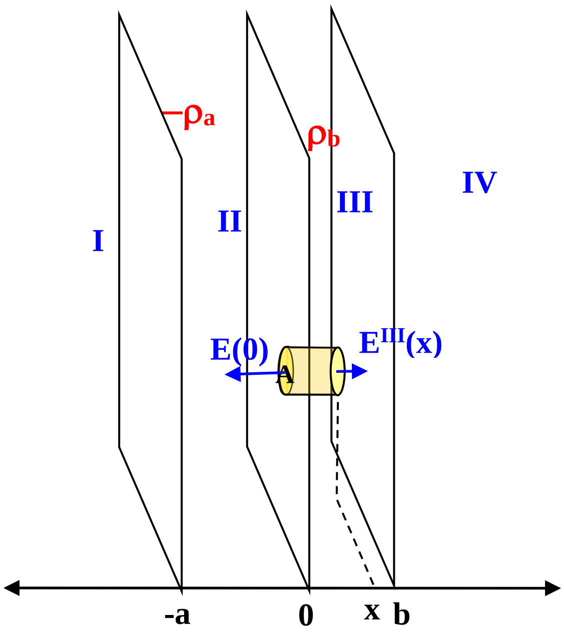
Igualant aquest flux al que diu el teorema de Gauss:

$\Phi_S = A \cdot E_x^{II}(x) = 4\pi \cdot k_e \cdot Q_{int}$ =
$= 4\pi \cdot k_e \cdot (-\rho_a) \cdot A \cdot (x-(-a))$=
$-4\pi \cdot k_e \cdot \rho_a \cdot A \cdot (x+a)$

==> $E_x^{II}(x) = -\dfrac{\rho_a(x+a)}{\varepsilon_0}$

Concretament a la unió de les dues bandes: x=0 $\qquad E_x(0) = -\dfrac{\rho_a a}{\varepsilon_0} = -\dfrac{\rho_b b}{\varepsilon_0}$

• Camp de la regió III (0<x<b). Col·loquem una superfície de Gauss com la d'un cilindre de base A com el de la figura. La seva base esquerra està justament a x=0, la dreta a x dins la regió III. Com abans el flux a través de l'àrea lateral és nul. Només queden les bases.



Φ_S= - A·$E_x(0)$ + A·$E_x^{III}(x)$

Igualant aquest flux al que diu el teorema de Gauss:

Φ_S= A·$E_x(0)$ + A·$E_x^{III}(x)$= 4π·k_e·Q_{int} =
=4π·k_e·ρ_b·A·x
==>

$$E_x^{III}(x) = \frac{\rho_b x}{\varepsilon_0} + E_x(0) = \frac{\rho_b x}{\varepsilon_0} - \frac{\rho_b b}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_b(x-b)}{\varepsilon_0}$$

Concretament al punt x=b (final de la banda b i inici de la regió IV)

$$E_x^{III}(b) = \frac{\rho_b(b-b)}{\varepsilon_0} = 0$$

Indicant això la continuïtat del camp E_x (a la regió IV el camp ja havíem vist que era nul).

c) • Agafem origen de potencial a la regió I : $\qquad$ V(x<-a)=0

• Calculem el potencial a la regió II (-a<x<0):

$$V(x) = V(-a) - \int_{-a}^{x} E^{II}(x')\cdot dx' = 0 - \int_{-a}^{x} -\frac{\rho_a(x'+a)}{\varepsilon_0}\cdot dx' = \frac{\rho_a}{\varepsilon_0}\int_{-a}^{x}(x'+a)\cdot dx' = \frac{\rho_a}{\varepsilon_0}\left[\frac{x'^2}{2} + a\cdot x'\right]_{-a}^{x} =$$

$$= \frac{\rho_a}{\varepsilon_0}\left(\frac{x^2}{2} + a\cdot x - \frac{a^2}{2} + a^2\right) = \frac{\rho_a}{\varepsilon_0}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2ax}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{\rho_a}{2\varepsilon_0}(x+a)^2$$

Concretament a x=0

$$V(0) = \frac{\rho_a}{2\varepsilon_0}(0+a)^2 = \frac{\rho_a a^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho_b b\cdot a}{2\varepsilon_0}$$

• Calculem el potencial a la regió III (0<x<b):

$$V(x) = V(0) - \int_0^x E^{III}(x')\cdot dx' = V(0) - \int_0^x \frac{\rho_b (x'-b)}{\varepsilon_0}\cdot dx' = V(0) - \frac{\rho_b}{\varepsilon_0}\int_0^x (x'-b)\cdot dx' =$$

$$= V(0) - \frac{\rho_b}{\varepsilon_0}\left[\frac{x'^2}{2} - b\cdot x'\right]_0^x = V(0) - \frac{\rho_b}{\varepsilon_0}\left(\frac{x^2}{2} - b\cdot x - 0\right) = \frac{\rho_b b\cdot a}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho_b}{2\varepsilon_0}\left(x^2 - 2b\cdot x\right) =$$

$$= \frac{\rho_b}{2\varepsilon_0}(b\cdot a - x^2 + 2b\cdot x)$$

Concretament a x=b (final de la regió III)

$$V(b) = \frac{\rho_b}{2\varepsilon_0}(b\cdot a - b^2 + 2b\cdot b) = \frac{\rho_b b}{2\varepsilon_0}(b+a) = \frac{\rho_a a}{2\varepsilon_0}(b+a)$$

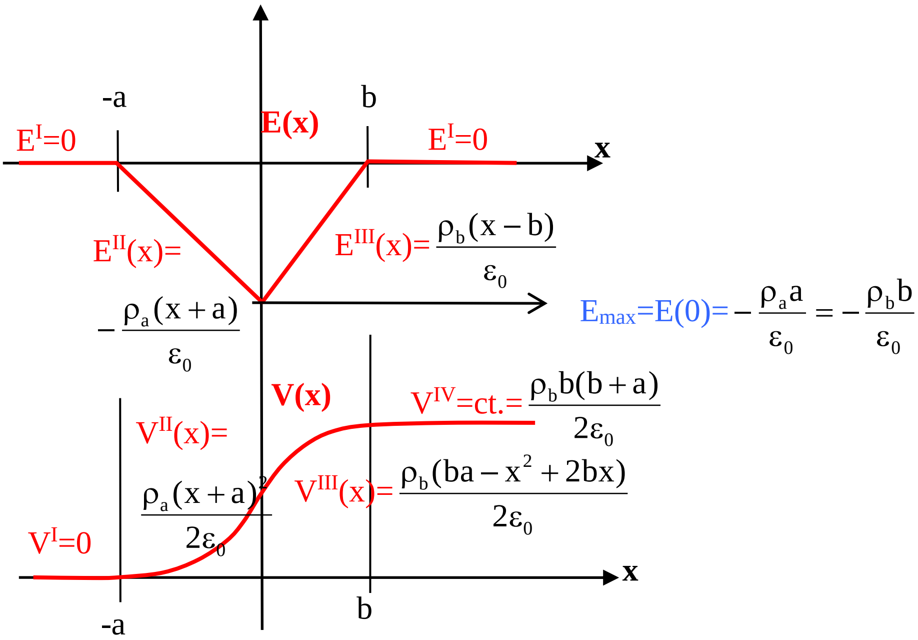
• Calculem el potencial a la regió IV (b<x):

$$V(x) = V(b) - \int_b^x E^{IV}(x')\cdot dx' = V(b) - \int_0^x 0\cdot dx' = V(0) - 0 = V(0) =$$

$$= \frac{\rho_b b}{2\varepsilon_0}(b+a) = \frac{\rho_a a}{2\varepsilon_0}(b+a)$$

El potencial és constant a aquesta regió.

Representació gràfica del camp i el potencial

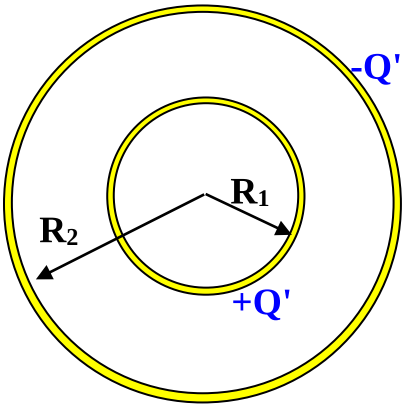


f) ρ_a=-200 C/m^3 , a= 3 μm ; ρ_b= 600 C/m^3 , b= 1 μm llavors:

$$E_{max} = E_x(0) = -\frac{\rho_a a}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho_b b}{\varepsilon_0} = -3388\ k\frac{N}{C}$$

$$V_{barrera} = V(b) = \frac{\rho_b b}{2\varepsilon_0}(b+a) = \frac{\rho_a a}{2\varepsilon_0}(b+a) = 0{,}6775\ V$$

7. Tenim una distribució contínua de càrregues consistent en un parell de cilindres concèntrics de radis R_1 l'interior i R_2 l'exterior (la secció dels quals es veu a la figura).



Els cilindres són de llargada molt més gran que el seu radi, per tant per a nosaltres és com si fossin infinitament llargs. Els dos cilindres només són capes cilíndriques de gruix negligible i per tant sense volum intern. El cilindre interior te una càrrega total -q' per unitat de llargada distribuïda uniformement per l'àrea lateral, i el cilindre exterior te una càrrega igual i contrària +q' per unitat de llargada distribuïda uniformement per l'àrea lateral.

a) Calcula expressions per a la densitat de càrrega superficial de càrrega σ'_1 i σ'_2 per unitat de llargada dels dos cilindres.

b) Calcula expressions per al camp elèctric en direcció radial cilíndrica, a les 3 diferents regions de l'espai: I ($r < R_1$) ; II ($R_1 < r < R_2$) i III ($R_2 < r$).

c) A partir de l'expressió del camp calcula les expressions del potencial elèctric a les 3 regions. Agafa origen de potencial zero a l'eix r=0. Fes una representació gràfica del potencial.

d) Calcula la diferència de potencial ΔV entre els cilindres intern i extern. Si dividim Q' per aquesta diferència de potencial ΔV obtenim el que s'anomena *capacitat per unitat de llargada* $C'=Q'/\Delta V$). Comprova que l'expressió d'aquesta capacitat és independent de la càrrega per unitat de llargada $Q'=\lambda_{eq}$

e) Calcula la capacitat C' per $R_1 = 1$ mm i $R_2 = 1{,}744\ R_1$

SOLUCIÓ 7

a) Tenint en compte que les càrregues q' i -q' per unitat de longitud es distribueixen uniformement per les àrees respectivament del cilindre interior de radi R_1 i del cilindre exterior de radi R_2 (suposant que utilitzem una longitud L per a fer la prova)

$$\sigma_1 = \frac{-q'L}{2\pi R_1 L} = \frac{-q'}{2\pi R_1} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{q'L}{2\pi R_2 L} = \frac{q'}{2\pi R_2}$$

b) • Camp de la regió I ($r<R_1$). Col·loquem una superfície de Gauss consistent en un altre cilindre de llargada L, concèntric amb l'eix dels cilindres però de radi $r<R_1$. Per simetria cilíndrica el camp és perpendicular a la superfície lateral (LT) d'aquesta cilindre i el mòdul només depèn del radi r i no varia si ens movem al llarg de l'eix. Per

tant els elements de flux a l'àrea lateral **E·dS** són només productes de mòdul: E(r)·dS amb E(r) constant al llarg de tota l'esfera de Gauss. Els elements de flux a través de les bases B1 i B2 del cilindre de Gauss de llargada L són nuls ja que el camp te direcció radial.

Així:

$$\Phi_r = \oint_{B1} E^I(r)\cdot dS + \oint_{B2} E^I(r)\cdot dS + \oint_{LT} E^I(r)\cdot dS = \oint_{LT} E^I(r)\cdot dS = E^I(r)\cdot\oint_{LT} dS = E^I(r)\cdot 2\pi r\cdot L$$

Igualant aquest flux al que diu el teorema de Gauss:

$$\Phi_r = E^I(r)\cdot 2\pi r\cdot L = 4\pi k_e q_{int} = 4\pi k_e 0$$

Ja que no hi ha càrrega a l'interior del cilindre de Gauss de radi menor que R_1.

Per tant el camp elèctric de la regió I és nul => $E^I(r) = 0$

• Camp de la regió II ($R_1<r<R_2$). Ara la superfície de Gauss és també un cilindre concèntric de radi $R_1<r<R_2$ i llargada L. Tenim les mateixes simetries esfèriques, per tant:

$$\Phi_r = \oint_{B1} E^{II}(r)\cdot dS + \oint_{B2} E^{II}(r)\cdot dS + \oint_{LT} E^{II}(r)\cdot dS = \oint_{LT} E^{II}(r)\cdot dS = E^{II}(r)\cdot\oint_{LT} dS = E^{II}(r)\cdot 2\pi r\cdot L$$

Igualant aquest flux al que diu el teorema de Gauss:

$$\Phi_r = E^{II}(r)\cdot 2\pi rL = 4\pi k_e q_{int} = 4\pi k_e(-q')\cdot L = 4\pi k_e(2\pi R_1\sigma_1')\cdot L$$

$$\Longrightarrow \quad E^{II}(r) = \frac{4\pi k_e(-q')L}{2\pi rL} = \frac{2k_e(-q')}{r} = \frac{2k_e(2\pi R_1\sigma_1')}{r}$$

El mateix que si tota la càrrega -q' per unitat de llargada estigués concentrada en el centre r=0 i formés un fil rectilini de densitat λ= -q'.

Amb les expressions de les regions I i II ja es veu que el camp no és continu per $r=R_1$: $E^I(R_1)=0$ i $E^{II}(R_1) = -2k_e q'/R_1$. És lògic ja que es tracta d'una distribució superficial σ i en elles el camp no ha de ser continu.

• Camp de la regió III ($R_2<r$). Ara la superfície de Gauss és també un cilindre concèntrica de radi $R_1<r<R_2$ i llargada L. Tenim les mateixes simetries esfèriques, per tant:

$$\Phi_r = \oint_{B1} E^{III}(r)\cdot dS + \oint_{B2} E^{III}(r)\cdot dS + \oint_{LT} E^{III}(r)\cdot dS = \oint_{LT} E^{III}(r)\cdot dS = E^{III}(r)\cdot\oint_{LT} dS = E^{III}(r)\cdot 2\pi r\cdot L$$

Igualant aquest flux al que diu el teorema de Gauss:

$$\Phi_r = E^{III}(r)\cdot 2\pi rL = 4\pi k_e q_{int} = 4\pi k_e(-q'+q') = 0$$

$\Longrightarrow \quad E^{III}(r) = 0$ El camp és nul a fora .

Ara tampoc el camp ja és continu a $r= R_2$:

immediatament a dins val $E^{II}(R_2) = -2k_e q'/R_2$ i a fora val $E^{III}(r) = 0$.
Això és així ja que hem tornat a travessar una distribució superficial σ.

c) Tenim l'origen de potencial a r=0 V(r=0)=0,
no el podem posar a l'infinit ja que en aquest cas, per tractar-se d'una distribució d'extensió infinita, això no es pot fer i per tant s'ha de posar a un altre lloc, com per exemple a r=0.

• Com que r=0 és un punt de la regió I començarem calculant el potencial als punts d'aquesta regió I ($r<R_1$):

$$V(r) = V(0) - \int_0^r E^I(r')\cdot dr' = 0 - \int_0^r 0 \cdot dr' = 0$$

El potencial continua sent zero a tota la regió I i concretament $V(R_1)=0$.

• Calculem el potencial a la regió II ($R_1<r<R_2$), agafarem com a referència el potencial a R_1: $V(R_1)=0$

$$V(r) = V(R_1) - \int_{R_1}^r E^{II}(r')\cdot dr' = 0 - \int_{R_1}^r \frac{2k_e(-q')}{r'}\cdot dr' = +2k_e q' \int_{R_1}^r \frac{dr'}{r'} = 2k_e q'\left[\ln(r')\right]_{R_1}^r$$

$$= 2k_e q'\left(\ln(r) - \ln(R_1)\right) = 2k_e q'\cdot\ln(r/R_1)$$

Concretament a $r=R_2$

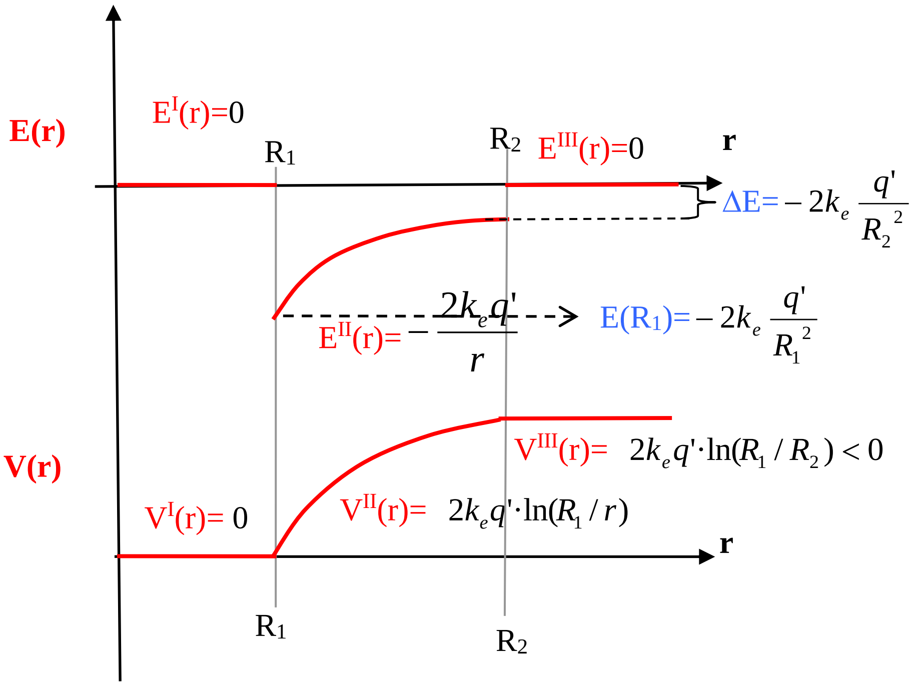
$$V(R_2) = 2k_e q'\cdot\ln(R_2/R_1) > 0$$

• Calculem el potencial a la regió III ($R_2< r$), agafarem com a referència el potencial a R_2 que acabem de calcular: $V(R_2)=2k_e q'\ln(R_2/R_1)$

$$V(r) = V(R_2) - \int_{R_2}^r E^{III}(r')\cdot dr' = V(R_2) - \int_{R_2}^r 0\cdot dr' = V(R_2) - 0 = 2k_e q'\cdot\ln(R_2/R_1) = ct. < 0$$

És a dir el potencial a partir de fora de R_2 ja no varia més, es manté constant.

Resum. Gràfica del camp i del potencial:



d) Capacitat C' per unitat de longitud?

$$C' \equiv \frac{q'}{V(R_2)-V(R_1)} = \frac{q'}{2k_e q' \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{1}{2k_e \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Només depèn de les característiques geomètriques del sistema (i de k_e que és ct.)

e) Calcula la capacitat per unitat de longitud C', per R_1= 1 mm i R_2 = 1,744 R_1

$$C' = \left| \frac{1}{2k_e \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \right| = \left| \frac{1}{2x8{,}9875x10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \ln(1{,}744)} \right| = 1{,}000x10^{-10} \frac{C}{\frac{Nm^2}{C}} = 100\ pF/m$$