Traslaciones

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín, y sea $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es la identidad. Demuestra que existe un vector $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $\psi(a) = a + \overrightarrow{u}$ para todo $a \in A$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín, y sea $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es la identidad. Demuestra que existe un vector $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $\psi(a) = a + \overrightarrow{u}$ para todo $a \in A$.

Solución

Sea $a \in A$. Por AF1, existe $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $a + \overrightarrow{u} = \psi(a)$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín, y sea $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es la identidad. Demuestra que existe un vector $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $\psi(a) = a + \overrightarrow{u}$ para todo $a \in A$.

Solución

Sea $a \in A$. Por AF1, existe $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $a + \overrightarrow{u} = \psi(a)$.

Tenemos $\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{\psi(a)\psi(x)}$ para todo $x \in A$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín, y sea $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es la identidad. Demuestra que existe un vector $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $\psi(a) = a + \overrightarrow{u}$ para todo $a \in A$.

Solución

Sea $a \in A$. Por AF1, existe $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $a + \overrightarrow{u} = \psi(a)$.

Tenemos $\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{\psi(a)\psi(x)}$ para todo $x \in A$.

Por la regla del paralelogramo, $\overrightarrow{a\psi(a)} = \overrightarrow{x\psi(x)}$, lo que implica $\psi(x) = x + \overrightarrow{u}$ para todo $x \in A$. $\square$

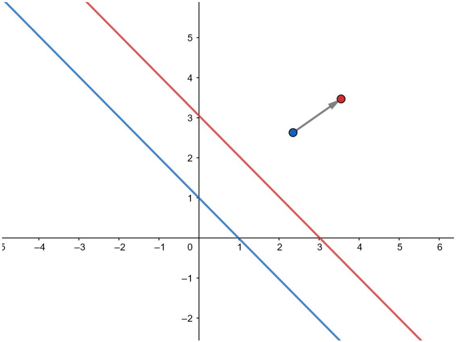
Definición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Para todo $\overrightarrow{u} \in V$, la aplicación $t_{\overrightarrow{u}} : A \longrightarrow A$, definida por $t_{\overrightarrow{u}}(a) = a + \overrightarrow{u}$ para todo $a \in A$, se denomina *traslación de vector* $\overrightarrow{u}$.

Definición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Para todo $\overrightarrow{u} \in V$, la aplicación $t_{\overrightarrow{u}} : A \longrightarrow A$, definida por $t_{\overrightarrow{u}}(a) = a + \overrightarrow{u}$ para todo $a \in A$, se denomina *traslación de vector* $\overrightarrow{u}$.

La figura muestra la imagen de una recta por una traslación $t_{\overrightarrow{u}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.



Ejercicio

Demuestra que toda traslación es una aplicación afín.

Ejercicio

Demuestra que toda traslación es una aplicación afín.

Solución

Sea $t_{\overrightarrow{u}}(a) = a + \overrightarrow{u}$ para todo $a \in A$. Solo hay que observar que para todo par de puntos $x, y \in A$,

$$\overrightarrow{xt_{\overrightarrow{u}}(x)} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{yt_{\overrightarrow{u}}(y)}.$$

Ejercicio

Demuestra que toda traslación es una aplicación afín.

Solución

Sea $t_{\overrightarrow{u}}(a) = a + \overrightarrow{u}$ para todo $a \in A$. Solo hay que observar que para todo par de puntos $x, y \in A$,

$$\overrightarrow{xt_{\overrightarrow{u}}(x)} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{yt_{\overrightarrow{u}}(y)}.$$

Por la regla del paralelogramo, $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}(x)t_{\overrightarrow{u}}(y)} = \overrightarrow{xy}$, lo que implica que $t_{\overrightarrow{u}}$ es afín y que la identidad $f(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{xy}$ es la aplicación lineal asociada. $\square$

En coordenadas

La imagen de $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ por una traslación $t_{\overrightarrow{v}}$ de vector $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ se expresa como

$$t_{\overrightarrow{v}}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n).$$

En coordenadas

La imagen de $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ por una traslación $t_{\overrightarrow{v}}$ de vector $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ se expresa como

$$t_{\overrightarrow{v}}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n).$$

En el plano, si $\overrightarrow{v} = (2, -3)$, entonces $t_{\overrightarrow{v}}(x, y) = (x + 2, y - 3)$.

Ejercicio

Sea $\overrightarrow{u} = (2,0,1)$. Determina la imagen por la traslación $t_{\overrightarrow{u}}$ del subespacio afín $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $x+y+z=5$.

Ejercicio

Sea $\overrightarrow{u} = (2,0,1)$. Determina la imagen por la traslación $t_{\overrightarrow{u}}$ del subespacio afín $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $x+y+z=5$.

Solución

$t_{\overrightarrow{u}}(\mathcal{A})$ esta dado por la ecuación $x+y+z=8$. $\square$

Ejercicio

Sea $\overrightarrow{u} = (2,0,1)$. Determina la imagen por la traslación $t_{\overrightarrow{u}}$ del subespacio afín $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $x+y+z=5$.

Solución

$t_{\overrightarrow{u}}(\mathcal{A})$ esta dado por la ecuación $x+y+z=8$. $\square$

Observación

Nótese que $t_{\overrightarrow{u}}(\mathcal{A})$ es un plano paralelo a $\mathcal{A}$.

Proposición

Toda traslación transforma todo subespacio afín en un subespacio paralelo.

Proposición

Toda traslación transforma todo subespacio afín en un subespacio paralelo.

Demostración

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y sea $\overrightarrow{u} \in V$. Como $t_{\overrightarrow{u}} : A \longrightarrow A$ es una aplicación afín y $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ es la aplicación lineal asociada, tenemos que todo subespacio afín $\mathcal{A}' = (A', F)$ se transforma en el subespacio afín $(t_{\overrightarrow{u}}(A'), f(F)) = (t_{\overrightarrow{u}}(A'), F)$ que es paralelo a $\mathcal{A}'$. $\square$

Ejercicio

$t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$.

Ejercicio

$t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$.

Solución

Vamos a asumir que $t_{\overrightarrow{u}}$ y $t_{\overrightarrow{v}}$ se definen sobre un espacio afín $\mathcal{A} = (A, V)$. solo necesitamos observar que para todo punto $a \in A$,

$$t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}(a) = t_{\overrightarrow{u}}(t_{\overrightarrow{v}}(a)) = t_{\overrightarrow{u}}(a + \overrightarrow{v}) = (a + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{u} = a + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}(a).$$

$\square$

Ejercicio

Demuestra que el conjunto de traslaciones de un espacio afín, con la composición de aplicaciones, es un grupo conmutativo.

Ejercicio

Demuestra que el conjunto de traslaciones de un espacio afín, con la composición de aplicaciones, es un grupo conmutativo.

Solución

Fácil, escribe los detalles.