1. Sigui X i Y dos camps vectorials de classe C^1 a $\mathbb{R}^n$.
Sigui p i q punts d'equilibri del respectius camps i suposem que existeix una conjugació de X a Y de classe C^1 d'un entorn de p a un entorn de q. Veure que $DX(p)$ i $DY(q)$ són aplicacions lineals semblant.

- Sigui els fluxos $x' = X(t)$ i $y' = Y(t)$, diem que $\varphi(t,x)$ i $\psi(t,y)$ són conjugats si existeix un difeo ϕ t.q.

$$\phi(\varphi(t,x)) = \psi(t;\phi(x)) \quad \forall (t,x)$$

- Rec que A i B són semblants si existeix P invertible t.q. $B = P^{-1}AP$

$$\phi(\varphi(t,x)) = \psi(t;\phi(x))$$

$\Downarrow$ derivem

$$(D\phi)_{\varphi(t,x)} \underbrace{\frac{d}{dt}\varphi(t,x)}_{X(\varphi(t,x))} = \underbrace{\frac{d}{dt}\psi(t,\phi(t))}_{Y(\psi(t,\phi(t)))}$$

$\Downarrow$ $t=0$

$$(D\phi)_x X(x) = Y(\phi(x))$$

Observem que $\phi(p) = q$ ja que:

1) $\phi(\underbrace{\varphi(t,p)}_{p}) = \psi(t;\phi(p)) \Rightarrow \phi(p)$ punt crític de Y

$\uparrow$ no dep de t

2) p i q són punts crítics aïllat de X i Y

Fent $x = p + \lambda v$ amb $v \in \mathbb{R}^n$ tenim

$$\frac{Y(\phi(p+\lambda v))-Y(\phi(p))}{\lambda} = (D\phi)_{p+\lambda v}\frac{X(p+\lambda v)-X(p)}{\lambda}$$

$$\Big\downarrow \lambda \to 0$$

$$(DY)_{\phi(p)}(D\phi)_p v = (D\phi)_p (DX)_p v$$

$\phi(p) = q$

Fem servir que X i Y són camps C^1

$$\Big\downarrow \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$(DY)_q (D\phi)_p = (D\phi)_p (DX)_p$$

INVERTIBLE

2 Sigui $f: U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 t.q. $0 \in U$, $f(0)=0$ i $f'(0)=a$ amb $a>0$ (resp. $a<0$). Demostrem que el camp vectorial unidimensional $\dot{x}=f(x)$ és topològicament conjugat (localment) a $\dot{x}=x$ (resp $\dot{x}=-x$). Per fer-ho:

a) Demostrem que $\dot{x}=f(x)$ és localment conjugat a $\dot{x}=ax$

b) Demostrem que $\dot{x}=ax$ amb $a>0$ (resp $a<0$) és topològicament conjugat a $\dot{x}=x$ (resp $\dot{x}=-x$)

Sigui $\dot{x}=f(x)$ amb $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 amb $0 \in I$ $f(0)=0$ i $f'(0)=a \neq 0$

a) Si veiem que és C^2 conjugat a $x'=ax$

Recordem que X i Y són conjugats ssi $(D\phi)_p X(p) = Y(\phi(p))$ $\forall p$

$$\Big\Updownarrow$$

$\phi'(x) f(x) = a\phi(x).$ $\forall x$

Posem $f(x) = x\bar{f}(x)$ on $\bar{f}$ és C^1 a I amb $\bar{f}(0) = a \neq 0$

Busquem ϕ i l'escrivim com $\phi(x) = x\bar{\phi}(x)$. Llavors

$$(\bar{\phi} + \cancel{x}\bar{\phi}')\cancel{x}\bar{f} = a\cancel{x}\bar{\phi} \Rightarrow \frac{\bar{\phi}'(x)}{\bar{\phi}(x)} = \frac{a - \bar{f}(x)}{x\bar{f}(x)} \Rightarrow$$

$(x\bar{\phi}(x))'$ $\quad f(x)$

$$\boxed{\phi' f(x) = a\phi(x)}$$

Té sentit si $x \approx 0$ ja que $\bar{f}(0) = a \neq 0$

$$\Rightarrow \bar{\phi}(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{a - \bar{f}(s)}{s\bar{f}(s)}\,ds\right)$$

Per tant $\bar{\phi}$ és C^1 a $x=0$ i $\bar{\phi}(0) = 1 \neq 0$

Per construcció $\phi(x) = x\bar{\phi}(x)$ conjuga $x' = f(x)$ i $x' = ax$

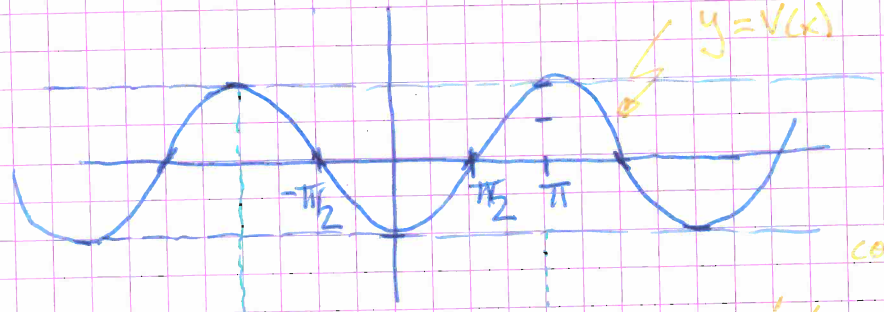
Veiem ara que existeix conjugació topològica entre $x' = ax$ i $x' = x$ en el cas $a > 0$ (per exemple)

$\varphi(t;x) = xe^{at}$ $\quad \psi(t;x) = xe^{t}$

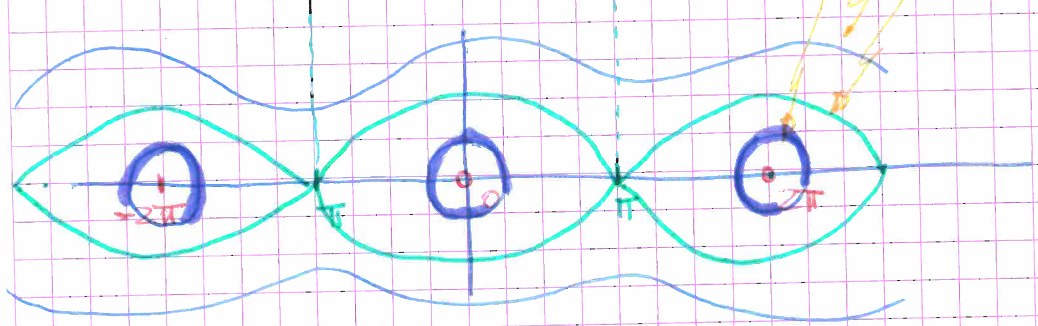
Cal que $\phi(xe^{at}) = \phi(x)e^{t} \quad \forall (t,x)$

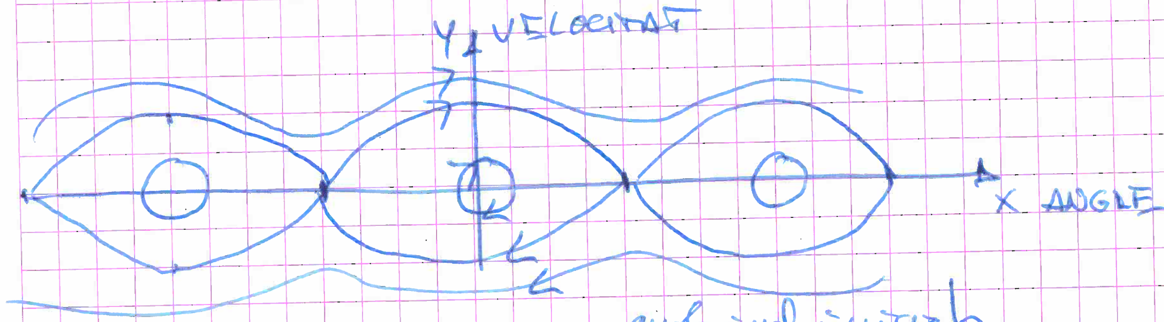
$\Rightarrow$ triem $\phi(x) = x^{1/a}$ que ja és contínua.

- $k=-1$
- $k>1$
- $k\in(-1,1)$
- $k=1$



CORBES DE NIVELL
$H(x,y)=\frac{y^2}{2}+V(x)$





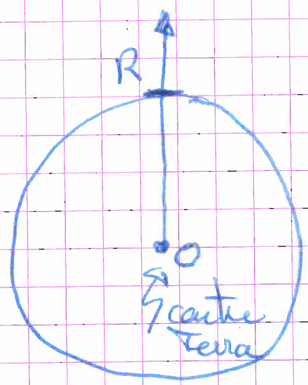
angle i vel inicials

- Si prenem (x_0,y_0) t.q. $\frac{y_0^2}{2} - \cos x_0 < 1 \Rightarrow$ el pèndol oscil·la periòdicament

- Si prenem (x_0,y_0) t.q. $\frac{y_0^2}{2} - \cos x_0 > 1$ llavors tenim una sol (no periòdica)
  — El pèndol llu gira lliurement

- Si $\frac{y_0^2}{2} - \cos x_0 = 1$ llavors la solució tendeix asimptòticament al "sostre" quan $t \to \pm\infty$

c) $x'' = -\frac{1}{x^2}$ això modelitza per exemple l'alçada d'un cohet en el seu llançament.



R = 6 371 Km (radi de la terra)

$\cancel{m}\ddot{x} = -\frac{GM}{x^2}\cancel{m}$ $\boxed{\text{FORÇA GRAVITATÒRIA}}$

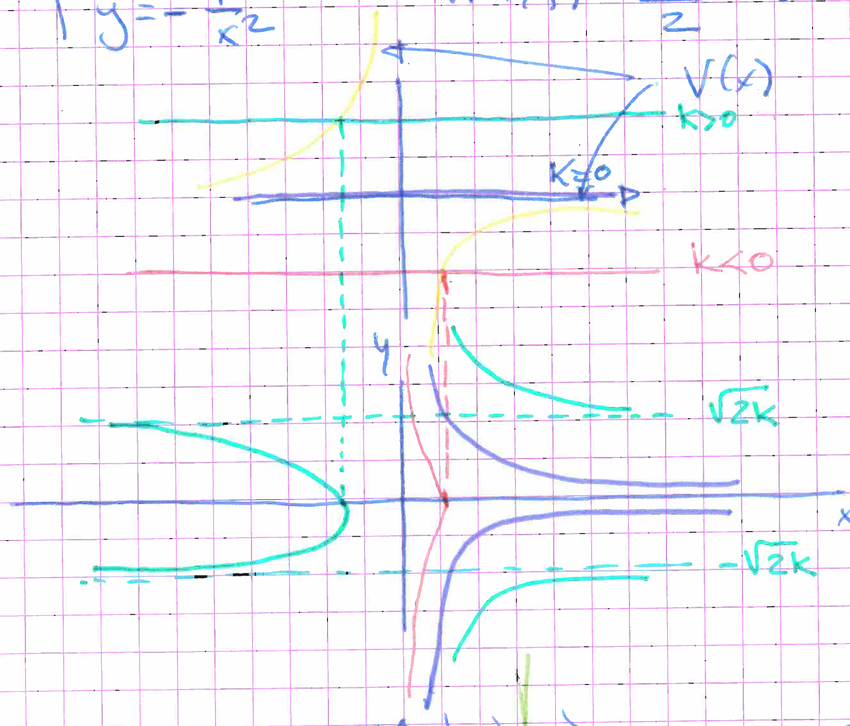
x(t) = alçada del cohet en metres al cap de t segons

M = massa de la Terra $5'97 \cdot 10^{24}$ Kg

$G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ m^3/Kg\,s^2$ cte gravitació universal

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$

$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + V(x)$ amb $V(x) = -\frac{1}{x}$

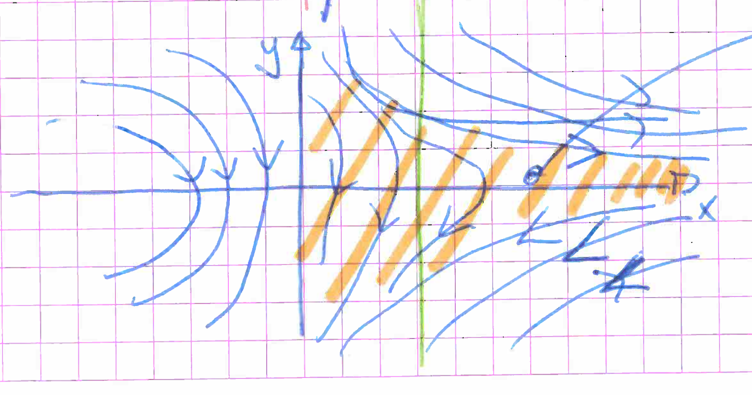


$\frac{y^2}{2} + V(x) = k$

$y = \pm\sqrt{2(k - V(x))}$

$y = \pm\sqrt{2(k + \frac{1}{x})}$

CORBES DE NIVELL DE $H(x,y) = \frac{y^2}{2} + V(x)$



Aquí el cohet torna a caure

Triem condicions inicials $\begin{cases} x(0) = R \\ y(0) = x_0 \end{cases}$ R radi terra

cal $\frac{V_0^2}{2} - \frac{1}{R} > 0$ per sortir (i no tornar)

Afegint les constants, la velocitat inicial ha de ser

$V_0 > \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ la velocitat d'escapament

11'186 Km/s

5 Fer l'esquema del retrat de fases de cada cas:

a) $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \sin x = 0$ (pèndol amortit $\alpha>0$)

b) $\ddot{x} + \sin x = \beta \Rightarrow$ (pèndol sotmès a una força constant) amb els casos $|\beta|<1$ i $|\beta|>1$

c) $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \sin x = \beta$ (pèndol amortit i sotmès a un moment de força constant)

Els pèndols sense amortiment tenen òrbites periòdiques i òrbites homoclíniques (connexions de punt fixos)
En poden tenir els amortits?

a) $\ddot{x} + \underbrace{2\alpha\dot{x}}_{\text{Fregament}} + \sin x = 0$ pèndol amortit $\alpha>0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\alpha y - \sin x \end{cases}$$

$\to$ a 4b) hem vist que $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$ és una integral primera quan $\alpha=0$. $\Rightarrow$ més tard ho farem amb

(I) Punts crítics: $(\bar{x},0)$ amb $\sin\bar{x} = 0 \iff k\pi = \bar{x}$, $k\in\mathbb{Z}$

Ull! sols cal veure la franja $[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$

Diferencial del camp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -2\alpha \end{pmatrix}$

Part lineal a $(\pm\pi,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 ...}$
$\Rightarrow$ veps $(1, \lambda_\pm)$

Hartman $\Downarrow$

$(\pm\pi, 0)$ són selles $\forall\alpha>0$

Part lineal a (0,0) → $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\alpha \end{pmatrix} \to \lambda_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$

Hartman $\begin{cases} (0,0) \text{ focus atractor si } \alpha \in (0,1) \\ (0,0) \text{ node atractor si } \alpha > 1 \end{cases}$

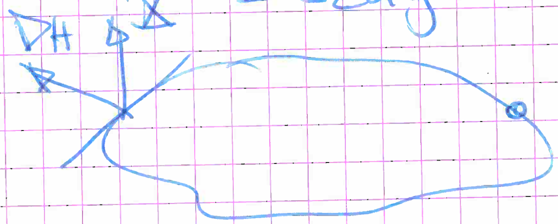
II) El camp X és $X = \begin{pmatrix} y \\ -2\alpha y - \sin x \end{pmatrix}$

$\operatorname{div} X = -2\alpha \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \nexists$ òrbites periòdiques

P.15

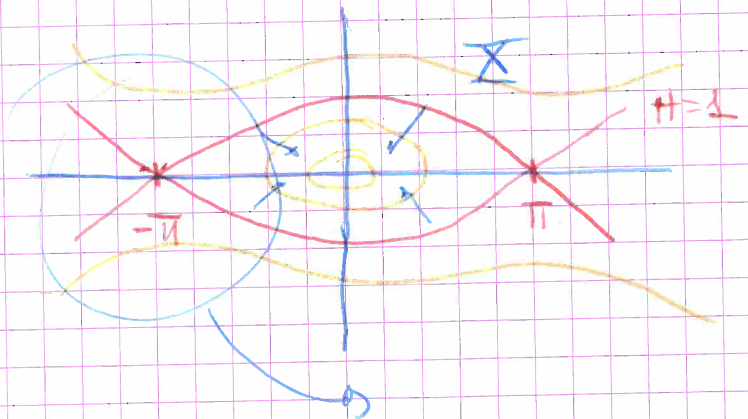
A més si $H(x,y) := \frac{1}{2} y^2 - \cos x$ llavors

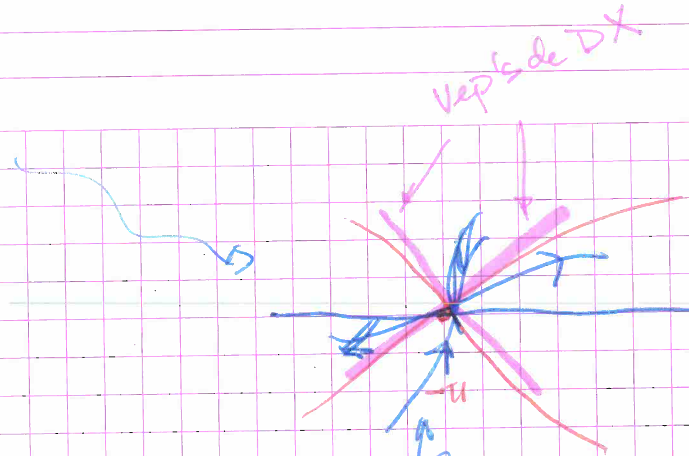
$\nabla H \cdot X = (\sin x, y) \cdot (y, -2\alpha y - \sin x) =$
$= -2\alpha y^2$



Això mostra que el camp fora de $y=0$ mai és tangent a les corbes de nivell de H.

a (4) hem vist que les corbes de nivell de H són





$H=1 \rightarrow \frac{y^2}{2} - \cos x = 1$

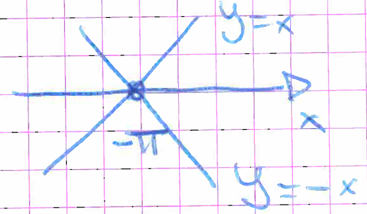
$\downarrow$

$y = \pm\sqrt{2(1+\cos x)}$

les separatrius de la sella arriben tangents als veps

El pendent de $y=\pm\sqrt{2(1+\cos x)}$ és ± 1 en $\underline{\underline{x = 1}}$

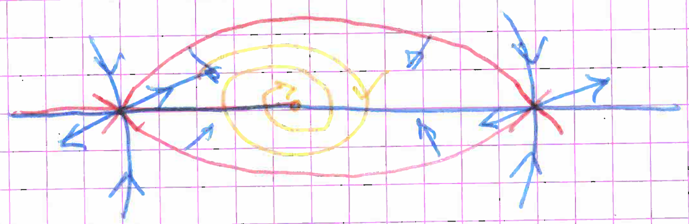
El vep de vap positiu és $(1, -\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})$



$$|-\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}|<1$$

$$\Updownarrow$$

$-1+\alpha<\sqrt{\alpha^2+1}<1+\alpha$ cert si $\underline{\underline{\alpha>0}}$



15.- Sigui $\dot{x} = X(x)$ un camp C^1 definit a U obert de $\mathbb{R}^2$

Sigui γ una òrbita periòdica tq la component connexa acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \{\gamma\}$, diem D, és a dins de U. Demostrar que

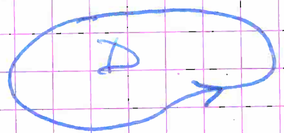
$$\int_D \operatorname{div} X(x)\,dx = 0$$

Quina és la propietat de ∂D que realment utilitzem?

T. Green $\quad \oint_{\underset{\nwarrow C}{C}} (L\,dx + M\,dy) = \iint_D (M_x - L_y)\,dx\,dy$

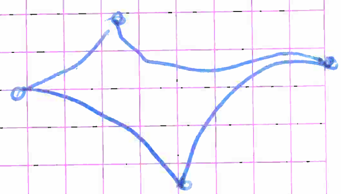
↓

la integral d'un camp $F=(L,M)$ al llarg de C



- $M, L : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1
- C una corba tancada dins de U

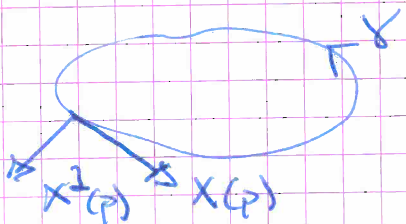
Regular x intervals



D és la component acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus C$

Considerem $x' = X(x)$ amb $X = (f, g)$ es dir $\quad x' = f(x,y)$, $y' = g(x,y)$

Sigui γ una òrbita periòdica de X



Si apliquem el T. de Green agafant l'ortogonal $X^\perp = (\underset{L}{\underset{\shortparallel}{-g}}, \underset{M}{\underset{\shortparallel}{f}})$

Tenim $\quad \underbrace{\oint_\gamma (-g\,dx + f\,dy)}_{\shortparallel (*)} = \int_\gamma \underbrace{(f_x + g_y)}_{\operatorname{div} X}\,dx\,dy$

$U(\ast)$ amb γ parametrizada $\quad \varphi: [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\; t \longrightarrow \varphi(t)$

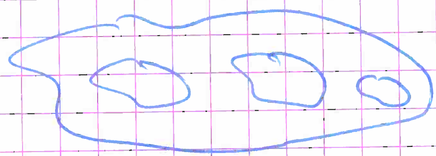
$$\int_0^T (-g, f)\Big|_{\varphi(t)} \circ \varphi'(t)\, dt$$

$$0 = \int_0^t X^{\perp} \circ X \Big|_{\varphi(t)} dt$$ que verifica $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$

Per tant $\int_{\mathring{\gamma}} \operatorname{div} \underline{X}\, dx\,dy = 0$ que contradiu $\operatorname{div} X > 0$ a U

$\underline{U}$. Sols es fa això que són òrbites de $\underline{X}$ no cal C^1

CRITERI BENDIXSON



Sigui $X: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un camp C^1. Si la divergència de $\underline{X}$ no és zero i no canvia de signe en una regió simplement connexa $E \subset U$ llavors $x' = \underline{X}(x)$ no té òrbites periòdiques contingudes a E.

6. Siguin X_1 i X_2 camps vectorials de classe C^1 a oberts $\Delta_1\, \Delta_2 \subset \mathbb{R}^n$ resp. Veure que si X_1 i X_2 són topològicament conjugats i X_1 té una integral primera, llavors X_2 també.

(I) $x' = \underline{X}_1(x) \longrightarrow \varphi(t,p)$ $\quad$ Topològicament conjugat $\Rightarrow \exists\, \phi$

(II) $x' = \underline{X}_2(x) \longrightarrow \psi(t,p)$ $\quad$ continua tq $\phi(\varphi(t,p)) = \psi(t, \phi(p))$

$\forall (t,p)$

$H_1: U_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una integral primera de (I) si H no és constant i $H_1(\varphi(t;p))$ és independent de t.

• Veiem que $H_2 := H_1 \circ \phi^{-1}$ és integral primera de (II)

$$H_2(\varphi(t,p)) = H_1(\phi^{-1}(\underbrace{\varphi(t,p)}_{\phi(\varphi(t;\phi^{-1}(p)))})) = H_1(\varphi(t;\phi^{-1}(p)))$$

No dep de t ja que H_1 és integral primera d(I)

10.- El següent sistema d'equacions diferencials modela 2 poblacions en competència pels recursos:

$$\begin{cases} x' = x(1-x-\frac{1}{2}y) \\ y' = y(2-x-2y) \end{cases}$$

on $x(t)$ i $y(t)$ denoten el nº d'individus de les resp. poblacions en t.

a) Trobar els punts fixos i determinar el seu caràcter

b) Proveu que el model està ben definit, és a dir, que el 1r Quadrant (incloent eixos) és invariant

c) Feu un esboç qualitatiu del retrat de fases del sistema al 1r quadrant

d) Quins són els conjunt omega-límit dels punts del 1r quadrant? Poden ser òrbites periòdiques?

e) Interpreteu el model i els resultats.

a) $x(1-x-\frac{1}{2}y)=0 \begin{cases} x=0 \xrightarrow{y'=0} \begin{cases} y=0 & (0,0)\ P_1 \\ y=1 & (0,1)\ P_2 \end{cases} \\ x=1-\frac{1}{2}y \end{cases}$

$\hookrightarrow y'=0 \begin{cases} y=2/3 \Rightarrow x=2/3 \rightarrow (2/3, 2/3)\ P_4 \\ y=0 \Rightarrow x=1 \rightarrow (1,0)\ P_3 \end{cases}$

$$DX = \begin{pmatrix} 1-2x-y/2 & -x/2 \\ -y & 2-x-4y \end{pmatrix}$$

$P_1 \rightarrow \lambda_1 = 1 \quad v_1=(1,0) \quad \lambda_2 = 2 \quad v_2=(0,1)$ NODE REPULSOR

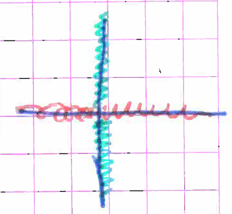
$P_2 \rightarrow \lambda_1 = -2 \quad v=(0,1) \quad \lambda_2 = 1/2 \quad v_2 = (-5,2)$ SELLA

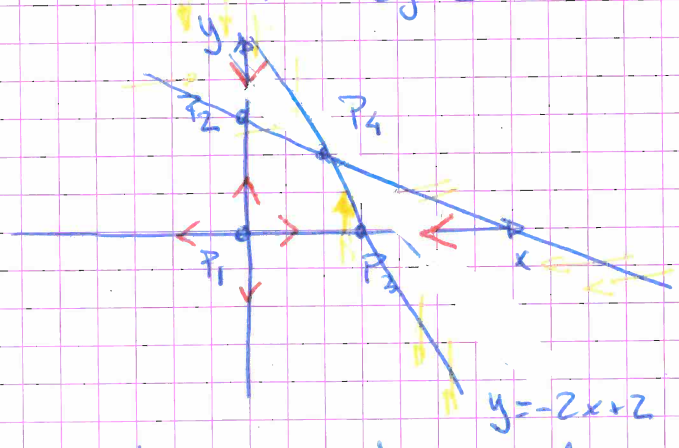
$P_3 \rightarrow \lambda_1 = 1 \quad v_1=(1,-4) \quad \lambda_2 = -1 \quad v_2=(1,0)$ SELLA

$P_4 \rightarrow \lambda_1 = -1+1/\sqrt{3} \quad v_1=(1, 1-\sqrt{3})$
$\lambda_2 = -1-1/\sqrt{3} \quad v_2=(1, 1+\sqrt{3})$ NODE ATRACTOR

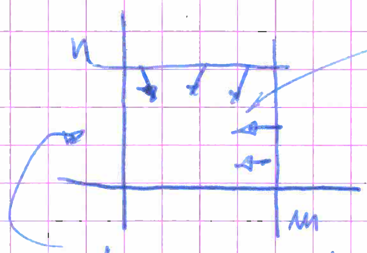
b) $x'=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow x=0 \text{ és invariant} \\ 1-x-\frac{1}{2}y=0 \Leftrightarrow y=2(1-x) \end{cases}$

$y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow y=0 \text{ invariant} \\ -2x-2y+2=0 \rightarrow y=\frac{2-x}{2} \end{cases}$





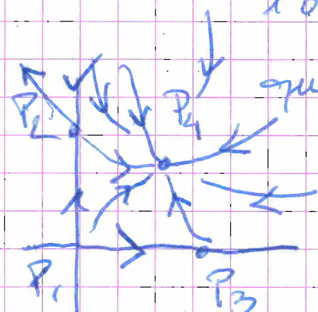
- No poden haver òrbites periòdiques pq haurien de envoltar P_4, no pot ser x les isoclines
- El camp és transvers al 1r quadrant, a les rectes $x=m$, $y=n$ amb $m,n>1$



Regió compacte positivament invariant, per tant tot punt de dins té ω-límit dins

$$y' = y(\underbrace{2(1-y)-x}_{>0})$$

Pel teorema de poincaré-bendixon l'omega-límit ha de ser P_4 ja que no hi ha òrbites periòdiques



1 Considerem el sistema d'equacions

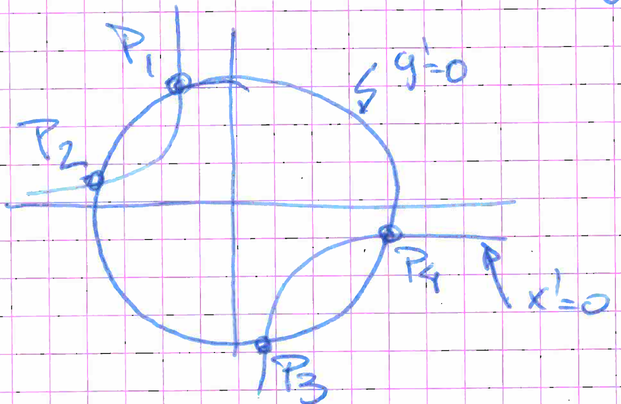
$$\begin{cases} x' = xy + 12 \\ y' = x^2 + y^2 - 25 \end{cases}$$

a) Determinem els punts d'equilibri i la seva estabilitat

b) Demostrem que existeix una òrbita γ continguda al 4rt quadrant tq té com α-límit un punt P i ω-límit un Q tq $P \neq Q$. Passa el mateix al 2n?

isoclina vertical. $x' = 0 \iff xy + 12 = 0 \iff y = -\frac{12}{x}$

isoclina horitzontal $y' = 0 \iff x^2 + y^2 = 25$



$P_1, P_2, P_3, P_4 \longrightarrow \quad x^2 + \frac{12^2}{x^2} = 25 \rightarrow$

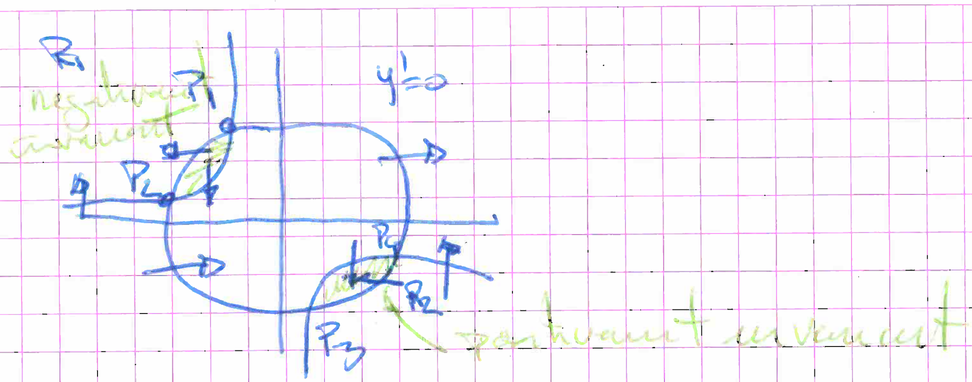
$P_4 = (4, -3)$
$P_1 = (-3, 4)$
$P_3 = (3, -4)$
$P_2 = (-4, 3)$

$$DX = \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$(DX)_{P_3} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 56}}{2} \Rightarrow \text{NODE ATRACTOR}$$

$$(DX)_{P_4} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{-9 \pm \sqrt{137}}{2} \Rightarrow \text{SELLA}$$

$$v_{\pm} = \left(1, \frac{-3 \pm \sqrt{137}}{8}\right)$$



Estudiam la separatriu inestable de $P_4 = (4,-3)$

1) $\nabla(xy+12) = (y,x) \to (-3,4)^{\perp} = (4,3) = V_1 \Rightarrow$ pendent $3/4$

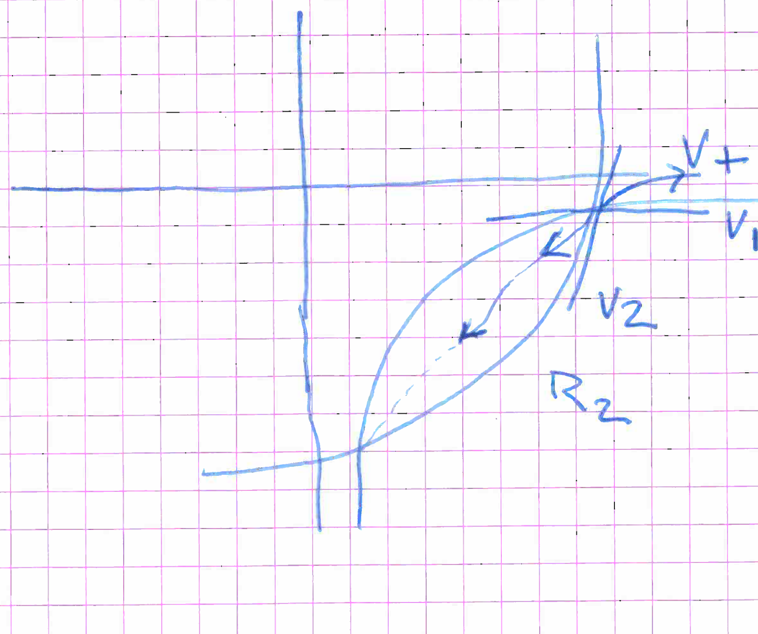
2) $\nabla(x^2+y^2-25) = (2x,2y) \Rightarrow (8,-6)^{\perp} = (6,8) = V_2$ pendent $4/3$

3) la separatriu inestable és tangent a V_+

$$V_+ = \left(1, -\frac{3+\sqrt{137}}{8}\right)$$

$\simeq 1'08$

Donat que $\frac{3}{4} < \frac{3+\sqrt{137}}{8} < 4/3$ serà:



Donat que els únics punts singulars de X a R_2 són P_3 i P_4, R_2 és un compacte positivament invariant $\Rightarrow$ no hi ha OP a R_2. P_3 ha de ser el ω-límit de la separatriu inestable de P_4 a R_2

Com que $X(-x,-y) = X(x,y)$ $\Rightarrow$ Idem a R_1

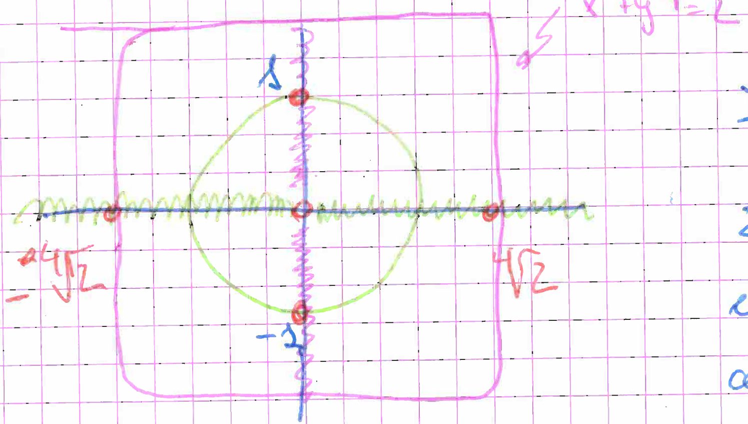
12 provar que el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x - x^5 - xy^4 \\ y' = y - y^3 - yx^2 \end{cases}$$

no té cap òrbita periòdica.

$$y' = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ó} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x' = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases}$$



1) FIXOS INVARIANTS

2) Una O.P. té almenys un punt singular al seu interior.

$\Longrightarrow$ NO HI HA OP

13 Sigui

$$\begin{cases} x' = x(y^2 - 4) \\ y' = y(x^2 - 4) \end{cases}$$

a) trobar els punts d'equilibri i el seu caràcter

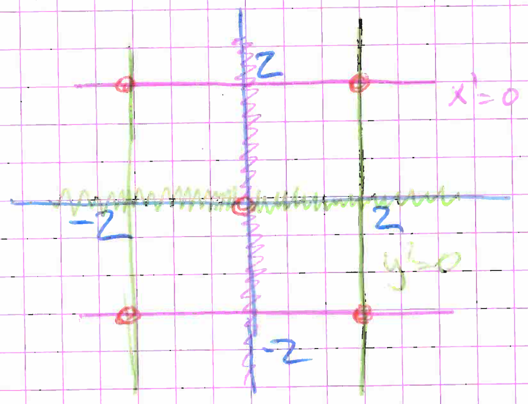
b) Rectes invariants.

c) Isoclines

d) No té O.P.

$$y' = 0 \longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ó} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$x' = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

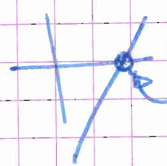


$$DX = \begin{pmatrix} y^2-4 & 2xy \\ 2xy & x^2-4 \end{pmatrix}$$

a) $DX(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Node atractor

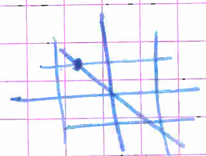
$DX(\pm 2, \pm 2) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 8 \\ \pm 8 & 0 \end{pmatrix}$ vap's $\pm\sqrt{8} \Rightarrow$ SELLES

b) L'únic punt singular dels eixos és $(0,0)$ ja que és invariant de X i Y.
Si tenim una altra recta invariant ha de passar per $(0,0)$ ja que



un nou punt que no tenen

Si la recta passa per l'origen



no pot ser ja que el vector tangent $\perp$ a les isoclines

Nota: $F(x,y)$ és invariant ssi $F(P_0)=0 \Rightarrow$

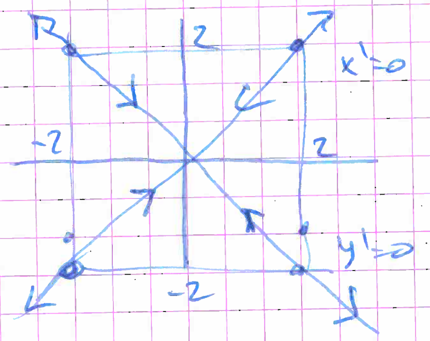
$$\Rightarrow F(\varphi(t,P_0)) = 0 \quad \forall t \in I_{P_0} \iff \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} F(\varphi(t,P_0))}_{\nabla F \circ X|_{\varphi(t,P_0)}} = 0 \quad \forall t \in I_{P_0}$$

$$\Rightarrow \nabla F \circ X|_{\varphi(t,P_0)} \equiv 0$$

En aquest cas $F(x,y) = y - x$

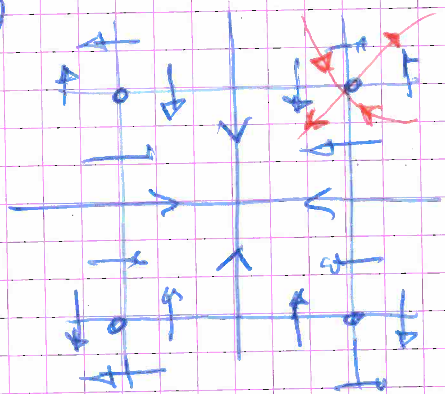
$$\nabla F \circ X = (-1,1)\,(x(y^2-4),\, y(x^2-4)) = y(x^2-4) - x(y^2-4) = 0$$

si $x = y$



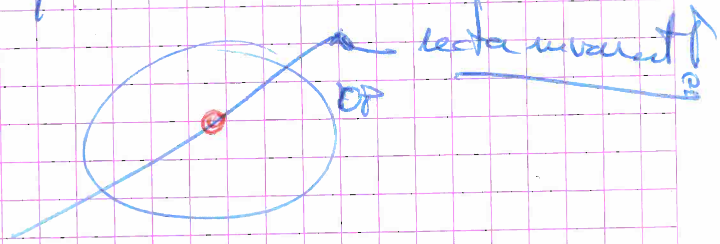
només podrà ser invariant $\underline{x = \pm y}$

c)



Falta e)

d) No pot haver OP. ja que han d'envoltar un punt singular



11.- a) Donada l'equació $(x^2-y^2-1)dx + y\,dy = 0$ trobeu un factor integrant i resoleu-la.

b) Considerem el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^2+y^2+1 \end{cases}$$

Calculeu els punts d'equilibri i estudieu el seu caràcter.

c) Dibuixeu el retrat de fases

d) Descriure ω-límit i α-límit dels punts.

a) busquem un factor integrant de $\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}$

$$\begin{cases} \mu P = H_y \\ \mu Q = -H_x \end{cases} \Rightarrow (\mu P)_x = -(\mu Q)_y \Leftrightarrow \mu_x P + \mu P_x = -\mu_y Q - \mu Q_y \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu(P_x+Q_y) = -(\mu_x P + \mu_y Q)$$

si μ sols depen de x $\Rightarrow \mu_y Q = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{P_x+Q_y}{P}}$$

$\Rightarrow \dfrac{P_x+Q_y}{P}$ no dep de y ja que μ sols és funció de "x"

En aquest cas $\begin{cases} x' = y & =: P(x,y) \\ y' = -x^2+y^2+1 & =: Q(x,y) \end{cases}$

$$\frac{P_x+Q_y}{P} = \frac{0+2y}{y} = 2 \quad \leftarrow \text{No dep de } y$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = -2 \Rightarrow \mu(x) = e^{-2x} \Rightarrow$$

$H_y = y e^{-2x} \Rightarrow H(x,y) = \frac{y^2}{2} e^{-2x} + f(x) \Rightarrow$

$H_x = \cancel{-y^2 e^{-2x}} + f'(x) = -\mu Q = -e^{-2x}(-x^2 + \cancel{y^2} + 1) \Rightarrow$

$f'(x) = (x^2-1)e^{-2x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} e^{-2x}(2x^2+2x-1) \Rightarrow$

$H(x,y) = \frac{1}{4} e^{-2x}(2y^2 - 2x^2 - 2x + 1)$ és integral primera de l'EDO.

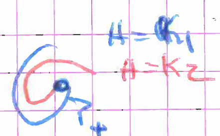
b) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^2 + y^2 + 1 \end{cases}$ punts crítics $P_+ = (1,0)$ $P_- = (-1,0)$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +2 & 0 \end{pmatrix}$

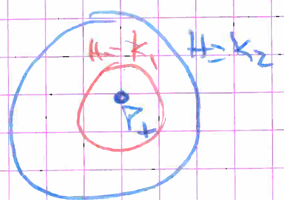
• $P_- = (-1,0)$ és una sella, amb veps $(1,+\sqrt{2}),(1,-\sqrt{2})$ $\lambda = \pm\sqrt{2}$

• $P_+ = (1,0)$ pot ser centre o focus ja que els seus vaps són imaginaris purs.

Donat que tenim $H(x,y)$ integral primera contínua a un entorn de P_+ $\Rightarrow$ no és focus.

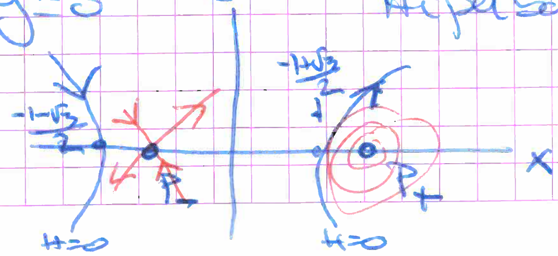


Per continuïtat $K_1 = K_2 \Rightarrow$ $H = cte$ en un entorn de P_+



c) Sol sobre $H = cte$. En part $H=0$, $2y^2 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$ → Hipèrbola.

$\Rightarrow$ és camp simètric en $y=0$

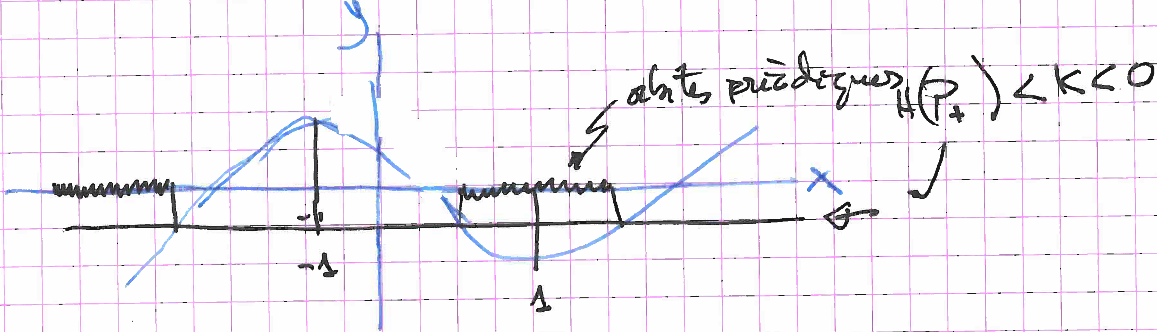


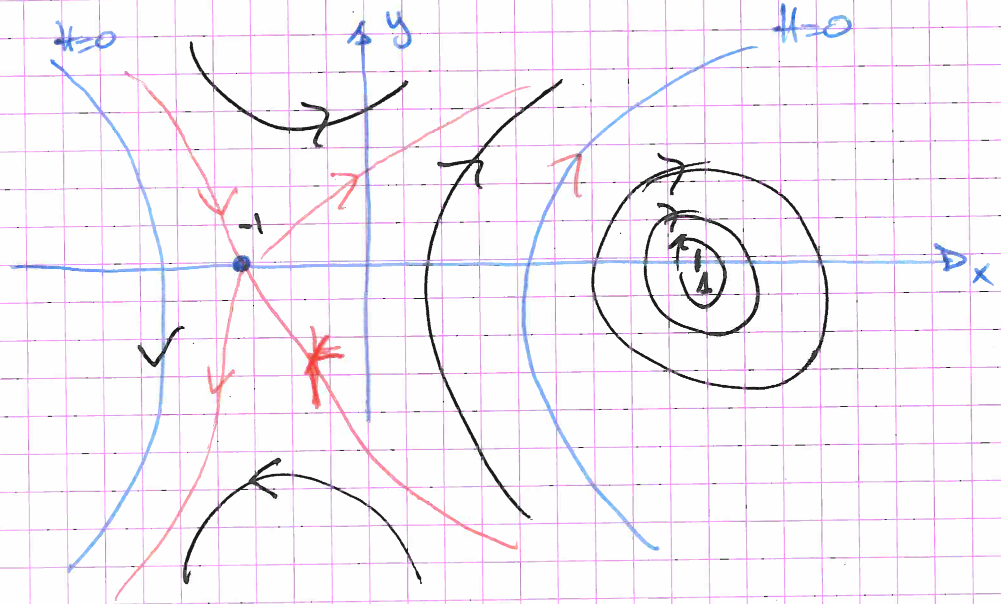
• les separatrices de P_- hau de sea a la curbade nivell $H(x,y) = H(P_-) \Rightarrow \frac{1}{4} e^{-2x}(2y^2-2x^2-2x+1) = \frac{1}{2}e^2$

$H(x,y) = k \Leftrightarrow \frac{1}{4} e^{-2x}(2y^2-2x^2-2x+1) = k \Leftrightarrow 2y^2 = 4e^{2x}k + 2x^2+2x-1 \geq 0$

$\Rightarrow$ donat $x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ t.q. $H(x,y) = k \Leftrightarrow 4e^{2x}k + 2x^2+2x-1 > 0$

$\Leftrightarrow k > \frac{1}{2} e^{-2x}\left(\frac{1}{2} - x^2 - x\right) =: g(x)$



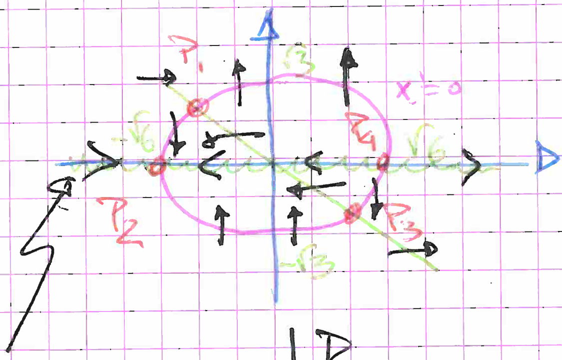


14. Considerem el sistema $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 3 \\ y' = xy + y^2 \end{cases}$

a) Trobeu els punts d'equilibri i determineu el seu caràcter
b) Trobeu les isoclines horitzontals i verticals del sistema i estudieu si alguna és recta invariant. Determinar la direcció del camp a les isoclines.
c) Aquest sistema té 4 rectes invariants amb pendent $\neq 0$
d) Demostra que no hi ha OP.
e) Fer el retrat de fases.

Isoclina vertical $x' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 3 = 0 \rightarrow$ elipse

Isoclina horitzontal $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -y \end{cases}$



y=0 és invariant?

$P_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$P_2 = (-\sqrt{6}, 0)$
$P_3 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
$P_4 = (\sqrt{6}, 0)$

$$DX = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm\sqrt{6} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{6} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

P_4 node repulsor
P_2 node atractor

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & \mp 2\sqrt{2} \\ \mp\sqrt{2} & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$P_c(\lambda) = \lambda^2 - 6$

$\Downarrow$

P_1 i P_3 són SELLES

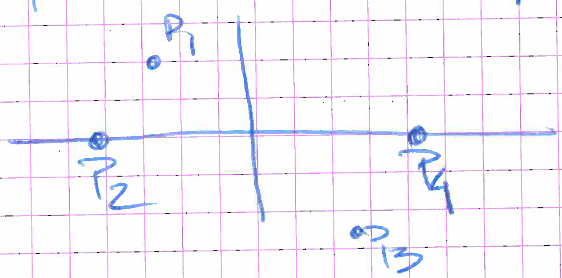
c) La intersecció de 2 rectes invariants ES punt singular

Com que hi ha 4 aquí poden no ser ⇒ han de passar per P_2 o P_4

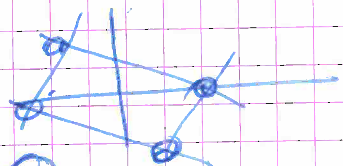
com que $y=-x$ és isoclina horitzontal, si la tallen ha de ser per P_1 o P_3

ull la recta per $P_1 P_3$ NO és invariant sols és iso horitzontal

$y=0$ és invariant si hi ha + rectes invariant han de passar per P_2 i P_4



si n'hi ha 4 sols poden ser ⇒



ull! l'enunciat diu que hi han 4

d) una OP ha d'encerclar 1 punt singular

Dins del paral·lelogram T. Poincaré Bendixson