Exercicis teoremes integrals

1. Calculeu la integral:

$$\oint x^2y\,dx - xy^2dy$$

sobre el cercle:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

2. Calculeu la integral:

$$\oint \frac{dx - dy}{x + y}$$

on el contorn C és el límit del quadrat amb els vèrtexs $A(1,0)$, $B(0,1)$, $D(-1,0)$, $E(0,-1)$.

3. Calculeu l'àrea de la regió R limitada per l'astroide:

$$x = a\cos^3 t\,, y = a\sin^3 t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

4. Calculeu la integral:

$$\oint (y + 2z)dx + (x + 2z)dy + (x + 2y)dz$$

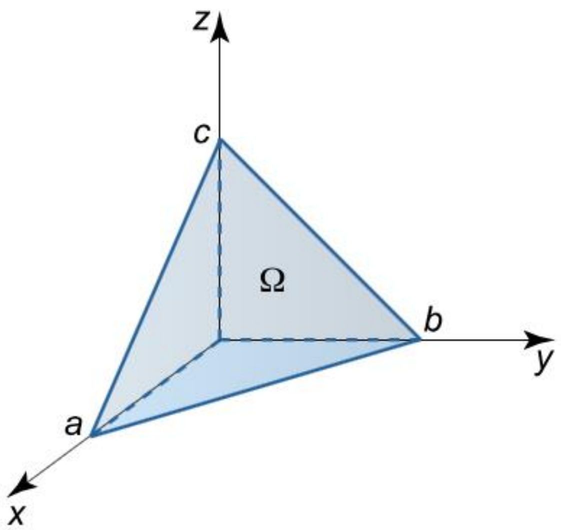
on C és la corba formada per la intersecció de l'esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i el pla: $x + 2y + 2z = 0$

5. Calculeu la integral:

$$\iint_S 2xdydz + (3y + x)\,dxdz + (2y + 4z)\,dxdy,$$

On S és la superfície exterior de la piràmide:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$$



Solucions

1. Apliquem Teorema de Green

$$P(x,y) = x^2y,\;\; Q(x,y) = -xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(-xy^2\right)}{\partial x} = -y^2,\;\; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\left(x^2y\right)}{\partial y} = x^2.$$

Llavors:

$$I = \oint_C x^2y dx - xy^2 dy = \iint_R \left(-y^2 - x^2\right) dxdy = -\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dxdy,$$

on R és la circumferència de radi **a** centrada a l'origen. Transformant a coordenades polars, obtenim

$$I = -\iint_R \left(x^2+y^2\right) dxdy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right) r dr = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = -2\pi \cdot \left[\left.\left(\frac{r^4}{4}\right)\right|_0^a\right] = -\frac{\pi a^4}{2}.$$

2. Apliquem Teorema de Green

$$P = \frac{1}{x+y},\;\; Q = -\frac{1}{x+y},\;\; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{x+y}\right)}{\partial x} = \frac{1}{(x+y)^2},\;\; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{1}{x+y}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Llavors:

$$I = \oint_C \frac{dx - dy}{x+y} = \iint_R \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\right) dxdy = 2\iint_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}.$$

Trobem les equacions dels costats del quadrat:

AB: $y = -x + 1$
BD: $y = x + 1$
DE: $y = -x - 1$
EA: $y = x - 1$

És convenient fer el canvi de variables $u = y + x, v = y - x$. Llavors la regió d'integració queda: $u = 1, u = -1, v = 1, v = -1$

Recordem que hem de calcular el jacobià, i per fer-ho fácil el fem amb el de la transformació inversa:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(y+x)}{\partial x} & \frac{\partial(y+x)}{\partial y} \\ \frac{\partial(y-x)}{\partial x} & \frac{\partial(y-x)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

aleshores el valor absolut del jacobià de la transformació original ve donat per

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}\right| = \frac{1}{2}.$$

Per tant

$$dxdy = \left|\frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)}\right| dudv = \frac{1}{2}dudv,$$

La integral queda doncs:

$$I = 2\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y)^2} = 2\iint\limits_S \frac{\frac{1}{2}dudv}{u^2} = \iint\limits_S \frac{dudv}{u^2} = \int\limits_{-1}^{1} dv \int\limits_{-1}^{1} \frac{du}{u^2} =$$
$$\left[v|_{-1}^{1}\right] \cdot \left[\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_{-1}^{1}\right] = [1-(-1)]\cdot[-1+(-1)] = -4.$$

3. Utilitzarem la integral de línia per definir l'àrea de la regió, utilitzant la fórmula

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_C xdy - ydx.$$

En forma paramètrica aquesta fórmula es representa com

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[a\cos^3 t \cdot \frac{d\left(a\sin^3 t\right)}{dt} - a\sin^3 t \cdot \frac{d\left(a\cos^3 t\right)}{dt}\right] dt =$$
$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t - a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\,(-\sin t)\right] dt =$$
$$\frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\left[4\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\right] dt = \frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}(\sin 2t)^2 dt =$$
$$\frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{3a^2}{16}\left[\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{3a^2}{16}\cdot 2\pi = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

4. Usarem el Teorema d’Stokes.

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S},$$

Sigui S el cercle format tallat per la intersecció entre l'esfera i el pla. Trobem les coordenades del vector unitari **n** normal a la superficie S (fixeu-vos que donat que el tall estarà al pla, el vector es normal al pla):

$$\mathbf{n} = \frac{1\cdot\mathbf{i} + 2\cdot\mathbf{j} + 2\cdot\mathbf{k}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Suposant que a la nostra funció li diem:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\big)$$

Llavors:

$$P = y + 2z, \quad Q = x + 2z, \quad R = x + 2y.$$

Calculem el rotacional

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = (2-2)\,\mathbf{i} + (2-1)\,\mathbf{j} + (1-1)\,\mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

I ara:

$$\oint_C (y + 2z)\,dx + (x + 2z)\,dy + (x + 2y)\,dz = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS =$$
$$\iint_S \mathbf{j} \cdot \left(\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) dS = \frac{2}{3}\iint_S dS.$$

Donat que l'esfera està centrada a l'origen, i el pla també passa per l'origen, la secció de tall és un cercle de radi 1. Per tant l'integral és:

$$I = \frac{2}{3}\iint_S dS = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{2\pi}{3}.$$

5. Utilitzant el teorema de la divergència (Gauss), podem escriure la integral de superfície inicial com

$$\iint_S 2xdydz + (3y + x)\,dxdz + (2y + 4z)\,dxdy = \iiint_G (2 + 3 + 4)\,dxdydz = 9\iiint_G dxdydz.$$

Ara fem la integral triple, o bé calculem (geometricament) el volum de la pirámide, que delimita el volum de integració G.

Quan z=0, és a dir al pla XY tenim:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \le 1, \; x \ge 0, \; y \ge 0, \;\; \Rightarrow \frac{y}{b} \le 1 - \frac{x}{a} \;\text{ or }\; y \le b - \frac{b}{a}x.$$

Podem escriure també la desigualtat inicial en funció de z:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \le 1, \;\; \Rightarrow \frac{z}{c} \le 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \;\text{ or }\; z \le c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Llavors la integral triple serà:

$$\iiint\limits_G dxdydz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \int\limits_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) dy =$$

$$bc\int\limits_0^a \left[\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right) - \frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)^2}{2}\right] dx =$$

$$\frac{bc}{2a^2}\int\limits_0^a (a-x)^2 dx = \frac{bc}{2a^2}\int\limits_0^a \left(a^2-2ax+x^2\right) dx =$$

$$= \frac{abc}{6}.$$