E2 – Solucions exercicis 2021-10-08

Àlex Arenas, Sergio Gómez

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

1. Estudiar monotonia de les següents successions

a) $$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

Anem a veure que és estrictament creixent

$$a_{n+1} - a_n > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Substituïm i operem algebraicament

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} =$$
$$= \frac{(2n+1)\cdot n - (n+1)(2n-1)}{(n+1)\cdot n} = \frac{\cancel{2}n^2 + \cancel{n} - \cancel{2}n^2 - \cancel{n} + 1}{(n+1)\cdot n} = \frac{1}{(n+1)\cdot n} > 0$$

La darrera desigualtat és certa ja que *n* és natural

1. Estudiar monotonia de les següents successions

b) $$b_n = \frac{8n}{1+2n}$$

Anem a veure que és monòtona creixent

$$b_n \le b_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Substituïm i operem algebraicament

$$b_n \le b_{n+1} \Leftrightarrow \frac{8n}{1+2n} \le \frac{8\cdot(n+1)}{1+2\cdot(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8n}{1+2n} \le \frac{8n+8}{1+2n+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{8}n + 1\cancel{6}n^2 + 1\cancel{6}n \le \cancel{8}n + 8 + 1\cancel{6}n^2 + 1\cancel{6}n \Leftrightarrow 0 \le 8$$

La darrera desigualtat és sempre certa

De fet, podíem haver posat desigualtats estrictes, per tant és estrictament creixent

1. Estudiar monotonia de les següents successions

c) $c_n = \dfrac{3n}{n+1}$

Anem a veure que és monòtona creixent

$$c_n \leq c_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Substituïm i operem algebraicament

$$c_n \leq c_{n+1} \Leftrightarrow \frac{3n}{n+1} \leq \frac{3\cdot(n+1)}{(n+1)+1} \Leftrightarrow \frac{3n}{n+1} \leq \frac{3n+3}{n+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{3}n^2 + \cancel{6}n \leq \cancel{3}n^2 + \cancel{3}n + \cancel{3}n + 3 \Leftrightarrow 0 \leq 3$$

La darrera desigualtat és sempre certa

De fet, podíem haver posat desigualtats estrictes, per tant és estrictament creixent

1. Estudiar monotonia de les següents successions

d) $$d_n = \frac{1}{n^3}$$

Anem a veure que és estrictament decreixent

$$d_n > d_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Substituïm i operem algebraicament

$$d_n > d_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n^3} > \frac{1}{(n+1)^3} \Leftrightarrow (n+1)^3 > n^3$$

La darrera desigualtat és certa per tot *n* natural

2. Demostrar, utilitzant la definició de límit, que

a) $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\,, \quad \text{si } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

[Veure solucions en arxiu extern]

3. Demostrar que, si $r > 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} = 0$

Què passa si $r < 1$?

Volem veure que $\left| \frac{1}{r^n} - 0 \right| < \varepsilon \quad si \quad n > n_0$

$$\left| \frac{1}{r^n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r^n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < r^n \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n \cdot \log(r) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log(r)} < n$$

Com $r > 1$, $\log(r) > 0$, i podem seleccionar $n_0 = \frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log(r)}$

3. Demostrar que, si $r > 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} = 0$

Què passa si $r < 1$?

Si $r < 1$, $\log(r) < 0$, i per tant l'expressió següent

$$\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n \cdot \log(r)$$

no pot ser certa mai, ja que $\epsilon \ll 1$ fa que $\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) > 0$

En conclusió, 0 no és límit si $r < 1$

De fet, es pot demostrar que el límit és $+\infty$ si $r < 1$

4. Demostrar, utilitzant la definició de límit, que

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-2} = 1$$

Volem trobar N tal que la següent expressió sigui certa per a tot $n \geq N$

$$\left|\frac{n+1}{n-2} - 1\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{n-2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} < n-2 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} + 2 < n$$

Per tant, només cal seleccionar

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 2 \right\rceil$$

4. Demostrar, utilitzant la definició de límit, que

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{(n+1)(n+2)} = 2$$

Volem trobar N tal que la següent expressió sigui certa per a tot $n \geq N$

$$\left| \frac{2n^2-1}{(n+1)(n+2)} - 2 \right| = \left| \frac{-6n-5}{n^2+3n+2} \right| = \frac{6n+5}{n^2+3n+2} < \frac{6(n+1)}{n^2+3n+2}$$

Com

$$\frac{6(n+1)}{n^2+3n+2} = \frac{6(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{6}{(n+2)} < \varepsilon \iff \frac{6}{\varepsilon} < n+2 \iff$$

$$\iff n > \frac{6}{\varepsilon} - 2$$

Podem seleccionar $N = \left\lceil \frac{6}{\varepsilon} - 2 \right\rceil$

4. Demostrar, utilitzant la definició de límit, que

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{3n^2+1} = 8$$

Volem trobar N tal que la següent expressió sigui certa per a tot $n \geq N$

$$\left| \frac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{3n^2+1} - 8 \right| =$$
$$= \left| \frac{8n^3+12n^2+6n+1-(8n^3-12n^2+6n-1)}{3n^2+1} - 8 \right| =$$
$$= \left| \frac{24n^2+2}{3n^2+1} - 8 \right| = \left| \frac{-6}{3n^2+1} \right| = \frac{6}{3n^2+1} < \frac{6}{3n^2} = \frac{2}{n^2}$$

Podem seleccionar $N = \left\lceil \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right\rceil$

5. Calcular el límit de

$$a_1 = \sqrt{3}\ ,\ \ a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}}\ ,\ \ a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\ \ , \text{etc.}$$

Els primers termes es poden escriure

$$a_1 = 3^{\frac{1}{2}}\ ;\ \ a_2 = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\ ;\ \ a_3 = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$$

El terme general queda

$$a_n = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

L'exponent és una sèrie geomètrica, que sabem sumar

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = 1-\frac{1}{2^n}$$

5. Calcular el límit de

$$a_1 = \sqrt{3} \ , \ \ a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}} \ , \ \ a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} \ \ , \text{etc.}$$

Per tant, el terme general queda

$$a_n = 3^{1-\frac{1}{2^n}}$$

Ara ja podem fer el límit utilitzant les seves propietats

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3^{1-\frac{1}{2^n}} = 3$$

6. Demostrar $\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ y calcular el límit de $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Demostrem la desigualtat per inducció:

a) Base de la inducció $n = 1$

$$\frac{2}{1} \leq \frac{(2)!}{(1!)^2}$$ certa ja que $2 \leq 2$

b) Hipòtesi d'inducció: la desigualtat és certa fins al valor n

c) Pas d'inducció: cal demostrar que és certa per a $n+1$

$$\frac{2^{2(n+1)-1}}{n+1} \leq \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}$$ que se simplifica a $$\frac{2^{2n+1}}{n+1} \leq \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$$

6. Demostrar $\dfrac{2^{2n-1}}{n} \leq \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ y calcular el límit de $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

Tenim que

$$\frac{2^{2n+1}}{n+1} = \frac{2^{2n-1}\cdot 2^2}{n+1} \underset{\substack{H.I.\\ 2^{2n-1}\leq n\frac{(2n)!}{(n!)^2}}}{\leq} \frac{4n\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}{n+1} = \frac{4n(2n)!}{n!(n+1)!} \underset{\substack{multiplicando\\ y\ dividiendo\\ por(n+1)}}{=} \frac{(n+1)2(2n)(2n)!}{((n+1)!)^2}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n)(2n)!}{((n+1)!)^2} \underset{2n<2n+1}{\leq} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \qquad \square$$

6. Demostrar $\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ y calcular el límit de $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Calculem ara el límit de l'expressió de l'esquerra, amb el teorema de Stolz-Cesàro

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n-1} - 2^{2(n-1)-1}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n-1} - 2^{2n-3}}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{2n-3}(4-1) = 3\cdot 2^{\infty} = +\infty$$

Per tant, segons la propietat de comparació de successions, la successió

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

□

és divergent $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

7. Calcular el límit de

$$c_n = \left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{-n-3}$$

Ho fem directament

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{-n-3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{3n-1}\right)^{n+3} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\infty} = +\infty$$

8. Calcular el límit de

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n$$

La base té una indeterminació $\infty-\infty$, que es resol multiplicant i dividint pel conjugat

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1$$

Per tant, queda una indeterminació 1^∞, que es resol introduint el nombre e

8. Calcular el límit de

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n$$

Per tant, queda una indeterminació 1^{∞}, que es resol introduint el nombre e

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\log\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{-1}{\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+(1+\frac{1}{n})\right)}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

8. Calcular el límit de

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right)^n$$

S'ha utilitzat que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

ja que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}}$$
$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}}\right) = \ln e = 1$$