Anàlisi Matemàtica 1 (AM1)
GEMiF

E2.2 Exercicis: Continuïtat

1. Donades cadascuna de les següents funcions f, és possible trobar una funció F contínua en tot $\mathbb{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ per tots els valors de x en el domini de f?

   (i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

   (ii) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

   (iii) $f(x) = 0$, x irrational.

   (iv) $f(x) = 1/q$, $x = p/q$ rational in lowest terms.

2. Troba una funció f que sigui discontínua en tot $\mathbb{R}$ però $|f|$ sigui contínua en tot $\mathbb{R}$

3. Troba una funció f que sigui contínua en a però discontínua en tota la resta de punts de $\mathbb{R}$

4. Suposa que f satisfà $f(x+y) = f(x) + f(y)$ i que és contínua en a. Demostra que f és contínua en tot x

5. Per a cadascuna de les següents funcions, indica si estan fitades superior i/o inferiorment, i si assoleixen màxim i/o mínim

   (i) $f(x) = x^2$ on $(-1, 1)$.

   (ii) $f(x) = x^3$ on $(-1, 1)$.

   (iii) $f(x) = x^2$ on $\mathbf{R}$.

   (iv) $f(x) = x^2$ on $[0, \infty)$.

   (v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le a \\ a+2, & x > a \end{cases}$ on $(-a-1, a+1)$. (We assume $a > -1$, so that $-a-1 < a+1$; it will be necessary to consider several possibilities for a.)

   (vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \ge a \end{cases}$ on $[-a-1, a+1]$. (Again assume $a > -1$.)

   (vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irrational} \\ 1/q, & x = p/q \text{ in lowest terms} \end{cases}$ on $[0, 1]$.

(viii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irrational} \\ 1/q, & x = p/q \text{ in lowest terms} \end{cases}$ on $[0, 1]$.

(ix) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irrational} \\ -1/q, & x = p/q \text{ in lowest terms} \end{cases}$ on $[0, 1]$.

(x) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rational} \\ 0, & x \text{ irrational} \end{cases}$ on $[0, a]$.

(xi) $f(x) = \sin^2(\cos x + \sqrt{a + a^2})$ on $[0, a^3]$.

(xii) $f(x) = [x]$ on $[0, a]$.

6. Per a cadascun d'aquests polinomis, troba un enter n tal que $f(x) = 0$ per algun x entre n i $n + 1$

(i) $f(x) = x^3 - x + 3$.
(ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.
(iii) $f(x) = x^5 + x + 1$.
(iv) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

7. Demostra que existeix solució d'aquestes equacions

(i) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 119$.
(ii) $\sin x = x - 1$.

8. Suposa que f és contínua en $[a, b]$ i que $f(x)$ és sempre racional. Què es pot dir sobre la funció f?

9. Suposa que f és contínua en $[-1,1]$ tal que $x^2 + [f(x)]^2 = 1$ per tot x. Demostra que $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ per tot x, o pel contrari $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ per tot x

10. Quines funcions contínues satisfan que $[f(x)]^2 = x^2$ per tot x?

11. Suposa que f i g són funcions contínues que satisfan $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$. Demostra que $f(x) = g(x)$ per algun valor $x \in [a, b]$

12. Donada una funció f contínua en [0,1], definim $\|f\| = \max\{|f(x)|: x \in [0,1]\}$.
   a. Demostra que, per qualsevol real c, $\|c\, f\| = |c|\, \|f\|$
   b. Demostra que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Posa un exemple pel qual no es compleix la igualtat
   c. Demostra que $\|h - f\| \leq \|h - g\| + \|g - f\|$

13. Suposa que f és una funció contínua amb $f(x) > 0$ per tot x i tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Demostra que $\exists y : \ f(y) \geq f(x) \quad \forall x$