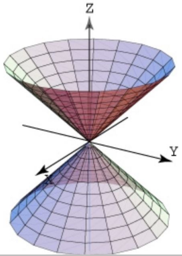
Secciones cónicas

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

Cono circular recto

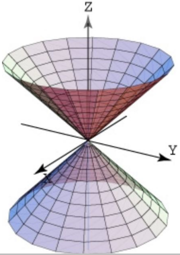
Sean e y g dos rectas del espacio euclidiano que se cortan en un punto o formando un ángulo α. La figura obtenida al girar g alrededor de e se denomina *cono circular recto*.



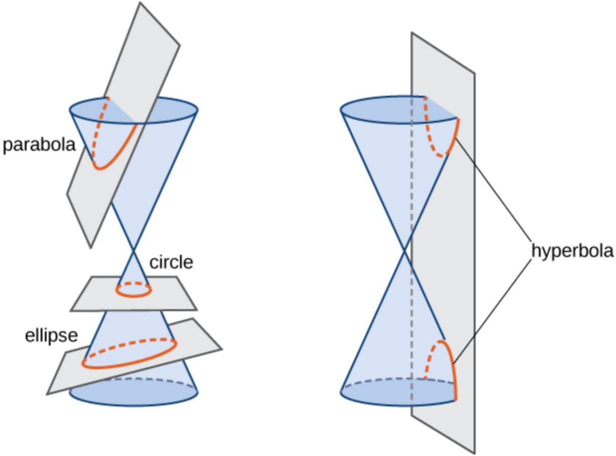
Cono circular recto

Sean e y g dos rectas del espacio euclidiano que se cortan en un punto o formando un ángulo α. La figura obtenida al girar g alrededor de e se denomina *cono circular recto*.

- El punto o se llama vértice del cono.
- La recta e se llama eje del cono (en la figura eje z) y g es la generatriz.
- Considera un plano que contenga la recta e. Cualquier recta obtenida por una rotación de e de centro o y ángulo α, es también una generatriz del cono.



Las cónicas, o *secciones cónicas*, son las curvas que se obtienen al interceptar un cono circular recto con un plano que no pasa por su vértice. Estas curvas se llaman elipses, parábolas o hipérbolas. Las circunferencias son casos particulares de elipses.



Lugar geométrico

En geometría, un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos (normalmente formando una curva o superficie) que satisfacen una determinada condición.

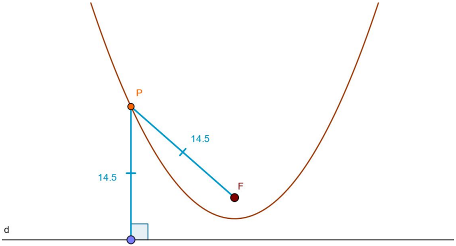
Parábola

Una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia a una recta fija, llamada directriz, es siempre igual a su distancia a un punto fijo, llamado foco.

Parábola

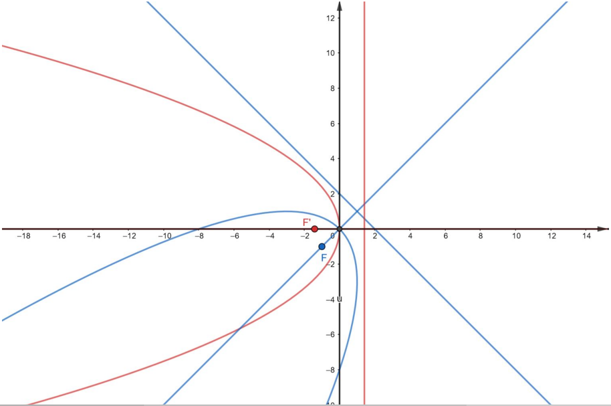
Una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia a una recta fija, llamada directriz, es siempre igual a su distancia a un punto fijo, llamado foco.

La siguiente figura muestra una parábola. En concreto, para el punto P mostrado en la figura, la distancia a F es de $14,5$, que por definición es igual a la distancia de P a la directriz d.



- La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz es el eje de la parábola.
- El punto de la parábola más cercano a la directriz es el vértice de la parábola.

A continuación se muestran dos parábolas con el mismo vértice.



Ejercicio

Determinar la ecuación de la parábola con vértice $(0,0)$ y foco $(0,f)$.

Ejercicio

Determinar la ecuación de la parábola con vértice $(0,0)$ y foco $(0,f)$.

Solución

Para cualquier punto (x,y) de la parábola,

$$d((x,y),(0,f)) = d((x,-f),(x,y)).$$

Por tanto, $x^2 + (f-y)^2 = (y+f)^2$. De ahí que la ecuación es

$$x^2 = 4fy.$$

Ejercicio

Determinar la ecuación de la parábola con vértice $(0,0)$ y foco $(0,f)$.

Solución

Para cualquier punto (x,y) de la parábola,

$$d((x,y),(0,f)) = d((x,-f),(x,y)).$$

Por tanto, $x^2 + (f-y)^2 = (y+f)^2$. De ahí que la ecuación es

$$x^2 = 4fy.$$

Observación

- La parábola de vértice en el origen y eje "y" tiene la ecuación $x^2 = 4fy$, donde el foco es $(0,f)$ y la directriz es $y = -f$.
- La parábola de vértice en el origen y eje "x" tiene ecuación $y^2 = 4fx$, donde el foco es $(f,0)$ y la directriz es $x = -f$.

Ejercicio

Determina la ecuación de la parábola con vértice $(0,0)$ y directriz $x+5=0$.

Ejercicio

Determina la ecuación de la parábola con vértice $(0,0)$ y directriz $x+5=0$.

Solución

$y^2 = 20x$.

Ejercicio

Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen, cuyo eje coincide con el eje x, y que pasa por el punto $(-2, 4)$.

Ejercicio

Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen, cuyo eje coincide con el eje x, y que pasa por el punto $(-2,4)$.

Solución

En este caso, si el foco es $(f,0)$, la directriz es $x=-f$. Para el punto $(-2,4)$ tenemos $d((f,0),(-2,4)) = d((-f,4),(-2,4))$, lo que implica que $f=-2$. Así, para cada punto (x,y) de la parábola,

$$d((x,y),(-2,0)) = d((x,y),(2,y)).$$

Por tanto, $(x+2)^2+y^2=(x-2)^2$, por lo que la ecuación es $y^2+8x=0$.

Ejercicio

Determinar la ecuación de la parábola obtenida por una traslación del vector $\overrightarrow{u} = (h,k)$ de la parábola de ecuación $y = ax^2$.

Ejercicio

Determinar la ecuación de la parábola obtenida por una traslación del vector $\overrightarrow{u} = (h,k)$ de la parábola de ecuación $y = ax^2$.

Solución

Un punto de coordenadas (x,y) se traslada a un punto de coordenadas $(x',y') = (x+h, y+k)$. Por lo tanto, la parábola de ecuación $y = ax^2$ se convierte en la parábola $y' - k = a(x' - h)^2$.
Sobre el mismo sistema de coordenadas, la ecuación es de la parábola trasladada es $y = a(x-h)^2 + k$. El vértice es (h,k).

Ejercicio

Sin calcular derivadas, determina el vértice de una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

Ejercicio

Sin calcular derivadas, determina el vértice de una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

Solución

Como $a \neq 0$,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

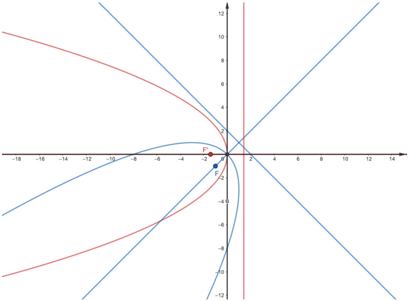
Por tanto, por analogía con el ejercicio anterior, el vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Ejercicio

Determina la ecuación de la parábola con vértice $(0,0)$ y directriz $x+y=2$. Además, determina los puntos de intersección con los ejes de coordenadas.

Ejercicio

Determina la ecuación de la parábola con vértice $(0,0)$ y directriz $x+y=2$. Además, determina los puntos de intersección con los ejes de coordenadas.



Solución

Buscamos la ecuación de la parábola en azul. El eje es $y=x$ y el foco es $(-1,-1)$. Para todo punto (x_1,y_1) de la parábola en rojo, $d\Big((x_1,y_1),(-\sqrt{2},0)\Big) = d\Big((x_1,y_1)(\sqrt{2},y_1)\Big)$. De ahí que $y_1^2 = -4\sqrt{2}x_1$.

Solución (continuación)

Si rotamos con ángulo $\frac{\pi}{4}$, los puntos de la parábola en azul se obtienen a partir de los puntos de la parábola en rojo mediante la ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De las ecuaciones

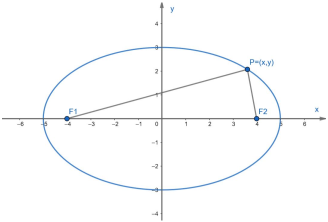
$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \qquad y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \quad \text{y} \quad y_1^2 = -4\sqrt{2}x_1,$$

se obtiene que la ecuación buscada es $x^2 + y^2 - 2xy + 8x + 8y = 0$. Los puntos de intersección con los ejes son $(-8,0)$, $(0,0)$ y $(0,-8)$.

La elipse

La *elipse* es el lugar de todos los puntos P del plano tales que la suma de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante.

- Los puntos F_1 y F_2 se llaman focos de la elipse.
- Si la suma de las distancias de un punto de la elipse a los dos focos es $2a$, entonces a es el semieje mayor de la elipse. En la figura, $a = 5$.
- Si la distancia de F_1 a F_2 es $2c$, entonces c es la distancia focal de la elipse.
- El valor $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ se conoce como el semieje menor de la elipse.
- El punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ es el centro de la elipse.



Ejercicio

Demuestra que si una elipse tiene focos $F_1 = (-c,0)$ y $F_2 = (c,0)$ en el plano cartesiano, entonces viene dada por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

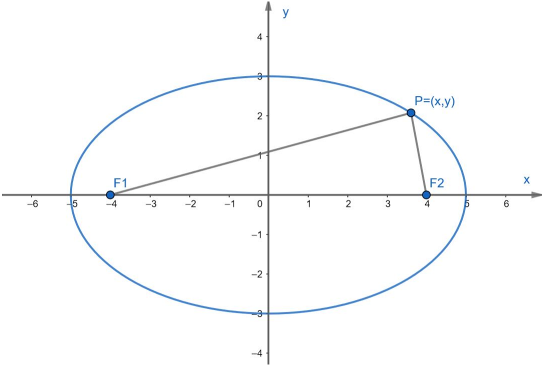
Solución

Sea $P = (x,y)$ un punto de la elipse. Por definición,

$$
\begin{aligned}
d(P,F_1) &= 2a - d(P,F_2) \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 \\
-4xc+4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
-\frac{xc}{a}+a &= \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
\frac{x^2c^2}{a^2}-2xc+a^2 &= x^2-2xc+c^2+y^2 \\
a^2-c^2 &= \frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2}+y^2 \\
b^2 &= \frac{x^2b^2}{a^2}+y^2 \longrightarrow 1 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}. \quad \square
\end{aligned}
$$

Ejemplo

La figura muestra la elipse de ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.



Ejercicio

Determina la ecuación de una elipse E cuyos focos son $F_1 = (h, k-c)$ y $F_2 = (h, k+c)$ en el plano cartesiano.

Ejercicio

Determina la ecuación de una elipse E cuyos focos son $F_1 = (h, k-c)$ y $F_2 = (h, k+c)$ en el plano cartesiano.

Solución

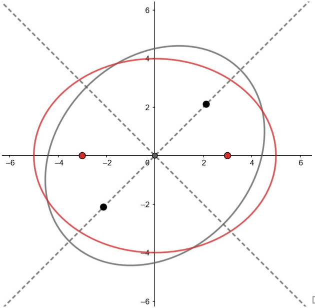
La elipse E se obtiene a partir de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ mediante una traslación del vector $\overrightarrow{v} = (h, k)$. Por lo tanto, la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

Obviamente, el centro es (h, k). $\square$

Ejercicio

Halla la ecuación de la elipse de centro $(0,0)$ cuyos focos están sobre la recta $y = x$, donde el semieje mayor es $a = 5$ y el semieje menor es $b = 4$.

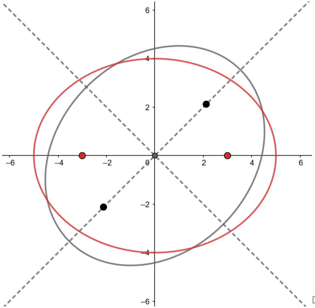


Ejercicio

Halla la ecuación de la elipse de centro $(0,0)$ cuyos focos están sobre la recta $y=x$, donde el semieje mayor es $a=5$ y el semieje menor es $b=4$.

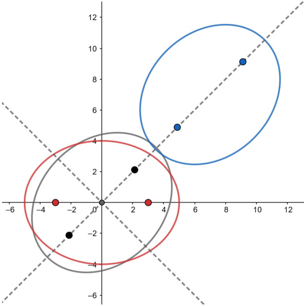
Solución

Si aplicamos un giro de ángulo $-\frac{\pi}{4}$ y centro $(0,0)$, entonces en el nuevo sistema de ejes x',y' la ecuación de la elipse es $\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{16}=1$. Como $x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y$ e $y'=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y$, obtenemos la ecuación $41x^2-18xy+41y^2=800$. $\square$



Ejercicio

Hallar la ecuación de una elipse de centro $(7,7)$ cuyos focos están sobre la recta $y=x$, donde el semieje mayor es $a=5$ y el semieje menor es $b=4$.

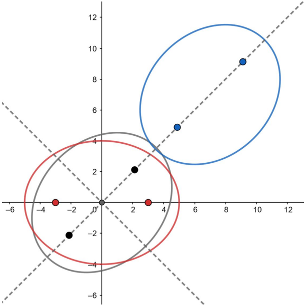


Ejercicio

Hallar la ecuación de una elipse de centro $(7,7)$ cuyos focos están sobre la recta $y = x$, donde el semieje mayor es $a = 5$ y el semieje menor es $b = 4$.

Solución

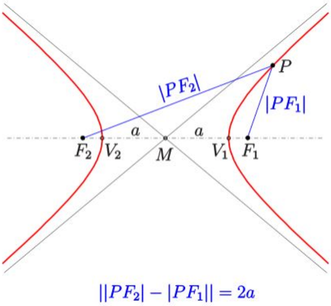
Si el centro de la elipse está en el origen, entonces procedemos como en el ejercicio anterior para obtener la ecuación $41x^2 - 18xy + 41y^2 = 800$. Por tanto, mediante una traslación obtenemos la ecuación solicitada,
$41(x-7)^2 - 18(x-7)(y-7) + 41(y-7)^2 = 800$. □



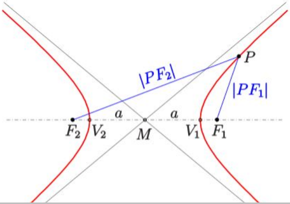
La hipérbola

La hipérbola

La *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos P de un plano tal que el valor absoluto de la diferencia entre las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante.



- Los puntos F_1 y F_2 se llaman focos de la hipérbola.
- Si el valor absoluto de la diferencia entre las distancias de un punto de la hipérbola a los dos focos es $2a$, entonces a es el semieje principal de la hipérbola.
- Si la distancia de F_1 a F_2 es $2c$, entonces c es la distancia focal de la hipérbola.
- El valor $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ se conoce como el semieje imaginario de la hipérbola.
- El punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ es el centro de la hipérbola.
- La hipérbola tiene los vértices V_1, V_2, que tienen distancia a al centro y son colineales con los focos.



Ejercicio

Demuestra que si una hipérbola tiene focos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ en el plano cartesiano, entonces viene dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solución

Sea $P = (x, y)$ un punto de la hipérbola. Por definición, $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

Solución

Sea $P=(x,y)$ un punto de la hipérbola. Por definición, $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$.

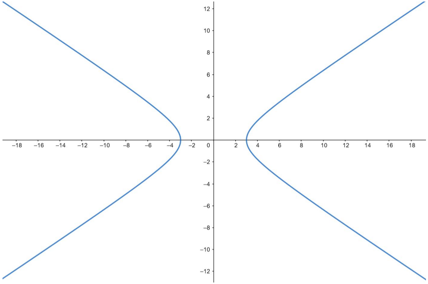
Solución

Sea $P=(x,y)$ un punto de la hipérbola. Por definición, $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}&=2a\\
\sqrt{(x+c)^2+y^2}&=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
(x+c)^2+y^2&=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\\
4xc-4a^2&=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
\frac{xc}{a}-a&=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
\left(\frac{xc}{a}-a\right)^2&=(x-c)^2+y^2\\
\frac{x^2c^2}{a^2}-2xc+a^2&=x^2-2xc+c^2+y^2\\
\frac{x^2(c^2-a^2)}{a^2}-y^2&=c^2-a^2\\
\frac{x^2b^2}{a^2}-y^2&=b^2\longrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.
\end{aligned}
$$

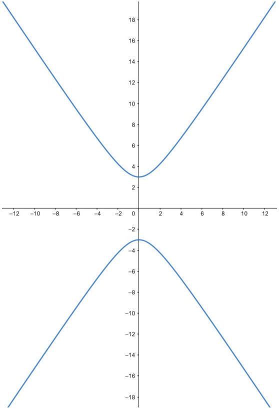
Ejemplo

La figura muestra la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.



Ejemplo

La figura muestra la hipérbola de ecuación $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$.



Ejercicio

Determina la ecuación de una hipérbola cuyos focos son $F_1 = (h, k-c)$ y $F_2 = (h, k+c)$ en el plano cartesiano.

Ejercicio

Determina la ecuación de una hipérbola cuyos focos son $F_1 = (h, k-c)$ y $F_2 = (h, k+c)$ en el plano cartesiano.

Solución

Consideramos un nuevo sistema de coordenadas de ejes x' e y' que son paralelos a los ejes x e y y origen (h,k). Un punto de coordenadas (x,y) en el sistema antiguo tiene coordenadas $(x',y') = (x-h, y-k)$ en el nuevo sistema. Por lo tanto, en el nuevo sistema la hipérbola tiene la ecuación $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$. Por lo tanto, la ecuación buscada es $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$. □

Observación

- La hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ satisface $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Por lo tanto, la hipérbola tiene asíntotas

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

- La hipérbola de la ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ satisface $y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{x^2 + b^2}$. Por tanto, en este caso la hipérbola tiene asíntotas

$$y = \pm\frac{a}{b}x.$$

Ejercicio

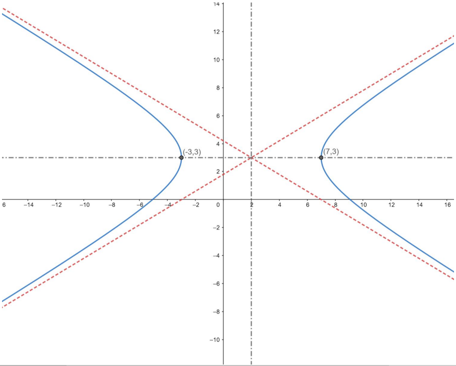
Determina las asíntotas y dibuja la gráfica de la hipérbola con ecuación $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$.

Ejercicio

Determina las asíntotas y dibuja la gráfica de la hipérbola con ecuación $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$.

Solución

Las asíntotas son $y - 3 = \pm\frac{3}{5}(x-2)$. $\square$



Ejercicio

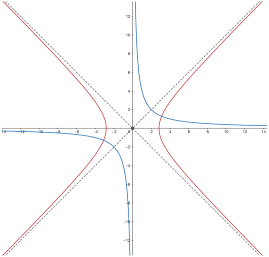
Hallar la ecuación de la hipérbola H' obtenida a partir de la hipérbola H de ecuación $x^2 - y^2 = a^2$ mediante una rotación de centro $(0,0)$ y ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Ejercicio

Hallar la ecuación de la hipérbola H' obtenida a partir de la hipérbola H de ecuación $x^2 - y^2 = a^2$ mediante una rotación de centro $(0,0)$ y ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Solución

Las ecuaciones de transformación son $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$, $y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$. sustituyendo en $x^2 - y^2 = a^2$, obtenemos que la ecuación de H' es $x'y' = \frac{a^2}{2}$. En la figura, $xy = \frac{a^2}{2}$ está en azul y $x^2 - y^2 = a^2$ está en rojo. □



Excentricidad y definición alternativa de las cónicas

Proposición

Sea $e > 0$ un número real, sea F un punto del plano euclidiano, y L una recta del plano que no contiene a F. Sea M el lugar geométrico de los puntos Q del plano tales que $\frac{d(Q,F)}{d(Q,L)} = e$.

(I) Si $e = 1$, entonces M es una parábola.

(II) Si $e < 1$, entonces M es una elipse.

(III) Si $e > 1$, entonces M es una hipérbola.

El número e se conoce como la excentricidad de la cónica.

Proposición

Sea $e > 0$ un número real, sea F un punto del plano euclidiano, y L una recta del plano que no contiene a F. Sea M el lugar geométrico de los puntos Q del plano tales que $\frac{d(Q,F)}{d(Q,L)} = e$.

(I) Si $e = 1$, entonces M es una parábola.

(II) Si $e < 1$, entonces M es una elipse.

(III) Si $e > 1$, entonces M es una hipérbola.

El número e se conoce como la excentricidad de la cónica.

Demostración

Por definición de parábola obtenemos (i). A continuación analizamos los otros casos.

Proposición

Sea $e > 0$ un número real, sea F un punto del plano euclidiano, y L una recta del plano que no contiene a F. Sea M el lugar geométrico de los puntos Q del plano tales que $\frac{d(Q,F)}{d(Q,L)} = e$.

(I) Si $e = 1$, entonces M es una parábola.

(II) Si $e < 1$, entonces M es una elipse.

(III) Si $e > 1$, entonces M es una hipérbola.

El número e se conoce como la excentricidad de la cónica.

Demostración

Por definición de parábola obtenemos (i). A continuación analizamos los otros casos. Sea O un punto de L y $p \in \mathbb{R}_+$ tales que $d(F,L) = d(F,O) = p$. Consideremos el sistema de coordinadas donde O es el origen, L y OF son los ejes (L es el eje y), de forma que F tiene coordenadas $(p,0)$.
Si $Q = (x,y)$ es un punto de M, entonces $\frac{d(Q,F)}{d(Q,L)} = e$ equivale a
$(x-p)^2 + y^2 = e^2x^2$. De ahí que $(1-e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$.

Demostración: Continuación, caso (ii)

Tenemos

$$(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0.$$

Si $e<1$, entonces $1-e^2>0$ y por eso

$$\left(1-e^2\right)\left(x-\frac{p}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2},$$

que representa una elipse de centro $\left(\frac{p}{1-e^2},0\right)$ donde $a=\frac{ep}{1-e^2}$ y $b=\frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}$.

Observa que $c=\frac{e^2p}{1-e^2}$, lo que implica que la excentricidad de la elipse es $e=\frac{c}{a}$.

Demostración: Continuación, caso (iii)

Tenemos

$$(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0.$$

Si $e>1$, entonces $1-e^2<0$ y por eso

$$(e^2-1)x^2-y^2+2px-p^2=0.$$

Por lo tanto, $(e^2-1)\left(x+\frac{p}{e^2-1}\right)^2-y^2=\frac{e^2p^2}{e^2-1}$, lo que representa una hipérbola de centro $\left(\frac{-p}{e^2-1},0\right)$, donde $a=\frac{ep}{e^2-1}$ y $b=\frac{ep}{\sqrt{e^2-1}}$.

Observa que $c=\frac{e^2p}{e^2-1}$, lo que implica que la excentricidad de la hipérbola es $e=\frac{c}{a}$.

Ecuación general de segundo grado

- El siguiente ejercicio muestra cómo el método de completamiento cuadrático nos permite identificar si una ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

sin términos mixtos xy corresponde a una cónica.

- Al mismo tiempo, un análisis de casos muestra que si esta ecuación corresponde a un lugar geométrico, entonces o bien es una cónica con ejes paralelos a los ejes de coordenadas, o bien es una recta, un par de rectas o un punto.

Ejercicio

Determina si la siguiente ecuación corresponde a una cónica.

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 13 = 0.$$

Ejercicio

Determina si la siguiente ecuación corresponde a una cónica.

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 13 = 0.$$

Solución

Por completamiento cuadrático obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 13 &= 0 \\ (x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) &= 4 \\ (x+1)^2 + 4(y-2)^2 &= 4 \\ \frac{(x+1)^2}{4} + (y-2)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación corresponde a una elipse de centro $(-1, 2)$ y semiejes $a = 2$ y $b = 1$.

Ejercicio

Determina si la siguiente ecuación corresponde a una cónica.

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 18 = 0.$$

Ejercicio

Determina si la siguiente ecuación corresponde a una cónica.

$$x^2+4y^2+2x-16y+18=0.$$

Solución

La ecuación $x^2+4y^2+2x-16y+18=0$ no corresponde a ninguna cónica, ya que equivale a $(x+1)^2+4(y-2)^2=-1$.

Observación

- Ya sabemos que las figuras geométricas no se deforman con las rotaciones.
- El siguiente resultado nos muestra cómo identificar si una ecuación de segundo grado corresponde a una cónica.
- Básicamente, el método consiste en obtener una ecuación de la cónica sin términos mixtos xy mediante una rotación de los ejes de coordenadas, para luego hacer completamiento cuadrático.

Proposición

La ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

puede ser transformada en una ecuación de a forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

sin término mixto $x'y'$, por una rotación de los ejes de coordenada de ángulo α, donde $\alpha = \frac{\pi}{4}$ siempre que $A = C$, mientras $\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$ para $A \neq C$.

Demostración

A partir de la rotación de los ejes de ángulo α, las ecuaciones de transformación son $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$ e $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$, y así la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2y + Dx + Ey + F = 0$ se transforma en la ecuación $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$, donde

- $A' = A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$,
- $B' = 2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = (C-A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha$,
- $C' = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$,
- $D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha$,
- $E' = E\cos\alpha - D\sin\alpha$,
- $F' = F$.

Por lo tanto,
$B' = 0$ si y solo si $A = C$ y $\alpha = \frac{\pi}{4}$ o bien $A \neq C$ y $\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$. □

Ejercicio

Representa en un sistema de coordenadas el lugar geométrico dado por la ecuación $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$.

Solución

En este caso, $A = 2$, $B = \sqrt{3}$ y $C = 1$. Por lo tanto, $\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \sqrt{3}$ y de ahí se obtiene $\alpha = \pi/6$. Por las ecuaciones de rotación

- $x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$,
- $y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$,

obtenemos $5x'^2 + y'^2 = 8$. Por lo tanto, se trata de la siguiente elipse.