Grau Enginyeria Matemàtica i Física

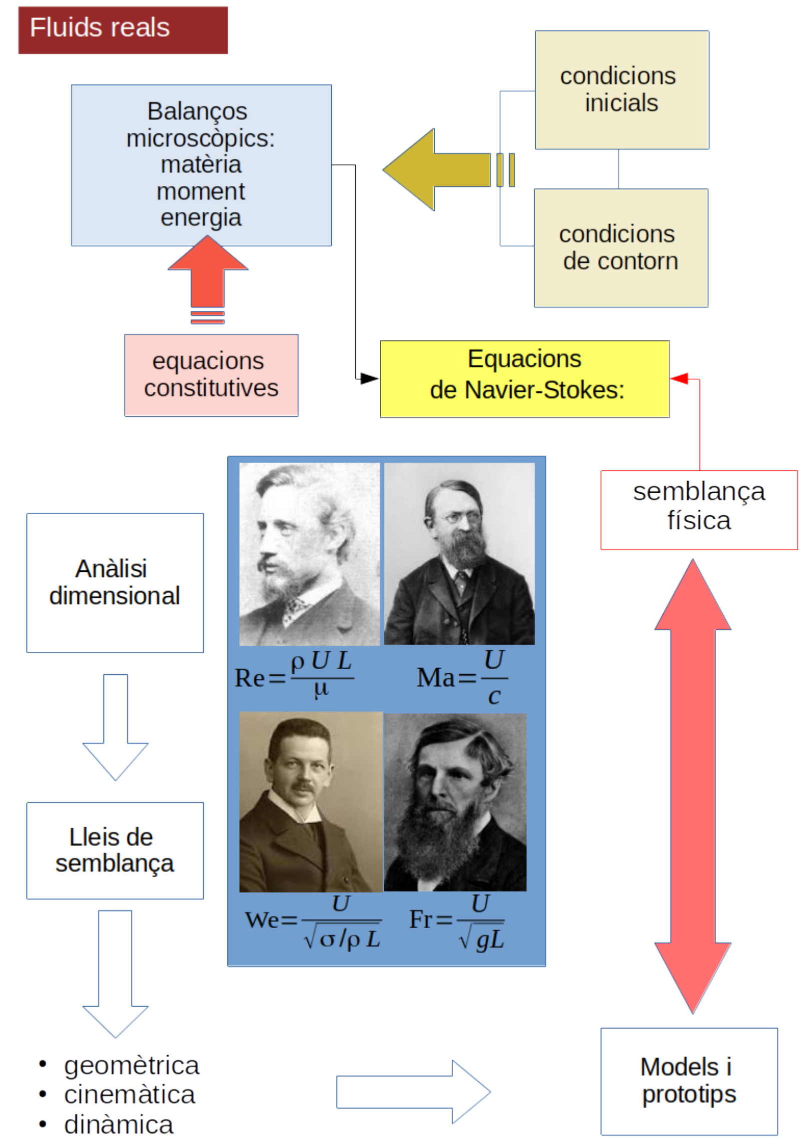
FÍSICA DE FLUIDS

Tema 4: Flux viscós

Clara Salueña

Objectius

- Especificar les equacions constitutives per als fluids reals
- Obtenir les equacions de Navier-Stokes
- Introduir les condicions de contorn (en particular, la condició de *no-slip*)
- Introduir l'anàlisi dimensional de les equacions de Navier-Stokes i aprendre a distingir els nombres adimensionals rellevants en un problema.



Equacions de transport d’un fluid simple

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$$

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v}\,\vec{v})=\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}-\rho g\,\vec{j}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\epsilon\vec{v})=\nabla\cdot(\vec{v}\cdot\vec{\vec{\sigma}})-\rho g\,\vec{j}\cdot\vec{v}+\dot{Q}$$

- Qualsevol fluid (incompressible o no, invíscid o no)
- ρ es la densitat material, $\rho\vec{v}$ la de moment, ε la d’energia
- de l’equació per a ε en prescindirem

però...quant val el tensor d’esforços $\vec{\vec{\sigma}}$?

Tensor d'esforços en un flux viscós

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \vec{\vec{\sigma}}_v$$

- En equilibri o en un flux invíscid, el tensor d'esforços només té components de pressió: els elements extradiagonals són tots zero
- Quan hi ha flux, apareixen esforços de tall, i les components extradiagonals no són zero. Els efectes del flux viscós es comptabilitzen dins del terme **σ_v**, el tensor d'esforços viscosos
- Una **equació constitutiva** és una relació empírica que especifica la dependència del tensor d'esforços.

Equació constitutiva d'un fluid newtonià (1)

- En un fluid viscós, l'esforç tangencial o de tall i la taxa de deformació o de tall estan relacionats:

$$\boxed{\vec{\vec{\sigma}}_v = 2\mu\left(\nabla\vec{v}\right)^s + \lambda\nabla\cdot\vec{v}\,\vec{\vec{1}}}$$

llei empírica de Navier-Poisson

- on la *taxa de deformació* s'expressa a partir del gradient de velocitat, $\nabla\vec{v}$

$$\nabla\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

  - $\left(\nabla\vec{v}\right)^s = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T\right)$ és la part simètrica de $\nabla\vec{v}$, on $\nabla\vec{v}^T$ és la matriu trasposta
  - la part antisimètrica es construeix amb la diferència,

$$\left(\nabla\vec{v}\right)^s = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{v} - \nabla\vec{v}^T\right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{v}\ (= \text{traça de } \nabla\vec{v})$$

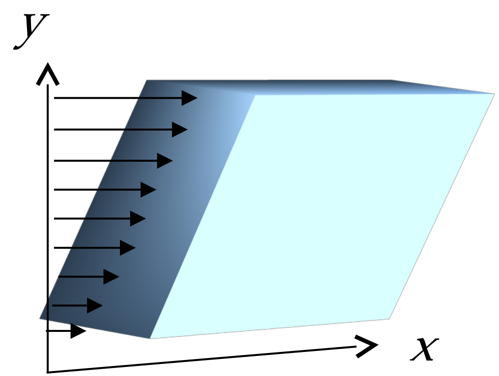
Qualsevol matriu es pot descomposar sempre en una part simètrica i una d'antisimètrica

Equació constitutiva d'un fluid newtonià (2)

Flux de Couette

$$\vec{v} = y\,\dot{\theta}\,\vec{i}$$

ctnt



Gradient de velocitat

$$\nabla\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla\cdot\vec{v}$ (= traça de $\nabla\vec{v}$) $=0$

Part simètrica de $\nabla\vec{v}$

$$(\nabla\vec{v})^s = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llei de Navier-Poisson

$$\vec{\vec{\sigma}}_v = 2\mu(\nabla\vec{v})^s + \lambda\,\nabla\cdot\vec{v}\,\vec{\vec{1}}$$

0

$$= 2\mu(\nabla\vec{v})^s = \mu\begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \mu\,\dot{\theta}$$

Llei de Newton de la viscositat

Equacions de Navier-Stokes per a flux **incompressible**

$$\nabla\cdot\vec{v}=0$$

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=\overbrace{\underbrace{-\nabla p}_{\text{part no viscosa}}+\underbrace{\mu\nabla^2\vec{v}}_{\text{terme viscós}}}^{\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}}-\rho g\vec{j}$$

- En substituir l'equació constitutiva, i utilitzar la condició de flux incompressible, obtenim les equacions de Navier-Stokes

$$\sigma_{v,ij}=2\mu\left(\nabla\vec{v}\right)^s_{ij}=2\mu\left[\frac{1}{2}\left(\partial_i v_j+\partial_j v_i\right)\right]$$

$$\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}_v=\partial_i\sigma_{v,ij}\hat{e}_j=\mu\partial_i\boxed{\left(\partial_i v_j+\partial_j v_i\right)}\hat{e}_j=\mu\left(\partial_i^2 v_j+\partial_i\partial_j v_i\right)\hat{e}_j$$

$$=\mu\left(\partial_i^2 v_j+\partial_j\underbrace{\partial_i v_i}_{\text{0 (flux incompressible!)}}\right)\hat{e}_j=\mu\partial_i^2 v_j\hat{e}_j=\mu\nabla^2\vec{v}$$

Condicions de contorn

- Les equacions de Navier-Stokes són un sistema d'equacions en derivades parcials, de primer ordre en el temps, i de segon ordre en l'espai, que precisen de condicions suplementàries per a la seva resolució
- Quan la densitat és constant, el camp de velocitat ha de satisfer l'equació $\nabla\cdot\vec{v}=0$, mentre que la pressió ha de satisfer

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\nu\nabla^2\vec{v}$$

ν: viscositat cinemàtica

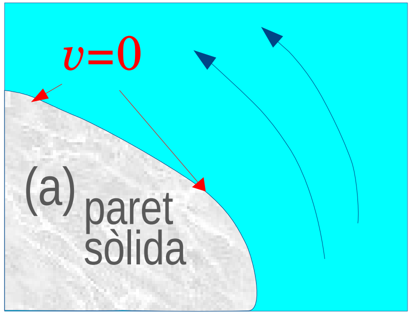
$$\nu=\frac{\mu}{\rho}$$

- Els algoritmes utilitzats en CFD per a flux incompressible operen d'aquesta forma
- En ser de primer ordre en el temps, haurem d'especificar una condició inicial per al camp de velocitat
- En ser de segon ordre en l'espai, haurem d'especificar a més a més condicions de contorn per resoldre el problema

Condicions de contorn en MF

Condicions de contorn típiques en MF	
Dirichlet	$\vec{v}=0$ (sobre la frontera)
Neumann	$\vec{n}\cdot\nabla\vec{v}=0$ ($\vec{n}$ vector normal a la frontera)
Robin	$\vec{n}\cdot\nabla T=-H(T-T_\infty)$, ($T_\infty$, H constants)

Les condicions de tipus Robin no solen utilitzar-se per a v, s'utilitzen més aviat per a T



https://www.youtube.com/watch?v=cUTkqZeiMow

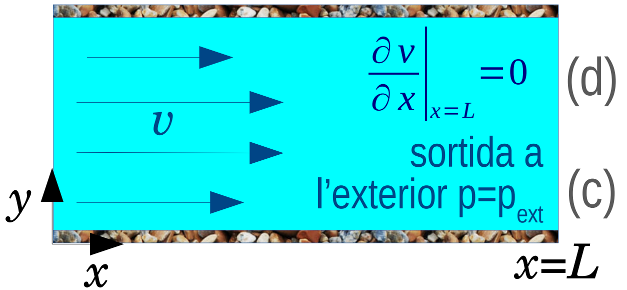
(a) La condició de *no-slip*, v=0, és de Dirichlet

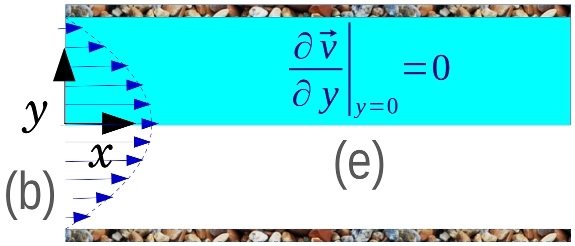
(b) A l'entrada d'una canonada, es pot imposar un perfil de velocitats determinat

(c) La sortida lliure en un contorn obert es pot imposar a través d'una condició de Dirichlet per a la pressió, p= p_{ext}

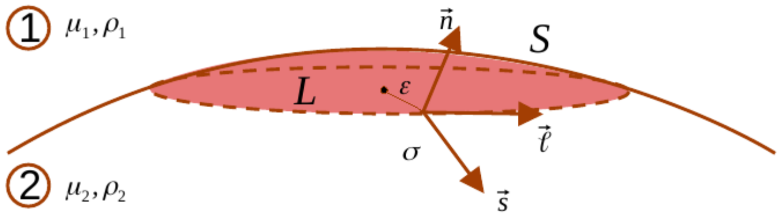
(d) En una sortida que no va a p coneguda, la condició de Neumann $\partial v / \partial x = 0$ s'utilitza per donar continuïtat al flux sense pertorbar-lo

(e) Per imposar una simetria especular respecte d'un pla, també s'utilitza una condició de Neumann: per exemple per rendibilitzar el temps de càlcul estalviant de calcular una meitat del domini





Condicions de contorn entre dos fluids immiscibles



$\vec{\vec{\pi}}$ representa aquí el tensor d'esforços, per no confondre el símbol amb σ, tensió superficial

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}\vec{v})\right] dV = \int_V \rho \vec{g}\, dV + \oint_S \vec{\vec{\pi}} \cdot \vec{n}\, dS + \oint_L \sigma \vec{s}\, d\ell$$

- Les integrals de volum (els termes que tenen la densitat) tendeixen a 0 quan ε → 0 *més depressa* que les integrals de superfície ($V \sim \varepsilon^3$, mentre que $S \sim \varepsilon^2$).
- En aquest límit, $$0 \approx \int_S (\vec{\vec{\pi}}_1 - \vec{\vec{\pi}}_2) \cdot \vec{n}\, dS + \int_L \sigma \vec{s}\, d\ell$$
- Les coses se simplifiquen si no cal tenir en compte la tensió superficial (grans extensions de fluid) : $\vec{\vec{\pi}}_1 \cdot \vec{n} = \vec{\vec{\pi}}_2 \cdot \vec{n}$, vol dir **«l'esforç és continu en travessar la interfície»**.
- L'esforç té dues components, una de normal, que condueix a $$-p_1 + 2\mu_1 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_1 = -p_2 + 2\mu_2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_2$$ (hem triat $\vec{n} = \vec{k}$), i una altra de tangencial, $$\mu_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_1 = \mu_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_2$$

Anàlisi dimensional

- L'anàlisi dimensional es útil per dissenyar experiments reals a escala
- Les lleis de la natura són relacions vàlides independentment de les unitats utilitzades
- Per això és apropiat escriure-les en funció de magnituds adimensionals (sense unitats)
- Hi ha 3 magnituds fonamentals en mecànica: M, L, T
- En general, triem ρ, L, U com a magnituds bàsiques de referència

L'anàlisi dimensional proporciona **lleis d'escala**, amb les quals podem convertir les dades obtingudes a partir d'una maqueta en informació útil per al disseny de prototipus més grans

https://www.nrc-cnrc.gc.ca/eng/achievements/highlights/2003/tacoma_bridge.html

Teorema Π de Buckingham

- Les lleis de la natura són relacions vàlides independentment de les unitats utilitzades
- Teorema Π (pi) de Buckingham:

Si una equació dimensionalment homogènia (1) implica n variables, pot reduir-se a una relació entre n − r grups adimensionals o grups Π (2), on r es el nombre mínim de dimensions bàsiques de referència, requerides per descriure les n variables

$$f(q_1, \ \dots \ q_n) = 0 \qquad (1)$$

n (#variables)

r (#dimensions bàsiques de referència)

$$\phi(\Pi_1, \ \dots \ \Pi_{n-r}) = 0 \qquad (2)$$

Exemple d'aplicació

- En un molí de vent, la velocitat angular Ω depèn del diàmetre D, la velocitat U, la densitat de l'aire ρ, el nombre de pales N i la raó entre l'alçada H i el gruix de la capa límit atmosfèrica L:
  $\Omega = f(D, U, \rho, N, H/L)$.
  Els efectes de la viscositat son menyspreables
- Reescriurem la funció f en forma adimensional, mitjançant el teorema Π de Buckingham
- MLT són les dimensions bàsiques, però M només apareix en una de les 6 variables: la densitat ρ. Per tant, M ha de desaparèixer com a variable básica de referència, i en total en queden només 5

n = 6 variables

r= 3 dimensions bàsiques

n - r = 3 grups Π

matriu dimensional

	Ω	D	U	ρ	N	H/L
M	0	0	0	1	0	0
L	0	1	1	-3	0	0
T	-1	0	-1	0	0	0
	T^{-1}	L	LT^{-1}	ML^{-3}	1	1

Exemple d'aplicació

- En un molí de vent, la velocitat angular Ω depèn del diàmetre D, la velocitat U, la densitat de l'aire ρ, el nombre de pales N i la raó entre l'alçada H i el gruix de la capa límit atmosfèrica L:
  $\Omega = f(D, U, \rho, N, H/L)$.
  Els efectes de la viscositat son menyspreables
- Reescriurem la funció f en forma adimensional, mitjançant el teorema Π de Buckingham
- MLT són les dimensions bàsiques, però M només apareix en una de les 6 variables: la densitat ρ. Per tant, M ha de desaparèixer com a variable básica de referència, i en total en queden només 5
- Podem adoptar D,U com a dimensions bàsiques
- La matriu dimensional té rang 2

n = ~~6~~ 5 variables

r= ~~3~~ 2 dimensions bàsiques

n - r = 3 grups Π

matriu dimensional

	Ω	D	U	~~ρ~~	N	H/L
~~M~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
L	0	1	1	~~-3~~	0	0
T	-1	0	-1	~~0~~	0	0
	T^{-1}	L	LT^{-1}	ML^{-3}	1	1

podrem formar 5-2=3 grups Π

- Π_1 = N, que ja és adimensional (nombre de pales),
- Π_2 = H/L, que és també adimensional,
- Π_3 ha de ser una combinació adimensional entre Ω, U i D (les altres 3 variables)
- Com que [Ω]=T^{-1}, i l'escala de temps la construïm amb D/U,

$$\Pi_3 = \Omega D/U$$

- La funció adimensional que busquem és

$$\frac{\Omega D}{U} = \phi\left(N, \frac{H}{L}\right)$$

- *Aleshores, tan sols haurem de fer control de paràmetres sobre aquests 3 grups, per caracteritzar el comportament de la velocitat angular: amb això es redueix molt el nombre d'experiments que cal realitzar*

Nombres adimensionals en MF

- Els nombres adimensionals són variables Π (adimensionals) que caracteritzen els problemes en MF
- Suposem un exemple en què intervenen alhora totes les possibles forces sobre un flux: de pressió (p), de gravetat (g), de fricció (μ), d'elasticitat (k, mòdul de compressibilitat) i de tensió superficial (σ)
- La resultant F es la suma de totes les forces, que dependrà de les variables {p, g, μ, k, σ}, i de {L, ρ, U} (com a dimensions bàsiques representatives de MLT)

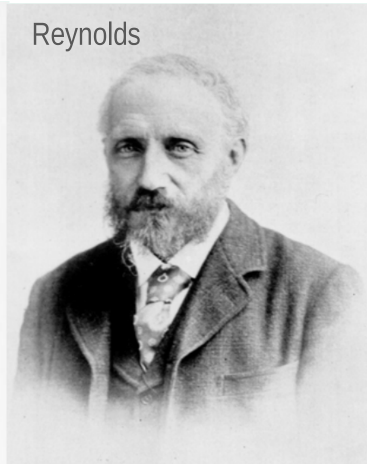
$$F= f(\rho, L, U, p, g, \mu, k, \sigma)$$

No confondre el paràmetre de tensió superficial σ amb el tensor d'esforços, encara que sigui la mateixa lletra

- Com que F té dimensions de MLT^{-2}, l'escalem amb el producte de (ρL^3), L i U^2/L^2.
- Les variables p, g, μ, k, σ han d'escalar-se d'acord amb les seves dimensions

Dimensions	Dimensions bàsiques	Magnituds adimensionals
$[p] = MT^{-2}L^{-1}$	$M = [\rho]\,[L]^3$	$\dfrac{p}{\rho U^2}$
$[g] = LT^{-2}$	$L = [L]$	$\dfrac{gL}{U^2}$
$[\mu] = MT^{-1}L^{-1}$	$T = [L][U]^{-1}$	$\dfrac{\mu}{\rho L U}$
$[k] = MT^{-2}L^{-1}$		$\dfrac{k}{\rho U^2}$
$[\sigma] = MT^{-2}$		$\dfrac{\sigma}{\rho L U^2}$

Nombres adimensionals més importants en MF



$$\mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}} \qquad \mathrm{Re} = \frac{U\,L\rho}{\mu} \qquad \mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho U^2} \qquad \mathrm{Ma} = \frac{U}{c} = \frac{U}{\sqrt{K/\rho}} \qquad \mathrm{We} = \frac{U}{\sqrt{\sigma/(\rho L)}}$$

- Les magnituds adimensionals que hem trobat a l'exemple anterior donen lloc als **nombres adimensionals** clàssics de la MF
- La llista no és exhaustiva!!
- Queda saber com comparar el model i el prototipus: concepte de **semblança**

Semblança

- Model escala real ⟷ prototipus
- **Geomètrica:** mateix factor d'escala en les 3 dimensions de l'espai
- **Cinemàtica:** existeix un factor d'escala temporal pel qual les partícules fluides del prototipus ocupen al llarg del temps posicions homòlogues a les del model real
- **Dinámica:** basada en els nombres adimensionals

  La semblança dinàmica mai no és perfecta, cal sempre seleccionar els fenòmens més rellevants en cada problema
- Semblança **física:** basada en l'adimensionalització de les equacions de transport

Semblança física

- Es basa en l'adimensionalització de les equacions de transport, junt amb les condicions de contorn del problema
- Utilitzem U, ρ, L per adimensionalitzar les variables

Equacions de Navier- Stokes

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} - \rho g \vec{j}$$

Condicions de contorn

$\vec{v} = 0$ sobre parets sòlides

$\vec{v},\ p$ coneguts a l'entrada i a la sortida del domini

Semblança física

- Es basa en l'adimensionalització de les equacions de transport, junt amb les condicions de contorn del problema
- Utilitzem U, ρ, L per adimensionalitzar les variables

Equacions de Navier- Stokes

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} - \rho g \vec{j}$$

Condicions de contorn

$\vec{v} = 0$ sobre parets sòlides

$\vec{v}, p$ coneguts a l'entrada i a la sortida del domini

$$\vec{r}^* = \frac{\vec{r}}{L}$$

$$t^* = t \frac{U}{L}$$

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{U}$$

$$p^* = \frac{p + \rho g z}{\rho U^2}$$

$$\nabla^* = L \nabla$$

Semblança física

- Es basa en l'adimensionalització de les equacions de transport, junt amb les condicions de contorn del problema
- Utilitzem U, ρ, L per adimensionalitzar les variables

Equacions de Navier- Stokes

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} - \rho g \vec{j}$$

Condicions de contorn

$\vec{v} = 0$ sobre parets sòlides

$\vec{v}, p$ coneguts a l'entrada i a la sortida del domini

$$\vec{r}^* = \frac{\vec{r}}{L}$$

$$t^* = t\frac{U}{L}$$

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{U}$$

$$p^* = \frac{p + \rho g z}{\rho U^2}$$

$$\nabla^* = L \nabla$$

$$\nabla^* \cdot \vec{v}^* = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \cdot \nabla^* \vec{v}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^{*2} \vec{v}^*$$

$\vec{v}^* = 0$ parets sòlides

$\vec{v}^*, p^*$ conneguts

Equacions adimensionalitzades, amb Re com a únic paràmetre

Fi de la presentació