

# La capa límit

# Índex

<b>Contingut</b>	<b>2</b>
8.1 Introducció i objectius	2
8.2 Aproximació de <i>capa límit</i>	3
8.3 Equacions de la capa límit	6
8.4 Solució de Blasius de la capa límit en una placa plana	11
8.5 Diferents mesures de l'espessor de la capa límit	19
8.6 Separació de la capa límit	24
<b>Bibliografia</b>	<b>27</b>
<b>Complements formatius</b>	<b>28</b>
<b>Exercicis</b>	<b>29</b>

# Contingut

## 8.1 Introducció i objectius

Què és la capa límit? De fet la noció de capa límit ha sortit més o menys explícitament al tema anterior, però no hem arribat a definir aquest concepte al Tema 7. La veritat és que la capa límit no existeix, és una abstracció matemàtica. Procedeix de la impossibilitat de resoldre exactament les equacions de Navier-Stokes en un cas general. Com sabem, aquest és un problema no lineal d'equacions en derivades parcials. Hem vist amb detall al tema anterior que el flux invíscid no és capaç de descriure el flux al voltant d'objectes: les solucions del flux invíscid no satisfan la típica condició de contorn sobre parets sòlides (condició de *no-slip*), el flux real a prop de l'objecte no s'assembla al que s'obté del cas invíscid, i amb això tot el flux es veu pertorbat.

Realment és així, –tot el flux es veu pertorbat? És tan diferent el flux invíscid del viscós, si ens allunyem prou de les parets? I si és així, per què funciona tan bé l'aproximació invíscida en hidràulica, amb alguna incorporació empírica com les pèrdues de càrrega?

La resposta és “depèn”. Però veurem que, en moltes ocasions, no difereixen tant. La prova és l'anàlisi del flux al voltant d'una esfera del tema anterior: entre el flux invíscid i el flux viscós hi ha poques diferències si ens allunyem de les parets (recordem però, que la solució de Stokes és per a  $Re \approx 0$ ). El primer que va proposar aquesta descomposició, en un flux majorment invíscid lluny d'objectes i parets, i una regió propera a ells on dominen els efectes viscosos, va ser Prandtl. I amb això va obrir tot un món de possibilitats per comprendre el flux viscós, i resoldre l'enigma que tenia la majoria dels fluidomecànics de l'època absolutament perplexos.

Els objectius d'aquest últim tema són els següents

- ▶ Comprendre el concepte de capa límit
- ▶ Obtenir les equacions de capa límit
- ▶ Obtenir la solució de Blasius de la capa límit laminar del flux sobre una placa plana
- ▶ Descriure els efectes dels gradients de pressió i les condicions de se-

paració de la capa límit.

- ▶ Estudiar el balanç integral de quantitat de moviment i el gruix de la capa límit.
- ▶ Resoldre numèricament a Fluent el flux sobre una placa plana i comparar-lo amb la solució de Blasius (activitat)

Aquest tema es basa en els llibres de (Gerhart, Gerhart, i Hochstein, 2016, pp. 405-409), (White, 2011, pp. 457-482), (Panton, 2013, pp. 418-428.) y (Landau i Lifshitz, 1985, pp. 163-194).

## 8.2 Aproximació de *capa límit*

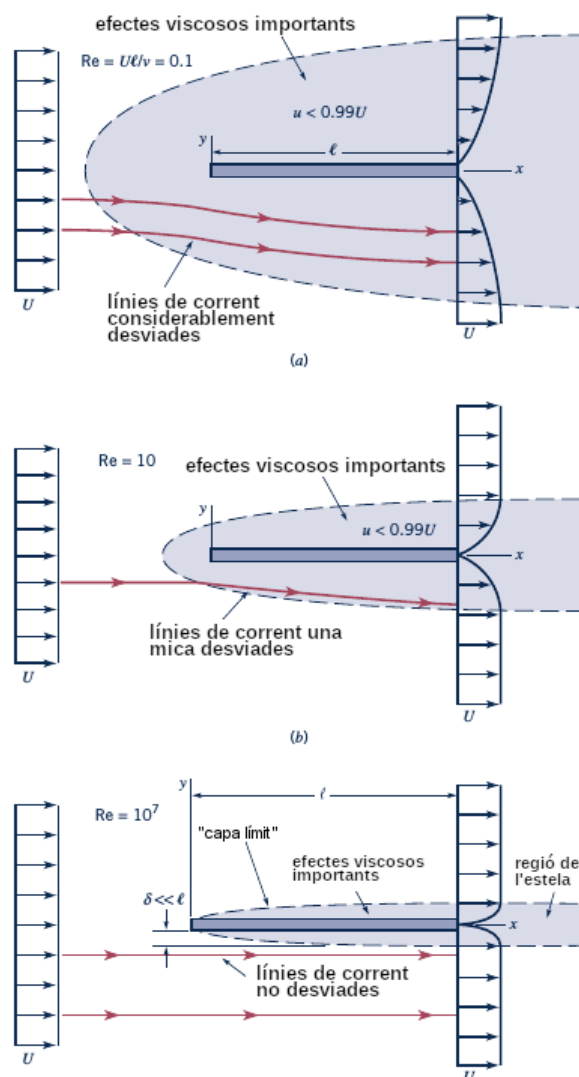
Com apuntàvem a la introducció, la capa límit és una aproximació, una manera d'atacar un problema que altrament seria inabordable. Fixa't en l'equació en derivades parcials per al balanç de moment:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{v}$$

Si  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , obtenim l'equació per al flux invíscid. Si  $\text{Re}$  és qualsevol cosa excepte  $\infty$ , l'equació en derivades parcials no és de primer ordre en l'espai, sinó de segon, perquè l'operador laplaciana és un operador en derivades segones. Les equacions de Navier-Stokes passen de constituir un sistema *hiperbòlic*, a un *parabòlic*. El caràcter de les solucions, la forma de les solucions, són completament diferents. Això és així perquè eliminar, o no, el terme de viscositat  $\frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{v}$  enfront del terme inercial,  $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ , és determinant. En ser els gradients *espacials*, apareixen regions de l'espai on uns o altres termes són importants. Aquesta va ser la contribució més gran de Prandtl a la mecànica de fluids i a moltes altres disciplines que s'han servit de les tècniques de capa límit.

Al Tema 7 vam veure que el *creeping flow* al voltant d'una esfera venia caracteritzat per una funció de corrent que contenia un terme de llarg abast,  $1/r$ . Quan diem que alguna cosa és de llarg abast, és que els seus efectes es deixen sentir ben lluny. Certament, a  $r \rightarrow \infty$  el terme  $1/r$  s'anul·la, però fora d'aquí no estem en condicions de prescindir del seu efecte: a  $\text{Re} = 0$  estrictament, la "capa límit" és infinita: ni és capa, ni és límit. El terme "capa límit" fa referència a alguna cosa amb un gruix relativament discret. El que l'aprima és el valor de  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . En aquest límit, en una regió important del

domini, el terme inercial  $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$  és dominant davant de  $1/\text{Re} \nabla^2 \vec{v}$  i la capa límit és molt fina (figura 1). Sempre que eliminem un terme d'una equació diferencial, ho fem *respecte d'un altre*; aquesta és la tècnica del *balanç dominant*, que dóna lloc al tractament de *capa límit*. Després, el que sol fer-se és un *matching* d'expansions asimptòtiques de les dues solucions: la del límit llunyà (*outer solution* en anglès), on no hi ha parets i el flux es pot prendre com a invíscid ( $\text{Re} \rightarrow \infty$ ) i la del límit proper (*inner solution*), on els efectes de la viscositat són importants. És semblant a com es perfora un túnel, amb dues tuneladores des d'extrems diferents.

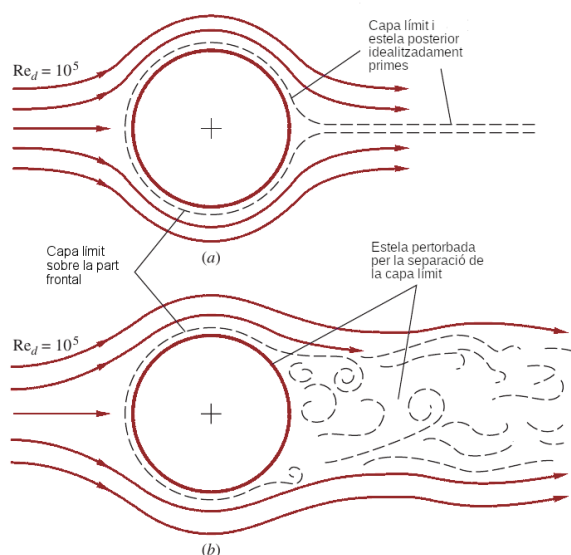


**Fig. 1.** Perfils de velocitat del flux sobre una placa plana, per a diferents números de Reynolds. Observa la regió d'influència de la viscositat, ombrrejada al voltant de la placa. Aquesta és la capa límit. A mesura que  $\text{Re}$  augmenta (de dalt a baix), s'estreny i el canvi en la velocitat, que passa de  $U$  lluny de la placa a 0 just sobre la placa, es torna més abrupte. Font: (Gerhart et al., 2016, p. 488)

L'efecte de la viscositat és difondre la vorticitat que es crea a prop de les

parets sòlides. Sabem que els esforços tangencials sobre el fluid, creats pel contacte amb un contorn sòlid, són font de vorticitat (Tema 4). Aquesta difusió té lloc precisament a la capa límit.

Hi ha situacions en què el flux no és simplement una superposició dels dos límits. Per exemple, quan es produeix la separació de la capa límit ([ESFTV, 2012](#)). Pots revisar aquesta situació al vídeo de l'apartat **Complements** del Tema 7 ([Abernathy, F., 2009](#)), on s'analitzaven experimentalment els règims del flux al voltant d'un cilindre, en augmentar  $Re$ . A partir d'un cert valor del  $Re$ , la capa límit de separa del cilindre, deixant una àmplia estela on els efectes viscosos són molt importants, molt diferent de la que prediu la teoria invíscida (figura 2).



**Fig. 2.** La idealitzada situació en què les línies de corrent del flux invíscid recorren simètriques a banda i banda del cilindre (a) no es compleix en realitat, ni tan sols aproximadament, quan el nombre de Reynolds augmenta. Al contrari, quan se separa la capa límit (b), la zona on els efectes viscosos són importants s'estén per darrere del cilindre i interactua fortament amb la resta del flux aigües avall, en una estela la influència de la qual es deixa sentir a grans distàncies del objecte. Font: ([White, 2011](#), p. 459)

Un dels èxits més grans de la teoria de la capa límit de Prandtl és explicar la separació del flux que té lloc en un gradient de pressió advers (positiu), la qual cosa tractarem a l'apartat 8.6. Abans de 1904, quan Prandtl va publicar els seus treballs, ningú no imaginava que capes de tan fina espessor poguessin tenir un efecte tan important com el que produeix la separació

del flux. Tot i això, ni tan sols avui la teoria és capaç de predir amb detall el comportament precís del flux separat i la seva interacció amb la resta del flux.

### 8.3 Equacions de la capa límit

Les equacions de Navier-Stokes per a un flux incompressible estacionari,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v}\end{aligned}\quad (1)$$

seran el punt de partida per analitzar el problema d'un flux bidimensional al llarg d'una placa, que per conveniència se situa al semiplà  $y = 0, x > 0$  (figura 3). Així mateix, hem pres les equacions en la seva forma dimensional, on  $\nu = \mu/\rho$  representa la viscositat cinemàtica del fluid. Tampoc no hi hem inclòs la força de la gravetat, que caldria considerar només si els efectes de la flotació (variacions de densitat en el fluid) fossin importants.



**Fig. 3.** Placa plana immersa en un flux extern  $U$ .

En aquesta geometria cartesiana, les equacions 1 prenen la forma següent,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right),\end{aligned}\quad (2)$$

i les condicions de contorn que han de satisfer les variables  $v_x$ ,  $v_y$  i  $p$ , són les típiques de *no-slip* sobre el contorn sòlid, mentre que a la regió allunyada de la placa, la velocitat ha de ser la del flux extern no pertorbat –un flux invíscid,  $\vec{v} = U\vec{i}$  si la solució invíscida és un flux uniforme (figura 1). En

un cas general, el camp de velocitats invíscid pot ser qualsevol solució: la geometria no és crucial aquí, i la discussió seria similar per a qualsevol altre problema de capa límit (flux sobre una esfera, per exemple). Tornarem amb més detall sobre les condicions de contorn més endavant.

Prandtl correctament va suposar que, si el nombre de Reynolds era gran, la capa havia de ser molt prima. Anomenem  $\delta$  al seu gruix. Les escales típiques del nostre problema són llavors

- ▶  $U$ , l'escala de velocitat paral·lela a la placa,  $v_x$ .
- ▶  $L$ , una escala de longitud al llarg de la placa, una mesura de la distància a comptar de  $x = 0$ , fins al punt on observem el flux. *És una escala força arbitrària, ja que no hi ha cap longitud característica al problema.* Tornarem sobre això més endavant;
- ▶  $\delta$ , el gruix de la placa, que és l'escala de longitud associada als gradients en la direcció  $y$
- ▶ Encara no sabem quina és l'escala característica de la velocitat perpendicular a la placa,  $v_y$ , però l'anomenarem  $\alpha$ .
- ▶ Podem suposar que l'escala característica de la pressió és  $\rho U^2$  (veure Tema 4).

Farem servir aquestes escales per adimensionalitzar les equacions –per això no ho hem fet abans– utilitzant les tècniques típiques de capa límit, el *balanç dominant*. Si introduïm les variables adimensionals  $v_x^* = v_x/U$ ,  $v_y^* = v_y/\alpha$ ,  $x^* = x/L$ ,  $y^* = y/\delta$ , l'equació de continuïtat estableix que

$$\frac{U}{L} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\alpha}{\delta} \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = 0$$

Aleshores,

$$\alpha \sim \frac{U\delta}{L}$$

És a dir,  $v_y \ll v_x$  si  $\delta \ll L$ : dins de la capa límit, la velocitat típica perpendicular a la placa és molt menor que l'escala de velocitat a la direcció paral·lela,  $U$ , a distàncies  $L \gg \delta$ .

Farem servir la mateixa estratègia per veure de quin ordre són els termes



a l'equació de transport del moment a l'eix  $y$ ,

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

$$O\left(U \frac{U\delta}{L} \frac{1}{L}\right) + O\left(\frac{U\delta}{L} \frac{U\delta}{L} \frac{1}{\delta}\right) = O\left(\frac{1}{\rho} \frac{\rho U^2}{\delta}\right) + O\left(\nu \frac{U\delta}{L} \frac{1}{L^2}\right) + O\left(\nu \frac{U\delta}{L} \frac{1}{\delta^2}\right)$$

Multiplicant per  $\delta$  i dividint per  $U^2$ , l'equació anterior queda

$$O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) = O(1) + O\left(\frac{\nu}{UL} \frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\nu}{UL}\right).$$

En l'equació anterior reconeixem  $\nu/UL$  com el paràmetre adimensional rellevant,  $1/Re$ ,

$$O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) = O(1) + O\left(\frac{1}{Re} \frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{1}{Re}\right) \quad (3)$$

El paràmetre  $1/Re$  és “petit”: és el paràmetre d'expansió. En una expansió de capa límit, sempre es reconeix un paràmetre d'expansió, prou petit, i es fa servir per detectar de quin ordre són els diferents termes que contribueixen a una equació. De la consideració de la seva importància, se'n dedueix el balanç de termes del mateix ordre (balanç dominant). A la fórmula 3, els dos darrers termes de l'equació són molt petits, i tendeixen a 0 quan  $1/Re \rightarrow 0$ . Però el mateix passa als dos primers termes del primer membre, ja que  $\delta \rightarrow 0$  si  $1/Re \rightarrow 0$ , encara que no sabem exactament a quin ritme tendeix a 0 l'espessor de la capa límit  $\delta$ , quan  $Re$  tendeix a infinit. En canvi, el terme de pressió és d'ordre  $O(1)$  i, per tant, és dominant. Per això, en ordre  $O(1)$  —també es diu “en ordre 0 en  $1/Re$ ”, perquè l'exponent de  $Re$  en aquest terme és 0,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

i la pressió no depèn de  $y$ . Només pot dependre de  $x$ . Per tant,  $p \approx p(x)$ .

Aplicarem la mateixa tècnica a l'equació per a  $v_x$ ,

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$O\left(UU \frac{1}{L}\right) + O\left(\frac{U\delta}{L} U \frac{1}{\delta}\right) = O\left(\frac{1}{\rho} \frac{\rho U^2}{L}\right) + O\left(\nu U \frac{1}{L^2}\right) + O\left(\nu U \frac{1}{\delta^2}\right)$$

Ara multipliquem tota l'equació per  $\delta^2$  i la dividim per  $L$  i per  $U^2$ . Per quina quantitat multipliquem i dividim tota l'equació no és important: el que vo-

lem investigar de debò és la importància relativa dels termes de l'equació, quan  $1/\text{Re}$  és petit. L'equació que ens queda és aleshores

$$O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) = O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{1}{\text{Re}}\right).$$

De totes aquestes contribucions, definitivament la del segon terme del segon membre es pot menysprear, ja que és molt menor que la de qualsevol dels altres termes. Però ara tenim un petit problema: la quantitat  $\delta^2/L^2$ , és més gran, més petita, o del mateix ordre que  $1/\text{Re}$ ? No ho sabem, cal explorar cadascuna de les tres possibilitats,

- ▶ Si  $\delta^2/L^2 \gg 1/\text{Re}$ , l'últim terme del segon membre es pot eliminar també, i queda en l'equació per a  $v_x$  un balanç entre els termes del flux invíscid, la solució de la qual sabem que no pot satisfer la condició de *no-slip* sobre la placa! Estem igual que al principi. Per això, aquest supòsit no pot ser correcte.
- ▶ Si  $\delta^2/L^2 \ll 1/\text{Re}$ , queda a l'equació per a  $v_x$  un únic terme,  $\partial^2 v_x / \partial y^2 = 0$ , la solució del qual és un perfil lineal, que s'ha d'anul·lar a  $y = 0$ , sobre la placa:  $v_x = Cy$ , per satisfer la condició de *no-slip*. Malauradament aquesta solució té un gradient constant,  $C$ , que no pot connectar suauament amb la solució invíscida (si el flux és uniforme fora de la capa límit, per exemple, el gradient és nul). Com que els esforços tangencials no serien continus, hem de rebutjar també aquesta possibilitat.
- ▶ L'única possibilitat raonable és que  $\delta^2/L^2 \approx 1/\text{Re}$ . Aleshores, ha de ser

$$\boxed{\frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{1}{\text{Re}}}} \quad (4)$$

i per tant ja sabem quina és la dependència de l'espessor de la capa límit amb el nombre de Reynolds.

El flux invíscid encara proporciona un resultat important: la dependència del camp de pressió en la variable  $x$ , dins de la capa límit. Explicarem això amb detall. L'escala de pressió és  $\rho U^2$ , on  $U$  és la magnitud de la velocitat del camp llunyà. La solució invíscida del camp de velocitat, anomenem-la  $\vec{v}_{inv}$ , es fa igual a  $U\vec{i}$  quan  $y \rightarrow \infty$ , és a dir lluny de l'objecte. En un problema de capa límit, es comença per trobar la solució exterior, és a dir la *outer solution*  $\vec{v}_{inv}$ , amb les tècniques habituals del flux invíscid. En general,  $\vec{v}_{inv}$  satisfà l'equació de Bernouilli, que és la primera integral de les equacions

per al flux invíscid,

$$\frac{p_{inv}}{\rho} + \frac{v_{inv}^2}{2} = C_{tnt}$$

i conté la solució del camp de pressió invíscid  $p_{inv}$ , la qual ha de connectar a ordre zero a  $1/Re$ , amb la solució de la capa límit, o solució interior (*inner solution*) en apropar-nos a la placa. Si  $v_{inv}$  **no depèn de**  $x$ , per exemple, en el cas de la placa plana immersa en un flux uniforme, la solució invíscida **NO depèn** de  $x$ , ja que  $v_{inv} = U$  és constant,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp_{inv}}{dx} + v_{inv} \frac{dv_{inv}}{dx} = 0.$$

Per tant, a l'ordre més baix en  $1/Re$  dins de la capa límit,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \approx -\frac{1}{\rho} \frac{dp_{inv}}{dx} = v_{inv} \frac{dv_{inv}}{dx}.$$

Amb aquestes aproximacions, les equacions per a la capa límit se simplifiquen enormement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= v_{inv} \frac{dv_{inv}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Passem a analitzar les condicions de contorn. Usualment, les condicions de contorn en la capa límit són

$$\begin{aligned} v_x(x=0, y) &= v_{inv}(x=0, y) \\ v_x(x>0, y=0) &= 0, \quad v_y(x>0, y=0) = 0 \\ v_x(x, y \rightarrow \infty) &= v_{inv}(x, y=0) \end{aligned} \quad (6)$$

on  $x=0$  és el punt “inicial”, just a l'esquerra de l'objecte, la localització del qual, per simplicitat, assimilarem amb la de l'inici de la placa. D'altra banda,  $v_{inv}(x, y=0)$  és el valor que pren la velocitat del flux invíscid **sobre la placa**. La línia central de les condicions de contorn **6** són les condicions de *no-slip* sobre la placa. La darrera línia expressa el *matching* de les solucions interna i externa del problema de capa límit. Aquestes són les famoses equacions de la capa límit de Prandtl. En un cas general, aquestes equacions, fins i tot simplifiquen respecte de les del problema inicial, no tenen una solució analítica tancada. Per això són tan importants els resultats de CFD.

No obstant això, per a la placa plana sí que hi ha una solució *de similaritat* que conté tota la informació rellevant. És la solució de Blasius, que s'obté d'integrar numèricament una equació diferencial ordinària de tercer ordre. Examinarem aquest cas a l'apartat següent.

## 8.4 Solució de Blasius de la capa límit en una placa plana

En el cas de la placa plana sobre la qual incideix un flux uniforme (figura 3) hem de considerar  $\vec{v}_{inv} = U\vec{i}$  constant, i les equacions anteriors es redueixen a les següents,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ v_x(x=0, y) &= U \\ v_x(x > 0, y=0) &= 0, v_y(x > 0, y=0) = 0 \\ v_x(x, y \rightarrow \infty) &= U\end{aligned}\tag{7}$$

Mitjançant un canvi de variables enginyós, Heinrich Blasius (1908), estudiant de Prandtl, va convertir el problema d'equacions en derivades parcials 7 en una equació diferencial ordinària. Avui aquesta tècnica està molt establerta i consisteix a buscar una *variable de similaritat* <sup>1</sup>. Primer, fixem-nos que no hi ha una dimensió característica rellevant al problema:  $L$  no és la longitud de la placa (semiinfinita), ni el seu gruix (zero), **La longitud  $L$  és una escala artificialment introduïda: és una mesura de la distància  $x$  a comptar des del punt d'incidència del flux.** Això suggereix que la solució NO ha de dependre de  $x$  i  $y$  per separat. Sempre que hi ha una invariància de similaritat en un problema, aquest es pot reduir a una única variable independent. Aquesta és l'anomenada variable de similaritat,  $\eta$ , i les solucions a què dona lloc, *solucions de similaritat*.

<sup>1</sup>No confondre amb la semblança de l'anàlisi dimensional del tema 4!

Una funció  $\psi(x, y)$  té una variable de similaritat  $\eta = x^{1/a}/y^{1/b}$  si els exponents  $a$ , i  $b$  satisfan

$$\psi(x, y) = \psi(\lambda^a x, \lambda^b y) \quad (8)$$

on  $\lambda$  és una escala arbitrària.

Efectivament,

$$\psi(x, y) \rightarrow \Psi(\eta) = \psi\left(\frac{x^{1/a}}{y^{1/b}}\right)$$

amb la dilatació de les escales,  $x' = \lambda^a x$ ,  $y' = \lambda^b y$ , la funció  $\Psi(\eta')$  és

$$\Psi(\eta') = \psi\left(\frac{(\lambda^a x)^{1/a}}{(\lambda^b y)^{1/b}}\right) = \psi\left(\frac{x^{1/a}}{y^{1/b}}\right) = \Psi(\eta).$$

De forma anàloga, es diu que una equació diferencial en derivades parcials per a la variable  $\psi(x, y)$  és invariant sota una dilatació d'escala

$$\begin{aligned} x' &= \lambda^a x \\ y' &= \lambda^b y \\ \psi' &= \lambda^c \psi \end{aligned} \quad (9)$$

quan l'equació diferencial s'escriu de forma idèntica en les noves variables.

**Pel mètode de les característiques** (Salih, 2016),

d'una manera general, per estudiar si una equació en derivades parcials (EDP)

$$F\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \dots\right) = 0$$

té solucions de similaritat, estudiem la seva transformació sota el conjunt uniparamètric de dilatacions  $x' = \lambda^a x$ ,  $y' = \lambda^b y$ ,  $\psi' = \lambda^c \psi$ . En cas afirmatiu, operativament un dels coeficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  pot ser arbitràriament escollit, i moltes vegades es fixa d'entrada segons convingui, mentre que la resta queden fixats per les condicions de contorn i inicials (quan el problema depèn de  $t$ ) i per la pròpia EDP.

La solució de l'equació problema és una superfície en l'espai  $(x, y, \psi)$ , que es pot expressar com

$$\mathcal{F}(x, y, \psi) = 0$$

Imposant que la solució sigui invariant sota el conjunt de dilatacions esmentat, podem escriure  $\mathcal{F}(\lambda^a x, \lambda^b y, \lambda^c \psi) = 0$ . Diferenciant aquesta darrera respecte de  $\lambda$  i fent després  $\lambda = 1$ , obtenim

$$ax \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + by \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + c\psi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi} = 0$$

la qual, en la seva forma característica s'escriu

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{by} = \frac{d\psi}{c\psi} = \frac{d\mathcal{F}}{0}$$

Desfent el camí i utilitzant el mètode de les característiques, obtenim tres integrals d'aquesta equació,

$$\eta = \frac{x^{1/a}}{y^{1/b}}, \quad f = \frac{\psi}{x^{c/a}}, \quad \text{i} \quad \mathcal{F}$$

Pots trobar expressions equivalents també vàlides, combinant diferents igualtats. En les variables  $f$  i  $\eta$ , la solució més general és  $\mathcal{F} = \mathbf{F}(\eta, f)$ , on  $\mathbf{F}$  és una funció arbitrària. Com que  $\mathcal{F} = 0$ , obtenim una solució explícita en la forma

$$\frac{\psi}{x^{c/a}} = f(\eta), \quad \text{on} \quad \eta = \frac{x^{1/a}}{y^{1/b}}$$

Tot seguit investigarem si el problema de Blasius té una variable de similitut. No per casualitat, hem anomenat  $\psi$  la funció invariant per una transformació de similitut. De fet, per tractar-se d'un problema pla, incompressible i estacionari, en el cas de la placa plana podem buscar la funció de corrent  $\psi$ , que proporciona

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

i que per construcció satisfà l'equació de continuïtat. L'equació per a  $v_x$  en 7 s'expressa, a través de la funció de corrent, com

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (10)$$

Ara introduïm l'escala  $\lambda$  per dilatar  $x$ ,  $y$  i  $\psi$  (equació 9), i substituir les variables a l'equació 10,

$$\lambda^{-2c+a+2b} \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} - \lambda^{-2c+a+2b} \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} = \nu \lambda^{-c+3b} \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y'^3} \quad (11)$$

Perquè l'equació 11 sigui invariant, ha de ser  $-2c + a + 2b = -c + 3b$ , és a dir,  $c - a + b = 0$ . Si sembla que hi ha massa paràmetres, cal no oblidar que les condicions de contorn també formen part del problema: hi ha condicions de contorn sobre  $v_x$  que no s'anul·len i que també han de ser invariants. En particular,  $v_x(x, y \rightarrow \infty) = U$ . Així doncs, exigim

$$\lambda^{-c+b} \frac{\partial \psi'}{\partial y'} = U \quad \Rightarrow \quad c - b = 0$$

D'aquesta manera,  $c = b$  i  $2b = a$ . Hi ha efectivament un grau de llibertat, per la qual cosa podem especificar algun dels paràmetres. Si  $b = 1$ , per exemple, aleshores  $a = 2$ , i la variable de similaritat és  $\eta = y/x^{1/2}$  (podria ser la inversa, però, i la tria condiciona l'equació que obtenim finalment). En tot cas es defineix  $y$  sobre  $x^{1/2}$ ; i observem que així  $\eta \rightarrow \infty$  com ho fa  $y$ . Per altra banda, cal adimensionalitzar  $\eta$  apropiadament, perquè  $x$  i  $y$  no ho són, i notem que  $y/x^{1/2}$  té dimensions d'arrel quadrada de longitud.

Amb els únics paràmetres que tenim al problema,  $U$  i  $\nu$ , quina longitud podem construir? Observem que  $\nu/U$  té dimensions de longitud. Per tant, la variable de similaritat serà adimensional definint

$$\eta \equiv \frac{y}{\sqrt{x\nu/U}}.$$

Finalment, queda adimensionalitzar la funció de corrent,  $\psi$ . Observem que la condició de contorn  $v_x(x, y \rightarrow \infty) = U$  exigeix

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\psi}{d\eta} \frac{1}{\sqrt{x\nu/U}} = U \quad (\text{quan } \eta \rightarrow \infty)$$

Per tant, l'escala de  $\psi$  és  $\sqrt{x\nu U}$ , per la qual cosa definim la funció de corrent adimensional  $f$  com

$$f \equiv \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U}},$$

Farem el canvi de variable a les magnituds adimensionals  $\eta$  i  $f$ . Per això

necessitarem les derivades parcials de  $\eta$ ,

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}, \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{2x\sqrt{\nu x/U}} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\nu x/U}} \end{cases}$$

Primer, expressem les velocitats en funció de  $\eta$  i de  $f$ ,

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d}{d\eta}(f\sqrt{\nu xU}) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu xU} \frac{df}{d\eta} \frac{1}{\sqrt{\nu x/U}} = U f' \\ v_y &= -\frac{\partial}{\partial x}(f\sqrt{\nu xU}) = -\frac{\partial f}{\partial x} \sqrt{\nu xU} - f \frac{\partial \sqrt{\nu xU}}{\partial x} \\ &= -\frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \sqrt{\nu xU} - \frac{f}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} = -f' \left(-\frac{\eta}{2x}\right) \sqrt{\nu xU} - \frac{f}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \\ &= \frac{1}{2}(\eta f' - f) \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \end{aligned} \quad (12)$$

Les condicions de contorn del problema 7 s'expressen, en funció de  $f$ , com

$$\begin{aligned} v_x(x=0, y) = U &\Rightarrow f'(\eta \rightarrow \infty) = 1, \\ v_x(x > 0, y=0) = 0 &\Rightarrow f'(\eta=0) = 0, \\ v_y(x > 0, y=0) = 0 &\Rightarrow f(\eta=0) = 0, \\ v_x(x, y \rightarrow \infty) = U &\Rightarrow f'(\eta \rightarrow \infty) = 1. \end{aligned} \quad (13)$$

La condició  $f(\eta=0) = 0$ , s'obté de desenvolupar la derivada parcial  $v_y = -\partial(\sqrt{x\nu U}f)/\partial x$ , i veure que  $f(\eta=0) = -2xf'(\eta=0)$ , que s'anul·la per la segona condició. A més, l'última col·lapsa sobre la primera, de manera que ens queden tres condicions de contorn en lloc de quatre.

Ara cal transformar les variables en l'única equació que falta,

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (14)$$

Per això calculem

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{U}{2} f'' \frac{\eta}{x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= f'' \frac{U}{\sqrt{x\nu/U}} \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= f''' \frac{U^2}{x\nu} \end{aligned} \quad (15)$$



Substituint **12** y **15** en **14**, obtenim l'equació de Blasius,

$$f''' + \frac{1}{2}f''f = 0 \quad (16)$$

La qual, juntament amb les condicions de contorn **13** completa el problema de la capa límit del flux sobre una placa plana.

Aquest problema no té una solució analítica tancada, però es pot resoldre numèricament. Farem servir Matlab per observar algunes característiques interessants de la solució.

Obre l'editor de MATLAB i crea un *script* amb el codi següent, que resol amb l'integrador de problemes de contorn `bvp4c` el problema de Blasius.

```
function blasius
xinf=input('Introdueix un valor operatiu per a inf:\n');
solinit = bvpinit(linspace(0,xinf,10),[1 0 0]);
sol = bvp4c(@fun,@bcres,solinit);
x=linspace(0,xinf);
y = deval(sol,x);
vx=y(2,:);           %la 2ª component de la solució es f' (=vx/U)

plot(y,x), ylabel('\eta')
legend('f','df/d\eta=v_x','d^2f/d\eta^2','Location','SouthEast')

x99=interp1(vx,x, 0.99)
fprintf('monitor x99=%f\n',x99)

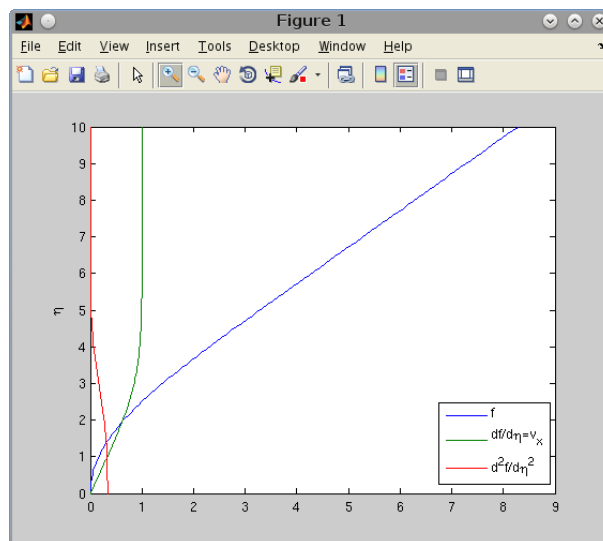
function deriv = fun(x,y)
deriv = [y(2);           % y1'=y2
         y(3);           % y2'=y3
         -0.5*y(3)*y(1)]; % y3'=-y3*y1/2

function residuals = bcres(ya,yb)
residuals = [ ya(1) ;
              ya(2) ;
              yb(2)-1];
```

Un cop copiat, salva'l amb el nom `blasius.m` i executa'l. Veuràs que el que demana primer és que introdueixis el valor de  $\eta = \infty$ , perquè numèrica-

ment no podem integrar fins a l'infinit. Aquest ha de ser un valor prou allunyat, però no gaire gran.

Experimenta introduint 1, 2, 3,... veuràs que va variant la quantitat “monitor x99” que surt per pantalla. A partir d'un valor de  $\eta$ , varia molt lentament i es pot aproximar a un valor de  $x99=5.0$ . Aquest és el valor de  $\eta$  per al qual  $f'$  val 0.99, és a dir, **el valor de  $\eta$  per al qual la velocitat és el 99% del que val a l'infinit**. És una mesura normalitzada de l'extensió de la capa límit. Has d'obtenir un gràfic com el de la figura 4.



**Fig. 4.** Gràfic de Matlab obtingut amb l'escript de la pàgina anterior, on es representen  $f$ ,  $f'$  i  $f''$ . La quantitat rellevant és  $f' = v_x/U$ , és a dir, la velocitat horitzontal normalitzada (línia verda).

Aquest criteri serveix per caracteritzar el gruix de la capa límit, ja que altrament  $\eta$  s'estén fins a l'infinit. Aleshores, definim  $\delta_{99}$  com el valor de la coordenada  $y$  a la qual la velocitat és el 99% de la velocitat del camp llunyà,

$$5 = \frac{\delta_{99}}{\sqrt{x\nu/U}} \quad (17)$$

O bé, definint  $Re_x \equiv xU/\nu$ ,

$$\frac{\delta_{99}}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \quad (18)$$

$Re_x$  està basat en la coordenada  $x$  i no en cap longitud característica del sistema. La distància  $x$  compta des de l'inici de la placa, on hem posat l'origen de coordenades.

Amb aquesta solució, Blasius va calcular el coeficient de fricció a la paret,

$$C_f(x) \equiv \frac{\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}}{\frac{1}{2} \rho U^2},$$

una mesura de l'esforç de tall normalitzat en cada punt sobre la placa. Integrat sobre la placa, ens proporciona el coeficient de *drag*  $C_D$ ,

$$C_D = \frac{\frac{1}{L} \int_0^L \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} dx}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

Per l'equació 15, la derivada  $\partial v_x / \partial y$  es relaciona amb el valor de  $f''(0)$ . Utilitza novament el *script* `blasius.m`; en aquest cas per obtenir el valor de  $f''(0)$ . Pots extreure'l observant i fent un zoom sobre la línia vermella de la gràfica, al punt  $\eta = 0$ . També pots fer que s'imprimeixi directament, afegint la següent línia de codi (abans o després de la comanda `plot`, per exemple):

```
fprintf('f''''(0)= %f\n',y(3,1))
```

Hauries d'obtenir un valor de  $f''(0) = 0.332061$  a la consola de Matlab. Amb aquest, calculem

$$C_f(x) = \frac{2f''(0)}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}.$$

Integrant  $C_f(x)$ , obtenim el coeficient de *drag*

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad (19)$$

on  $\text{Re}$  es refereix ara a la longitud total de la placa. Hi ha altres resultats interessants, com la vorticitat a la capa límit, que té únicament component perpendicular a la velocitat,  $\vec{\Omega} \equiv (0, 0, \Omega_z)$

$$\Omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Si substituïm les derivades en aquesta expressió, la vorticitat normalitzada en la capa límit és

$$\frac{\Omega}{\frac{U}{\sqrt{x\nu/U}}} = -f'' + \frac{1}{4\text{Re}_x}(f - \eta f' - \eta^2 f'') = -f''(\eta) + O\left(\frac{1}{\text{Re}}\right) \approx -f''(\eta).$$

Aquest és el valor local de la vorticitat a la capa límit. La quantitat total de

vorticitat en qualsevol posició  $x$  de la capa límit s'obté integrant  $\Omega$  sobre tota l'alçada,

$$\frac{1}{U} \int_0^\infty \Omega dy = -f'(\infty) + f'(0) = -1$$

Aquest valor constant indica que no entra vorticitat a través de la capa límit. Només es pot generar si hi ha un gradient de pressió al llarg de la placa, cosa que aquí no passa per ser uniforme el camp llunyà de velocitat, és a dir,  $dU/dx = 0$ .

Hem completat l'exposició del problema de Blasius. Essencialment, qualsevol problema de capa límit té qualitativament propietats semblants a les analitzades, encara que aquest que hem estudiat sigui un cas simplificat.

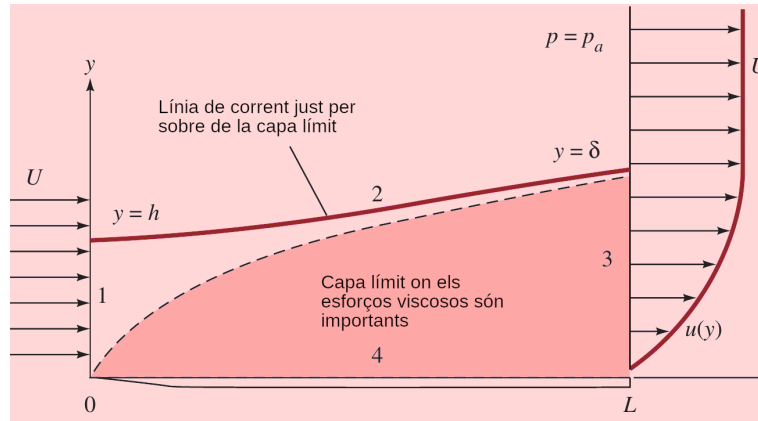
Aquest és un cas simplificat, primer per la geometria, que és plana, i perquè la solució invíscida és un camp de velocitat uniforme, sense gradients de pressió que vinguin imposats pel flux extern. Pots examinar altres casos a la bibliografia recomanada a l'apartat [Solucions de Falkner-Skan](#) dels Complements d'aquest tema.

## 8.5 Diferents mesures de l'espessor de la capa límit

L'espessor  $\delta$  de la capa límit, definit com el punt on la velocitat és igual al 99% d' $U$  (eventualment  $U(x)$ ), és molt útil per caracteritzar la influència de la difusió viscosa. Hi ha altres mesures importants del gruix de la capa límit, que sorgeixen de l'anàlisi integral de les lleis de conservació de matèria i de moment: aquestes són les estimacions integrals de l'espessor de desplaçament i de moment, degudes a Von Kármán (1928), que veurem als dos apartats següents.

### Espessor de desplaçament

Què és el gruix de desplaçament? És una mesura de la deflexió de les línies de corrent, per la presència de la capa límit sobre la paret. Aquest concepte està explicat de forma molt elemental però molt clarificadora al llibre de (White, 2011, pp. 163,461). Al llibre de (Panton, 2013, pp. 538-539) l'anàlisi és una mica més elaborat. Considera la figura 5 on sobre l'element de volum finit  $V$ , delimitat per les línies 1-2-3-4, apliquem la conservació de la matèria.



**Fig. 5.** Element de volum útil per a l'anàlisi integral de la capa límit. Font: (White, 2011, p. 164)

La línia de corrent 2 està situada al flux invíscid, on la velocitat és  $U(x)$  (cas general). L'alçada  $h$  és a priori desconeguda, i  $\delta = h + \delta^*$ , on  $\delta^*$  és el gruix de desplaçament. Com que a través de les línies 2 i 4 no hi ha flux, el cabal màssic que entra per 1 és el que surt per 3,

$$\int_1 \rho \vec{v}(0, y) \cdot \vec{n} dS + \int_3 \rho \vec{v}(x, y) \cdot \vec{n} dS = 0.$$

El flux és incompressible i la densitat cancel·la. El vector  $\vec{n}$  normal a les superfícies que delimiten les línies 1 i 3 és, respectivament,  $-\vec{i}$  i  $\vec{i}$ . I en ser  $v(0, y) = U$  un camp uniforme, l'integrand a la secció 1 és constant,

$$-Uh + \int_0^\delta v_x(x, y) dy = 0. \quad (20)$$

Sumant i restant  $U$  a l'integrand del segon terme,

$$Uh = \int_0^\delta (U + v_x(x, y) - U) dy = U\delta + \int_0^\delta (v_x(x, y) - U) dy,$$

i combinant els termes  $U(\delta - h) = U\delta^*$ , obtenim una expressió per a l'essor de desplaçament,

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy \quad (21)$$

Per donar valors numèrics, en tot cas cal especificar el perfil de velocitats  $v_x$  a l'interior de la capa límit.

- Von Kármán va proposar un perfil aproximadament parabòlic,

$$v_x(y) = U \left( \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \quad 0 \leq y \leq \delta, \quad (22)$$

on els coeficients s'obtenen d'imposar continuïtat al perfil i la seva derivada en  $y = \delta$  (velocitat i esforç de tall continus). Introduint aquest perfil aproximat a l'equació 21, obtenim

$$\delta^* \approx \frac{\delta}{3}$$

Encara queda determinar l'espessor de la capa límit  $\delta$  (ens ocuparem d'això en el següent apartat), per acabar d'especificar el valor de l'espessor de desplaçament. Veurem que en l'aproximació de Von Kármán és  $1/3$  del gruix  $\delta$ . Podem comparar aquest valor amb el valor exacte de la solució de Blasius.

- En el cas de la solució de Blasius, la integral donada per l'equació 21 queda, en substituir  $v_x = Uf(\eta)$  i fer el canvi de variable,

$$\delta^* = \int_0^5 (1 - f'(\eta)) \sqrt{\frac{x\nu}{U}} d\eta = \sqrt{\frac{x\nu}{U}} [\eta - f(\eta)]_0^5 = \sqrt{\frac{x\nu}{U}} [5 - f(5)].$$

El valor de  $f(5)$  ens el donarà la solució del problema de contorn mitjançant el *script* `blasius.m` de la pàgina 17. Genera de nou i fes un zoom de la gràfica sobre la zona de la línia blava (que representa  $f(\eta)$ ) en un entorn de  $\eta = 5$ , o bé insereix la línia següent al *script*,

```
fprintf('f(5)= %f\n', interp1(x,y(1,:),5) )
```

Executa'l i obtindràs un valor de  $f(5) \simeq 3.28$ . Aquest valor, substituït a l'equació anterior proporciona

$$\delta^* = 1.72 \sqrt{\frac{x\nu}{U}} = \frac{1.72}{5} \delta = 0.344 \delta \quad (23)$$

Fixa't en la precisió de l'estimació de Von Kármán, que queda molt a prop del valor real, utilitzant arguments molt simples.

## L'espessor de moment

Utilitzarem volum de control de la figura 5 per realitzar el balanç integral de moment.

Alternativament, es poden integrar directament les equacions de la capa límit, 7 (Panton, 2013, pp. 540-541), però és una mica més laboriós.

Al tema 3, quan tractem les lleis de conservació, realitzem els balanços integrals de matèria, moment i energia. A l'apartat 3.5 (Tema 3), especificàvem les contribucions al balanç de moment:

- i)  $\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV$  taxa de variació de la quantitat de moviment en  $V$
- ii)  $-\oint_S \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$  quany net de moment a través del contorn  $S$  que envolta  $V$ , per unitat de temps
- iii)  $-\int_V \rho g \vec{k} dV$  pes del fluid contigut en  $V$
- iv)  $\oint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS$  força de contacte exercida a través del contorn  $S$

Al volum delimitat per les línies 1-2-3-4 de la figura 5, l'apartat i) és zero perquè és un flux estacionari, iii) també, ja que no hem tingut en compte la gravetat en aquest context, i iv) representa les forces de contacte sobre l'element. Com que hem après que al problema de la placa plana amb un flux incident uniforme la pressió és aproximadament constant (no varia amb  $x$ ,  $y$ , i tampoc hem inclòs la gravetat), actua igual sobre totes les superfícies de l'element. Aleshores les úniques forces que no cancel·len són les viscoses: és la integral dels esforços viscosos  $\tau_W$  al llarg de la línia 4. Podem anomenar aquesta contribució  $F_D$ , que és igual en mòdul (però de sentit contrari) a les forces de arrossegament sobre la placa,

$$F_D = \int_{placa} \tau_W dS = B \int_0^L \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} dx$$

on hem anomenat  $B$  a la dimensió transversal de la placa, en la direcció perpendicular al paper. Aleshores, d'una forma similar a com hem procedit

en el cas de la conservació de la massa,

$$\int_1 \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_3 \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -\vec{F}_D$$

Integrant directament el primer terme, i traient la notació vectorial ja que les forces considerades van en la direcció  $x$ , obtenim

$$-\rho U^2 B h + \rho B \int_0^\delta v_x^2(x, y) dy = -F_D$$

Ara podem substituir  $h$  per l'expressió que proporciona la fórmula 20. Arreglant els termes ens queda

$$F_D = \rho B \int_0^\delta (U - v_x) v_x dy \quad (24)$$

Finalment, es defineix l'espessor de moment com

$$\Theta(x) = \frac{F_D}{\rho B U^2} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) \frac{v_x}{U} dy \quad (25)$$

Encara podem extraure més resultats. Podem combinar les igualtats que relacionen  $F_D$  amb  $\tau_W$  i amb  $\Theta$ . Tenim

$$\frac{dF_D}{dx} = B \tau_W = B \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho B U^2 \frac{d\Theta}{dx} \quad (26)$$

Si utilitzem la fórmula aproximada de Von Kármán, 22, per al perfil  $v_x$ , tenim que

$$\tau_W = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} \approx \frac{2\mu U}{\delta} \quad (27)$$

$$\Theta \approx \int_0^\delta \left( \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \left( 1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2} \right) dy = \frac{2}{15} \delta \quad (28)$$

Combinant les fórmules 26-28, obtenim

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{15\nu}{U\delta}$$

que, integrada, ens dona l'aproximació de Von Kármán de l'espessor de la capa límit,

$$\frac{\delta}{x} \approx 5.5 \sqrt{\frac{\nu}{xU}} = \frac{5.5}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

Aquest resultat, que dona l'estimació del gruix de la capa límit i és aproxi-



mat (perquè el perfil de velocitats és heurístic), forma part de la teoria de Von Kármán de la capa límit. No obstant això, igual que l'espessor de desplaçament, el resultat és sorprenentment exacte si ho comparem amb els resultats de Blasius, que utilitzen la correcta solució numèrica de les equacions de capa límit. Això és perquè el perfil parabòlic no és gaire lluny de la solució exacta de les equacions.

## 8.6 Separació de la capa límit

L'anàlisi de la placa plana de la secció anterior ens dona una imatge força clara del comportament de la capa límit laminar, a excepció d'un important efecte: com hem dit a la introducció d'aquest tema, sota certes condicions es produeix la separació del flux. Ho has vist als vídeos ([Abernathy, F., 2009](#); [ESFTV, 2012](#)). Prandtl va mostrar que la separació que es veu a l'esquema de la figura 2 és causada per una pèrdua d'impuls excessiva prop de la paret en una capa límit que tracta de moure's aigües avall, contra una pressió creixent,  $dp/dx > 0$ , que en aquest context s'anomena *gradient de pressió advers*. El cas oposat de pressió decreixent,  $dp/dx < 0$ , és un gradient favorable, on la separació del flux no pot passar mai. Al flux al voltant d'un cos, com a la figura 2, el gradient a favor és a la part frontal del cos, i l'advers a la part posterior, com hem analitzat al Tema 7 (davant de l'objecte la pressió és més gran que darrere de l'objecte, com a la figura 4 del tema 7).

Podem explicar la separació del flux amb un argument geomètric, sobre la base de la segona derivada de la velocitat  $v_x$  a la paret. Tornem a l'equació de transport de moment en la direcció  $x$  de l'aproximació de capa límit,

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

El darrer terme és la derivada de l'esforç de tall  $\tau = \mu \partial v_x / \partial y$  sobre la paret. Per la condició de no-slip, a la paret  $v_x = v_y = 0$ , i s'ha de complir

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left. \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right|_{\text{paret}} = \left. \frac{\partial \tau}{\partial y} \right|_{\text{paret}}$$

Per tant, en un gradient de pressió advers ( $dp/dx > 0$ ), la segona derivada de la velocitat és positiva a la paret; no obstant això, la concavitat de  $v_x$  ha de ser negativa per fusionar-se suaument amb el flux principal  $U(x)$ . La

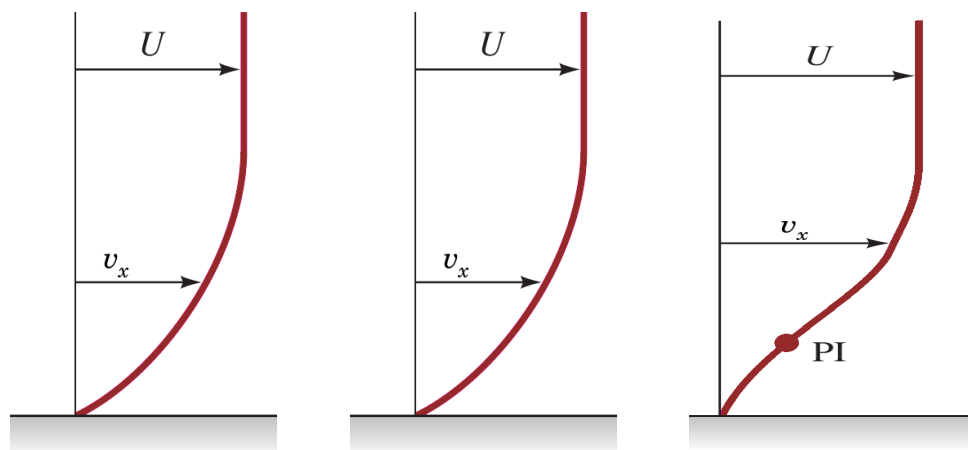
segona derivada ha de passar per zero en algun punt intermedi per sobre de la paret, és a dir que  $\partial^2 v_x / \partial y^2$  ha de tenir un punt d'inflexió. Aleshores, qualsevol perfil de capa límit en un gradient advers ha d'exhibir una característica forma de S.

La figura 6 il·lustra el cas general. En un gradient favorable (a) el perfil és molt arrodonit, no hi ha punt d'inflexió i no hi pot haver separació del flux. Aquests perfils laminars són molt resistents a la transició a la turbulència.

Amb un gradient de pressió zero (figura 6b), com en el flux sobre una placa plana, el punt d'inflexió és a la paret mateixa. No hi pot haver separació. Però el flux patirà una transició cap a la turbulència, a una certa distància de l'origen de la placa, si aquesta és prou llarga.

En un gradient advers (figures 6c a 6e), es produeix un punt d'inflexió (PI) a la capa límit, situat a una distància des de la paret que augmenta amb el gradient advers. Per a un gradient feblement advers (figura 6c), el flux no arriba a separar-se, però és vulnerable a la transició a la turbulència a  $Re_x$  baixos. A gradients moderats, el gradient de velocitat, que ha anat disminuint sobre la paret mentre la concavitat augmentava, arriba a anul·lar-se i es produeix una condició crítica (figura 6d). Aquest és el punt de separació,  $\tau_W = 0$ , ja que qualsevol gradient major causarà reflux a la paret (figura 6e). L'espessor de la capa límit augmenta molt i el flux principal se separa de la paret.

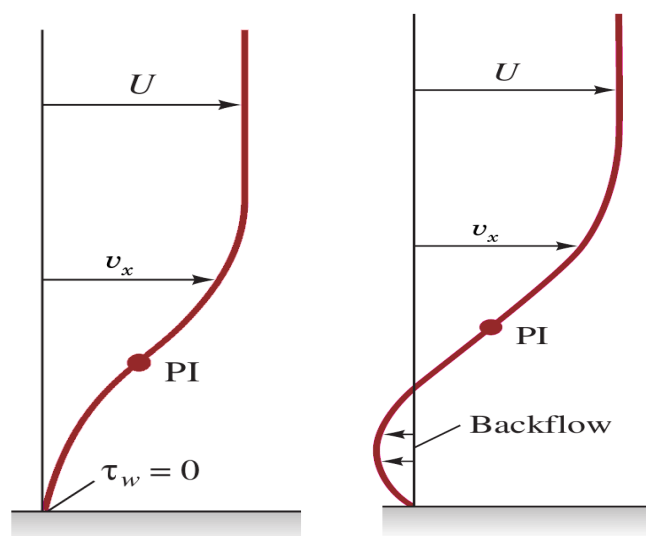
Els perfils de flux de la figura 6 generalment ocorren en seqüència, a mesura que la capa límit s'estén al llarg de la paret d'un objecte immers en un flux. Per exemple, a la figura 2, un gradient favorable es produeix en la part frontal del cos, el gradient de pressió zero es produeix just passada la secció màxima, i un gradient advers es produeix successivament a mesura que avancem per la part posterior del cos.



**(a) Gradient de pressió negatiu (favorable):**  $dp/dx < 0$  i per tant  $dU/dx > 0$ ; **NO** hi ha separació. El punt d'inflexió estaria dins de la paret

**(b) Gradient de pressió zero:**  $dp/dx = 0$  (i per tant  $dU/dx = 0$ ); **NO** hi ha separació. El punt d'inflexió (PI) està just sobre la paret

**(c) Gradient de pressió dèbilment advers (positiu):**  $dp/dx > 0$  ( $dU/dx < 0$ ); **NO** hi ha separació. El punt d'inflexió (PI) està a la capa límit



**(d) Gradient de pressió crític (positiu):**  $dp/dx > 0$ ; Condició de separació. Els **esforços sobre la paret**,  $\tau_w$ , son zero

**(e) Gradient de pressió excessivament advers (positiu):**  $dp/dx > 0$  ( $dU/dx < 0$ ); **hi ha separació** amb una zona de reflux

**Fig. 6.** A mesura que augmenta el gradient de pressions, des de la condició de gradient negatiu o favorable a (a), a positiu o desfavorable a (c), i segueix augmentant (d i e), la concavitat de la velocitat  $v_x$  canvia de signe, i apareix un punt d'inflexió (PI). Quan el gradient de pressió és crític,  $\partial v_x / \partial y$  s'anul·la, igual que els esforços sobre la paret, que ja no poden mantenir el flux sobre la capa adherit a aquesta. És la condició de separació. Si el gradient de pressió continua augmentant, els esforços canvien de signe i apareix una zona separada amb reflux.

## Bibliografia

- Abernathy, F. (2009). Fundamentals of boundary layers [Computer software manual]. (<https://www.youtube.com/watch?v=7SkWxEUXIoM>)
- ESFTV. (2012). Physics of life - the reynolds number and flow around objects [Computer software manual]. ([https://www.youtube.com/watch?v=0ThQ\\_nD97hY](https://www.youtube.com/watch?v=0ThQ_nD97hY))
- Gerhart, P., Gerhart, A., i Hochstein, J. (2016). *Munson, Young, and Okiishi's Fundamentals of fluid mechanics*. Wiley.
- Landau, L., i Lifshitz, E. (1985). *Mecánica de fluidos*. Reverté.
- Panton, R. (2013). *Incompressible flow*. Wiley.
- Salih, A. (2016). Method of characteristics.  
([https://www.iist.ac.in/sites/default/files/people/IN08026/MoC\\_0.pdf](https://www.iist.ac.in/sites/default/files/people/IN08026/MoC_0.pdf))
- Schlichting, H., i Gersten, K. (2000). *Boundary Layer Theory* (8a ed.). New York: Springer.
- White, F. (2011). *Fluid mechanics*. Mc Graw Hill.

# Complements formatius

## Capa límit: flux sobre una placa plana

En aquest video podràs veure clarament el creixement de la capa límit.

---

Fluid Mechanics (Boundary Layers part 1)

<https://www.youtube.com/watch?v=H1LPHKmxehI>

---

## Resolució numèrica de la capa límit sobre una placa plana

Aquest tema no estaria complet sense un model numèric de la capa límit sobre una placa plana. Un cop estudiada la solució de Blasius, podràs comparar els resultats obtinguts amb la simulació numèrica realitzada amb Fluent.

---

Varela, S. i Salueña, C. (2023). Resolució amb ANSYS Fluent del flux estacionari sobre una placa plana.

---

## Solucions de Falkner-Skan

Falkner i Skan van investigar les equacions de capa límit per veure quins tipus de flux extern  $U(x)$  admeten solucions de similaritat. En aquest recurs pots consultar quins són aquests perfils de flux extern i les seves solucions.

---

Panton, R.F. (2013). Falkner–Skan similarity solutions, en *Incompressible flow*. Wiley. pp. 543-548.

---

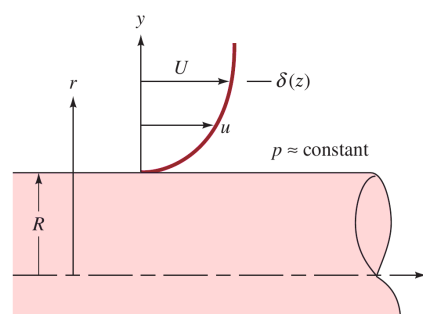
## Exercicis

1. Obtén la forma de les equacions de capa límit laminar (5) per al cas del flux axisimètric al llarg de l'exterior d'un cilindre circular<sup>2</sup> de radi constant  $R$ , com mostra la figura. Considera,

a) Un cas general, on el punt d'observació  $z$  pot ser qualsevol ( $\delta$  pot prendre qualsevol valor respecte de  $R$ ).

b) El cas  $\delta \ll R$  ( $z$  petit), on pots aproximar  $r \approx R$ . Quina equació s'obté?

c) Quines són les condicions de contorn adequades?



2. Examina la possibilitat que l'equació de Korteveg-de Vries,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

tingui una variable de similaritat (consulta el procediment de la secció 8.4 on es troba la definició).

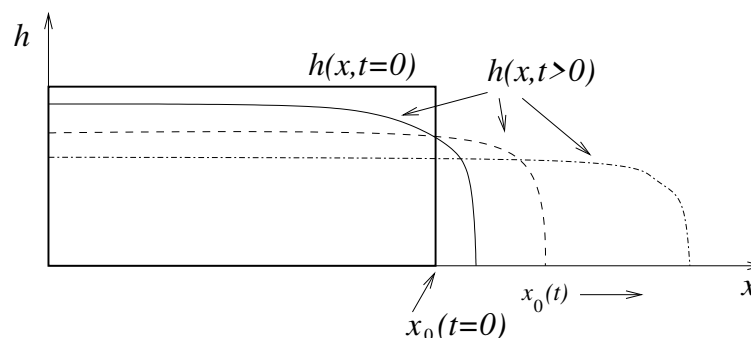
3. L'equació de Huppert,

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\rho g}{12\mu} \frac{\partial^2 (h^4)}{\partial x^2} = 0$$

es fa servir en problemes de fluxos geològics i descriu el moviment d'un fluid de viscositat  $\mu$  i densitat  $\rho$  que s'escampa per gravetat en el límit de baixos nombres de Reynolds, al llarg d'una superfície horitzontal. La solució ha de satisfer també l'equació de continuïtat,

$$\int_0^{x_0(t)} h(t, x) dx = V_0$$

<sup>2</sup>Pots prendre les equacions de Navier-Stokes en coordenades cilíndriques directament d'internet, per exemple [https://userpages.umbc.edu/~squire/reference/Navier-Stokes\\_equations.htm](https://userpages.umbc.edu/~squire/reference/Navier-Stokes_equations.htm)



Inicialment el fluid està contingut en un espai (aquí rectangular) de “volum”  $V_0$ . A mesura que passa el temps el líquid s’escampa, alhora que el front del fluid  $x_0(t)$  es desplaça cap a la dreta, com mostra l’esquema de la figura. El punt  $x_0(t)$  és el primer punt sobre l’eix  $x$  on, en cada instant,  $h = 0$ .

Les equacions estan escrites en forma dimensional. Pots continuar treballant amb variables dimensionals.

- a) Troba una variable  $\eta$  que deixi invariants les equacions del problema sota una transformació de similaritat,

$$x' = \lambda^a x, \quad t' = \lambda^b t, \quad h' = \lambda^c h$$

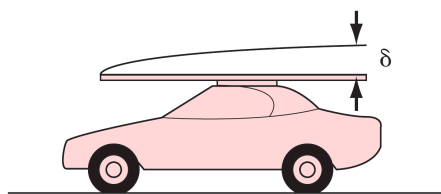
- b) Fent el canvi de variables, obtén l’equació diferencial ordinària que satisfà la funció de similaritat  $f \equiv t^{-c/b} h$  en la variable de similaritat  $\eta$ .
- c) Integra l’equació resultant, que és de variables separables. Imposa que la primera constant d’integració sigui zero, perquè busquem una solució de suport acotat. L’altra constant la pots ajustar amb la condició  $h(x_0, t) = 0$ .

4. Donat el flux laminar bidimensional amb  $dp/dx = 0$ ,

$$v_x(y) = U_0(1 - e^{Cy}); \quad v_y = V_0 \quad (< 0)$$

- a) demostra que és una solució exacta de les equacions de la capa límit (les dues primeres línies de 7).
  - b) Troba el valor de la constant  $C$  en termes de paràmetres de flux.
  - c) Es compleixen les condicions de contorn de l’equació 7?
5. Hem de transportar una planxa de fusta contraxapada de 1.25m per 2.50m sobre la baca del cotxe. Si conduïm a 90 km/h, i suposem que

el tauler està perfectament alineat amb el flux d'aire,



a) quin gruix té la capa límit al final del tauler?

b) Fes una estimació de la força d'arrossegament sobre la planxa de fusta, si la capa límit roman laminar.

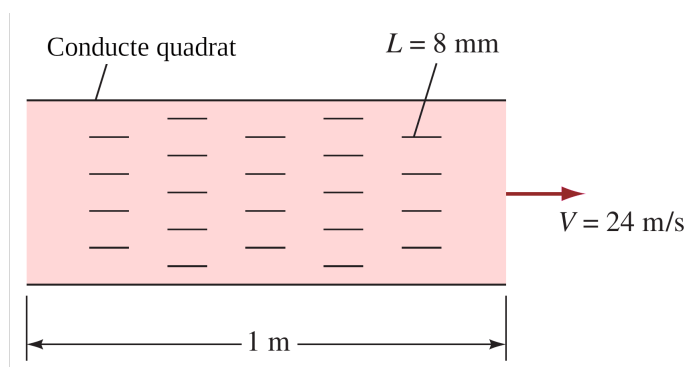
c) Sobre quina part de la planxa de fusta l'arrossegament de l'aire és més gran, sobre la meitat anterior o la posterior? Amb quin percentatge, respectivament?

6. La forma del perfil de velocitat  $v_x/U = 1 - \exp(-4.605y/\delta)$  és una corba suau amb  $v_x(y = 0) = 0$  i  $v_x(y = \delta) = 0.99U$  i, per tant, semblaria un *substitut raonable* del perfil parabòlic de l'equació 22.

a) Demostra que quan aquest nou perfil s'utilitza en l'anàlisi integral de la secció **Espessor de desplaçament**, obtenim el pèssim resultat  $\delta/x \simeq 9.2/Re_x^{1/2}$  que és un 80% més alt.

b) Quina és la raó de la imprecisió? (Pista: La resposta rau en l'avaluació de l'equació de transport del moment en la capa límit (la segona de 7) al punt  $y = 0$ , és a dir sobre la paret.

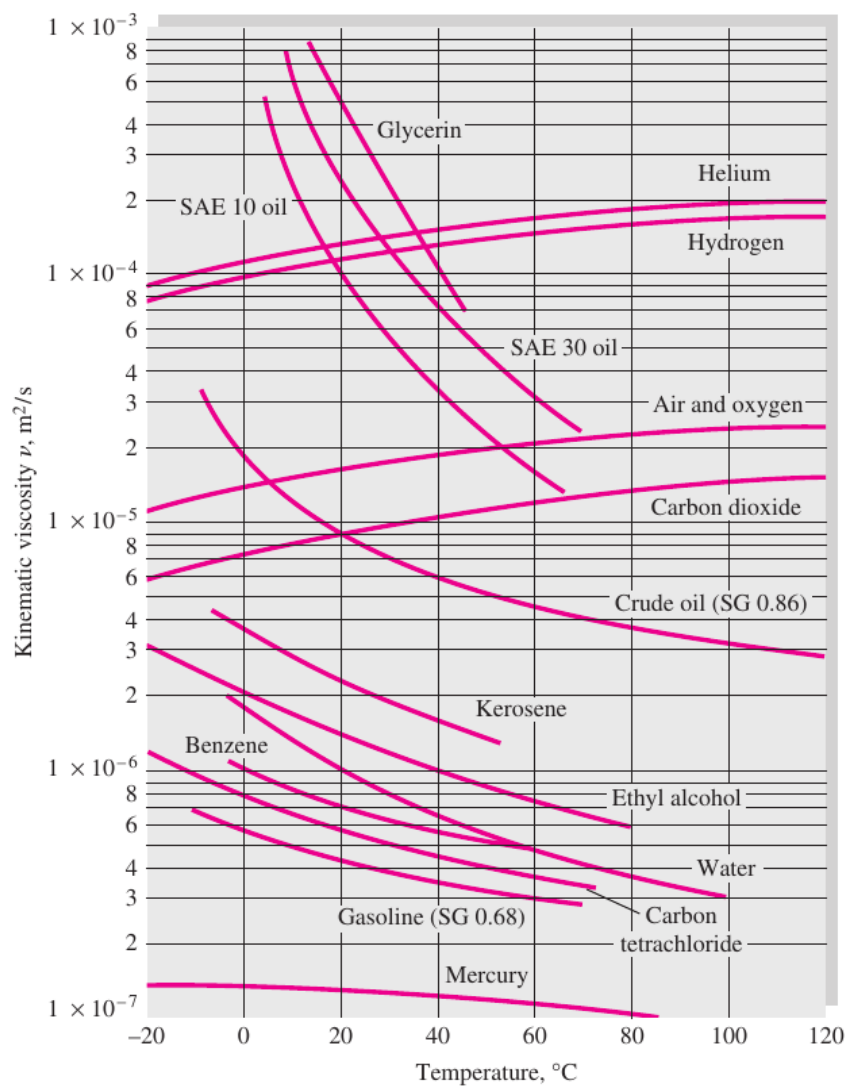
7. Considera l'entrada al conducte de secció quadrada i superfície suau ( $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ ) que mostra la figura. El fluid és aire a  $20^\circ\text{C}$  i  $1\text{ atm}$ , que flueix a una velocitat mitjana de  $24\text{ m/s}$ . Volem augmentar la caiguda de pressió sobre la longitud d'1 m afegint plaques planes de  $8\text{ mm}$  de llarg a través del conducte.



Fes una estimació de quantes plaques són necessàries per generar  $100\text{ Pa}$  addicionals de caiguda de pressió.



8. Un cabal de  $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$  d'oli SAE 30 a  $20^\circ\text{C}$  flueix a des d'un dipòsit cap a una canonada de secció circular de  $D=150 \text{ mm}$  de diàmetre interior.
- Utilitza la teoria de la capa límit sobre una placa plana per estimar la posició  $x$  on es troben al centre les capes límit de la paret de la canonada.
  - La correlació acceptada per a la longitud  $L_e$  de desenvolupament total a l'entrada d'una canonada circular en règim laminar és  $L_e/D \simeq 0.06 Re_D$  (Schlichting i Gersten, 2000). Calcula el valor de  $L_e$  amb la correlació i compara'l amb l'obtingut a l'apartat (a). Comenta les possibles discrepàncies.



Dades de la viscositat cinemàtica d'alguns líquids comuns. Font: (White, 2011)