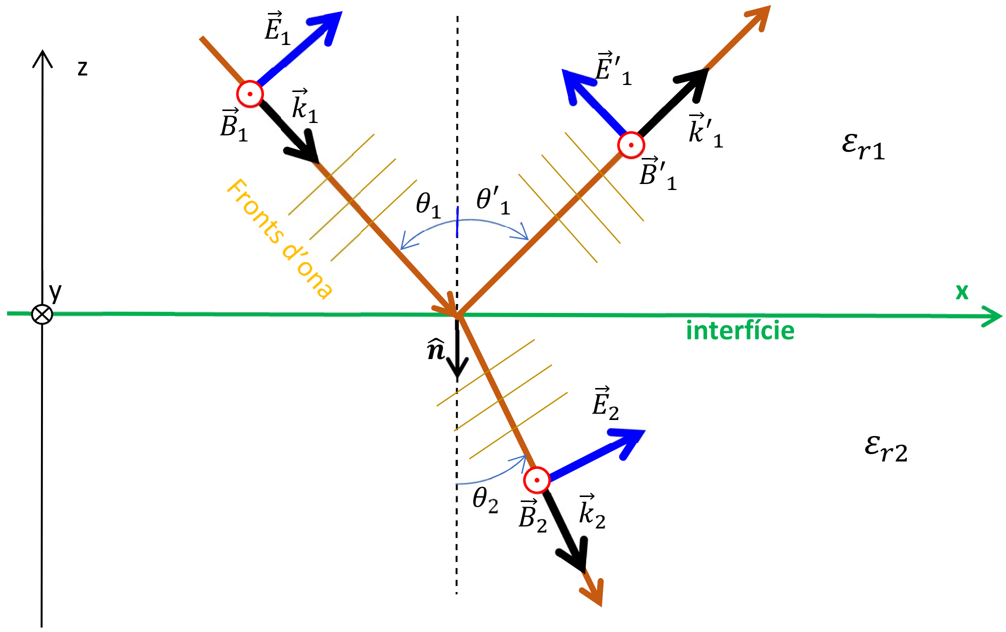
Ones electromagnètiques propagant-se a la frontera entre dos medis dielèctrics. Reflexió i refracció de rajos.



Considerem, igual que a la figura anterior, un raig d'ones electromagnètiques amb front d'ona pla i amb nombre d'ones $\vec{k}_1$ que des del medi 1 està incidint sobre la interfície plana (pla x-y) entre dos medis dielèctrics 1 i 2 de permitivitats relatives ε_{r1} i ε_{r2} respectivament. Aquest raig forma un angle θ_1 amb la normal $-\hat{\boldsymbol{n}}$ o bé amb l'eix +z

A conseqüència d'aquest raig incident en poden sortir dos més:

1. Un raig d'ones planes, reflectit cap al medi 1, amb nombre d'ones $\vec{k}'_1$ i un angle θ'_1 amb la normal $-\hat{\boldsymbol{n}}$
2. Un raig d'ones planes, transmès o refractat cap al medi 2, amb nombre d'ones $\vec{k}_2$ i un angle θ_2 amb la normal $+\hat{\boldsymbol{n}}$

$\vec{E}_1$, $\vec{E}'_1$ i $\vec{E}_2$ són els respectius camps elèctrics dels 3 rajos;

$\vec{B}_1$, $\vec{B}'_1$ i $\vec{B}_2$ són els respectius camps magnètics dels 3 rajos

$\vec{E}$, $\vec{B}$ $i\, \vec{k}$ formen la típica tríada ortogonal com a solucions de les equacions de Maxwell en un medi il·limitat que són.

$$\vec{\mathrm{k}}\, x\, \vec{E} = \omega\mu\, \vec{H}$$

$$\vec{H}\, x\, \vec{\mathrm{k}} = \omega\varepsilon\, \vec{E}$$

Que en termes de $\vec{E}$ i de $\vec{B} = \mu\, \vec{H}$ es reescriurien com:

$$\vec{\mathrm{k}}\, x\, \vec{E} = \omega\vec{B} \quad i \quad -\vec{\mathrm{k}}\, x\, \vec{B} = \omega\, \varepsilon\mu\, \vec{E}$$

O bé $\quad \frac{\omega}{v}\hat{\mathrm{k}}\, x\, \vec{E} = \omega\vec{B} \quad$ i $\quad -\frac{\omega}{v}\hat{\mathrm{k}}\, x\, \vec{B} = \omega\frac{1}{v^2}\vec{E}$

El·liminant ω:

$$\frac{1}{v}\hat{\mathrm{k}}\, x\, \vec{E} = \vec{B} \qquad i \qquad -v\,\hat{\mathrm{k}}\, x\, \vec{B} = \vec{E}$$

On $\hat{\mathrm{k}}$ és el vector unitari en la direcció i sentit de $\vec{\mathrm{k}}$. Finalment, ho podem reescriure com:

$$\frac{n}{c}\,\hat{\mathrm{k}}\, x\, \vec{E} = \vec{B} \qquad (1)$$

$$-\frac{c}{n}\,\hat{\mathrm{k}}\, x\, \vec{B} = \vec{E} \qquad (2)$$

On: $n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r} \geq 1$, és l'anomenat ***índex de refracció*** (adimensional) del medi dielèctric.

El pla x-z és el pla del dibuix i el pla del raig d'incidència, s'anomena pla d'incidència. Com veurem a continuació si el raig $\vec{k}_1$ està en aquest pla, això obliga a que el raig reflectit $\vec{k'}_1$ i el raig refractat $\vec{k}_2$, també estiguin en aquest pla

Quant a la direcció dels camps $\vec{E}$ i $\vec{B}$ aquests poden formar qualsevol tríada ortogonal en qualsevol direcció al voltant de $\vec{k}$. Escollir aquesta direcció és un grau de llibertat que sempre tenim en els rajos que se'n diu *polarització* de les ones electromagnètiques.

A la figura hem considerat un cas particular de polarització que és la **polarització 'p'** (paral·lela) al pla d'incidència pel que fa al camp elèctric $\vec{E}$'s i per tant perpendicular o 's' pel que fa al camp magnètic $\vec{B}$). 's' ve de l'alemany 'senkrecht' que vol dir perpendicular.

Les solucions dels vectors $\vec{E}$ i $\vec{B}$ són ones planes i per tant:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1,0}\mathrm{e}^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1\cdot\vec{r})} \quad ; \quad \vec{B}_1 = \vec{B}_{1,0}\mathrm{e}^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1\cdot\vec{r})}$$

$$\vec{E'}_1 = \vec{E'}_{1,0}\,\mathrm{e}^{i(\omega'_1 t - \vec{k'}_1\cdot\vec{r})} \quad ; \quad \vec{B'}_1 = \vec{B'}_{1,0}\mathrm{e}^{i(\omega'_1 t - \vec{k'}_1\cdot\vec{r})}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2,0}\,\mathrm{e}^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2\cdot\vec{r})} \quad ; \quad \vec{B}_2 = \vec{B}_{2,0}\mathrm{e}^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2\cdot\vec{r})}$$

Aquests tres rajos es troben sobre un tram de superfície de la frontera o interfície, i ho fan en qualsevol instant t, i en qualsevol punt $\vec{r}$ d'aquesta interfície (i.e. $\vec{r}$ tals que $\vec{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = 0$) on $\vec{r}$ s'ha agafat des de l'origen de coordenades (0,0,0) el qual hem posat a la mateixa frontera (a l'esquerra del raig) tal i com es pot veure a la figura anterior.

Com que els 3 rajos es troben en tot temps i en aquests punts de la frontera, resulta que han d'estar en fase simultàniament tots tres, per la qual cosa els tres exponents imaginaris de $e^{i(\ \ )}$ han de ser els mateixos en qualsevol instant t i a la frontera.

Això només pot ser si:

1. $\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2 \equiv \omega$. És a dir la freqüència és la mateixa, i si
2. $\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}'_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}$, per a qualsevol $\vec{r}$ a la frontera (és a dir, $\vec{r} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0$) .

De la condició **2.** en deduirem la llei de la reflexió i la llei d'Snell de la refracció. Abans de fer-ho caldrà fer un incís matemàtic:

INCÍS:

Calculem: $\hat{\boldsymbol{n}}x(\hat{\boldsymbol{n}}x\vec{r}) = (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{r})\hat{\boldsymbol{n}} - \underbrace{(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})}_{1}\vec{r} = (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{r})\hat{\boldsymbol{n}} - \vec{r}$

Si a més considerem $\vec{r}$ a la frontera resulta que $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{r} = 0$ i, per tant,

$$\vec{r} = -\hat{\boldsymbol{n}}x(\hat{\boldsymbol{n}}x\vec{r})$$

Calculem ara $\vec{k} \cdot \vec{r}$ a la frontera

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = -\vec{k} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}x(\hat{\boldsymbol{n}}x\vec{r}) = -k_i\, \varepsilon_{i,j,k} n_j \cdot \varepsilon_{k,l,m}\, n_l r_m = -\left(\varepsilon_{k,i,j}\, k_i n_j\right) \cdot \left(\varepsilon_{k,l,m}\, n_l r_m\right) = -\left(\vec{k}x\hat{\boldsymbol{n}}\right) \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}x\vec{r})$$

Igualant això per als tres rajos, tal com exigeix la condició **2.** anterior

$$\left(\vec{k}_1 x\hat{\boldsymbol{n}}\right) \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}x\vec{r}) = \left(\vec{k}'_1 x\hat{\boldsymbol{n}}\right) \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}x\vec{r}) = \left(\vec{k}_2 x\hat{\boldsymbol{n}}\right) \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}x\vec{r})$$

Com que $(\hat{\boldsymbol{n}}x\vec{r})$ a la frontera pot valer molts valors diferents, no queda més remei que també siguin igual els tres termes sense aquest $(\hat{\boldsymbol{n}}x\vec{r})$, és a dir:

$$\vec{k}_1 x\hat{\boldsymbol{n}} = \vec{k}'_1 x\hat{\boldsymbol{n}} = \vec{k}_2 x\hat{\boldsymbol{n}} \qquad (3)$$

Aquesta igualtat (3) és fonamental i dona molta informació:

1. Si la igualem en direcció i sentit podem concloure que les 3 components de $\vec{k}$ tangencials a $\hat{\boldsymbol{n}}$ són iguales, és a dir que si $\vec{k}_1$ està en el pla d'incidència x-z, també ho han d'estar $\vec{k}'_1$ i $\vec{k}_2$

2. Si la igualem en mòdul:

$$k_1 sin\theta_1 = k'_1 sin(-\theta'_1) = k_2 sin\theta_2$$

o el que és el mateix:

$$\frac{\omega}{v_1} sin\theta_1 = \frac{\omega}{v_1} sin(-\theta'_1) = \frac{\omega}{v_2} sin\theta_2$$

Dividint per ω i multiplicant per c:

$$n_1 sin\theta_1 = n_1 sin(-\theta'_1) = n_2 sin\theta_2$$

De la igualtat entre el primer i segon terme surt:

$$2.A) \qquad \theta'_1 = -\theta_1 \;, \quad \boldsymbol{que\ \text{és}\ la\ llei\ de\ la\ reflexi\text{ó}}$$

De la igualtat entre el primer i el tercer terme surt:

$$2.B) \qquad n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2 \;, \quad \boldsymbol{que\ \text{és}\ la\ llei\ d'Snell\ o\ de\ la\ refracci\text{ó}}$$

És a dir, hem demostrat les lleis bàsiques de l'òptica geomètrica, a partir de les ones electromagnètiques planes i el fet que aquestes han d'estar en fase a la frontera.

Equacions de Maxwell a la interfície

Recordem quines eren les equacions de Maxwell de continuïtat o discontinuïtat que s'havien de satisfer a la interfície entre dos medis:

I1) $\hat{\mathrm{n}} \cdot \left(\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}\right) = \sigma_f$

I2) $\hat{\mathrm{n}}\, x\left(\vec{E}^{+} - \vec{E}^{-}\right) = 0$

I3) $\hat{\mathrm{n}} \cdot \left(\vec{B}^{+} - \vec{B}^{-}\right) = 0$

I4) $\hat{\mathrm{n}}\, x\left(\vec{H}^{+} - \vec{H}^{-}\right) = \vec{\mathbf{k}}_f$

Essent el terme + el de la frontera al medi 1, i el terme – a la frontera al costat del medi 2.

Posant-ho en termes dels camps $\vec{E}$ i $\vec{B}$ i considerant materials no magnètics: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ i que no hi ha corrent superficial $\vec{\mathbf{k}}_f$ a la interfície entre dos dielèctrics (impossible que n'hi hagi ja que són completament aïllants)

I1') $\hat{\mathrm{n}} \cdot \left(\varepsilon_1\vec{E}^{+} - \varepsilon_2\vec{E}^{-}\right) = \sigma_f$

I2') $\hat{\mathrm{n}}\, x\left(\vec{E}^{+} - \vec{E}^{-}\right) = 0$

I3') $\hat{\mathrm{n}} \cdot \left(\vec{B}^{+} - \vec{B}^{-}\right) = 0$:

I4') $\hat{\mathrm{n}}\, x\left(\frac{\vec{B}^{+}}{\mu_0} - \frac{\vec{B}^{-}}{\mu_0}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathrm{n}}\, x\left(\vec{B}^{+} - \vec{B}^{-}\right) = 0$

De fet a partir d'ara només usarem les relacions I2') i I4'), les que diuen que les components tangencials del camp elèctric i magnètic són contínues:

I2') $\hat{\mathrm{n}}\, x\left(\vec{E}^{+} - \vec{E}^{-}\right) = 0$ i   **I4')** $\hat{\mathrm{n}}\, x\left(\vec{B}^{+} - \vec{B}^{-}\right) = 0$

Coeficients de Fresnell

Els coeficients de Fresnell, ens diuen quins són els coeficients pels quals s'han de multiplicar els camp elèctric i magnètic del raig incident per a obtenir el camp elèctric i magnètic dels rajos reflectit i refractat. Es trobaran tot aplicant aquestes continuïtats de les components tangencials dels camps a ambdós costats de la interfície: el costat del medi 1 i el costat del medi 2.

Aplicant-les obtenim:

$$\mathrm{I2'})\quad \hat{\mathrm{n}}\, x\, (\vec{E}_1 + \vec{E}'_1) = \hat{\mathrm{n}}\, x\, \vec{E}_2 \qquad\qquad \mathrm{I4'})\quad \hat{\mathrm{n}}\, x\, (\vec{B}_1 + \vec{B}'_1) = \hat{\mathrm{n}}\, x\, \vec{B}_2$$

Per altra banda tenim les relacions directes (1) i (2) entre els dos camps:

$$\frac{n}{c}\hat{\mathrm{k}}\, x\, \vec{E} = \vec{B} \qquad (1) \qquad\qquad -\frac{c}{n}\hat{\mathrm{k}}\, x\, \vec{B} = \vec{E} \qquad (2)$$

Substituint (1) a I4'):

$$\frac{n_1}{c}\hat{\mathrm{n}}\, x\left(\hat{\mathrm{k}}_1\, x\, \vec{E}_1 + \hat{\mathrm{k}}'_1\, x\, \overrightarrow{E'}_1\right) = \frac{n_2}{c}\hat{\mathrm{n}}\, x\, (\hat{\mathrm{k}}_2\, x\, \vec{E}_2) \qquad (\mathbf{A})$$

Que juntament amb I2'):

$$\hat{\mathrm{n}}\, x\, (\vec{E}_1 + \vec{E}'_1) = \hat{\mathrm{n}}\, x\, \vec{E}_2 \quad (\mathbf{B})$$

Que un cop conegut el raig incident $\vec{E}_1$, constitueixen un sistema de dues equacions vectorials, per a les dues incògnites vectorials $\vec{E}'_1$ i $\vec{E}_2$

Anàlogament substituint (2) a I2'):

$$-\frac{c}{n_1}\hat{\mathrm{n}}\, x\, (\hat{\mathrm{k}}_1 x\, \vec{B}_1 + \hat{\mathrm{k}}'_1\, x\, \vec{B}'_1) = -\frac{c}{n_2}\hat{\mathrm{n}}\, x\, \vec{B}_2 \qquad (\mathbf{C})$$

Que juntament amb I2'):

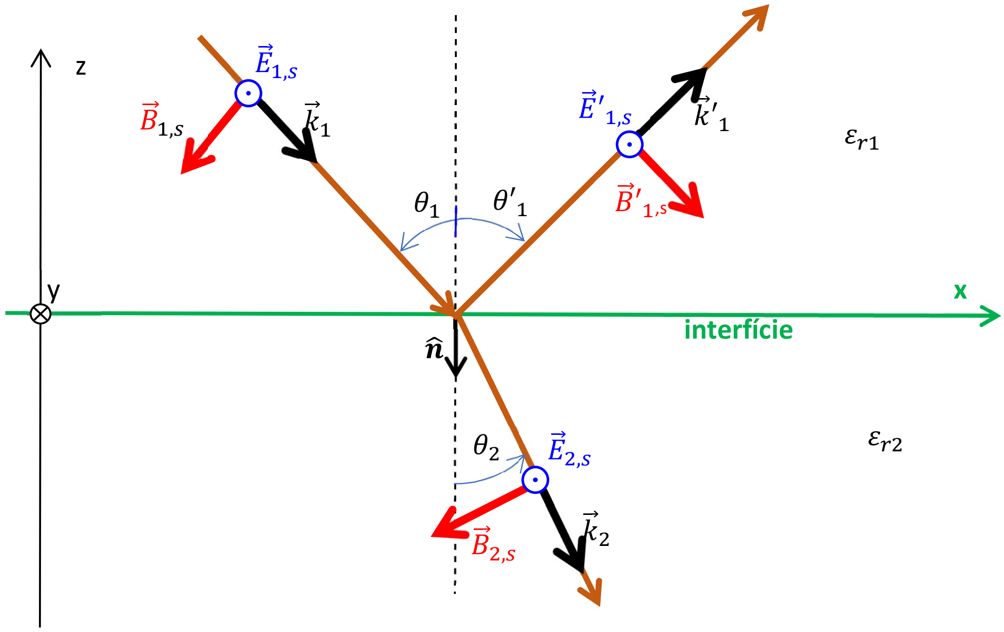
$$\hat{\mathrm{n}}\, x\, (\vec{B}_1 + \vec{B}'_1) = \hat{\mathrm{n}}\, x\, \vec{B}_2 \qquad (\mathbf{D})$$

Que un cop conegut el raig incident $\vec{B}_1$, constitueixen un sistema de dues equacions vectorials per a les dues incògnites vectorials $\vec{B}'_1$ i $\vec{B}_2$

Tant el sistema (A)+(B) com el sistema (C)+(D), en el cas general, són bastant complicats de resoldre, per això, de moment ens centrarem en dos tipus concrets de polarització del camp elèctric, la polarització 's' i la polarització 'p'. Qualsevol altra direcció del camp es pot posar com a combinació lineal d'aquestes dues polaritzacions. Per tant, si ho resolem per a aquestes dues per combinació ho tenim resolt per totes.

Polarització 's'

És la Polarització perpendicular o "**s**enkretch" per al camp elèctric. En aquest cas el camp elèctric dels 3 rajos estan posats de forma perpendicular al pla d'incidència. Òbviament com que formen tríada ortogonal amb $\vec{k}$ el camp magnètic estarà en el pla d'incidència. És el que es veu a al figura següent:



Prenent $\hat{n}\, x(\ )$ a l'esquerra de $(\mathbf{B})$

$$\mathrm{I2})\ \hat{n}\, x\left(\hat{n}\, x\left(\vec{E}_{1,s}+\vec{E}'_{1,s}\right)\right)=\hat{n}\, x\left(\hat{n}\, x\,\vec{E}_{2,s}\right)$$

i tenint en compte que:

$$\hat{n}\, x\left(\hat{n}\, x\vec{E}_s\right)=\underbrace{\left(\hat{n}\cdot\vec{E}_s\right)\hat{n}}_{\substack{0,\ \text{per ser } \vec{E}_s \\ \perp a\, \hat{n}}}-\underbrace{\left(\hat{n}\cdot\hat{n}\right)}_{1}\vec{E}_s=-\vec{E}_s$$

Resulta que (B) se simplifica molt:

$$\vec{E}_{1,s}+\vec{E}'_{1,s}=\vec{E}_{2,s}\quad(\mathbf{B})$$

A partir de (A):

$$n_1\,\hat{n}\, x\left(\hat{k}_1\, x\vec{E}_{1,s}+\hat{k}'_1\, x\vec{E'}_{1,s}\right)=n_2\,\hat{n}\, x\left(\hat{k}_2\, x\vec{E}_{2,s}\right)\qquad(\mathbf{A})$$

I desenvolupant els productes vectorials triples:

$$n_1\left[\underbrace{(\hat{n}\cdot\vec{E}_{1,s})}_{0}\hat{k}_1-\underbrace{(\hat{n}\cdot\hat{k}_1)}_{cos\theta_1}\vec{E}_{1,s}+\underbrace{(\hat{n}\cdot\vec{E}'_{1,s})}_{0}\hat{k}'_1-\underbrace{(\hat{n}\cdot\hat{k}'_1)}_{\substack{cos\,(\pi-\theta'_1)=\\-cos\theta'_1}}\vec{E}'_{1,s}\right]=n_2\left[\underbrace{(\hat{n}\cdot\vec{E}_{2,s})}_{0}\hat{k}_2-\underbrace{(\hat{n}\cdot\hat{k}_2)}_{cos\theta_2}\vec{E}_{2,s}\right]$$

Per tant: $n_1[cos\theta_1\vec{E}_{1,s}-cos\theta'_1\,\vec{E}'_{1,s}]=n_2\,[cos\theta_2\vec{E}_{2,s}]$

Tenint en compte que per la llei de la reflexió $\theta'_1=-\theta_1$

$$n_1cos\theta_1[\vec{E}_{1,s}-\vec{E}'_{1,s}]=n_2cos\theta_2\vec{E}_{2,s}\qquad(\mathbf{A})$$

Els tres camps elèctrics: $\vec{E}_{1,s}$, $\vec{E}'_{1,s}$ i $\vec{E}_{2,s}$ són paral·lels entre sí ja que tots tres són 'senkrecht' o perpendiculars al pla d'incidència. Per tant estan relacionats entre ells per simples productes per escalars; els quals són els anomenats coeficients de Fresnell per polarització s, r_s i t_s, que definim així:

$$\vec{E}'_{1,s}=r_s\vec{E}_{1,s}$$

$$\vec{E}_{2,s}=t_s\vec{E}_{1,s}$$

Substituint aquests coeficients a (A) i a (B):

$$n_1cos\theta_1[1-r_s]=n_2cos\theta_2\,t_s\qquad(\mathbf{A})$$

$$1+r_s\qquad=t_s\qquad(\mathbf{B})$$

Solucionant aquest simple sistema de 2 equacions lineals per a 2 incògnites obtenim:

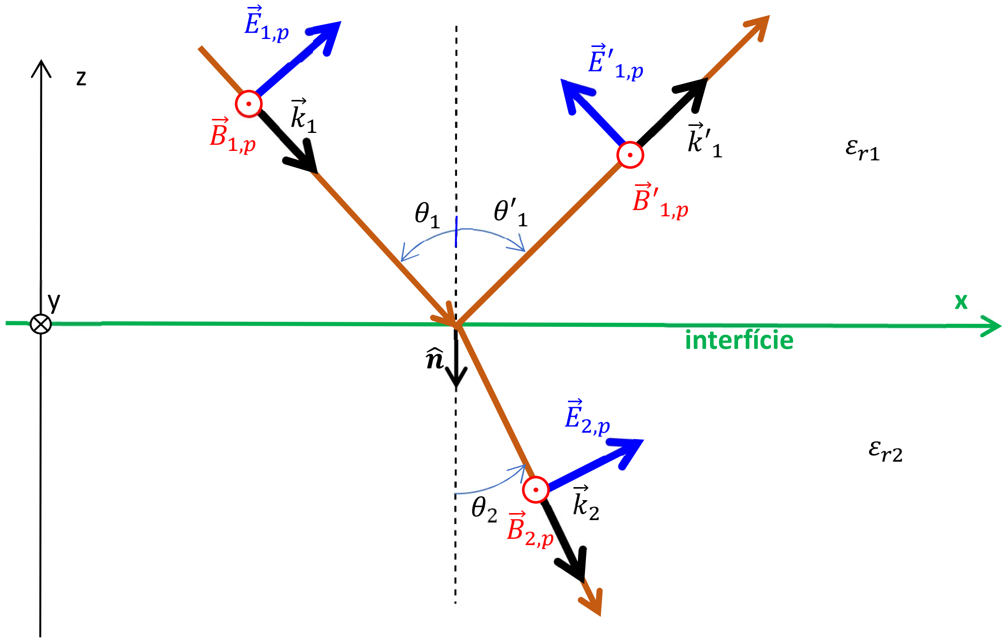
$$r_s=\frac{n_1cos\theta_1-n_2cos\theta_2}{n_1cos\theta_1+n_2cos\theta_2}$$

$$t_s=\frac{2n_1cos\theta_1}{n_1cos\theta_1+n_2cos\theta_2}\geq 0$$

El camp elèctric no canvia de sentit quan es refracta (t_s sempre és positiu o zero) , però ho pot fer quan es reflecteix ja que podríem tenir r_s negatiu.

Polarització 'p'

És la Polarització **p**aral·lela per al camp elèctric. En aquest cas els camp elèctrics $\vec{E}_p$ dels 3 rajos estan tots sobre el pla d'incidència. Òbviament com que formen tríada ortogonal amb $\vec{k}$, el camp magnètic $\vec{B}_p$ ara ha d'estar perpendicular al pla d'incidència. Per això mateix, per a simplificar, les deduccions farem com en el cas anterior, però ara treballant amb $\vec{B}_p$ en comptes de $\vec{E}_p$. A la figura següent tenim la direcció del camps en aquest cas:



Prenent $\hat{\mathrm{n}}\, x(\ )$ a l'esquerra de $(\mathbf{D})$

$$\text{I2)}\quad \hat{\mathrm{n}}\; x\left(\hat{\mathrm{n}}\; x\left(\vec{B}_{1,p}+\vec{B}'_{1,p}\right)\right)=\hat{\mathrm{n}}\; x\left(\hat{\mathrm{n}}\; x\vec{B}_{2,p}\right)$$

i tenint en compte que:

$$\hat{\mathrm{n}}\; x\left(\hat{\mathrm{n}}\; x\vec{B}_p\right)=\underbrace{\left(\hat{\mathrm{n}}\cdot\vec{B}_p\right)\hat{\mathrm{n}}}_{0,\ \text{per ser}\ \vec{B}_p\hat{\mathrm{n}}}-\underbrace{\left(\hat{\mathrm{n}}\cdot\hat{\mathrm{n}}\right)}_{1}\vec{B}_p=-\vec{B}_p$$

Resulta que **(D)** se simplifica molt:

$$\vec{B}_{1,p}+\vec{B}'_{1,p}=\vec{B}_{2,p}\quad(\mathbf{D})$$

A partir de **(C)**:

$$\frac{1}{n_1}\hat{\mathrm{n}}\; x\left(\hat{\mathrm{k}}_1\; x\;\vec{B}_{1,p}+\hat{\mathrm{k}}'_1\; x\;\vec{B}'_{1,p}\right)=\frac{1}{n_2}\hat{\mathrm{n}}\; x\left(\hat{\mathrm{k}}_2\; x\;\vec{B}_{2,p}\right)\qquad(\mathbf{C})$$

I desenvolupant els productes vectorials triples:

$$\frac{1}{n_1}\left[\underbrace{\left(\hat{\mathrm{n}}\cdot\vec{B}_{1,p}\right)}_{0}\hat{\mathrm{k}}_1-\underbrace{\left(\hat{\mathrm{n}}\cdot\hat{\mathrm{k}}_1\right)}_{cos\theta_1}\vec{B}_{1,p}+\underbrace{\left(\hat{\mathrm{n}}\cdot\vec{B}'_{1,p}\right)}_{0}\hat{\mathrm{k}}'_1-\underbrace{\left(\hat{\mathrm{n}}\cdot\hat{\mathrm{k}}'_1\right)}_{\substack{cos\,(\pi-\theta'_1)=\\-cos\theta'_1}}\vec{B}'_{1,p}\right]=\frac{1}{n_2}\left[\underbrace{\left(\hat{\mathrm{n}}\cdot\vec{B}_{2,p}\right)}_{0}\hat{\mathrm{k}}_2-\underbrace{\left(\hat{\mathrm{n}}\cdot\hat{\mathrm{k}}_2\right)}_{cos\theta_2}\vec{B}_{2,p}\right]$$

$$\frac{1}{n_1}\left[cos\theta_1\vec{B}_{1,p}-cos\theta'_1\vec{B}'_{1,p}\right]=\frac{1}{n_2}\left[cos\theta_2\vec{B}_{2,p}\right]$$

Tenint en compte que per la llei de la reflexió $\theta'_1=-\theta_1$

$$\frac{1}{n_1}cos\theta_1\left[\vec{B}_{1,p}-\vec{B}'_{1,p}\right]=\frac{1}{n_2}cos\theta_2\;\vec{B}_{2,p}\qquad(\mathbf{A})$$

Els tres camps elèctrics: $\vec{B}_{1,p}$, $\vec{B'}_{1,p}$ $i\,\vec{B}_{2,p}$ són paral·lels entre sí ja que tots tres són 'senkrecht' o perpendiculars al pla d'incidència. Per tant estan relacionats entre ells per simples productes per escalars; els quals són els anomenats coeficients de Fresnell per polarització s, r_s $i\,t_s$, que definim així:

$$\vec{B'}_{1,p} = r_p \vec{B}_{1,p}$$

$$\vec{B}_{2,p} = t_p \vec{B}_{1,p}$$

Substituint aquests coeficients a (A) i a (B):

$$\frac{1}{n_1} cos\theta_1 [1 - r_p] = \frac{1}{n_2} cos\theta_2\, t_p \qquad (\mathbf{A})$$

$$1 + r_p \qquad = t_p \qquad (\mathbf{B})$$

Solucionant aquest simple sistema de 2 equacions lineals per a 2 incògnites obtenim:

$$r_p = \frac{n_2 cos\theta_1 - n_1 cos\theta_2}{n_2 cos\theta_1 + n_1 cos\theta_2}$$

$$t_p = \frac{2 n_2 cos\theta_1}{n_2 cos\theta_1 + n_1 cos\theta_2} \geq 0$$

El camp elèctric no canvia de sentit quan es refracta (t_p sempre és positiu o zero) , però ho pot fer quan es reflecteix ja que podríem tenir r_p negatiu.

Conservació de l'energia del raig

El vector de Poynting dona lloc a la potència tramesa per un raig per unitat de secció perpendicular a aquest.

Així, per exemple pel raig incident, el vector de Poynting dona la potència per unitat de secció del propi raig:

$$\vec{S}_1 = \vec{E}_1 x\, \vec{H}_1 = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_1 x\, \vec{B}_1 = \frac{n_1}{c\mu_0} {E_1}^2\, \hat{k}_1$$

La potència total del raig és el mòdul S_1 multiplicat per la secció A_1 d'aquest raig.

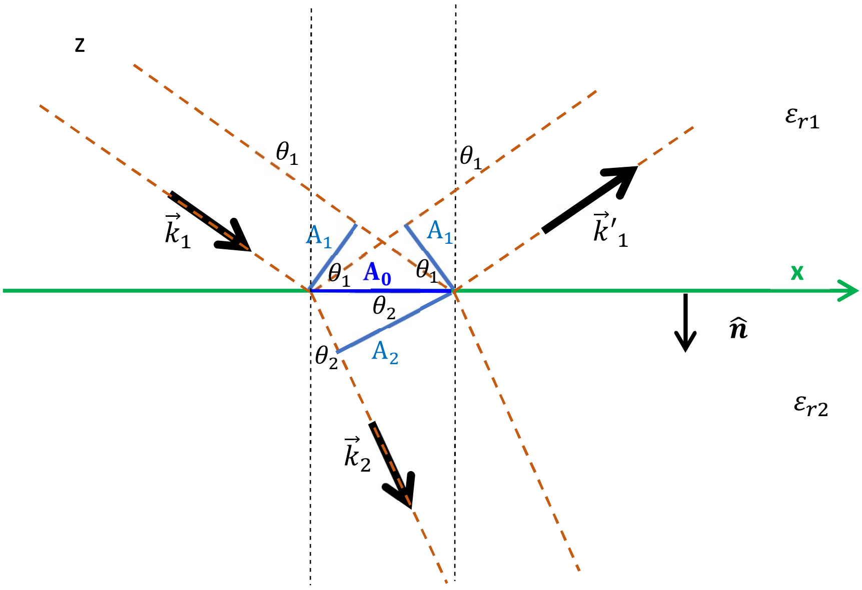
$$P_1 = S_1 A_1 = \frac{n_1}{c\mu_0} {E_1}^2 A_1$$

Així pels rajos reflectits i refractats tenim similarment, mirem la figura següent:

$$P'_1 = S'_1 A'_1 = \frac{n_1}{c\mu_0} {E'_1}^2 A'_1$$

$$P_2 = S_2 A_2 = \frac{n_2}{c\mu_0} {E_2}^2 A_2$$

Les seccions dels rajos incident i reflectit (A_1=A'_1) per un costat, i la del raig refractat (A_2) per un altre, no seran les mateixes òbviament. El que sí que ha de ser la mateixa és la superfície (o taca de llum) sobre la qual es projecten sobre la interfície, la qual anomenarem A_0. Tot això es veu a la figura següent.



Però mirant a la figura ja es veu trigono-mètricament que:

$$A_1 = A_0 \cos\theta_1$$

$$A_2 = A_0 \cos\theta_2$$

Amb la qual cosa en **polarització s**, tenim:

$$P_{1,s} = \frac{n_1}{c\mu_0} E_{1,s}{}^2 A_1 = \frac{E_{1,s}{}^2}{c\mu_0} A_0 \ (\mathrm{n_1} \cos \theta_1)$$

$$P'_{1,s} = \frac{n_1}{c\mu_0} E'_{1,s}{}^2 A_1 = \frac{n_1}{c\mu_0} E'_{1,s}{}^2 A_0 \cos\theta_1 = \frac{E_{1,s}{}^2}{c\mu_0} A_0 (\ n_1 \, r_s{}^2 \cos\theta_1)$$

$$P_{2,s} = \frac{n_2}{c\mu_0} E_{2,s}{}^2 A_2 = \frac{n_2}{c\mu_0} E_{2,s}{}^2 A_0 \cos\theta_2 = \frac{E_{1,s}{}^2}{c\mu_0} A_0 (\ n_2 \, t_s{}^2 \cos\theta_2)$$

Demostraríem la conservació de la potència (potència emesa = potència reflectida + potència refractada o $P_{1,s} = P'_{1,s} + P_{2,s}$) si som capaços de demostrar, que les termes del parèntesi de les relacions anteriors satisfàn la suma següent:

$$n_1 \cos\theta_1 = n_1 \, r_s{}^2 \cos\theta_1 + n_2 \, t_s{}^2 \cos\theta_2$$

O bé substituint-hi els coeficients de Fresnell:

$$n_1 \cos\theta_1 = n_1 \left(\frac{n_1 cos\theta_1 - n_2 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2}\right)^2 \cos\theta_1 + n_2 \left(\frac{2n_1 cos\theta_1}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2}\right)^2 \cos\theta_2$$

Relació que és algebraicament evident, com podem comprovar si desenvolupem els quadrats dels numeradors en detall.

El *coeficient de reflexió* R_s en termes de potència es defineix per polarització s:

$$\mathrm{R}_s \equiv \frac{P'_{1,s}}{P_{1,s}} = \frac{\frac{E_{1,s}{}^2}{c\mu_0} A_0\ \ n_1\, r_s{}^2 \cos\theta_1}{\frac{E_{1,s}{}^2}{c\mu_0} A_0\ \ n_1 \cos\theta_1} = r_s{}^2$$

El *coeficient de refracció* T_s en termes de potència es defineix per polarització s:

$$\mathrm{T}_s \equiv \frac{P_{2,s}}{P_{1,s}} = \frac{\frac{E_{1,s}{}^2}{c\mu_0} A_0\ \ n_2\, t_s{}^2 \cos\theta_2}{\frac{E_{1,s}{}^2}{c\mu_0} A_0\ \ n_1 \cos\theta_1} = \frac{n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1} t_s{}^2$$

La relació anterior:

$$n_1 \cos\theta_1 = n_1\, r_s{}^2 \cos\theta_1 + n_2\, t_s{}^2 \cos\theta_2$$

Demostra també que : $\mathrm{R}_s + \mathrm{T}_s = 1$

Que és una altra forma de veure la conservació de l'energia del raig incident

I en polarització p:

$$P_{1,p} = \frac{c}{\mu_0 n_1} E_{1,s}{}^2 A_1 = \frac{cE_{1,s}{}^2}{\mu_0} A_0 \ \left(\frac{1}{n_1} \cos\theta_1\right)$$

$$P'_{1,s} = \frac{c}{\mu_0 n_1} E'_{1,s}{}^2 A_1 = \frac{c}{\mu_0 n_1} E'_{1,s}{}^2 A_0 \cos\theta_1 = \frac{cE_{1,s}{}^2}{\mu_0} A_0 \ \left(\frac{1}{n_1} r_p{}^2 \cos\theta_1\right)$$

$$P_{2,s} = \frac{c}{\mu_0 n_2} E_{2,s}{}^2 A_2 = \frac{c}{\mu_0 n_2} E_{2,s}{}^2 A_0 \cos\theta_2 = \frac{cE_{1,s}{}^2}{\mu_0} A_0 \ \left(\frac{1}{n_2} t_p{}^2 \cos\theta_2\right)$$

Pel que fa a la conservació de potència de la polarització p, hauríem de demostrar anàlogament que els termes del parèntesi satisfan la suma:

$$\frac{1}{n_1} \cos\theta_1 = \frac{1}{n_1} r_p{}^2 \cos\theta_1 + \frac{1}{n_2} t_p{}^2 \cos\theta_2$$

Substituint-hi els coeficients de Fresnell:

$$\frac{1}{n_1} \cos\theta_1 = \frac{1}{n_1} \left(\frac{n_2 cos\theta_1 - n_1 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2}\right)^2 \cos\theta_1 + \frac{1}{n_2} \left(\frac{2 n_2 cos\theta_1}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2}\right)^2 \cos\theta_2$$

Relació que també és algebraicament evident (si la multipliques per $n_1 n_2$ es veu més bé).

Definint igualment en polarització p, els coeficients de reflexió R_p i de refracció T_p :

$$\mathrm{R}_p \equiv \frac{P'_{1,p}}{P_{1,p}} = \frac{\frac{E_{1,s}{}^2}{c\mu_0} A_0 \ \frac{1}{n_1}\ r_p{}^2 \cos\theta_1}{\frac{E_{1,s}{}^2}{c\mu_0} A_0 \ \frac{1}{n_1} \cos\theta_1} = \ r_p{}^2$$

$$\mathrm{T}_p \equiv \frac{P_{2,p}}{P_{1,p}} = \frac{\frac{E_{1,s}{}^2}{c\mu_0} A_0 \ \frac{1}{n_2}\ t_p{}^2 \cos\theta_2}{\frac{E_{1,s}{}^2}{c\mu_0} A_0 \ \frac{1}{n_1} \cos\theta_1} = \frac{n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1} t_p{}^2$$

La relació:

$$\frac{1}{n_1}\cos\theta_1 = \frac{1}{n_1}\ r_p{}^2 \cos\theta_1 + \frac{1}{n_2}\ t_p{}^2 \cos\theta_2$$

Demostraria que també : $\mathrm{R}_p + \mathrm{T}_p = 1$

Que és l’altra forma de veure la conservació de l’energia del raig incident