Distancias en grafos

Definición

Dado un grafo conexo $G=(V,E)$, la **distancia** entre dos vértices $u,v \in V$ es el mínimo entre las longitudes de los caminos que los conectan.

$$d_G(u,v) = \text{mín}\{\ell(P_{uv}) : P_{uv} \text{ es un camino de } u \text{ a } v\}.$$

Definición

Dado un grafo conexo $G=(V,E)$, la **distancia** entre dos vértices $u,v \in V$ es el mínimo entre las longitudes de los caminos que los conectan.

$$d_G(u,v) = \text{mín}\{\ell(P_{uv}) : P_{uv} \text{ es un camino de } u \text{ a } v\}.$$

Definición

Dado un grafo conexo $G = (V, E)$, la **distancia** entre dos vértices $u, v \in V$ es el mínimo entre las longitudes de los caminos que los conectan.

$$d_G(u,v) = \text{mín}\{\ell(P_{uv}) : P_{uv} \text{ es un camino de } u \text{ a } v\}.$$

Si G no es conexo, la distancia entre dos vértices de un una misma componente se define como en el caso anterior. Para vértices mutuamente inaccesibles, se asigna el valor convencional ∞.

Definición

Dado un grafo conexo $G = (V,E)$, la **distancia** entre dos vértices $u,v \in V$ es el mínimo entre las longitudes de los caminos que los conectan.

$$d_G(u,v) = \min\{\ell(P_{uv}) :\ P_{uv} \text{ es un camino de } u \text{ a } v\}.$$

Si G no es conexo, la distancia entre dos vértices de un una misma componente se define como en el caso anterior. Para vértices mutuamente inaccesibles, se asigna el valor convencional ∞.

Definición

Sea $G = (V,E)$ un grafo conexo y sea $v \in V$.

- La **excentricidad** de v es $\varepsilon(v) = \max\limits_{u \in V}\{d_G(u,v)\}$.

Definición

Dado un grafo conexo $G = (V,E)$, la **distancia** entre dos vértices $u, v \in V$ es el mínimo entre las longitudes de los caminos que los conectan.

$$d_G(u,v) = \min\{\ell(P_{uv}) : P_{uv} \text{ es un camino de } u \text{ a } v\}.$$

Si G no es conexo, la distancia entre dos vértices de un una misma componente se define como en el caso anterior. Para vértices mutuamente inaccesibles, se asigna el valor convencional ∞.

Definición

Sea $G = (V,E)$ un grafo conexo y sea $v \in V$.

- La **excentricidad** de v es $\varepsilon(v) = \max_{u \in V}\{d_G(u,v)\}$.
- El **radio** de G es $r(G) = \min_{u \in V}\{\varepsilon(v)\}$.

Definición

Dado un grafo conexo $G=(V,E)$, la **distancia** entre dos vértices $u,v \in V$ es el mínimo entre las longitudes de los caminos que los conectan.

$$d_G(u,v) = \min\{\ell(P_{uv}) : P_{uv} \text{ es un camino de } u \text{ a } v\}.$$

Si G no es conexo, la distancia entre dos vértices de un una misma componente se define como en el caso anterior. Para vértices mutuamente inaccesibles, se asigna el valor convencional ∞.

Definición

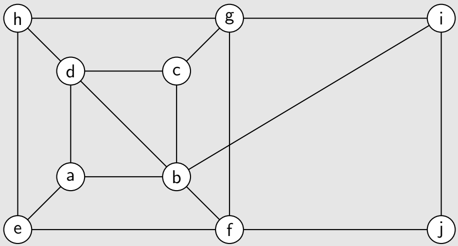
Sea $G=(V,E)$ un grafo conexo y sea $v \in V$.

- La **excentricidad** de v es $\varepsilon(v) = \max\limits_{u \in V}\{d_G(u,v)\}$.
- El **radio** de G es $r(G) = \min\limits_{u \in V}\{\varepsilon(v)\}$.
- El **diámetro** de G es $D(G) = \max\limits_{u \in V}\{\varepsilon(v)\}$.

Ejemplo

Consideremos el grafo G de la siguiente figura.
En este caso tenemos:

- $d_G(a,h) = d_G(a,c) = d_G(a,f) = d_G(a,i) = 2$,
- $d_G(a,g) = d_G(a,j) = 3$,
- $\varepsilon(a) = 3 = D(G)$,
- $\varepsilon(b) = r(G) = 2$.



Ejercicio

Determina el diámetro de los siguientes grafos: K_n, $K_{r,s}$, C_n, P_n.

Ejercicio

Determina el diámetro de los siguientes grafos: K_n, $K_{r,s}$, C_n, P_n.

Solución

- $D(K_n) = 1$
- $D(K_{r,s}) = 2$ si $r \geq 2$ o $s \geq 2$
- $D(P_n) = n-1$, $n \geq 2$
- $D(C_n) = \dfrac{n}{2}$ si n es par y $D(C_n) = \dfrac{n-1}{2}$ si n es impar.

Observación

Para todo grafo conexo $G = (V, E)$ se cumple que (V, d_G) es un espacio métrico. Es decir, $d_G : V \times V \longrightarrow \mathbb{N}$ satisface las propiedades que definen una métrica. Esto es, para todo $u, v, w \in V$:

1. $d_G(u,v) \geq 0$ y $d_G(u,v) = 0$ si y solo si $u = v$;
2. $d_G(u,v) = d_G(v,u)$;
3. $d_G(u,v) \leq d_G(u,w) + d_G(w,v)$ (desigualdad triangular).

Proposición

Para todo grafo G no conexo se cumple que G^c es conexo y $D(G^c) \leq 2$.

Proposición

Para todo grafo G no conexo se cumple que G^c es conexo y $D(G^c) \leq 2$.

- Sean $G_1, G_2, \ldots, G_k$ las componentes conexas de G.
- Sean $x, y \in V(G)$.

Proposición

Para todo grafo G no conexo se cumple que G^c es conexo y $D(G^c) \leq 2$.

- Sean $G_1, G_2, \ldots, G_k$ las componentes conexas de G.
- Sean $x, y \in V(G)$.
- Si $x \not\sim y$ en G, entonces $x \sim y$ en G^c.

Proposición

Para todo grafo G no conexo se cumple que G^c es conexo y $D(G^c) \leq 2$.

- Sean $G_1, G_2, ..., G_k$ las componentes conexas de G.
- Sean $x, y \in V(G)$.
- Si $x \nsim y$ en G, entonces $x \sim y$ en G^c.
- Si $x \sim y$ en G, entonces existe una componente G_i tal que $x, y \in V(G_i)$, y para todo vértice $z \notin V(G_i)$ tenemos que $d_{G^c}(x,z) = 1$ y $d_{G^c}(y,z) = 1$, lo que implica que $d_{G^c}(x,y) = 2$.

Proposición

Para todo grafo G no conexo se cumple que G^c es conexo y $D(G^c) \leq 2$.

- Sean $G_1, G_2, \ldots, G_k$ las componentes conexas de G.
- Sean $x, y \in V(G)$.
- Si $x \not\sim y$ en G, entonces $x \sim y$ en G^c.
- Si $x \sim y$ en G, entonces existe una componente G_i tal que $x, y \in V(G_i)$, y para todo vértice $z \notin V(G_i)$ tenemos que $d_{G^c}(x,z) = 1$ y $d_{G^c}(y,z) = 1$, lo que implica que $d_{G^c}(x,y) = 2$.
- Por lo tanto, G^c es conexo y $D(G^c) \leq 2$. $\square$

Ejercicio

Sea $G = (V, E)$ un grafo de orden $n \geq 2$ tal que para todo par de vértices $u, v \in V$ se cumple $\delta(u) + \delta(v) \geq n - 1$. Prueba que G es conexo. Obtén una cota superior para el diámetro de G.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden $n \geq 2$ tal que para todo par de vértices $u,v \in V$ se cumple $\delta(u)+\delta(v) \geq n-1$. Prueba que G es conexo. Obtén una cota superior para el diámetro de G.

Solución

- Sean $u,v \in V$ dos vértices no adyacentes (si existen).

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden $n \geq 2$ tal que para todo par de vértices $u,v \in V$ se cumple $\delta(u)+\delta(v) \geq n-1$. Prueba que G es conexo. Obtén una cota superior para el diámetro de G.

Solución

- Sean $u,v \in V$ dos vértices no adyacentes (si existen).
- Por el principio de inclusión-exclusión,
  $|N(u) \cup N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cap N(v)|$.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden $n\geq 2$ tal que para todo par de vértices $u,v\in V$ se cumple $\delta(u)+\delta(v)\geq n-1$. Prueba que G es conexo. Obtén una cota superior para el diámetro de G.

Solución

- Sean $u,v\in V$ dos vértices no adyacentes (si existen).
- Por el principio de inclusión-exclusión,
  $|N(u)\cup N(v)|=|N(u)|+|N(v)|-|N(u)\cap N(v)|$.
- Nótese que $|N(u)\cup N(v)|\leq n-2$ y $|N(u)|+|N(v)|=\delta(u)+\delta(v)\geq n-1$.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden $n\geq 2$ tal que para todo par de vértices $u,v\in V$ se cumple $\delta(u)+\delta(v)\geq n-1$. Prueba que G es conexo. Obtén una cota superior para el diámetro de G.

Solución

- Sean $u,v\in V$ dos vértices no adyacentes (si existen).
- Por el principio de inclusión-exclusión,
  $|N(u)\cup N(v)|=|N(u)|+|N(v)|-|N(u)\cap N(v)|$.
- Nótese que $|N(u)\cup N(v)|\leq n-2$ y $|N(u)|+|N(v)|=\delta(u)+\delta(v)\geq n-1$.
- De ahí obtenemos que $|N(u)\cap N(v)|\geq 1$ para todo par de vértices no adyacentes $u,v\in V$.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden $n \geq 2$ tal que para todo par de vértices $u,v \in V$ se cumple $\delta(u)+\delta(v) \geq n-1$. Prueba que G es conexo. Obtén una cota superior para el diámetro de G.

Solución

- Sean $u,v \in V$ dos vértices no adyacentes (si existen).
- Por el principio de inclusión-exclusión,
  $|N(u) \cup N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cap N(v)|$.
- Nótese que $|N(u) \cup N(v)| \leq n-2$ y $|N(u)| + |N(v)| = \delta(u)+\delta(v) \geq n-1$.
- De ahí obtenemos que $|N(u) \cap N(v)| \geq 1$ para todo par de vértices no adyacentes $u,v \in V$.
- Por lo tanto, G es conexo y $D(G) \leq 2$. $\square$

Ejercicio

Sea $G = (V,E)$ un grafo conexo. Demuestra que si $D(G) \geq 4$, entonces $D(G^c) = 2$.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo conexo. Demuestra que si $D(G)\geq 4$, entonces $D(G^c)=2$.

Solución

Nótese que G no es un grafo vacío, lo que implica que G^c no es completo.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo conexo. Demuestra que si $D(G)\geq 4$, entonces $D(G^c)=2$.

Solución

Nótese que G no es un grafo vacío, lo que implica que G^c no es completo.
Sean $x,y\in V$ dos vértices diferentes.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo conexo. Demuestra que si $D(G)\geq 4$, entonces $D(G^c)=2$.

Solución

Nótese que G no es un grafo vacío, lo que implica que G^c no es completo.
Sean $x,y\in V$ dos vértices diferentes.

- Si $x \not\sim y$ en G, entonces $d_{G^c}(x,y)=1$.

Ejercicio

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Demuestra que si $D(G) \geq 4$, entonces $D(G^c) = 2$.

Solución

Nótese que G no es un grafo vacío, lo que implica que G^c no es completo.
Sean $x, y \in V$ dos vértices diferentes.

- Si $x \not\sim y$ en G, entonces $d_{G^c}(x, y) = 1$.
- Vamos a asumir que $x \sim y$ en G. Para todo par de vértices $u, v \in V$ tales que $d_G(u, v) = D(G) \geq 4$ tenemos dos posibilidades.
  - Si $\{x, y\} \cap N_G[u] \neq \varnothing$, entonces $x, y \in N_{G^c}(v)$.
  - Si $\{x, y\} \cap N_G[u] = \varnothing$, entonces $x, y \in N_{G^c}(u)$.

  De ahí que $d_{G^c}(x, y) = 2$.

Ejercicio

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Demuestra que si $D(G) \geq 4$, entonces $D(G^c) = 2$.

Solución

Nótese que G no es un grafo vacío, lo que implica que G^c no es completo.
Sean $x, y \in V$ dos vértices diferentes.

- Si $x \not\sim y$ en G, entonces $d_{G^c}(x, y) = 1$.
- Vamos a asumir que $x \sim y$ en G. Para todo par de vértices $u, v \in V$ tales que $d_G(u, v) = D(G) \geq 4$ tenemos dos posibilidades.
    - Si $\{x, y\} \cap N_G[u] \neq \varnothing$, entonces $x, y \in N_{G^c}(v)$.
    - Si $\{x, y\} \cap N_G[u] = \varnothing$, entonces $x, y \in N_{G^c}(u)$.

  De ahí que $d_{G^c}(x, y) = 2$.

Por lo tanto, podemos concluir que G^c es conexo y $D(G^c) = 2$. $\square$

Ejercicio

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Si $D(G) = 3$, entonces $2 \leq D(G^c) \leq 3$.

Ejercicio

Sea $G = (V,E)$ un grafo conexo. Si $D(G) = 3$, entonces $2 \leq D(G^c) \leq 3$.

Solución

Nótese que G no es un grafo vacío, lo que implica que G^c no es completo.

—

Ejercicio

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Si $D(G) = 3$, entonces $2 \leq D(G^c) \leq 3$.

Solución

Nótese que G no es un grafo vacío, lo que implica que G^c no es completo.

—

Sean $u, v \in V$ tales que $d_G(u, v) = D(G) = 3$ y sea $x \in V$.

Ejercicio

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Si $D(G) = 3$, entonces $2 \leq D(G^c) \leq 3$.

Solución

Nótese que G no es un grafo vacío, lo que implica que G^c no es completo.

—

Sean $u, v \in V$ tales que $d_G(u, v) = D(G) = 3$ y sea $x \in V$.

- Tenemos que $d_{G^c}(u, v) = 1$
- Si $x \in N_G[u]$, entonces $x \in N_{G^c}(v)$.
- Si $x \notin N_G[u]$, entonces $x \in N_{G^c}(u)$.

Por lo tanto, G^c es conexo y $D(G^c) \leq 3$. $\square$

Proposición

Para todo grafo conexo no trivial G y todo grafo H se cumple $D(G \odot H) = D(G) + 2$.

Proposición

Para todo grafo conexo no trivial G y todo grafo H se cumple $D(G \odot H) = D(G) + 2$.

Demostración

Sea $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $H_i = (V_i, E_i)$ la i-ésima copia de H en $G \odot H$.

Proposición

Para todo grafo conexo no trivial G y todo grafo H se cumple $D(G \odot H) = D(G) + 2$.

Demostración

Sea $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $H_i = (V_i, E_i)$ la i-ésima copia de H en $G \odot H$.

- Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, todos $v \in V_i$, tenemos $N_{G \odot H}(v) = N_{H_i}(v) \cup \{v_i\}$.

Proposición

Para todo grafo conexo no trivial G y todo grafo H se cumple $D(G \odot H) = D(G) + 2$.

Demostración

Sea $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $H_i = (V_i, E_i)$ la i-ésima copia de H en $G \odot H$.

- Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, todos $v \in V_i$, tenemos $N_{G \odot H}(v) = N_{H_i}(v) \cup \{v_i\}$.
- En $G \odot H$, los caminos mínimos entre vértices de G no contiene vértices de las copias de H.

Proposición

Para todo grafo conexo no trivial G y todo grafo H se cumple $D(G \odot H) = D(G) + 2$.

Demostración

Sea $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $H_i = (V_i, E_i)$ la i-ésima copia de H en $G \odot H$.

- Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, todos $v \in V_i$, tenemos $N_{G \odot H}(v) = N_{H_i}(v) \cup \{v_i\}$.
- En $G \odot H$, los caminos mínimos entre vértices de G no contiene vértices de las copias de H.
- Para todo $a \in V_i$ y $b \in V_j$ tenemos que $d_{G \odot H}(a,b) = d_{G \odot H}(a, v_i) + d_{G \odot H}(v_i, v_j) + d_{G \odot H}(v_j, b) = 1 + d_G(v_i, v_j) + 1.$

Proposición

Para todo grafo conexo no trivial G y todo grafo H se cumple $D(G\odot H)=D(G)+2$.

Demostración

Sea $V(G)=\{v_1,\ldots,v_n\}$ y $H_i=(V_i,E_i)$ la i-ésima copia de H en $G\odot H$.

- Para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$, todos $v\in V_i$, tenemos $N_{G\odot H}(v)=N_{H_i}(v)\cup\{v_i\}$.
- En $G\odot H$, los caminos mínimos entre vértices de G no contiene vértices de las copias de H.
- Para todo $a\in V_i$ y $b\in V_j$ tenemos que
$$d_{G\odot H}(a,b)=d_{G\odot H}(a,v_i)+d_{G\odot H}(v_i,v_j)+d_{G\odot H}(v_j,b)=1+d_G(v_i,v_j)+1.$$

Por lo tanto, los vértices más alejados en $G\odot H$ no son vértices de G, y podemos concluir que $D(G\odot H)=D(G)+2$. □

Notación

Sean G y H dos grafos conexos.

Notación

Sean G y H dos grafos conexos.

- Dada una secuencia Q de pares ordenados de $V(G) \times V(H)$ de la forma $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, la proyección de Q sobre $V(G)$, denotada por $P_G(Q)$, es la secuencia $x_1, \ldots, x_k$.

Notación

Sean G y H dos grafos conexos.

- Dada una secuencia Q de pares ordenados de $V(G) \times V(H)$ de la forma $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, la proyección de Q sobre $V(G)$, denotada por $P_G(Q)$, es la secuencia $x_1, \ldots, x_k$.
- La proyección $P_H(Q)$ de Q sobre $V(H)$ es $y_1, \ldots, y_k$.

Notación

Sean G y H dos grafos conexos.

- Dada una secuencia Q de pares ordenados de $V(G) \times V(H)$ de la forma $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, la proyección de Q sobre $V(G)$, denotada por $P_G(Q)$, es la secuencia $x_1, \ldots, x_k$.
- La proyección $P_H(Q)$ de Q sobre $V(H)$ es $y_1, \ldots, y_k$.
- Por razones técnicas, vamos a omitir la repetición consecutiva de vértices en $P_G(Q)$ y $P_H(Q)$.

Notación

Sean G y H dos grafos conexos.

- Dada una secuencia Q de pares ordenados de $V(G) \times V(H)$ de la forma $(x_1,y_1),\ldots,(x_k,y_k)$, la proyección de Q sobre $V(G)$, denotada por $P_G(Q)$, es la secuencia $x_1,\ldots,x_k$.
- La proyección $P_H(Q)$ de Q sobre $V(H)$ es $y_1,\ldots,y_k$.
- Por razones técnicas, vamos a omitir la repetición consecutiva de vértices en $P_G(Q)$ y $P_H(Q)$.
- Por ejemplo, si Q es $(a,b),(a,d),(c,d),(e,f)$, entonces $P_G(Q)$ viene dada por a,c,e mientras $P_H(Q)$ sería b,d,f.

Notación

Sean G y H dos grafos conexos.

- Dada una secuencia Q de pares ordenados de $V(G) \times V(H)$ de la forma $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, la proyección de Q sobre $V(G)$, denotada por $P_G(Q)$, es la secuencia $x_1, \ldots, x_k$.
- La proyección $P_H(Q)$ de Q sobre $V(H)$ es $y_1, \ldots, y_k$.
- Por razones técnicas, vamos a omitir la repetición consecutiva de vértices en $P_G(Q)$ y $P_H(Q)$.
- Por ejemplo, si Q es $(a,b),(a,d),(c,d),(e,f)$, entonces $P_G(Q)$ viene dada por a,c,e mientras $P_H(Q)$ sería b,d,f.
- En $G \Box H$, la copia de G asociada a $v \in V(H)$ será denotada por $G \Box \langle v \rangle$, y la copia de H asociada a $u \in V(G)$ será denotada por $\langle u \rangle \Box H$. Nótese que

$$G \Box \langle v \rangle \cong \langle V(G) \times \{v\} \rangle \cong G \text{ y } \langle u \rangle \Box H \cong \langle \{u\} \times V(H) \rangle \cong H.$$

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u,v),(x,y) \in V(G\Box H)$ se cumple

$$d_{G\Box H}((u,v),(x,y)) = d_G(u,x) + d_H(v,y).$$

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u,v),(x,y) \in V(G\Box H)$ se cumple

$$d_{G\Box H}((u,v),(x,y)) = d_G(u,x) + d_H(v,y).$$

Demostración

Por la desigualdad triangular,

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u,v),(x,y) \in V(G\Box H)$ se cumple

$$d_{G\Box H}((u,v),(x,y)) = d_G(u,x) + d_H(v,y).$$

Demostración

Por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}
d_{G\Box H}((u,v),(x,y)) &\leq d_{G\Box H}((u,v),(x,v)) + d_{G\Box H}((x,v),(x,y)) \\
&\leq d_{G\Box\langle v\rangle}((u,v),(x,v)) + d_{\langle x\rangle\Box H}((x,v),(x,y)) \\
&= d_G(u,x) + d_H(v,y).
\end{aligned}$$

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u,v),(x,y) \in V(G\Box H)$ se cumple

$$d_{G\Box H}((u,v),(x,y)) = d_G(u,x) + d_H(v,y).$$

Demostración

Por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} d_{G\Box H}((u,v),(x,y)) &\leq d_{G\Box H}((u,v),(x,v)) + d_{G\Box H}((x,v),(x,y)) \\ &\leq d_{G\Box\langle v\rangle}((u,v),(x,v)) + d_{\langle x\rangle\Box H}((x,v),(x,y)) \\ &= d_G(u,x) + d_H(v,y). \end{aligned}$$

Por otro lado, cada arista de un camino mínimo Q de (u,v) a (x,y) se proyecta como una arista en $P_G(Q)$ y un vértice en $P_H(Q)$ o como un vértice en $P_G(Q)$ y una arista en $P_H(Q)$.

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u,v),(x,y) \in V(G\Box H)$ se cumple

$$d_{G\Box H}((u,v),(x,y)) = d_G(u,x) + d_H(v,y).$$

Demostración

Por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} d_{G\Box H}((u,v),(x,y)) &\leq d_{G\Box H}((u,v),(x,v)) + d_{G\Box H}((x,v),(x,y)) \\ &\leq d_{G\Box\langle v\rangle}((u,v),(x,v)) + d_{\langle x\rangle\Box H}((x,v),(x,y)) \\ &= d_G(u,x) + d_H(v,y). \end{aligned}$$

Por otro lado, cada arista de un camino mínimo Q de (u,v) a (x,y) se proyecta como una arista en $P_G(Q)$ y un vértice en $P_H(Q)$ o como un vértice en $P_G(Q)$ y una arista en $P_H(Q)$.
De ahí que
$d_{G\Box H}((u,v),(x,y)) = |E(Q)| = |E(P_G(Q))| + |E(P_H(Q))| \geq d_G(u,x) + d_H(v,y)$. □

Corolario

Si G y H son grafos conexos, entonces $D(G\square H)=D(G)+D(H)$.

Corolario

Si G y H son grafos conexos, entonces $D(G \Box H) = D(G) + D(H)$.

Ejercicio

Para todo entero $k \geq 1$ se cumple que $D(Q_k) =?$

Corolario

Si G y H son grafos conexos, entonces $D(G\square H) = D(G) + D(H)$.

Ejercicio

Para todo entero $k \geq 1$ se cumple que $D(Q_k) =?$

Solución

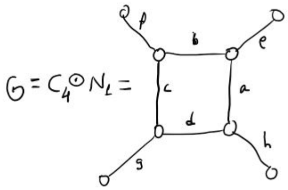
$D(Q_k) = k$.

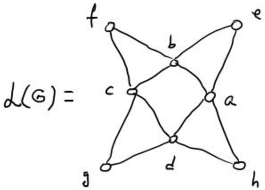
Ejercicio

Sea $G = C_4 \odot N_1$. Calcula el diámetro de $G \Box L(G)$.

Ejercicio

Sea $G = C_4 \odot N_1$. Calcula el diámetro de $G \square L(G)$.





Solución

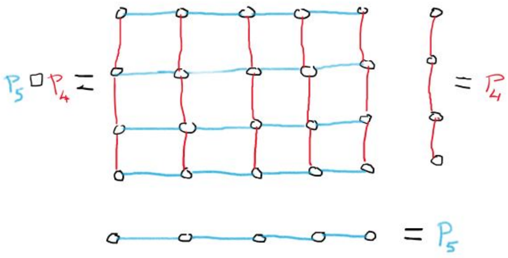
$D(G \square L(G)) = D(G) + D(L(G)) = 4 + 3 = 7.$

Ejercicio

Dado el grafo $G = P_r \square P_s$:

(a) Calcula el orden, la medida y el diámetro de G.

(b) Sean u y v dos vértices de G tales que la distancia entre ellos coincide con el diámetro de G. Calcula el número de caminos de longitud mínima para ir de u a v.



Ejercicio

Dado el grafo $G = P_r \square P_s$:

(a) Calcula el orden, la medida y el diámetro de G.

(b) Sean u y v dos vértices de G tales que la distancia entre ellos coincide con el diámetro de G. Calcula el número de caminos de longitud mínima para ir de u a v.

Ejercicio

Dado el grafo $G = P_r \square P_s$:

(a) Calcula el orden, la medida y el diámetro de G.

(b) Sean u y v dos vértices de G tales que la distancia entre ellos coincide con el diámetro de G. Calcula el número de caminos de longitud mínima para ir de u a v.

Solución

(a) El orden de G es $n = rs$, la medida es $m = r(s-1) + s(r-1)$ y el diámetro es $D(G) = D(P_r) + D(P_s) = r + s - 2$.

Ejercicio

Dado el grafo $G = P_r \square P_s$:

(a) Calcula el orden, la medida y el diámetro de G.

(b) Sean u y v dos vértices de G tales que la distancia entre ellos coincide con el diámetro de G. Calcula el número de caminos de longitud mínima para ir de u a v.

Solución

(a) El orden de G es $n = rs$, la medida es $m = r(s-1) + s(r-1)$ y el diámetro es $D(G) = D(P_r) + D(P_s) = r + s - 2$.

(b) Pongamos las copias de P_r en vertical y las de P_s en horizontal. Para ir de la esquina inferior izquierda hasta la superior derecha debemos dar $r+s-2$ pasos de los cuales $r-1$ son en vertical y $s-1$ son en horizontal. Así, el número de formas de elegir los pasos verticales (horizontales) es $\binom{r+s-2}{r-1} = \frac{(r+s-2)!}{(r-1)!(s-1)!}$.

Ejercicio

Dado un grafo conexo G, el índice de Wiener denotado por $W(G)$, se define como

$$W(G) = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(G)} \left(\sum_{v \in V(G)} d_G(u,v) \right).$$

Sean G y H dos grafos conexos. Obtén una formula para $W(G \square H)$ en términos de $|V(G)|$, $|V(H)|$, $W(G)$ y $W(H)$.

Solución

Veamos que la fórmula es $W(G\Box H) = |V(H)|^2 \cdot W(G) + |V(G)|^2 \cdot W(H)$.

Solución

Veamos que la fórmula es $W(G\square H)=|V(H)|^2\cdot W(G)+|V(G)|^2\cdot W(H)$.

$$\begin{aligned}
W(G\square H) &= \frac{1}{2}\sum_{(g,h)\in V(G\square H)}\left(\sum_{(g',h')\in V(G\square H)} d_{G\square H}((g,h),(g',h'))\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{g\in V(G)}\sum_{h\in V(H)}\left(\sum_{g'\in V(G)}\sum_{h'\in V(H)}(d_G(g,g')+d_H(h,h'))\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{g\in V(G)}\sum_{h\in V(H)}\left(\sum_{g'\in V(G)}\sum_{h'\in V(H)}d_G(g,g')\right)+\\
&\qquad +\frac{1}{2}\sum_{g\in V(G)}\sum_{h\in V(H)}\left(\sum_{g'\in V(G)}\sum_{h'\in V(H)}d_H(h,h')\right)\\
&= \frac{1}{2}|V(H)|^2\sum_{g\in V(G)}\left(\sum_{g'\in V(G)}d_G(g,g')\right)+\frac{1}{2}|V(G)|^2\sum_{h\in V(H)}\left(\sum_{h'\in V(H)}d_H(h,h')\right)\\
&= |V(H)|^2\cdot W(G)+|V(G)|^2\cdot W(H).
\end{aligned}$$

Proposición

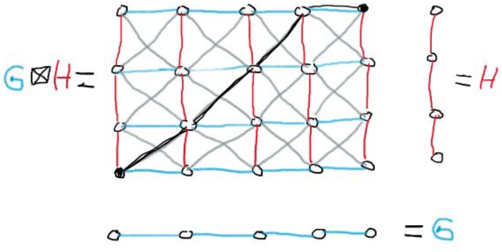
Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in V(G\boxtimes H)$ se cumple

$$d_{G\boxtimes H}((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \text{máx}\{d_G(u_1,v_1), d_H(u_2,v_2)\}.$$

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in V(G\boxtimes H)$ se cumple

$$d_{G\boxtimes H}((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \text{máx}\{d_G(u_1,v_1), d_H(u_2,v_2)\}.$$



Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in V(G \boxtimes H)$ se cumple

$$d_{G\boxtimes H}((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \text{máx}\{d_G(u_1,v_1), d_H(u_2,v_2)\}.$$

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in V(G \boxtimes H)$ se cumple

$$d_{G\boxtimes H}((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \text{máx}\{d_G(u_1,v_1), d_H(u_2,v_2)\}.$$

Demostración

Sean $g = x_0x_1...x_k = g'$ y $h = y_0y_1...y_l = h'$ caminos de longitud mínima. Vamos a asumir, sin pérdida de generalidad, que
$d_H(h,h') = l \leq k = d_G(g,g') = \text{máx}\{d_G(g,g'), d_H(h,h')\}$.

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in V(G\boxtimes H)$ se cumple

$$d_{G\boxtimes H}((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \text{máx}\{d_G(u_1,v_1),d_H(u_2,v_2)\}.$$

Demostración

Sean $g = x_0x_1...x_k = g'$ y $h = y_0y_1...y_l = h'$ caminos de longitud mínima. Vamos a asumir, sin pérdida de generalidad, que
$d_H(h,h') = l \leq k = d_G(g,g') = \text{máx}\{d_G(g,g'),d_H(h,h')\}$.

- Entonces $(g,h) = (x_0,y_0),\ldots,(x_l,y_l)(x_{l+1},y_l)...(x_k,y_l) = (g',h')$ es un amino de (g,h) a (g',h') y por eso

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in V(G\boxtimes H)$ se cumple

$$d_{G\boxtimes H}((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \max\{d_G(u_1,v_1), d_H(u_2,v_2)\}.$$

Demostración

Sean $g = x_0x_1...x_k = g'$ y $h = y_0y_1...y_l = h'$ caminos de longitud mínima. Vamos a asumir, sin pérdida de generalidad, que $d_H(h,h') = l \le k = d_G(g,g') = \max\{d_G(g,g'), d_H(h,h')\}$.

- Entonces $(g,h) = (x_0,y_0),\dots,(x_l,y_l)(x_{l+1},y_l)...(x_k,y_l) = (g',h')$ es un amino de (g,h) a (g',h') y por eso $d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h')) \le k = \max\{d_G(g,g'), d_H(h,h')\}$.

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in V(G\boxtimes H)$ se cumple

$$d_{G\boxtimes H}((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \max\{d_G(u_1,v_1), d_H(u_2,v_2)\}.$$

Demostración

Sean $g = x_0x_1...x_k = g'$ y $h = y_0y_1...y_l = h'$ caminos de longitud mínima. Vamos a asumir, sin pérdida de generalidad, que
$d_H(h,h') = l \leq k = d_G(g,g') = \max\{d_G(g,g'), d_H(h,h')\}$.

- Entonces $(g,h) = (x_0,y_0),\ldots,(x_l,y_l)(x_{l+1},y_l)...(x_k,y_l) = (g',h')$ es un amino de (g,h) a (g',h') y por eso
  $d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h')) \leq k = \max\{d_G(g,g'), d_H(h,h')\}$.
- Recíprocamente, para todo camino mínimo Q de (g,h) a (g',h'),

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V(G \boxtimes H)$ se cumple

$$d_{G \boxtimes H}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \text{máx}\{d_G(u_1, v_1), d_H(u_2, v_2)\}.$$

Demostración

Sean $g = x_0 x_1 ... x_k = g'$ y $h = y_0 y_1 ... y_l = h'$ caminos de longitud mínima. Vamos a asumir, sin pérdida de generalidad, que
$d_H(h, h') = l \leq k = d_G(g, g') = \text{máx}\{d_G(g, g'), d_H(h, h')\}$.

- Entonces $(g, h) = (x_0, y_0), \ldots, (x_l, y_l)(x_{l+1}, y_l) ... (x_k, y_l) = (g', h')$ es un amino de (g, h) a (g', h') y por eso
  $d_{G \boxtimes H}((g, h), (g', h')) \leq k = \text{máx}\{d_G(g, g'), d_H(h, h')\}$.
- Recíprocamente, para todo camino mínimo Q de (g, h) a (g', h'),
  $d_G(g, g') \leq |E(P_G(Q))| \leq |E(Q)|$ y $d_H(h, h')\} \leq |E(P_H(Q))| \leq |E(Q)|$.

Proposición

Sean G y H dos grafos conexos. Para todo $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in V(G\boxtimes H)$ se cumple

$$d_{G\boxtimes H}((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \text{máx}\{d_G(u_1,v_1),d_H(u_2,v_2)\}.$$

Demostración

Sean $g = x_0x_1...x_k = g'$ y $h = y_0y_1...y_l = h'$ caminos de longitud mínima. Vamos a asumir, sin pérdida de generalidad, que
$d_H(h,h') = l \leq k = d_G(g,g') = \text{máx}\{d_G(g,g'),d_H(h,h')\}$.

- Entonces $(g,h) = (x_0,y_0),\dots,(x_l,y_l)(x_{l+1},y_l)...(x_k,y_l) = (g',h')$ es un amino de (g,h) a (g',h') y por eso
  $d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h')) \leq k = \text{máx}\{d_G(g,g'),d_H(h,h')\}$.
- Recíprocamente, para todo camino mínimo Q de (g,h) a (g',h'),
  $d_G(g,g') \leq |E(P_G(Q))| \leq |E(Q)|$ y $d_H(h,h')\} \leq |E(P_H(Q))| \leq |E(Q)|$.
  Por lo tanto, $\text{máx}\{d_G(g,g'),d_H(h,h')\} \leq |E(Q)| = d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h'))$. $\square$

Corolario

Si G y H son grafos conexos, entonces $D(G \boxtimes H) = \text{máx}\{D(G), D(H)\}$.

Proposición

Sea G un grafo conexo no trivial y sea H un grafo. Para todo par de vértices $(g,h),(g',h') \in V(G\circ H)$,

$$d_{G\circ H}((g,h),(g',h')) = \begin{cases} d_G(g,g') & \text{si} \quad g \neq g', \\ \text{mín}\{2, d_H(h,h')\} & \text{si} \quad g = g'. \end{cases}$$

Proposición

Sea G un grafo conexo no trivial y sea H un grafo. Para todo par de vértices $(g,h),(g',h') \in V(G \circ H)$,

$$d_{G\circ H}((g,h),(g',h')) = \begin{cases} d_G(g,g') & \text{si} \quad g \neq g', \\ \min\{2, d_H(h,h')\} & \text{si} \quad g = g'. \end{cases}$$

Demostración

Diferenciamos dos casos.
Caso 1. $g \neq g'$ en G.

—

Caso 2. $g = g'$.

Proposición

Sea G un grafo conexo no trivial y sea H un grafo. Para todo par de vértices $(g,h),(g',h') \in V(G\circ H)$,

$$d_{G\circ H}((g,h),(g',h')) = \begin{cases} d_G(g,g') & \text{si} \quad g \neq g', \\ \min\{2, d_H(h,h')\} & \text{si} \quad g = g'. \end{cases}$$

Demostración

Caso 1. $g \neq g'$ en G.

- Para todo camino mínimo Q de (g,h) a (g',h'), $d_{G\circ H}((g,h),(g',h')) = |E(Q)| \geq |E(P_G(Q))| \geq d_G(g,g')$.
- Además, para todo camino mínimo $g = x_0,\ldots,x_k = g'$ tenemos que $(g,h) = (x_0,h),(x_1,h'),\ldots,(x_k,h') = (g',h')$ es un camino de (g,h) a (g',h'), lo que implica que $d_{G\circ H}((g,h),(g',h')) \leq k = d_G(g,g')$. Por lo tanto, $d_{G\circ H}((g,h),(g',h')) = d_G(g,g')$.

Proposición

Sea G un grafo conexo no trivial y sea H un grafo. Para todo par de vértices $(g,h),(g',h') \in V(G \circ H)$,

$$d_{G\circ H}((g,h),(g',h')) = \begin{cases} d_G(g,g') & \text{si} \quad g \neq g', \\ \min\{2, d_H(h,h')\} & \text{si} \quad g = g'. \end{cases}$$

Demostración

Caso 2. $g = g'$.

- Si h y h' son adyacentes en H, entonces (g,h) y (g',h') son adyacentes en $G \circ H$. Así, $d_{G\circ H}((g,h),(g',h')) = 1 = \min\{2, d_H(h,h')\}$.
- Supongamos que $h \not\sim h'$ en H. En tal caso, $(g,h) \not\sim (g',h')$ en $G \circ H$, y por eso $d_{G\circ H}((g,h),(g',h')) \geq 2 = \min\{2, d_H(h,h')\}$. Como para todo $z \in N_G(g)$ existe el camino $(g,h),(z,h),(g,h')$, concluimos que $d_{G\circ H}((g,h),(g',h')) = 2 = \min\{2, d_H(h,h')\}$. □

Corolario

Para todo grafo conexo no trivial G y todo grafo H,

$$D(G \circ H) = \text{máx}\{D(G), \text{mín}\{2, D(H)\}\}.$$

Nótese que si H no es conexo,entonces asumimos que $D(H) = \infty$.

Ejercicio

Sean G y H dos grafos conexos de orden mayor o igual que 2. Calcula el diámetro de los siguientes grafos:

(a) $(G \odot H) \Box (H \odot G)$

(b) $(G \odot H) \boxtimes (H \odot G)$

(c) $(G \odot H) \Box G$

(d) $(G \odot H) \boxtimes G$

(e) $G \boxtimes (G \circ H)$

Solución

(a) $D((G\odot H)\square(H\odot G)) = D(G\odot H)+D(H\odot G) = D(G)+D(H)+4.$

Solución

(a) $D((G \odot H) \square (H \odot G)) = D(G \odot H) + D(H \odot G) = D(G) + D(H) + 4.$

(b) $D((G \odot H) \boxtimes (H \odot G)) = \text{máx}\{D(G \odot H), D(H \odot G)\} =$
$\text{máx}\{D(G) + 2, D(H) + 2\}.$

Solución

(a) $D((G \odot H) \square (H \odot G)) = D(G \odot H) + D(H \odot G) = D(G) + D(H) + 4.$

(b) $D((G \odot H) \boxtimes (H \odot G)) = \text{máx}\{D(G \odot H), D(H \odot G)\} = \text{máx}\{D(G) + 2, D(H) + 2\}.$

(c) $D((G \odot H) \square G) = 2D(G) + 2.$

Solución

(a) $D((G\odot H)\square(H\odot G)) = D(G\odot H)+D(H\odot G) = D(G)+D(H)+4.$

(b) $D((G\odot H)\boxtimes(H\odot G)) = \text{máx}\{D(G\odot H), D(H\odot G)\} = \text{máx}\{D(G)+2, D(H)+2\}.$

(c) $D((G\odot H)\square G) = 2D(G)+2.$

(d) $D((G\odot H)\boxtimes G) = D(G)+2.$

Solución

(a) $D((G\odot H)\square(H\odot G)) = D(G\odot H)+D(H\odot G) = D(G)+D(H)+4.$

(b) $D((G\odot H)\boxtimes(H\odot G)) = \text{máx}\{D(G\odot H), D(H\odot G)\} = \text{máx}\{D(G)+2, D(H)+2\}.$

(c) $D((G\odot H)\square G) = 2D(G)+2.$

(d) $D((G\odot H)\boxtimes G) = D(G)+2.$

(e) $D(G\boxtimes(G\circ H)) = \text{máx}\{D(G), \text{mín}\{2, D(H)\}\}.$

Definición

El **centro** de un grafo G es el conjunto

$$\mathcal{C}(G) = \{v \in V(G) : \varepsilon(v) = r(G)\}.$$

Definición

El **centro** de un grafo G es el conjunto

$$\mathcal{C}(G) = \{v \in V(G) : \varepsilon(v) = r(G)\}.$$

Ejercicio

Pon tres ejemplos de grafos $G = (V, E)$ tales que $\mathcal{C}(G) = V$.

Definición

El **centro** de un grafo G es el conjunto

$$\mathcal{C}(G) = \{v \in V(G) : \varepsilon(v) = r(G)\}.$$

Ejercicio

Pon tres ejemplos de grafos $G = (V, E)$ tales que $\mathcal{C}(G) = V$.

Solución

- Los grafos completos, $G = K_n$.
- Los hipercubos $G = Q_k$.
- Los grafos bipartitos completos $G = K_{r,s}$ con $r, s \geq 2$.

Teorema

El centro de todo árbol está formado por un vértice o por un par de vértices adyacentes.

Teorema

El centro de todo árbol está formado por un vértice o por un par de vértices adyacentes.

Demostración

Sea T un árbol. El resultado es obvio para $T = K_1$ y $T = K_2$. Sea $n(T) \geq 3$. Nótese lo siguiente.

Teorema

El centro de todo árbol está formado por un vértice o por un par de vértices adyacentes.

Demostración

Sea T un árbol. El resultado es obvio para $T = K_1$ y $T = K_2$. Sea $n(T) \geq 3$. Nótese lo siguiente.

- Si la excentricidad de un vértice v es $\varepsilon_T(v) = d_T(u,v)$, entonces $\delta(u) = 1$.

Teorema

El centro de todo árbol está formado por un vértice o por un par de vértices adyacentes.

Demostración

Sea T un árbol. El resultado es obvio para $T = K_1$ y $T = K_2$. Sea $n(T) \geq 3$. Nótese lo siguiente.

- Si la excentricidad de un vértice v es $\varepsilon_T(v) = d_T(u,v)$, entonces $\delta(u) = 1$.
- Para el árbol T' obtenido a partir de T eliminando los vértices de grado uno, se cumple que $\varepsilon_{T'}(v) = \varepsilon_T(v) - 1$ para todo $v \in V(T')$.

Teorema

El centro de todo árbol está formado por un vértice o por un par de vértices adyacentes.

Demostración

Sea T un árbol. El resultado es obvio para $T = K_1$ y $T = K_2$. Sea $n(T) \geq 3$. Nótese lo siguiente.

- Si la excentricidad de un vértice v es $\varepsilon_T(v) = d_T(u,v)$, entonces $\delta(u) = 1$.
- Para el árbol T' obtenido a partir de T eliminando los vértices de grado uno, se cumple que $\varepsilon_{T'}(v) = \varepsilon_T(v) - 1$ para todo $v \in V(T')$.
- De ahí que $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(T')$.

Teorema

El centro de todo árbol está formado por un vértice o por un par de vértices adyacentes.

Demostración

Sea T un árbol. El resultado es obvio para $T = K_1$ y $T = K_2$. Sea $n(T) \geq 3$. Nótese lo siguiente.

- Si la excentricidad de un vértice v es $\varepsilon_T(v) = d_T(u,v)$, entonces $\delta(u) = 1$.
- Para el árbol T' obtenido a partir de T eliminando los vértices de grado uno, se cumple que $\varepsilon_{T'}(v) = \varepsilon_T(v) - 1$ para todo $v \in V(T')$.
- De ahí que $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(T')$.
- Si continuamos el proceso de eliminar las hojas, obtenemos subárboles de T con el mismo centro que T.

Teorema

El centro de todo árbol está formado por un vértice o por un par de vértices adyacentes.

Demostración

Sea T un árbol. El resultado es obvio para $T = K_1$ y $T = K_2$. Sea $n(T) \geq 3$. Nótese lo siguiente.

- Si la excentricidad de un vértice v es $\varepsilon_T(v) = d_T(u,v)$, entonces $\delta(u) = 1$.
- Para el árbol T' obtenido a partir de T eliminando los vértices de grado uno, se cumple que $\varepsilon_{T'}(v) = \varepsilon_T(v) - 1$ para todo $v \in V(T')$.
- De ahí que $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(T')$.
- Si continuamos el proceso de eliminar las hojas, obtenemos subárboles de T con el mismo centro que T.
- En un número finito de pasos obtendremos a K_1 o a K_2 como subárboles de T, y los vértices de estos subárboles formarán el centro de T. $\square$

Teorema

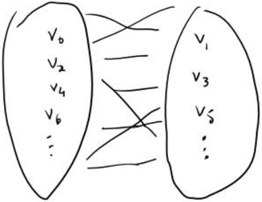
Un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.

Teorema

Un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.

Demostración, nos limitamos al caso conexo: ver apuntes.

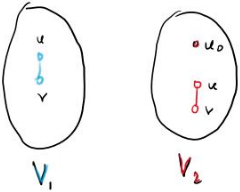
$(\Rightarrow)$



Ciclo $v_0 v_1 v_2 v_3 \cdots v_{k-1}\ v_k = v_0$

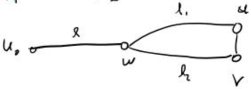
$l = k$ par

$(\Leftarrow)$



$V_2 = \{u_0\} \cup \{v \in V :\ d(u_0, v) \text{ es par}\}$

$V_1 = V \setminus V_2$



$l_1 + l_2$ par

$d(u_0, u) = l + l_1$

$d(u_0, v) = l + l_2$

Corolario

Todos árbol es un grafo bipartito.

Ejercicio

Sean G y H dos grafos. Determina una condición necesaria y suficiente para que los siguientes grafos sean bipartitos.

(a) $G \odot H$

(b) $G + H$

(c) $G \square H$

(d) $G \boxtimes H$

Ejercicio

Sean G y H dos grafos. Determina una condición necesaria y suficiente para que los siguientes grafos sean bipartitos.

(a) $G \odot H$

(b) $G + H$

(c) $G \square H$

(d) $G \boxtimes H$

Solución

(a) $G \odot H$ es bipartito si y sólo si G es bipartito y H es nulo.

Ejercicio

Sean G y H dos grafos. Determina una condición necesaria y suficiente para que los siguientes grafos sean bipartitos.

(a) $G \odot H$

(b) $G + H$

(c) $G \Box H$

(d) $G \boxtimes H$

Solución

(a) $G \odot H$ es bipartito si y sólo si G es bipartito y H es nulo.

(b) $G + H$ es bipartito si y sólo si G y H son nulos.

Ejercicio

Sean G y H dos grafos. Determina una condición necesaria y suficiente para que los siguientes grafos sean bipartitos.

(a) $G \odot H$

(b) $G + H$

(c) $G \square H$

(d) $G \boxtimes H$

Solución

(a) $G \odot H$ es bipartito si y sólo si G es bipartito y H es nulo.

(b) $G + H$ es bipartito si y sólo si G y H son nulos.

(c) $G \square H$ es bipartito si y sólo si G y H son bipartitos.

Ejercicio

Sean G y H dos grafos. Determina una condición necesaria y suficiente para que los siguientes grafos sean bipartitos.

(a) $G \odot H$

(b) $G + H$

(c) $G \square H$

(d) $G \boxtimes H$

Solución

(a) $G \odot H$ es bipartito si y sólo si G es bipartito y H es nulo.

(b) $G + H$ es bipartito si y sólo si G y H son nulos.

(c) $G \square H$ es bipartito si y sólo si G y H son bipartitos.

(d) $G \boxtimes H$ es bipartito si y sólo si G es bipartito y H es nulo o viceversa.

Ejercicio

Sea G un grafo.

- Diremos que $S \subseteq V(G)$ es un conjunto dominante en G si $N_G(u) \cap S \neq \varnothing$ para todo $u \in V(G) \setminus S$.
- Un subconjunto $S \subseteq V(G)$ es un conjunto dominante conexo en G si es un conjunto dominante en G y el subgrafo inducido por S es conexo.
- El número de dominación conexa de G, denotado por $\gamma_c(G)$, es el mínimo cardinal entre todos los conjuntos dominantes conexos de G.

Demuestra que las siguientes afirmaciones se cumplen para todo grafo conexo $G \ncong K_1$ tal que su complemento G^c es conexo.

(a) $D(G^c) \neq 2$ si y solo si $\gamma_c(G) = 2$.

(b) $D(G) = D(G^c) = 3$ si y solo si $\gamma_c(G) = \gamma_c(G^c) = 2$.