Dominación en grafos

Definición

Sea $G=(V,E)$ es un grafo. Un conjunto $S \subseteq V$ es *dominante* en G si $N(v) \cap S \neq \varnothing$ para todo vértice $v \in V \setminus S$.

Definición

Sea $G=(V,E)$ es un grafo. Un conjunto $S\subseteq V$ es *dominante* en G si $N(v)\cap S\neq\varnothing$ para todo vértice $v\in V\setminus S$.

La vecindad abierta de un conjunto $S\subseteq V$ se define como

$$N(S)=\bigcup_{u\in S}N(s),$$

mientras la vecindad cerrada de $S\subseteq V$ se define como

$$N[S]=N(S)\cup S=\bigcup_{u\in S}N[u].$$

Por lo tanto, $S\subseteq V$ es un conjunto dominante en $G=(V,E)$ si y solo si $N[S]=V$.

El *número de dominación* de un grafo G se define como

$$\gamma(G) = \min\{|S| : \ S \text{ es un conjunto dominante en } G\}.$$

Un conjunto dominante de cardinal $\gamma(G)$ se denomina $\gamma(G)$-set.

El *número de dominación* de un grafo G se define como

$$\gamma(G) = \text{mín}\{|S| : \; S \text{ es un conjunto dominante en } G\}.$$

Un conjunto dominante de cardinal $\gamma(G)$ se denomina $\gamma(G)$-set.

Ejemplos

$\gamma(K_n) = 1$, $\gamma(Q_3) = 2$, $\gamma(C_5) = 2$ y $\gamma(K_{r,s}) = 2$.

Ejercicio

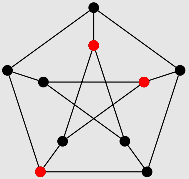
Determina el número de dominación del grafo de Petersen.

Ejercicio

Determina el número de dominación del grafo de Petersen.

Solución

Sea G es el grafo de Petersen.



Como G es 3-regular, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$, tenemos que $|N[\{u,v\}]| \leq 8 < 10 = n(G)$. De ahí que $\gamma(G) \geq 3$. Los vértices en rojo forman un conjunto dominante. Por lo tanto, $\gamma(G) = 3$. □

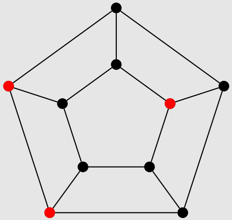
Ejercicio

Determina el número de dominación de $C_5 \square K_2$.

Ejercicio

Determina el número de dominación de $C_5 \square K_2$.

Solución



Como $C_5 \square K_2$ es 3-regular, para todo par de vértices $u, v \in V(C_5 \square K_2)$, tenemos que $|N[\{u,v\}]| \leq 8 < 10 = n(C_5 \square K_2)$. De ahí que $\gamma(C_5 \square K_2) \geq 3$. Los vértices en rojo forman un conjunto dominante. Por lo tanto, $\gamma(C_5 \square K_2) = 3$. $\square$

Definición

Un conjunto dominante S es *minimal* si para todo vértice $v \in S$, el conjunto $S \setminus \{v\}$ no es dominante.

Proposición

Un conjunto dominante S de un grafo $G = (V, E)$ es dominante minimal si y solo si para cada vértice $v \in S$, una de las siguientes condiciones se cumple.

(a) v es un vértice aislado del subgrafo inducido por S.

(b) Existe un vértice $u \in V \setminus S$ tal que $N(u) \cap S = \{v\}$.

Proposición

Un conjunto dominante S de un grafo $G=(V,E)$ es dominante minimal si y solo si para cada vértice $v \in S$, una de las siguientes condiciones se cumple.

(a) v es un vértice aislado del subgrafo inducido por S.

(b) Existe un vértice $u \in V \setminus S$ tal que $N(u) \cap S = \{v\}$.

Demostración

Primer, asumimos que S es un conjunto dominante minimal de G.

Proposición

Un conjunto dominante S de un grafo $G = (V, E)$ es dominante minimal si y solo si para cada vértice $v \in S$, una de las siguientes condiciones se cumple.

(a) v es un vértice aislado del subgrafo inducido por S.

(b) Existe un vértice $u \in V \setminus S$ tal que $N(u) \cap S = \{v\}$.

Demostración

Primer, asumimos que S es un conjunto dominante minimal de G. En este caso, $\forall v \in S$ el conjunto $S' = S \setminus \{v\}$ no es dominante, de ahí que $\exists u \in V \setminus S'$ tal que $N(u) \cap S' = \varnothing$.

Proposición

Un conjunto dominante S de un grafo $G=(V,E)$ es dominante minimal si y solo si para cada vértice $v \in S$, una de las siguientes condiciones se cumple.

(a) v es un vértice aislado del subgrafo inducido por S.

(b) Existe un vértice $u \in V \setminus S$ tal que $N(u) \cap S = \{v\}$.

Demostración

Primer, asumimos que S es un conjunto dominante minimal de G. En este caso, $\forall v \in S$ el conjunto $S' = S \setminus \{v\}$ no es dominante, de ahí que $\exists u \in V \setminus S'$ tal que $N(u) \cap S' = \varnothing$. Si $u = v$, entonces (a) se cumple, y si $u \neq v$, entonces $N(u) \cap S = \{v\}$, lo que significa que (b) se cumple.

Proposición

Un conjunto dominante S de un grafo $G = (V, E)$ es dominante minimal si y solo si para cada vértice $v \in S$, una de las siguientes condiciones se cumple.

(a) v es un vértice aislado del subgrafo inducido por S.

(b) Existe un vértice $u \in V \setminus S$ tal que $N(u) \cap S = \{v\}$.

Demostración

Primer, asumimos que S es un conjunto dominante minimal de G. En este caso, $\forall v \in S$ el conjunto $S' = S \setminus \{v\}$ no es dominante, de ahí que $\exists u \in V \setminus S'$ tal que $N(u) \cap S' = \varnothing$. Si $u = v$, entonces (a) se cumple, y si $u \neq v$, entonces $N(u) \cap S = \{v\}$, lo que significa que (b) se cumple.

Recíprocamente, vamos a asumir que S es un conjunto dominante y que $\forall v \in S$, una de las dos condiciones se cumple. Supongamos que S no es un conjunto dominante minimal.

Proposición

Un conjunto dominante S de un grafo $G = (V, E)$ es dominante minimal si y solo si para cada vértice $v \in S$, una de las siguientes condiciones se cumple.

(a) v es un vértice aislado del subgrafo inducido por S.

(b) Existe un vértice $u \in V \setminus S$ tal que $N(u) \cap S = \{v\}$.

Demostración

Primer, asumimos que S es un conjunto dominante minimal de G. En este caso, $\forall v \in S$ el conjunto $S' = S \setminus \{v\}$ no es dominante, de ahí que $\exists u \in V \setminus S'$ tal que $N(u) \cap S' = \varnothing$. Si $u = v$, entonces (a) se cumple, y si $u \neq v$, entonces $N(u) \cap S = \{v\}$, lo que significa que (b) se cumple.

Recíprocamente, vamos a asumir que S es un conjunto dominante y que $\forall v \in S$, una de las dos condiciones se cumple. Supongamos que S no es un conjunto dominante minimal. Esto es, $\exists v \in S$ tal que $S_v = S \setminus \{v\}$ es dominante.

Proposición

Un conjunto dominante S de un grafo $G = (V,E)$ es dominante minimal si y solo si para cada vértice $v \in S$, una de las siguientes condiciones se cumple.

(a) v es un vértice aislado del subgrafo inducido por S.

(b) Existe un vértice $u \in V \setminus S$ tal que $N(u) \cap S = \{v\}$.

Demostración

Primer, asumimos que S es un conjunto dominante minimal de G. En este caso, $\forall v \in S$ el conjunto $S' = S \setminus \{v\}$ no es dominante, de ahí que $\exists u \in V \setminus S'$ tal que $N(u) \cap S' = \varnothing$. Si $u = v$, entonces (a) se cumple, y si $u \neq v$, entonces $N(u) \cap S = \{v\}$, lo que significa que (b) se cumple.

Recíprocamente, vamos a asumir que S es un conjunto dominante y que $\forall v \in S$, una de las dos condiciones se cumple. Supongamos que S no es un conjunto dominante minimal. Esto es, $\exists v \in S$ tal que $S_v = S \setminus \{v\}$ es dominante. En tal caso, (a) no se cumple para v, y $\forall u \in V \setminus S$ tenemos que $N(u) \cap S_v \neq \varnothing$, lo que implica que (b) no se cumple para v.

Proposición

Un conjunto dominante S de un grafo $G = (V,E)$ es dominante minimal si y solo si para cada vértice $v \in S$, una de las siguientes condiciones se cumple.

(a) v es un vértice aislado del subgrafo inducido por S.

(b) Existe un vértice $u \in V \setminus S$ tal que $N(u) \cap S = \{v\}$.

Demostración

Primer, asumimos que S es un conjunto dominante minimal de G. En este caso, $\forall v \in S$ el conjunto $S' = S \setminus \{v\}$ no es dominante, de ahí que $\exists u \in V \setminus S'$ tal que $N(u) \cap S' = \varnothing$. Si $u = v$, entonces (a) se cumple, y si $u \neq v$, entonces $N(u) \cap S = \{v\}$, lo que significa que (b) se cumple.

Recíprocamente, vamos a asumir que S es un conjunto dominante y que $\forall v \in S$, una de las dos condiciones se cumple. Supongamos que S no es un conjunto dominante minimal. Esto es, $\exists v \in S$ tal que $S_v = S \setminus \{v\}$ es dominante. En tal caso, (a) no se cumple para v, y $\forall u \in V \setminus S$ tenemos que $N(u) \cap S_v \neq \varnothing$, lo que implica que (b) no se cumple para v. Por lo tanto, ni (a) ni (b) se cumplen para v, lo que es una contradicción. □

Proposición

Sea $G = (V, E)$ un grafo de grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 1$. Si $S \subseteq V$ es un conjunto dominante minimal, entonces $V \setminus S$ es un conjunto dominante.

Proposición

Sea $G=(V,E)$ un grafo de grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G)\geq 1$. Si $S\subseteq V$ es un conjunto dominante minimal, entonces $V\setminus S$ es un conjunto dominante.

Demostración

Sea $v\in S$. Por la proposición anterior, o bien $N(v)\cap S=\varnothing$ o bien $\exists u\in V\setminus S$ tal que $N(u)\cap S=\{v\}$. En el primer caso, como $\delta(v)\geq 1$, tenemos que $\exists w\in V\setminus S$ tal que $v\in N(w)$. En el segundo caso, v es adyacente a $u\in V\setminus S$. Por lo tanto, $V\setminus S$ es un conjunto dominante de G. $\square$

Proposición

Sea $G = (V,E)$ un grafo de grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 1$. Si $S \subseteq V$ es un conjunto dominante minimal, entonces $V \setminus S$ es un conjunto dominante.

Demostración

Sea $v \in S$. Por la proposición anterior, o bien $N(v) \cap S = \varnothing$ o bien $\exists u \in V \setminus S$ tal que $N(u) \cap S = \{v\}$. En el primer caso, como $\delta(v) \geq 1$, tenemos que $\exists w \in V \setminus S$ tal que $v \in N(w)$. En el segundo caso, v es adyacente a $u \in V \setminus S$. Por lo tanto, $V \setminus S$ es un conjunto dominante de G. $\square$

Corolario

Para todo grafo G de orden n y grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 1$,

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Demostración

Sea S un $\gamma(G)$-set.

Proposición

Sea $G=(V,E)$ un grafo de grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G)\geq 1$. Si $S\subseteq V$ es un conjunto dominante minimal, entonces $V\setminus S$ es un conjunto dominante.

Demostración

Sea $v\in S$. Por la proposición anterior, o bien $N(v)\cap S=\varnothing$ o bien $\exists u\in V\setminus S$ tal que $N(u)\cap S=\{v\}$. En el primer caso, como $\delta(v)\geq 1$, tenemos que $\exists w\in V\setminus S$ tal que $v\in N(w)$. En el segundo caso, v es adyacente a $u\in V\setminus S$. Por lo tanto, $V\setminus S$ es un conjunto dominante de G. $\square$

Corolario

Para todo grafo G de orden n y grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G)\geq 1$,

$$\gamma(G)\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

Demostración

Sea S un $\gamma(G)$-set. Como $V\setminus S$ es un conjunto dominante, $\gamma(G)\leq|V\setminus S|=n-\gamma(G)$, lo que implica que $\gamma(G)\leq\frac{n}{2}$. $\square$

Ejercicio

Sea G un grafo de orden n. Demuestra que para todo grafo H,

$$\gamma(G \odot H) = n.$$

Ejercicio

Sea G un grafo de orden n. Demuestra que para todo grafo H,

$$\gamma(G \odot H) = n.$$

Solución

Por definición de grafo corona, $V(G)$ es un conjunto dominante de $G \odot H$, lo que implica que $\gamma(G \odot H) \leq n$.

—

Ejercicio

Sea G un grafo de orden n. Demuestra que para todo grafo H,

$$\gamma(G \odot H) = n.$$

Solución

Por definición de grafo corona, $V(G)$ es un conjunto dominante de $G \odot H$, lo que implica que $\gamma(G \odot H) \leq n$.

—

Por otro lado, para todo $v \in V(G)$, vamos a denotar por H_v a la copia de H asociada a v en $G \odot H$. Para todo $\gamma(G \odot H)$-set S tenemos lo siguiente:

Ejercicio

Sea G un grafo de orden n. Demuestra que para todo grafo H,

$$\gamma(G \odot H) = n.$$

Solución

Por definición de grafo corona, $V(G)$ es un conjunto dominante de $G \odot H$, lo que implica que $\gamma(G \odot H) \leq n$.

—

Por otro lado, para todo $v \in V(G)$, vamos a denotar por H_v a la copia de H asociada a v en $G \odot H$. Para todo $\gamma(G \odot H)$-set S tenemos lo siguiente:

- $|N_{G\odot H}[S] \cap V(H_v)| \geq 1$ para todo $v \in V(G)$.
- $N_{G\odot H}(V(H_v)) \cap N_{G\odot H}(V(H_u)) = \varnothing$ para todo par $u, v \in V(G)$.

De ahí que $\gamma(G \odot H) \geq n$. $\square$

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de orden n y grado máximo Δ,

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta.$$

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de orden n y grado máximo Δ,

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta.$$

Solución

Cota inferior.

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de orden n y grado máximo Δ,

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta.$$

Solución

Cota inferior. Para todo $\gamma(G)$-set S tenemos

$$n \leq |S| + \sum_{v \in S} \delta(v) \leq |S| + |S|\Delta = \gamma(G)(1+\Delta).$$

Por lo tanto, la cota inferior se cumple.

—

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de orden n y grado máximo Δ,

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n-\Delta.$$

Solución

Cota inferior. Para todo $\gamma(G)$-set S tenemos

$$n \leq |S| + \sum_{v\in S} \delta(v) \leq |S| + |S|\Delta = \gamma(G)(1+\Delta).$$

Por lo tanto, la cota inferior se cumple.

—

Cota superior.

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de orden n y grado máximo Δ,

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n-\Delta.$$

Solución

Cota inferior. Para todo $\gamma(G)$-set S tenemos

$$n \leq |S| + \sum_{v\in S} \delta(v) \leq |S| + |S|\Delta = \gamma(G)(1+\Delta).$$

Por lo tanto, la cota inferior se cumple.

—

Cota superior. Para todo vértice $v \in V$ de grado máximo, el conjunto $V \setminus N(v)$ es dominante. Por lo tanto, $\gamma(G) \leq |V \setminus N(v)| = n - \Delta$. $\square$

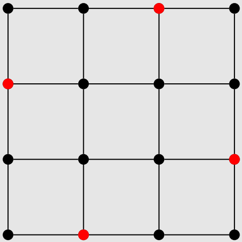
Ejercicio

Determina $\gamma(P_4 \square P_4)$.

Ejercicio

Determina $\gamma(P_4 \square P_4)$.

- Los vértices en rojo forman un conjunto dominante, de ahí que $\gamma(P_4 \square P_4) \leq 4$.
- Por otro lado, $\gamma(P_4 \square P_4) \geq \left\lceil \frac{n}{1+\Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{16}{1+4} \right\rceil = 4$.



Por lo tanto, $\gamma(P_4 \square P_4) = 4$. $\square$

Ejercicio

Sea G un grafo de orden n y grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G)$. Demuestra que si G tiene diámetro 2, entonces

$$\gamma(G) \leq \delta_{\text{mín}}(G).$$

Ejercicio

Sea G un grafo de orden n y grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G)$. Demuestra que si G tiene diámetro 2, entonces

$$\gamma(G) \leq \delta_{\text{mín}}(G).$$

Solución

Si v es un vértice de grado mínimo y G tiene diámetro 2, entonces $N(v)$ es un conjunto dominante. Por lo tanto, $\gamma(G) \leq |N(v)| = \delta_{\text{mín}}(G)$. □

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de orden n y grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 1$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \delta_{\text{mín}}(G) + 2}{2} \right\rfloor.$$

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de orden n y grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 1$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \delta_{\text{mín}}(G) + 2}{2} \right\rfloor.$$

Solución

- Sea $v \in V$ de grado mínimo y sea $X_v = \{u \in V : N(u) = N(v)\}$.

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de orden n y grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 1$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \delta_{\text{mín}}(G) + 2}{2} \right\rfloor.$$

Solución

- Sea $v \in V$ de grado mínimo y sea $X_v = \{u \in V : N(u) = N(v)\}$.
- Si $V = X_v \cup N(v)$, entonces $\gamma(G) = 1$ o $\gamma(G) = 2$, y el resultado se cumple.

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de orden n y grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 1$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \delta_{\text{mín}}(G) + 2}{2} \right\rfloor.$$

Solución

- Sea $v \in V$ de grado mínimo y sea $X_v = \{u \in V : N(u) = N(v)\}$.
- Si $V = X_v \cup N(v)$, entonces $\gamma(G) = 1$ o $\gamma(G) = 2$, y el resultado se cumple.
- Vamos a asumir que $V \neq X_v \cup N(v)$, y vamos a denotar por G'' el subgrafo inducido por $V \setminus (X_v \cup N(v))$, y por G' el inducido por $X_v \cup N(v)$.

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de orden n y grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 1$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \delta_{\text{mín}}(G) + 2}{2} \right\rfloor.$$

Solución

- Sea $v \in V$ de grado mínimo y sea $X_v = \{u \in V : N(u) = N(v)\}$.
- Si $V = X_v \cup N(v)$, entonces $\gamma(G) = 1$ o $\gamma(G) = 2$, y el resultado se cumple.
- Vamos a asumir que $V \neq X_v \cup N(v)$, y vamos a denotar por G'' el subgrafo inducido por $V \setminus (X_v \cup N(v))$, y por G' el inducido por $X_v \cup N(v)$.
- Como G'' no tiene vértices aislados, $2\gamma(G'') \leq n - \delta_{\text{mín}}(G) - |X_v|$.

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de orden n y grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 1$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \delta_{\text{mín}}(G) + 2}{2} \right\rfloor.$$

Solución

- Sea $v \in V$ de grado mínimo y sea $X_v = \{u \in V : N(u) = N(v)\}$.
- Si $V = X_v \cup N(v)$, entonces $\gamma(G) = 1$ o $\gamma(G) = 2$, y el resultado se cumple.
- Vamos a asumir que $V \neq X_v \cup N(v)$, y vamos a denotar por G'' el subgrafo inducido por $V \setminus (X_v \cup N(v))$, y por G' el inducido por $X_v \cup N(v)$.
- Como G'' no tiene vértices aislados, $2\gamma(G'') \leq n - \delta_{\text{mín}}(G) - |X_v|$.
- Por otro lado, $2\gamma(G) \leq 2\gamma(G') + 2\gamma(G'') \leq 2\gamma(G') + n - \delta_{\text{mín}}(G) - |X_v|$.

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de orden n y grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 1$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \delta_{\text{mín}}(G) + 2}{2} \right\rfloor .$$

Solución

- Sea $v \in V$ de grado mínimo y sea $X_v = \{u \in V : N(u) = N(v)\}$.
- Si $V = X_v \cup N(v)$, entonces $\gamma(G) = 1$ o $\gamma(G) = 2$, y el resultado se cumple.
- Vamos a asumir que $V \neq X_v \cup N(v)$, y vamos a denotar por G'' el subgrafo inducido por $V \setminus (X_v \cup N(v))$, y por G' el inducido por $X_v \cup N(v)$.
- Como G'' no tiene vértices aislados, $2\gamma(G'') \leq n - \delta_{\text{mín}}(G) - |X_v|$.
- Por otro lado, $2\gamma(G) \leq 2\gamma(G') + 2\gamma(G'') \leq 2\gamma(G') + n - \delta_{\text{mín}}(G) - |X_v|$.
- Si $|X_v| = 1$, entonces $\gamma(G') = 1$, y si $|X_v| \geq 2$, entonces $\gamma(G') = 2$. En ambos casos $2\gamma(G') - |X_v| \leq 2$, lo que implica $2\gamma(G) \leq n - \delta_{\text{mín}}(G) + 2$. $\square$

Observación

Si H es un subgrafo generador de un grafo G, entonces $\gamma(H) \geq \gamma(G)$.

Observación

Si H es un subgrafo generador de un grafo G, entonces $\gamma(H) \geq \gamma(G)$.

Caso particular

$\gamma(P_n) \geq \gamma(C_n)$ para todo entero $n \geq 3$.

Ejercicio

Calcula $\gamma(P_n)$ y $\gamma(C_n)$ para todo entero $n \geq 3$.

Ejercicio

Calcula $\gamma(P_n)$ y $\gamma(C_n)$ para todo entero $n \geq 3$.

Solución

Primero, $\gamma(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{1+\Delta(C_n)} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.
Sea $V(P_n) = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Vamos a construir un conjunto dominante D de P_n tal que $|D| = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

- Si $n \equiv 0 \pmod 3$, entonces $D = \{u_2, u_5, \ldots, u_{n-1}\}$. En este caso, $|D| = \frac{n}{3} = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.
- Si $n \equiv 1 \pmod 3$, entonces $D = \{u_2, u_5, \ldots, u_{n-2}, u_n\}$. Ahora, $|D| = \frac{n-1}{3} + 1 = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.
- Si $n \equiv 2 \pmod 3$, entonces $D = \{u_2, u_5, \ldots, u_n\}$. En este caso, $|D| = \frac{n-2}{3} + 1 = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

Por simple inspección podemos comprobar que D es un conjunto dominante de P_n, lo que implica que $\gamma(P_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Por lo tanto, $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \leq \gamma(C_n) \leq \gamma(P_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. $\square$

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{D(G)+1}{3} \right\rceil$ para todo grafo G de diámetro $D(G)$,

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{D(G)+1}{3} \right\rceil$ para todo grafo G de diámetro $D(G)$,

Solución

- Sea P un camino diametral G y sea S un $\gamma(G)$-set.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{D(G)+1}{3} \right\rceil$ para todo grafo G de diámetro $D(G)$,

Solución

- Sea P un camino diametral G y sea S un $\gamma(G)$-set.
- Para todo $v \in S$ el subgrafo inducido por $N[v]$ contiene como máximo dos aristas de P.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{D(G)+1}{3} \right\rceil$ para todo grafo G de diámetro $D(G)$,

Solución

- Sea P un camino diametral G y sea S un $\gamma(G)$-set.
- Para todo $v \in S$ el subgrafo inducido por $N[v]$ contiene como máximo dos aristas de P.
- Además, como S es un $\gamma(G)$-set, hay a lo sumo $\gamma(G) - 1$ aristas de P conectando las vecindades cerrada de los vértices que pertenecen a S.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{D(G)+1}{3} \right\rceil$ para todo grafo G de diámetro $D(G)$,

Solución

- Sea P un camino diametral G y sea S un $\gamma(G)$-set.
- Para todo $v \in S$ el subgrafo inducido por $N[v]$ contiene como máximo dos aristas de P.
- Además, como S es un $\gamma(G)$-set, hay a lo sumo $\gamma(G)-1$ aristas de P conectando las vecindades cerrada de los vértices que pertenecen a S.
- Por lo tanto, $D(G) = l(P) \leq 2\gamma(G) + (\gamma(G)-1) = 3\gamma(G) - 1$. $\square$

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de diámetro $D(G) \geq 3$,

$$\gamma(G^c) = 2.$$

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de diámetro $D(G) \geq 3$,

$$\gamma(G^c) = 2.$$

Solución

- Sean $x, y \in V$ dos vértices diametrales.

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de diámetro $D(G) \geq 3$,

$$\gamma(G^c) = 2.$$

Solución

- Sean $x, y \in V$ dos vértices diametrales.
- Como $D(G) \geq 3$, tenemos que $\{x, y\}$ es un conjunto dominante G^c, y por eso $\gamma(G^c) \leq 2$.

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de diámetro $D(G) \geq 3$,

$$\gamma(G^c) = 2.$$

Solución

- Sean $x, y \in V$ dos vértices diametrales.
- Como $D(G) \geq 3$, tenemos que $\{x, y\}$ es un conjunto dominante G^c, y por eso $\gamma(G^c) \leq 2$.
- Además, como G no tiene vértices aislados, $\gamma(G^c) \geq 2$.

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de diámetro $D(G) \geq 3$,

$$\gamma(G^c) = 2.$$

Solución

- Sean $x, y \in V$ dos vértices diametrales.
- Como $D(G) \geq 3$, tenemos que $\{x, y\}$ es un conjunto dominante G^c, y por eso $\gamma(G^c) \leq 2$.
- Además, como G no tiene vértices aislados, $\gamma(G^c) \geq 2$.
- Por lo tanto, $\gamma(G^c) = 2$. $\square$

Cuello de un grafo

El cuello de un grafo G es el mínimo entre los órdenes de los ciclos de G.

Cuello de un grafo

El cuello de un grafo G es el mínimo entre los órdenes de los ciclos de G.

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 2$ y cuello $g(G) \geq 5$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n - g(G)}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{g(G)}{3} \right\rceil .$$

Cuello de un grafo

El cuello de un grafo G es el mínimo entre los órdenes de los ciclos de G.

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 2$ y cuello $g(G) \geq 5$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n-g(G)}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{g(G)}{3} \right\rceil.$$

Solución

Si G es un ciclo, entonces ya estamos.

Cuello de un grafo

El cuello de un grafo G es el mínimo entre los órdenes de los ciclos de G.

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 2$ y cuello $g(G) \geq 5$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n-g(G)}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{g(G)}{3} \right\rceil.$$

Solución

Si G es un ciclo, entonces ya estamos. Asumimos que G no es un ciclo.

Cuello de un grafo

El cuello de un grafo G es el mínimo entre los órdenes de los ciclos de G.

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 2$ y cuello $g(G) \geq 5$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n - g(G)}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{g(G)}{3} \right\rceil.$$

Solución

Si G es un ciclo, entonces ya estamos. Asumimos que G no es un ciclo. Sea C un ciclo de G de longitud $g(G)$, y sea G' el subgrafo de G inducido por $V(G) \setminus V(C)$.

Cuello de un grafo

El cuello de un grafo G es el mínimo entre los órdenes de los ciclos de G.

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 2$ y cuello $g(G) \geq 5$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n - g(G)}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{g(G)}{3} \right\rceil.$$

Solución

Si G es un ciclo, entonces ya estamos. Asumimos que G no es un ciclo. Sea C un ciclo de G de longitud $g(G)$, y sea G' el subgrafo de G inducido por $V(G) \setminus V(C)$. Como $g(G) \geq 5$, ningún vértice de G' tiene dos vecinos en C, y como $\delta(G) \geq 2$, tenemos que $\delta(G') \geq 1$. De ahí que $\gamma(G') \leq \left\lfloor \frac{n-g(G)}{2} \right\rfloor$.

Cuello de un grafo

El cuello de un grafo G es el mínimo entre los órdenes de los ciclos de G.

Ejercicio

Demuestra que si G es un grafo de grado mínimo $\delta_{\text{mín}}(G) \geq 2$ y cuello $g(G) \geq 5$, entonces

$$\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n-g(G)}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{g(G)}{3} \right\rceil.$$

Solución

Si G es un ciclo, entonces ya estamos. Asumimos que G no es un ciclo. Sea C un ciclo de G de longitud $g(G)$, y sea G' el subgrafo de G inducido por $V(G) \setminus V(C)$. Como $g(G) \geq 5$, ningún vértice de G' tiene dos vecinos en C, y como $\delta(G) \geq 2$, tenemos que $\delta(G') \geq 1$. De ahí que $\gamma(G') \leq \left\lfloor \frac{n-g(G)}{2} \right\rfloor$. Por lo tanto,

$$\gamma(G) \leq \gamma(G') + \gamma(C) \leq \left\lfloor \frac{n-g(G)}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{g(G)}{3} \right\rceil.$$

□

Definición

Sea $G=(V,E)$ un grafo. Un conjunto $X\subseteq V$ es un 2-*packing* en G si $N[u]\cap N[v]=\varnothing$ para todo $u,v\in X$ con $u\neq v$. El 2-*packing number* de un grafo se define como

$$\rho(G)=\text{máx}\{|X|:\ X \text{ es un 2-packing de } G.\}$$

Un $\rho(G)$-set es un 2-packing de cardinalidad $\rho(G)$.

Definición

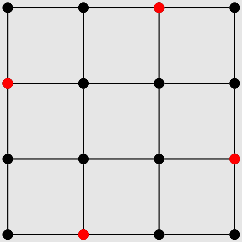
Sea $G=(V,E)$ un grafo. Un conjunto $X\subseteq V$ es un 2-*packing* en G si $N[u]\cap N[v]=\varnothing$ para todo $u,v\in X$ con $u\neq v$. El 2-*packing number* de un grafo se define como

$$\rho(G)=\text{máx}\{|X|:\ X \text{ es un 2-packing de } G.\}$$

Un $\rho(G)$-set es un 2-packing de cardinalidad $\rho(G)$.

Ejemplo

El conjunto de vértices en rojo es un $\rho(P_4\times P_4)$-set. Nótese que $\gamma(P_4\times P_4)=\rho(P_4\times P_4)=4$.



Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G) \geq \rho(G)$ para todo grafo G.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G) \geq \rho(G)$ para todo grafo G.

Solución

- Sea S un $\gamma(G)$-set y sea X un $\rho(G)$-set.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G) \geq \rho(G)$ para todo grafo G.

Solución

- Sea S un $\gamma(G)$-set y sea X un $\rho(G)$-set.
- $|S \cap N[v]| \geq 1$ para todo $v \in X$

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G) \geq \rho(G)$ para todo grafo G.

Solución

- Sea S un $\gamma(G)$-set y sea X un $\rho(G)$-set.
- $|S \cap N[v]| \geq 1$ para todo $v \in X$
- $N[u] \cap N[v] = \varnothing$ para todo $u, v \in X$

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G) \geq \rho(G)$ para todo grafo G.

Solución

- Sea S un $\gamma(G)$-set y sea X un $\rho(G)$-set.
- $|S \cap N[v]| \geq 1$ para todo $v \in X$
- $N[u] \cap N[v] = \varnothing$ para todo $u, v \in X$
- Por lo tanto, $\gamma(G) = |S| \geq \sum_{v \in X} |S \cap N[v]| \geq |X| = \rho(G)$. $\square$

Ejercicio

Demuestra que $\rho(T) = \gamma(T)$ para todo árbol T.

Ejercicio

Demuestra que $\rho(T) = \gamma(T)$ para todo árbol T.

Solución

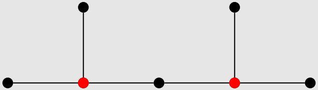
Intentarlo de forma individual. Si no hay éxito, en los apuntes hay 2 vías diferentes de demostración.

Observación

Aunque $\gamma(T) = \rho(T)$ para todo árbol T, hay casos donde ningún $\gamma(T)$-set es un $\rho(T)$-set.

—

Por ejemplo, en el siguiente árbol, el único $\gamma(T)$-set está formado por los vértices en rojo, pero estos vértices no forman un 2-packing.



Conjetura de Vizing

El problema abierto más famoso relacionado con grafos de producto cartesiano sobre el tema de la dominación se conoce como la conjetura de Vizing, que es un problema abierto enunciado por Vadim G. Vizing en 1963.

- Conjetura: $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$ para todo par de grafos G y H.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G\square H) \geq \text{máx}\{\gamma(G)\rho(H), \gamma(H)\rho(G)\}$ para todo par de grafos G y H.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G\Box H) \geq \text{máx}\{\gamma(G)\rho(H), \gamma(H)\rho(G)\}$ para todo par de grafos G y H.

Solución

- Sea D un $\gamma(G\Box H)$-set y X un $\rho(G)$-set.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G\Box H) \geq \text{máx}\{\gamma(G)\rho(H), \gamma(H)\rho(G)\}$ para todo par de grafos G y H.

Solución

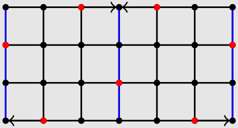
- Sea D un $\gamma(G\Box H)$-set y X un $\rho(G)$-set.
- Sea H_x la copia de H asociada a $x \in V(G)$ en $G\Box H$.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G\Box H) \geq \text{máx}\{\gamma(G)\rho(H), \gamma(H)\rho(G)\}$ para todo par de grafos G y H.

Solución

- Sea D un $\gamma(G\Box H)$-set y X un $\rho(G)$-set.
- Sea H_x la copia de H asociada a $x \in V(G)$ en $G\Box H$.
- La proyección de $D_x = D \cap (N_G[x] \times V(H))$ sobre H_x es un conjunto dominante de H_x. Por ejemplo, en $P_7\Box P_4$, los H_x con $x \in X$ están en azul.

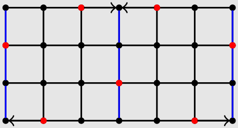


Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G\Box H) \geq \max\{\gamma(G)\rho(H), \gamma(H)\rho(G)\}$ para todo par de grafos G y H.

Solución

- Sea D un $\gamma(G\Box H)$-set y X un $\rho(G)$-set.
- Sea H_x la copia de H asociada a $x \in V(G)$ en $G\Box H$.
- La proyección de $D_x = D \cap (N_G[x] \times V(H))$ sobre H_x es un conjunto dominante de H_x. Por ejemplo, en $P_7\Box P_4$, los H_x con $x \in X$ están en azul.



- Como $N_G[x] \cap N[y] = \varnothing$ para diferentes vértices $x, y \in X$, tenemos que $\gamma(G\Box H) = |D| \geq \sum_{x\in X} |D_x| \geq \sum_{x\in X} \gamma(H) \geq \rho(G)\gamma(H)$. $\square$

Corolario

Para todo grafo G y todo árbol T se cumple que $\gamma(G\square T) \geq \gamma(G)\gamma(T)$.

Ejercicio

Demuestra que para todo par de grafos G y H,

$$\gamma(G\square H) \leq \text{mín}\{n(H)\gamma(G), n(G)\gamma(H)\}.$$

Ejercicio

Demuestra que para todo par de grafos G y H,

$$\gamma(G\square H) \leq \text{mín}\{n(H)\gamma(G), n(G)\gamma(H)\}.$$

Solución

- Sea $S \subseteq V(G)$ un $\gamma(G)$-set.
- Para todo $g' \in V(G) \setminus S$ existe $g \in S$ tal que $g' \in N_G(g)$.
- Para todo $(g', h) \in (V(G) \setminus S) \times V(H)$, existe $(g, h) \in S \times V(H)$ tal que $(g', h) \in N_{G\square H}(g, h)$, lo que implica que $S \times V(H)$ es un conjunto dominante de $G\square H$.
- Por lo tanto, $\gamma(G\square H) \leq |S \times V(H)| = \gamma(G)n(H)$.
- Por analogía, $\gamma(G\square H) \leq n(G)\gamma(H)$. $\square$

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G\square H) \geq \frac{n(H)\gamma(G)}{\Delta(H)+1}$ para todo par de grafos G y H.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G\Box H) \geq \frac{n(H)\gamma(G)}{\Delta(H)+1}$ para todo par de grafos G y H.

Solución

- Sea D un $\gamma(G\Box H)$-set, $V(H) = \{v_1, \ldots, v_{n(H)}\}$ y $G_j = \langle V(G) \times \{v_j\}\rangle \cong G$.
- Sea S_j el conjunto de vértices de G_j no dominados por $D_j = D \cap V(G_j)$.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G\Box H) \geq \frac{n(H)\gamma(G)}{\Delta(H)+1}$ para todo par de grafos G y H.

Solución

- Sea D un $\gamma(G\Box H)$-set, $V(H) = \{v_1, \ldots, v_{n(H)}\}$ y $G_j = \langle V(G) \times \{v_j\}\rangle \cong G$.
- Sea S_j el conjunto de vértices de G_j no dominados por $D_j = D \cap V(G_j)$.
- Tenemos $\gamma(G\Box H) \cdot \Delta(H) = |D|\Delta(H) \geq \sum_{(x,y)\in D} |N_H(y)| \geq \sum_{j=1}^{n(H)} |S_j|$.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G\Box H) \geq \frac{n(H)\gamma(G)}{\Delta(H)+1}$ para todo par de grafos G y H.

Solución

- Sea D un $\gamma(G\Box H)$-set, $V(H) = \{v_1, \ldots, v_{n(H)}\}$ y $G_j = \langle V(G) \times \{v_j\}\rangle \cong G$.
- Sea S_j el conjunto de vértices de G_j no dominados por $D_j = D \cap V(G_j)$.
- Tenemos $\gamma(G\Box H) \cdot \Delta(H) = |D|\Delta(H) \geq \sum_{(x,y)\in D} |N_H(y)| \geq \sum_{j=1}^{n(H)} |S_j|$.
- Además, $D_j \cup S_j$ es un conjunto dominante de $G_j \cong G$, de ahí que $|D_j| + |S_j| \geq \gamma(G)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n(H)\}$.

Ejercicio

Demuestra que $\gamma(G\Box H) \geq \frac{n(H)\gamma(G)}{\Delta(H)+1}$ para todo par de grafos G y H.

Solución

- Sea D un $\gamma(G\Box H)$-set, $V(H) = \{v_1, \dots, v_{n(H)}\}$ y $G_j = \langle V(G) \times \{v_j\}\rangle \cong G$.
- Sea S_j el conjunto de vértices de G_j no dominados por $D_j = D \cap V(G_j)$.
- Tenemos $\gamma(G\Box H)\cdot\Delta(H) = |D|\Delta(H) \geq \sum_{(x,y)\in D} |N_H(y)| \geq \sum_{j=1}^{n(H)} |S_j|$.
- Además, $D_j \cup S_j$ es un conjunto dominante de $G_j \cong G$, de ahí que $|D_j| + |S_j| \geq \gamma(G)$ para todo $j \in \{1, \dots, n(H)\}$.
- $\sum_{j=1}^{n(H)} |S_j| \geq \sum_{j=1}^{n(H)} (\gamma(G) - |D_j|) = n(H)\gamma(G) - |D| = n(H)\gamma(G) - \gamma(G\Box H)$. □