Referencias afines
Coordenadas cartesianas

Notación

- Como vimos antes, un subespacio vectorial generado por un subconjunto X de vectores será denotado por $\langle X \rangle$.
- Por brevedad, si $\{a_0, a_1, \ldots, a_k\} \subseteq A$ es un conjunto finito de puntos de $\mathcal{A}$, entonces $\langle a_0, a_1, \ldots, a_k \rangle$ denotará el subespacio afín de $\mathcal{A}$ que contiene a a_0 y está dirigido por $\langle \overrightarrow{a_0 a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0 a_k} \rangle$.
- Obviamente, este subespacio tiene dimensión a lo sumo k.

Definición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_k \in A$ son independientes si la dimensión del subespacio afín $\langle a_0, a_1, \ldots, a_k \rangle$ es k.
Si $k = \dim(\mathcal{A})$, se dice que $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ es una referencia afín de $\mathcal{A}$.

Definición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_k \in A$ son independientes si la dimensión del subespacio afín $\langle a_0, a_1, \ldots, a_k \rangle$ es k.
Si $k = \dim(\mathcal{A})$, se dice que $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ es una referencia afín de $\mathcal{A}$.

Ejemplo

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un plano afín definido por el conjunto de puntos $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z + 5\}$, donde V es el subepacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

Una referencia afín para este espacio es
$B = (a, b, c) = ((0, 0, -5), (1, 1, -3), (2, 3, 0))$. En este caso,
$\dim(\mathcal{A}) = \dim(V) = 2$ y
$(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = ((1, 1, 2), (2, 3, 5))$ es una base de V.

- Sea $B = (a_0, \ldots, a_n)$ una referencia afín de $\mathcal{A}$.
- El punto a_0 será considerado el origen de $\mathcal{A}$ respecto a B.
- Todo $x \in A$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ definidas por

$$\overrightarrow{a_0x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{a_0a_i}.$$

- Todo punto x está únicamente determinado por sus coordenadas respecto a la referencia afín B.

- Sea $B = (a_0, \ldots, a_n)$ una referencia afín de $\mathcal{A}$.
- El punto a_0 será considerado el origen de $\mathcal{A}$ respecto a B.
- Todo $x \in A$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ definidas por

$$\overrightarrow{a_0x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{a_0a_i}.$$

- Todo punto x está únicamente determinado por sus coordenadas respecto a la referencia afín B.

Ejemplo

Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z + 5\}$ el conjunto de puntos del plano afín del ejemplo anterior. Una referencia afín para este espacio es $B = (a,b,c) = ((0,0,-5),(1,1,-3),(2,3,0))$.
Las coordenadas de a, b y c respecto a esta referencia afin están dadas por $a_B = (0,0)$, $b_B = (1,0)$ y $c_B = (0,1)$. El vector de coordenadas del punto $p = (2,2,-1)$ es $p_B = (2,0)$.

Ecuación de un subespacio afín

Si $\mathcal{A}' = (A', F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces para toda base $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k})$ de F y todo punto $p \in A'$, la ecuación paramétrica-vectorial del subespacio afín es

$$A' = \left\{ p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{u_i} : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K} \right\}.$$

Ecuación de un subespacio afín

Si $\mathcal{A}' = (A', F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces para toda base $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k})$ de F y todo punto $p \in A'$, la ecuación paramétrica-vectorial del subespacio afín es

$$A' = \left\{ p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{u_i} \, : \, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K} \right\}.$$

Sistema de ecuaciones paramétricas de $\mathcal{A}'$

Si $\overrightarrow{u_i}$ tiene coordenadas $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$, en la base $(\overrightarrow{a_0 a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0 a_n})$, entonces todo punto $x \in A'$ se expresa en coordenadas por

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 = & p_1 + \lambda_1 \alpha_{11} + \cdots + \lambda_k \alpha_{k1} \\ & \vdots \\ x_n = & p_n + \lambda_1 \alpha_{1n} + \cdots + \lambda_k \alpha_{kn}, \end{array} \right.$$

donde $(p_1, \ldots, p_n)$ es el vector de coordenadas de p en la referencia afín B.

Ejemplo

Si un punto $q \in A \setminus \{p\}$ tiene coordenadas $(q_1, \ldots, q_n)$, respecto a una referencia afín, entonces la recta p, q esta dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = & p_1 + \lambda(q_1 - p_1) \\ & \vdots \\ x_n = & p_n + \lambda(q_n - p_n). \end{cases}$$

Ejemplo

Si un punto $q \in A \setminus \{p\}$ tiene coordenadas $(q_1, \ldots, q_n)$, respecto a una referencia afín, entonces la recta p,q esta dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = & p_1 + \lambda(q_1 - p_1) \\ & \vdots \\ x_n = & p_n + \lambda(q_n - p_n). \end{cases}$$

Análogamente, tres puntos no colineales p,q,r inducen un plano dado por el sistema

$$\begin{cases} x_1 = & p_1 + \lambda_1(q_1 - p_1) + \lambda_2(r_1 - p_1) \\ & \vdots \\ x_n = & p_n + \lambda_1(q_n - p_n) + \lambda_2(r_n - p_n). \end{cases}$$

Ejercicio

Sea $A = \{x+2+\alpha e^{-x}+\beta e^{x} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ un espacio afín de funciones reales. Determina las coordenadas de la función $g(x) = x+2+e^{-x}+2e^{x}$ respecto a las siguientes referencias afines:

- $B = (x+2+e^{x}, x+2-e^{-x}, x+2+2e^{-x}+e^{x})$
- $C = (x+2, x+2+e^{-x}, x+2+e^{x})$.

Ejercicio

Sea $A = \{x+2+\alpha e^{-x}+\beta e^{x} : \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ un espacio afín de funciones reales. Determina las coordenadas de la función $g(x) = x+2+e^{-x}+2e^{x}$ respecto a las siguientes referencias afines:

- $B = (x+2+e^{x}, x+2-e^{-x}, x+2+2e^{-x}+e^{x})$
- $C = (x+2, x+2+e^{-x}, x+2+e^{x})$.

Solución

- Sea $B = (a,b,c)$. Partiendo de $\overrightarrow{ag} = \lambda_1\overrightarrow{ab}+\lambda_2\overrightarrow{ac}$ se deduce que la función g tiene coordenadas $g_B = (\lambda_1,\lambda_2) = (-1,0)$ respecto a la referencia afín B.

□

Ejercicio

Sea $A = \{x + 2 + \alpha e^{-x} + \beta e^{x} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ un espacio afín de funciones reales. Determina las coordenadas de la función $g(x) = x + 2 + e^{-x} + 2e^{x}$ respecto a las siguientes referencias afines:

- $B = (x + 2 + e^{x}, x + 2 - e^{-x}, x + 2 + 2e^{-x} + e^{x})$
- $C = (x + 2, x + 2 + e^{-x}, x + 2 + e^{x})$.

Solución

- Sea $B = (a, b, c)$. Partiendo de $\overrightarrow{ag} = \lambda_1 \overrightarrow{ab} + \lambda_2 \overrightarrow{ac}$ se deduce que la función g tiene coordenadas $g_B = (\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 0)$ respecto a la referencia afín B.
- Sea $C = (p, q, r)$. Partiendo de $\overrightarrow{pg} = \lambda_1 \overrightarrow{pq} + \lambda_2 \overrightarrow{pr}$ se deduce que la función g tiene coordenadas $g_C = (\lambda_1, \lambda_2) = (1, 2)$ respecto a la referencia afín C.

$\square$