Dimensión métrica

Terminología

- Sea $M = (X, d)$ un espacio métrico. Si X es un conjunto infinito pondremos $|X| = +\infty$.

Terminología

- Sea $M = (X, d)$ un espacio métrico. Si X es un conjunto infinito pondremos $|X| = +\infty$.
- Un conjunto $A \subseteq X$ es un generador métrico de M si para todo par de puntos diferentes $x, y \in X$, existe un punto $a \in A$ tal que $d(x, a) \neq d(y, a)$.

Terminología

- Sea $M = (X, d)$ un espacio métrico. Si X es un conjunto infinito pondremos $|X| = +\infty$.
- Un conjunto $A \subseteq X$ es un generador métrico de M si para todo par de puntos diferentes $x, y \in X$, existe un punto $a \in A$ tal que $d(x, a) \neq d(y, a)$.
- Un generador métrico ordenado $(x_1, \ldots, x_r)$ induce un sistema de coordenadas en M, ya que la aplicación $\psi : X \to \mathbb{R}^r$ dada por $\psi(x) = \Big(d(x, x_1), \ldots, d(x, x_r)\Big)$ es inyectiva.

Terminología

- Sea $M = (X, d)$ un espacio métrico. Si X es un conjunto infinito pondremos $|X| = +\infty$.
- Un conjunto $A \subseteq X$ es un generador métrico de M si para todo par de puntos diferentes $x, y \in X$, existe un punto $a \in A$ tal que $d(x,a) \neq d(y,a)$.
- Un generador métrico ordenado $(x_1, \ldots, x_r)$ induce un sistema de coordenadas en M, ya que la aplicación $\psi : X \to \mathbb{R}^r$ dada por $\psi(x) = \Big(d(x,x_1), \ldots, d(x,x_r)\Big)$ es inyectiva.
- Informalmente, si un objeto en M conoce su distancia hasta cada punto de un generador métrico, entonces sabe exactamente dónde se encuentra en M.

Terminología

- Sea $M = (X,d)$ un espacio métrico. Si X es un conjunto infinito pondremos $|X| = +\infty$.
- Un conjunto $A \subseteq X$ es un generador métrico de M si para todo par de puntos diferentes $x,y \in X$, existe un punto $a \in A$ tal que $d(x,a) \neq d(y,a)$.
- Un generador métrico ordenado $(x_1,\ldots,x_r)$ induce un sistema de coordenadas en M, ya que la aplicación $\psi : X \to \mathbb{R}^r$ dada por $\psi(x) = \Big(d(x,x_1),\ldots,d(x,x_r)\Big)$ es inyectiva.
- Informalmente, si un objeto en M conoce su distancia hasta cada punto de un generador métrico, entonces sabe exactamente dónde se encuentra en M.
- Sea $\mathcal{R}(M)$ el conjunto de generadores métricos de M.

Terminología

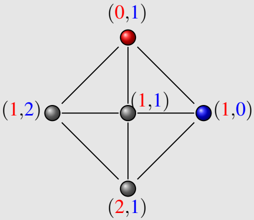
- Sea $M = (X, d)$ un espacio métrico. Si X es un conjunto infinito pondremos $|X| = +\infty$.
- Un conjunto $A \subseteq X$ es un generador métrico de M si para todo par de puntos diferentes $x, y \in X$, existe un punto $a \in A$ tal que $d(x,a) \neq d(y,a)$.
- Un generador métrico ordenado $(x_1, \ldots, x_r)$ induce un sistema de coordenadas en M, ya que la aplicación $\psi : X \to \mathbb{R}^r$ dada por $\psi(x) = \Big(d(x,x_1), \ldots, d(x,x_r)\Big)$ es inyectiva.
- Informalmente, si un objeto en M conoce su distancia hasta cada punto de un generador métrico, entonces sabe exactamente dónde se encuentra en M.
- Sea $\mathcal{R}(M)$ el conjunto de generadores métricos de M.
- La *dimensión métrica* de $M = (X, d)$ se define como $\dim_m(M) = \text{ínf}\{|A| : A \in \mathcal{R}(M).\}$

Terminología

- Sea $M=(X,d)$ un espacio métrico. Si X es un conjunto infinito pondremos $|X|=+\infty$.
- Un conjunto $A\subseteq X$ es un generador métrico de M si para todo par de puntos diferentes $x,y\in X$, existe un punto $a\in A$ tal que $d(x,a)\neq d(y,a)$.
- Un generador métrico ordenado $(x_1,\ldots,x_r)$ induce un sistema de coordenadas en M, ya que la aplicación $\psi: X\to\mathbb{R}^r$ dada por $\psi(x)=\Big(d(x,x_1),\ldots,d(x,x_r)\Big)$ es inyectiva.
- Informalmente, si un objeto en M conoce su distancia hasta cada punto de un generador métrico, entonces sabe exactamente dónde se encuentra en M.
- Sea $\mathcal{R}(M)$ el conjunto de generadores métricos de M.
- La *dimensión métrica* de $M=(X,d)$ se define como $\dim_m(M)=\text{ínf}\{|A|:\ A\in\mathcal{R}(M).\}$
- Un conjunto $A\subseteq X$ es una *base métrica* de M si $A\in\mathcal{R}(M)$ y $|A|=\dim_m(M)$.

Ejemplo

$\dim_m(K_1+C_4)=2$. La figura muestra una base de K_1+C_4 y el correspondiente sistema de coordenadas



Ejercicio

Calcula

- $\dim_m(C_n) =$
- $\dim_m(Q_3) =$

Ejercicio

Calcula

- $\dim_m(C_n) =$
- $\dim_m(Q_3) =$

Solución

- $\dim_m(C_n) = 2$
- $\dim_m(Q_3) = 3$

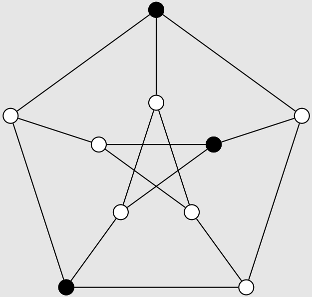
Ejercicio

Calcula la dimensión métrica del grafo de Petersen.

Ejercicio

Calcula la dimensión métrica del grafo de Petersen.

Los vértices en negro forman una base métrica.



Ejercicio

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo de orden $n \geq 2$.
Demuestra que $\dim_m(G) = 1$ si y solo si $G \cong P_n$.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo conexo de orden $n\geq 2$.
Demuestra que $\dim_m(G)=1$ si y solo si $G\cong P_n$.

Solución

- Como todo vértice de grado uno en P_n forma un generador métrico, $\dim_m(P_n)=1$.

Ejercicio

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo de orden $n \geq 2$.
Demuestra que $\dim_m(G) = 1$ si y solo si $G \cong P_n$.

Solución

- Como todo vértice de grado uno en P_n forma un generador métrico, $\dim_m(P_n) = 1$.
- Si $\dim_m(G) = 1$, entonces para toda base métrica $\{w\}$ de G y todo $x, y \in V(G)$, con $x \neq y$, tenemos que $d(w,x) \neq d(w,y)$ Por lo tanto, el conjunto $\{d(w,x) : x \in V(G) \setminus \{w\}\}$ tiene cardinal $n-1$, lo que implica que G tiene diámetro $n-1$, y por eso $G \cong P_n$. $\square$

Ejercicio

Sea G un grafo conexo de orden $n \geq 2$ y diámetro D. Demuestra que

$$\dim_m(G) \leq n - D.$$

Ejercicio

Sea G un grafo conexo de orden $n \geq 2$ y diámetro D. Demuestra que

$$\dim_m(G) \leq n - D.$$

Solución

Sea $x_0, x_1, \ldots, x_D$ un camino diametral en G. Como $d(x_0, x_i) = i$ para todo $i \in \{1, \ldots, D\}$, el conjunto $X = V(G) \setminus \{x_1, \ldots, x_D\}$ es un generador métrico G, de ahí que $\dim_m(G) \leq |X| = n - D$. $\square$

Ejercicio

Sea G un grafo conexo de orden $n \geq 2$.
Demuestra que $\dim_m(G) = n - 1$ si y solo si $G \cong K_n$.

Ejercicio

Sea G un grafo conexo de orden $n \geq 2$.
Demuestra que $\dim_m(G) = n-1$ si y solo si $G \cong K_n$.

Solución

Es fácil ver que $\dim_m(K_n) = n-1$. Por otro lado, si G tiene diámetro $D \geq 2$, por el ejercicio anterior, $\dim_m(G) \leq n-D \leq n-2$. $\square$

Ejercicio

Calcula $\dim_m(P_n \square P_{n'})$ para todo par de enteros $n \geq 2$ y $n' \geq 2$.

Ejercicio

Calcula $\dim_m(P_n \Box P_{n'})$ para todo par de enteros $n \geq 2$ y $n' \geq 2$.

Solución

- Sean $V(P_n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $V(P_{n'}) = \{0, 1, \ldots, n'-1\}$, donde vértices consecutivos son adyacentes.

Ejercicio

Calcula $\dim_m(P_n \square P_{n'})$ para todo par de enteros $n \geq 2$ y $n' \geq 2$.

Solución

- Sean $V(P_n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $V(P_{n'}) = \{0, 1, \ldots, n'-1\}$, donde vértices consecutivos son adyacentes.
- Como $P_n \square P_{n'}$ no es un camino, $\dim_m(P_n \square P_{n'}) \geq 2$.

Ejercicio

Calcula $\dim_m(P_n \Box P_{n'})$ para todo par de enteros $n \geq 2$ y $n' \geq 2$.

Solución

- Sean $V(P_n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $V(P_{n'}) = \{0, 1, \ldots, n'-1\}$, donde vértices consecutivos son adyacentes.
- Como $P_n \Box P_{n'}$ no es un camino, $\dim_m(P_n \Box P_{n'}) \geq 2$.
- Veamos que $\dim_m(P_n \Box P_{n'}) = 2$. Con este fin, supongamos que $B = \{(0,0), (n-1,0)\}$ no es un generador métrico.

Ejercicio

Calcula $\dim_m(P_n \Box P_{n'})$ para todo par de enteros $n \geq 2$ y $n' \geq 2$.

Solución

- Sean $V(P_n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $V(P_{n'}) = \{0, 1, \ldots, n'-1\}$, donde vértices consecutivos son adyacentes.
- Como $P_n \Box P_{n'}$ no es un camino, $\dim_m(P_n \Box P_{n'}) \geq 2$.
- Veamos que $\dim_m(P_n \Box P_{n'}) = 2$. Con este fin, supongamos que $B = \{(0,0), (n-1,0)\}$ no es un generador métrico.
- En tal caso, para vértices diferentes (x,y) y (x',y') obtenemos $x+y = d_{P_n \Box P_{n'}}((0,0),(x,y)) = d_{P_n \Box P_{n'}}((0,0),(x',y')) = x'+y'$ $n-1-x+y = d_{P_n \Box P_{n'}}((n-1,0),(x,y)) = d_{P_n \Box P_{n'}}((n-1,0),(x',y')) =$ $n-1-x'+y'$.

Ejercicio

Calcula $\dim_m(P_n \Box P_{n'})$ para todo par de enteros $n \geq 2$ y $n' \geq 2$.

Solución

- Sean $V(P_n) = \{0,1,\ldots,n-1\}$ y $V(P_{n'}) = \{0,1,\ldots,n'-1\}$, donde vértices consecutivos son adyacentes.
- Como $P_n \Box P_{n'}$ no es un camino, $\dim_m(P_n \Box P_{n'}) \geq 2$.
- Veamos que $\dim_m(P_n \Box P_{n'}) = 2$. Con este fin, supongamos que $B = \{(0,0),(n-1,0)\}$ no es un generador métrico.
- En tal caso, para vértices diferentes (x,y) y (x',y') obtenemos
  $x+y = d_{P_n \Box P_{n'}}((0,0),(x,y)) = d_{P_n \Box P_{n'}}((0,0),(x',y')) = x'+y'$
  $n-1-x+y = d_{P_n \Box P_{n'}}((n-1,0),(x,y)) = d_{P_n \Box P_{n'}}((n-1,0),(x',y')) = n-1-x'+y'$.
- Así, $x = x'$, $y = y'$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, B es un generador métrico, y eso implica que $\dim_m(P_n \Box P_{n'}) \leq |B| = 2$.

Ejercicio

Calcula $\dim_m(P_n \square P_{n'})$ para todo par de enteros $n \geq 2$ y $n' \geq 2$.

Solución

- Sean $V(P_n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $V(P_{n'}) = \{0, 1, \ldots, n'-1\}$, donde vértices consecutivos son adyacentes.
- Como $P_n \square P_{n'}$ no es un camino, $\dim_m(P_n \square P_{n'}) \geq 2$.
- Veamos que $\dim_m(P_n \square P_{n'}) = 2$. Con este fin, supongamos que $B = \{(0,0), (n-1,0)\}$ no es un generador métrico.
- En tal caso, para vértices diferentes (x,y) y (x',y') obtenemos
  $x + y = d_{P_n \square P_{n'}}((0,0),(x,y)) = d_{P_n \square P_{n'}}((0,0),(x',y')) = x' + y'$
  $n-1-x+y = d_{P_n \square P_{n'}}((n-1,0),(x,y)) = d_{P_n \square P_{n'}}((n-1,0),(x',y')) =$
  $n-1-x'+y'$.
- Así, $x = x'$, $y = y'$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, B es un generador métrico, y eso implica que $\dim_m(P_n \square P_{n'}) \leq |B| = 2$.
- En conclusión, $\dim_m(P_n \square P_{n'}) = 2$. $\square$

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo conexo G de orden n y diámetro D,

$$D^{\dim_m(G)} + \dim_m(G) \geq n.$$

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo conexo G de orden n y diámetro D,

$$D^{\dim_m(G)} + \dim_m(G) \geq n.$$

Demostración

Para toda base métrica $B = \{x_1, \ldots, x_r\}$, la siguiente función es inyectiva.

$$\psi : V \setminus B \longrightarrow \{1, \ldots, D\}^r$$
$$\psi(x) = \Big(d(x, x_1), \ldots, d(x, x_r)\Big).$$

Por lo tanto, $n - r = |V \setminus B| \leq D^r$. $\square$.

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de orden n y diámetro $D \geq 2$, $\dim_m(G) \geq \frac{\ln\left(\frac{nD}{D+1}\right)}{\ln(D)}$.

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G de orden n y diámetro $D \geq 2$, $\dim_m(G) \geq \frac{\ln\left(\frac{nD}{D+1}\right)}{\ln(D)}$.

Solución

Como $D \geq 2$ y $\dim_m(G) \geq 1$, obtenemos $D^{\dim_m(G)} \geq D \cdot \dim_m(G)$. Por otro lado, del ejercicio anterior,

$$\begin{aligned}
D^{\dim_m(G)} + \dim_m(G) &\geq n \\
D^{\dim_m(G)+1} + D \cdot \dim_m(G) &\geq n \cdot D \\
D^{\dim_m(G)+1} + D^{\dim_m(G)} &\geq n \cdot D \\
D^{\dim_m(G)}(D+1) &\geq n \cdot D \\
D^{\dim_m(G)} &\geq \frac{n \cdot D}{D+1} \\
\dim_m(G) &\geq \log_D \left(\frac{n \cdot D}{D+1}\right) = \frac{\ln\left(\frac{nD}{D+1}\right)}{\ln(D)}.
\end{aligned}$$

Ejercicio

Sea G un grafo conexo de orden n y sea $r \geq 2$ un número entero. Determina el valor de $\dim_m(G \circ K_r)$ sabiendo que $N[x] \neq N[x']$ para todo par de vértices diferentes $x, x' \in V(G)$.

Solución

Para todo $u \in V(G)$, el subgrafo de $G \circ K_r$ inducido por $V_u = \{u\} \times V(K_r)$ será denotado por H_u.

$\square$

Solución

Para todo $u \in V(G)$, el subgrafo de $G \circ K_r$ inducido por $V_u = \{u\} \times V(K_r)$ será denotado por H_u.

Sea B una base métrica de $G \circ K_r$. Como para todo $u \in V(G)$, ningún vértice fuera de V_u distingue los vértices de V_u, el conjunto $B \cap V_u$ es un generador métrico de H_u, y por eso

$$\dim_m(G \circ K_r) = |B| = \sum_{u \in V(G)} |B \cap V_u| \geq \sum_{u \in V(G)} \dim_m(H_u) = n(r-1).$$

$\square$

Solución

Para todo $u \in V(G)$, el subgrafo de $G \circ K_r$ inducido por $V_u = \{u\} \times V(K_r)$ será denotado por H_u.
Sea B una base métrica de $G \circ K_r$. Como para todo $u \in V(G)$, ningún vértice fuera de V_u distingue los vértices de V_u, el conjunto $B \cap V_u$ es un generador métrico de H_u, y por eso

$$\dim_m(G \circ K_r) = |B| = \sum_{u \in V(G)} |B \cap V_u| \geq \sum_{u \in V(G)} \dim_m(H_u) = n(r-1).$$

Sea X_u una base métrica de H_u para todo $u \in V(G)$, y tomemos dos vértices diferentes $(x,y),(x',y') \in V(G \circ K_r) \setminus X$.

$\square$

Solución

Para todo $u \in V(G)$, el subgrafo de $G \circ K_r$ inducido por $V_u = \{u\} \times V(K_r)$ será denotado por H_u.

Sea B una base métrica de $G \circ K_r$. Como para todo $u \in V(G)$, ningún vértice fuera de V_u distingue los vértices de V_u, el conjunto $B \cap V_u$ es un generador métrico de H_u, y por eso

$$\dim_m(G \circ K_r) = |B| = \sum_{u \in V(G)} |B \cap V_u| \geq \sum_{u \in V(G)} \dim_m(H_u) = n(r-1).$$

Sea X_u una base métrica de H_u para todo $u \in V(G)$, y tomemos dos vértices diferentes $(x,y),(x',y') \in V(G \circ K_r) \setminus X$. Como $H_u \cong K_r$ y X_u es una base métrica de H_u, tenemos que $x \neq x'$, ya que $|X_u| = r-1$. Observe que si $x \not\sim x'$, entonces todo vértice en X_x distingue el par $(x,y),(x',y')$. Sea $x \sim x'$. Como $N[x] \neq N[x']$, sin perder generalidad podemos asumir que existe $x'' \in N(x') \setminus N(x)$, y por eso todo vértice en $X_{x''}$ distingue el par $(x,y),(x',y')$. Por lo tanto, X es un generador métrico de $G \circ K_r$. De ahí que
$\dim_m(G \circ K_r) \leq \sum_{u \in V(G)} |X_u| = \sum_{u \in V(G)} \dim_m(H_u) = n(r-1)$. $\square$

Dimensión de adyacencia

- Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo.
- El par $(V, d_{G,2})$, donde $d_{G,2}(x,y) = \text{mín}\{d_G(x,y), 2\}$ es un espacio métrico.
- La dimensión métrica de $(V, d_{G,2})$ se conoce como la dimensión de adyacencia de G y se denota por $\dim_A(G)$.

Observaciones

- La dimensión de adyacencia tiene sentido para grafos no conexos.

Observaciones

- La dimensión de adyacencia tiene sentido para grafos no conexos.
- Para todo grafo conexo G, se cumple que

$$\dim_A(G) \geq \dim_m(G).$$

Observaciones

- La dimensión de adyacencia tiene sentido para grafos no conexos.
- Para todo grafo conexo G, se cumple que

$$\dim_A(G) \geq \dim_m(G).$$

- Si G es un grafo de diámetro 2, entonces $\dim_A(G) = \dim_m(G)$.

Observaciones

- La dimensión de adyacencia tiene sentido para grafos no conexos.
- Para todo grafo conexo G, se cumple que

$$\dim_A(G) \geq \dim_m(G).$$

- Si G es un grafo de diámetro 2, entonces $\dim_A(G) = \dim_m(G)$.
- Pon un ejemplo de grafo que muestre que el recíproco de la afirmación anterior no se cumple.

Ejercicio

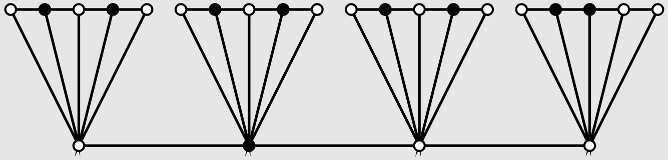
Determina una base de adyacencia de $P_4 \odot P_5$.

Ejercicio

Determina una base de adyacencia de $P_4 \odot P_5$.

Solución

Los vértices en negro forman una base de adyacencia de $P_4 \odot P_5$.



□

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo conexo G de orden $n \geq 2$ y todo grafo H de orden $n' \geq 2$,

$$\dim_m(G \odot H) = n \cdot \dim_A(H).$$

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo conexo G de orden $n \geq 2$ y todo grafo H de orden $n' \geq 2$,

$$\dim_m(G \odot H) = n \cdot \dim_A(H).$$

Solución

Escribe los detalles y compara con los apuntes.