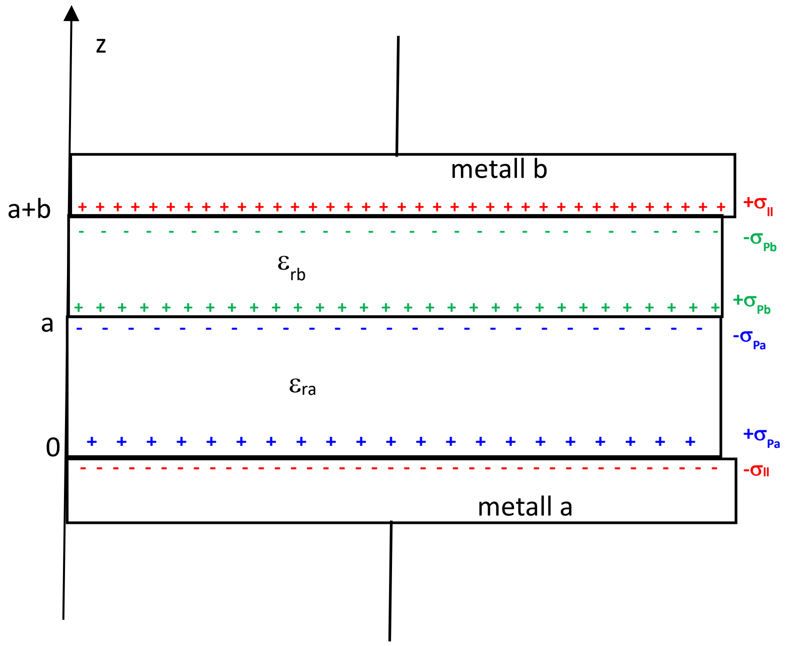
Problema de distribució amb simetria plana amb dielèctrics.



Considerem un sistema amb simetria plana, el qual el veiem en secció transversal a la figura de l'esquerra. Els plans representa que són molt grans de manera que els assimilarem a infinitament extensos i paral·lels al pla x-y. L'eix z és el que s'estén perpendicularment als plans.

Consisteix en dues plaques metàl·liques (*metall a* i *metall b*), que formen un condensador pla. Per tant a la cara inferior del *metall b* hi ha una distribució $+\sigma_{ll}$ uniforme i a la cara superior del *metall a* hi ha una distribució $-\sigma_{ll}$ uniforme. Entremig de les dues plaques l'espai està cobert per dos dielèctrics amb permitivitats ε_{ra} i ε_{rb} el primer ocupa un gruix a i el segon un gruix b com es pot veure e al figura.

En ser un sistema amb simetria plana, podem afirmar que tots els camps: $\vec{D}$, $\vec{E}$ i $\vec{P}$ tenen només direcció z i depenen com a molt només de la component z (uniformes al llarg del pla x-y).

$$\vec{D} = D(z)\,\hat{k} \quad ; \quad \vec{E} = E(z)\,\hat{k} \quad ; \quad \vec{P} = P(z)\,\hat{k}$$

Concretament considerem el $\vec{D}$ que depèn només de les càrregues lliures.

Es regeix per les equacions

1.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{ll}$: Teorema de Gauss en termes de $\vec{D}$ i ρ_{ll}

1.b) $\hat{n}\cdot\left(\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}\right) = \sigma_{ll}$: Discontinuïtat de la component normal de $\vec{D}$ igual a la σ_{ll}

Calculem $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}$ per a un $\vec{D}$ de la forma $D(z)\,\hat{k}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot D(z)\,\hat{k} = \frac{\mathrm{d}D(z)}{dz}$$

- En el cas de la regió dels dielèctrics a i b no hi ha densitat volúmica de càrrega lliure ρ_{ll}

Per tant $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{\mathrm{d}D(z)}{dz} = 0 \;\Rightarrow\; D^{a}(z) = A \quad i \quad D^{b}(z) = B$

És a dir tenim dos camps uniformes a cada regió i A i B són les dues constants que donen el valor del camp uniforme.

En virtut de la llei

1.b) $\hat{\mathrm{n}} \cdot \left(\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}\right) = \sigma_{ll}$

Com que no hi ha càrrega superficial lliure entre els dos dielèctrics tenim

$$\mathrm{D}^{a} = \mathrm{D}^{b} \quad o \quad A = B$$

Per tant el camp D és uniforme i únic en els dos dielèctrics alhora.

En els dos metalls el camp D ha de ser nul com no pot ser d'altra manera en els conductors.

Per tant a partir de nou de

1.b) $\hat{\mathrm{n}} \cdot \left(\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}\right) = \sigma_{ll}$

a la interfície entre el dielèctric b i el metall b

$$\mathrm{D}^{+} - \mathrm{D}^{-} = \mathrm{D}^{met\ b} - \mathrm{D}^{b} = \sigma_{ll} \quad \Rightarrow \quad 0 - A = \sigma_{ll} \Rightarrow \quad A = -\sigma_{ll}$$

recíprocament, a la interfície entre el dielèctric a i el metall a

$$\mathrm{D}^{+} - \mathrm{D}^{-} = \mathrm{D}^{b} - \mathrm{D}^{met\ b} = -\sigma_{ll} \quad \Rightarrow \quad A - 0 = -\sigma_{ll} \Rightarrow \quad A = -\sigma_{ll}$$

Dona el mateix resultat.

Resum del camps $\mathbf{D}(\mathbf{r})$:

$$\mathrm{D}(\mathrm{r}) = \begin{cases} 0 & , metall\ b \\ -\sigma_{ll} & , dielèctric\ b \\ -\sigma_{ll} & , dielèctric\ a \\ 0 & , metall\ a \end{cases}$$

Pel que fa als camps $\mathbf{E}$ hem de tenir en compte que s'obtenen a partir del D per mitjà de la relació amb les permitivitats dels dielèctrics: $\vec{\mathrm{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \vec{\mathrm{D}}$. Així:

$$\mathrm{E}(\mathrm{z}) = \begin{cases} 0 & , metall\ b \\ -\dfrac{\sigma_{ll}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rb}} & , dielèctric\ b \\ -\dfrac{\sigma_{ll}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{ra}} & , dielèctric\ a \\ 0 & , metall\ a \end{cases}$$

Com es pot veure ara, $\vec{\mathrm{E}}(z)$ ja no és continu a la interfície entre els dos dielèctrics (z=a) quan per $\mathrm{D}(z)$ si que ho era) per culpa de que $\varepsilon_{ra} \neq \varepsilon_{rb}$ en tractar-se de 2 dielèctrics diferents!!

Pel que fa als camps $\vec{\mathrm{P}}$ hem de tenir en compte que s'obtenen a partir del $\vec{\mathrm{E}}$ per mitjà de la relació amb la susceptibilitat dels dielèctrics: $\vec{\mathrm{P}} = \varepsilon_0 \chi \vec{\mathrm{E}} = \frac{\chi}{\varepsilon_r} \vec{\mathrm{D}} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \vec{\mathrm{D}} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \vec{\mathrm{D}}$. Així:

$$\text{P}(z) = \begin{cases} 0 & ,metall\ b \\ -\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_{rb}}\right)\sigma_{ll} & ,dielèctric\ b \\ -\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_{ra}}\right)\sigma_{ll} & ,dielèctric\ a \\ 0 & ,metall\ a \end{cases}$$

Com es pot veure ara, $\vec{\text{P}}(z)$ tampoc és continu a la interfície dels dos dielèctrics per culpa també de que $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$ en tractar-se de 2 dielèctrics diferents!!.

El valor de $\vec{P} \cdot \hat{n}_e$ a sota de cadascuna de les dues superfícies que conflueixen a la interfície $r=R_2$ donaria la densitat superficial de càrrega de polarització segons la fórmula d'aquesta: $\sigma_P \equiv \vec{P} \cdot \hat{n}_e$

Així respectivament aquestes densitats de càrrega de polarització són:

$$+\sigma_{\mathbf{Pb}} = \vec{P}(a^+)\cdot\hat{n}_{e+} = \vec{P}(a^+)\cdot(-\hat{k}) = +\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{rb}}\right)\sigma_{ll} > 0$$

$$-\sigma_{\mathbf{Pa}} = \vec{P}(a^-)\cdot\hat{n}_{e-} = \vec{P}(a^-)\cdot(+\hat{k}) = -\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{ra}}\right)\sigma_{ll} < 0$$

Així, si per exemple: $\varepsilon_{rb} > \varepsilon_{ra}$ Resultarà que: $+\sigma_{\mathbf{Pb}} > \sigma_{\mathbf{Pa}}$ i la càrrega neta de polarització a la interfície serà netament positiva

El valor de $\vec{P} \cdot \hat{n}_e$ a sota de la superfície superior del dielèctric b quan forma interfície amb el metall b donaria la densitat superficial de càrrega de polarització:

$$-\sigma_{\mathbf{Pb}} = \vec{P}\left((a+b)^-\right)\cdot\hat{n}_{e+} = \vec{P}\left((a+b)^-\right)\cdot(+\hat{k}) = -\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{rb}}\right)\sigma_{ll} < 0$$

I finalment el valor de $\vec{P} \cdot \hat{n}_e$ a sobre de la superfície inferior del dielèctric a quan forma interfície amb el metall a donaria la densitat superficial de càrrega de polarització:

$$+\sigma_{\mathbf{Pa}} = \vec{P}\left(0^+\right)\cdot\hat{n}_{e+} = \vec{P}\left(0^+\right)\cdot(-\hat{k}) = +\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{rb}}\right)\sigma_{ll} > 0$$

Càlcul de la capacitat del condensador del problema

Per a trobar la capacitat cal primer trobar la diferència o increment de potencial ΔV per anar des del metall a (z=0, carregat negativament) al metall b (z=a+b, carregat positivament). Aquest increment de potencial el podem posar com la suma parcial de l'increment, ΔV_a , per anar del metall a (z=0) a la interfície dels dielèctrics (z=a) + l'increment, ΔV_b , per anar des de la interfície dels dielèctrics (z=a) al metall b (z=a+b):

$$\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b = -\int_0^a -\frac{\sigma_{ll}}{\varepsilon_0\varepsilon_{ra}}dz - \int_a^{a+b} -\frac{\sigma_{ll}}{\varepsilon_0\varepsilon_{rb}}dz = \frac{\sigma_{ll}}{\varepsilon_0\varepsilon_{ra}}a + \frac{\sigma_{ll}}{\varepsilon_0\varepsilon_{rb}}b$$

Amb això la capacitat del condensador (suposant una superfície S de les plaques) la podem calcular com:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma_{ll} S}{\Delta V_a + \Delta V_b} = \frac{\sigma_{ll} S}{\frac{\sigma_{ll}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{ra}} a + \frac{\sigma_{ll}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rb}} b} = \frac{S}{\frac{a}{\varepsilon_0 \varepsilon_{ra}} + \frac{b}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rb}}} = \frac{1}{\frac{a}{\varepsilon_0 \varepsilon_{ra} S} + \frac{b}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rb} S}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ra} S}{a}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{rb} S}{b}}} = \frac{1}{\frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b}}$$

És a dir, el nostre sistema, es pot posar com l'associació sèrie de dos condensadors plans

$C_a = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ra} S}{a}$ i $C_b = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{rb} S}{b}$

Respectivament amb dielèctrics ε_{ra} i ε_{rb} ; gruixos a i b ; i superfície S comuna