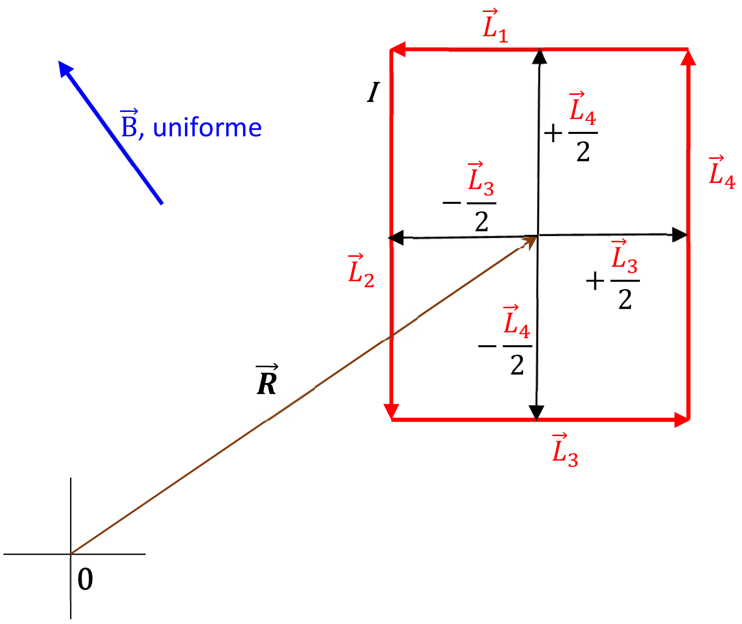
Moment de forces produït per un camp magnètic uniforme sobre una espira rectangular.



Considerem una espira rectangular com la de la figura, per la que hi passa un corrent ***I***, en sentit antihorari.
Els quatre vectors segments de l'espira són:

$$\vec{L}_1, \quad \vec{L}_2, \quad \vec{L}_3 \quad i \quad \vec{L}_4$$

i $\vec{\boldsymbol{R}}$ és la posició del centre del rectangle respecte al centre de coordenades **0**. A la Figura també veiem els vectors:

$$+\frac{\vec{L}_4}{2}, \quad -\frac{\vec{L}_3}{2}, \quad -\frac{\vec{L}_4}{2} \quad i \quad +\frac{\vec{L}_3}{2}$$

Que són respectivament les posicions dels centres dels costats 1, 2, 3 i 4 respecte el centre del rectangle.

Calculem les forces del camp magnètic sobre cada segment:

$$\vec{F}_1 = \boldsymbol{I}\,\vec{L}_1 \, x \, \vec{B}$$
$$\vec{F}_2 = \boldsymbol{I}\,\vec{L}_2 \, x \, \vec{B}$$
$$\vec{F}_3 = \boldsymbol{I}\,\vec{L}_3 \, x \, \vec{B}$$
$$\vec{F}_4 = \boldsymbol{I}\,\vec{L}_4 \, x \, \vec{B}$$

Sumant-les, obtenim la força total:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \boldsymbol{I}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \vec{L}_4\right) x \, \vec{B} = \boldsymbol{I}\left(\vec{0}\right) x \, \vec{B} = 0$$

ja que

$$\vec{L}_1 = -\vec{L}_3 \quad i \quad \vec{L}_2 = -\vec{L}_4$$

La força és nul·la; en total correspondència amb el que s'ha demostrat en un altre moment de teoria sobre les forces de camps magnètics uniformes sobre espires en general.

Calculem ara els moments de les forces. Els moments de les forces sobre cada segment es calculen multiplicant vectorialment la posició del centre de cada segment per la força magnètica sobre ell.

Així:

$$\vec{T}_1 = \left(\vec{R} + \frac{\vec{L}_4}{2}\right) x\, \vec{F}_1 = \vec{R}\, x\, \vec{F}_1 + \frac{I}{2}\vec{L}_4\, x\, (\vec{L}_1\, x\, \vec{B})$$
$$\vec{T}_2 = \left(\vec{R} - \frac{\vec{L}_3}{2}\right) x\, \vec{F}_2 = \vec{R}\, x\, \vec{F}_2 - \frac{I}{2}\vec{L}_3\, x\, (\vec{L}_2\, x\, \vec{B})$$
$$\vec{T}_3 = \left(\vec{R} - \frac{\vec{L}_4}{2}\right) x\, \vec{F}_3 = \vec{R}\, x\, \vec{F}_3 - \frac{I}{2}\vec{L}_4\, x\, (\vec{L}_3\, x\, \vec{B})$$
$$\vec{T}_4 = \left(\vec{R} + \frac{\vec{L}_3}{2}\right) x\, \vec{F}_4 = \vec{R}\, x\, \vec{F}_4 + \frac{I}{2}\vec{L}_3\, x\, (\vec{L}_4\, x\, \vec{B})$$

Sumant-los, obtenim el moment total:

$$\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 + \vec{T}_4 = \vec{R}\, x\, \underbrace{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4)}_{0} + \frac{I}{2}\begin{pmatrix} \vec{L}_4\, x\, (\vec{L}_1\, x\, \vec{B}) - \vec{L}_4\, x\, (\vec{L}_3\, x\, \vec{B}) \\ +\vec{L}_3\, x\, (\vec{L}_4\, x\, \vec{B}) - \vec{L}_3\, x\, (\vec{L}_2\, x\, \vec{B}) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{I}{2}\begin{pmatrix} \vec{L}_4\, x\, (-\vec{L}_3\, x\, \vec{B}) - \vec{L}_4\, x\, (\vec{L}_3\, x\, \vec{B}) \\ +\vec{L}_3\, x\, (\vec{L}_4\, x\, \vec{B}) - \vec{L}_3\, x\, (-\vec{L}_4\, x\, \vec{B}) \end{pmatrix} = I\left(+\vec{L}_3\, x\, (\vec{L}_4\, x\, \vec{B}) - \vec{L}_4\, x\, (\vec{L}_3\, x\, \vec{B})\right) =$$

$$= I\underbrace{\left(+\vec{L}_3\, x\, (\vec{L}_4\, x\, \vec{B}) + \vec{L}_4\, x\, (\vec{B}\, x\, \vec{L}_3)\right)}_{\substack{-\vec{B}\, x\, (\vec{L}_3\, x\, \vec{L}_4) \\ (propietat\ cíclica)}} = +I\, (\vec{L}_3\, x\, \vec{L}_4)\, x\, \vec{B}$$

Com es pot veure a la figura $\vec{L}_3\, x\, \vec{L}_4 = \vec{S}$ és el vector de superfície de l'espira. El producte vectorial de $\vec{L}_3$ per $\vec{L}_4$ te per mòdul $L_3 \cdot L_4$ que és l'àrea del rectangle i la direcció de $\vec{L}_3\, x\, \vec{L}_4$ coincideix amb la de $\vec{S}$ que segons el sentit de gir del corrent **I** va perpendicular al pla de l'espira en sentit cap al lector. Per tant:

$$\vec{T} = I\, \vec{S}\, x\, \vec{B}$$

O el que és el mateix:

$$\vec{T} = \vec{m}\, x\, \vec{B}$$

Essent $\vec{m} = I\, \vec{S}$ el *moment dipolar magnètic* de l'espira.

Aquesta demostració de que

$$\vec{T} = \vec{m}\, x\, \vec{B}$$

en una espira rectangular, és més general que la que hi ha en el vídeo i el PDF de Camp Magnètic 1a classe, en el sentit de que no assumeix cap eix de gir per a l'espira, ni cap direcció privilegiada del camp magnètic.