4.1

Show that the vectors $u = (1+i,\ 2i)$ and $w = (1,\ 1+i)$ in $\mathbf{C}^2$ are linearly dependent over the complex field $\mathbf{C}$ but linearly independent over the real field $\mathbf{R}$.

4.2

If $T: V \to V$ is a linear transformation, find $T(\mathbf{v})$ and $T(\mathbf{w})$ if:

a. $T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ and $T(2\mathbf{v}-\mathbf{w}) = 2\mathbf{v}$

b. $T(\mathbf{v}+2\mathbf{w}) = 3\mathbf{v} - \mathbf{w}$ and $T(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = 2\mathbf{v} - 4\mathbf{w}$

4.3

Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

(i) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f((x,y,z)) = (x-y, y+2z)$.

(ii) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f((x,y,z)) = (x-y^2, y+2z)$.

4.4

Se considera $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *aplicación lineal tal que* $f((1,-1)) = (-1,-2,-3)$ *y* $f((-3,2)) = (0,5,3)$. *Determinar, si es posible,* $f((x,y))$ *donde* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4.5

Hallar, si es posible, una aplicacin lineal $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $kerf =< (0,1,-1,1),(0,1,0,1) >$ *e* $Imf =< (1,0,1),(2,1,0) >$.

4.6

Show that the following mappings are not linear:

(a) $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ defined by $F(x,y) = (xy, x)$

(b) $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ defined by $F(x,y) = (x+3,\ 2y,\ x+y)$

(c) $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ defined by $F(x,y,z) = (|x|,\ y+z)$

4.7

a) Sea la siguiente aplicación lineal,

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \to (x+2y-z, 2x+3y+z, 3y-9z)$$

i) ¿Es f una aplicación invertible? En caso afirmativo, calcula la aplicación f^{-1}.

ii) Calcular $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (1,2,0)$. ¿Existe algún $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (1,1,0)$?

iii) Calcular alguna base de $Im(f)$ y de $Ker(f)$.

iv) Discute para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, $(a,1,1) \in Im(f)$ y para qué valores $(a,1,1) \in Ker(f)$.

b) Encontrar una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(2,0,0) = (4,2,2)$ y $f(1,1,0) = (1,1,0)$.

4.8

a) Calcular $M(g)$ sabiendo que $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal que verifica las condiciones:

a1) $(1,-2) \in Ker(g)$.   a2) $g(0,1) = (1,-1,2)$

b) Sea f una aplicación lineal tal que $M(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & a \\ a & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;

i) Calcular los valores de a y b para que se cumpla que f no es un isomorfismo y que $f(1,b,0) = (0,-2,2)$.

ii) Para $a = 2$, calcular una base y la dimensión del conjunto $Ker(f)$.

iii) Para $a = -2$, calcular una base y la dimensión del conjunto $Im(f)$

iv) Calcular los valores de a para se cumpla

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (1,1,0)\} = \varnothing.$$

v) Calcular $(f \circ g)(2,-4)$.

4.9

Donada l'aplicació lineal *f*:

$$f : P_1(x) \longrightarrow P_2(x)$$
$$\vec{u} = a + bx \longrightarrow f(\vec{u}) = (2a - b) + (a + b)x + ax^2),$$

i les bases B_1 i B_2:

$$B_1 = \{1,\ 1 + x\} \text{ base de } P_1(x).$$
$$B_2 = \{1,\ 1 + \mathrm{x},\ 1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2\} \text{ base de } P_2(x).$$

Trobeu la matriu associada a *f* en els casos següents:

a) En base canònica.
b) En base B_1 de $P_1(x)$ i canònica de $P_2(x)$.
c) En base canònica de $P_1(x)$ i B_2 de $P_2(x)$.
d) En base de B_1 de $P_1(x)$ i B_2 de $P_2(x)$.
e) Estudieu si *f* és injectiva, exhaustiva o bijectiva.
f) Trobeu una base del nucli i de la imatge de l'aplicació.

4.10

Sean E el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales y F el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Se considera la aplicación lineal $f : E \to F$ dada por

$$f(p(t)) = \int_0^t p(s)ds$$

(es decir la imagen de un polinomio es su integral entre 0 y t: una primitiva de dicho polinomio que en 0 toma el valor 0).

Se pide:

(a) Hallar la matriz coordenada de f respecto a la base $B = \{1, 1+t, 1+t^2\}$ de E y a la base canónica de F.

(b) *Haciendo uso de la matriz hallada en* (a), hallar $f(3 + t + t^2)$.