Diagonalització d'Endomorfismes

1) **Donada la matriu**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

proveu que els vectors $v = (-3,-1,1)$ **i** $u = (1,0,0)$ **són vectors propis i trobeu els seus valors propis**.

Tenim que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de manera que $\mathbf{v} = (-3,-1,1)$ és un vector propi de valor propi $\lambda = 0$. D'un altra banda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i per tant $\mathbf{u} = (1,0,0)$ és vector propi de valor propi 1.

2) **Trobeu els valors propis i els vectors propis de la matriu**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Comencem per buscar les rels del polinomi caracterísitic:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -12 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+5)-(-12) = \lambda^2+3\lambda-10+12$$

$$= \lambda^2+3\lambda+2 = 0 = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

Els valors propis són aleshores: $\lambda = -1,-2$.

En el cas $\lambda = -1$, tenim que els vectors propis generen el subespai $V_{-1} = Nuc(\mathbf{A}-(-1)\mathbf{I}) = Nuc(\mathbf{A}+\mathbf{I})$. Es a dir, son vectors (x,y) tal que:

$$\begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i tenim que

$$3x-12y = x-4y = 0$$

$$x-4y = 0$$

i $x = 4y$, de manera que els vector són de la forma

$$(x,y) = (4y,y) = y(4,1)$$

i aleshores

$$V_{-1} = Nuc(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = \langle(4,1)\rangle$$

De la mateixa manera, el cas de $\lambda = -2$, $V_{-2} = Nuc(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})$ i els vectors hauran de complir que:

$$\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el que porta a l'equació

$$x - 3y = 0$$

i tenim

$$(x,y) = (3y,y) = y(3,1)$$

i aleshores

$$V_{-2} = Nuc(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) = \langle (3,1) \rangle.$$

3) **Proveu que si**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tenim que:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tra(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}).$$

En efecte, tenim que

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$
$$= \lambda^2 - tra(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}).$$

4) **Trobeu els valors propis i els vectors propis de la matriu**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El polinomi característic és:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^3 = 0$$

de manera que només hi ha un valor propi: $\lambda = 2$. Per trobar els vectors propis hem de construir $V_2 = Nuc(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ es ha dir hem de trobar els vectors (x,y,z) tals que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que són els que compleixen que $y = 0$. Tenim aleshores

$$(x,y,z) = (x,0,z) = x(1,0,0) + z(0,0,1)$$

i per tant

$$V_2 = Nuc(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \langle (1,0,0),(0,0,1)\rangle.$$

Notem que en aquest cas es comleix que $\dim V_2 = 2 \neq 3$ que és la multiplicitat algebraica de $\lambda = 2.$ En aquest cas la matriu no podrà ser diagonalitzable.

5) Trobeu els valors propis de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Trobeu també una base de cada un dels subespais associats a cada valor propi.

El polinomi característic és en aquest cas:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & -10 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)(3-\lambda)$$

Els valors propis són aleshores $\lambda = 1,2,3,$ essent el valor propi $\lambda = 1$ un valor propi doble.

Ara si $\lambda = 1,$ busquem $Nuc(\mathbf{A} - \mathbf{I})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on resulten les equacions:

$$5z - 10t = 0 \Leftrightarrow z = 2t$$
$$x + z = 0 \Leftrightarrow x = -z = -2t$$
$$x + 2t = 0 \Leftrightarrow x = -2t$$

mentre que y queda lliure. Per tant

$$(x,y,z,t) = (-2t,y,2t,t) = y(0,1,0,0) + t(-2,0,2,1)$$

de manera que

$$Nuc(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \langle (0,1,0,0),(-2,0,2,1)\rangle$$

En el cas $\lambda = 2,$ tenim

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i resulta el sistema:

$$-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$-y + 5z - 10t = 0$$
$$x = 0$$
$$x + t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Amb aquest valors ens queda que

$$y = 5z$$

i per tant

$$(x, y, z, t) = (0, 5z, z, 0) = z(0, 5, 1, 0)$$

d'on resulta que:

$$Nuc(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \langle(0, 5, 1, 0)\rangle$$

Finalment en el cas $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tenim el sistema:

$$-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$-2y + 5z - 10t = 0$$
$$x - z = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$
$$x = 0$$

i ens queda

$$-2y - 10t = 0 \Longleftrightarrow y = -5t.$$

Els vectors seran de la forma

$$(x, y, z, t) = (0, -5t, 0, t) = t(0, -5, 0, 1)$$

i ens queda:

$$Nuc(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \langle(0, -5, 0, 1)\rangle.$$

6) **Diagonalitzeu**, **si es possible la matriu següent**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 7 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

El polinomi característic és:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -2-\lambda & 0 \\ 7 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2+\lambda)(2-\lambda)$$

i per tant tenim tres valors propis diferents $\lambda = 1, -2, 2$ i la matriu serà diagonalitzable.

Si $\lambda = 1$ busquem $Nuc(\mathbf{A} - \mathbf{I})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es a dir

$$6x - 3y = 0 \Leftrightarrow 2x = y$$
$$7x - 4y + z = 0 \Leftrightarrow z = 4y - 7x = 8x - 7x = x$$

de manera que els vectors són de la forma:

$$(x, y, z) = (x, 2x, x) = x(1, 2, 1)$$

i resulta:

$$Nuc(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \langle(1, 2, 1)\rangle$$

En el cas $\lambda = -2,$ busquem $Nuc(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$3x = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$7x - 4y + 4z = 0 \Leftrightarrow -y + z = 0 \Leftrightarrow y = z$$

Els vectors són

$$(x, y, z) = (0, z, z) = z(0, 1, 1)$$

i tenim:

$$Nuc(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) = \langle(0, 1, 1)\rangle$$

Finalment en el cas $\lambda = 2,$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$6x - 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$
$$7x - 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

La variable z queda lliure i els vectors són de la forma:

$$(x, y, z) = (0, 0, z) = z(0, 0, 1)$$

i

$$Nuc(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \langle(0, 0, 1)\rangle$$

Ara la matriu del canvi de base que fa que la matriu sigui diagonal, té els vectors propis en les seves columnes:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu inversa del canvi de base resulta ser:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i es compleix que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 7 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Notem que si reordenem els vectors de la nova base, els coeficients de la matriu diagonal es reordenen de la mateixa manera. Així si fem

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu inversa del canvi de base és ara:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i tenim que:

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 7 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que també és una matriu diagonal:

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Diagonalitzeu, si es possible la matriu següent:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomi característic és en aquest cas:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda+1)^2$$

Com ara hi ha rels múltiples cal estudiar les dimensions algebraiques i geomètriques de cada valor propi per veure si la matriu és diagonalitzable. En el cas de $\lambda = -1$ tenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Només hi ha una equació independent:

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$$

i els vectors de $Nuc(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ són de la forma

$$(x,y,z) = (-y-z,y,z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$$

de manera que

$$Nuc(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = \langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$$

Notem que $\dim(Nuc(\mathbf{A}+\mathbf{I})) = 2$ i per tant les dimensions algebraiques i geomètriques són coincidents per a $\lambda = -1$.

En el cas $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per resoldre el sistema homgèni fem servir el mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ens queden les equacions:

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \Leftrightarrow y = z \end{aligned}$$

i per tant

$$x = -y + 2z = -z + 2z = z$$

Els vectors de $Nuc(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ són de la forma

$$(x,y,z) = (z,z,z) = z(1,1,1)$$

i resulta:

$$Nuc(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = \langle(1,1,1)\rangle$$

Com les dimensions algebraiques i geomètriques dels valors propis són coincidents, hi ha una base de vectors propis i la matriu serà diagonalitzable. La matriu del canvi de base serà:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriu inversa del canvi de base és:

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i tenim que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es a dir

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8) **Diagonalitzeu**, **si es possible la matriu següent**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En aquest cas el polinomi característic és:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda+1)^2$$

En el cas del valor propi $\lambda = -1$, busquem $Nuc(\mathbf{A} + \mathbf{I})$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que ens porta a les equacions:

$$y = 0$$
$$z = 3z = 0$$

i per tant els vectors han de ser de la forma

$$(x,y,z) = x(1,0,0)$$

i resulta

$$Nuc(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = \langle (1,0,0) \rangle$$

Notem ara que $\dim(Nuc(\mathbf{A}+\mathbf{I})) = 1 < 2$ que és la dimensió algebraica o multiplicitat de la rel del polinomi. En aquest cas, la matriu no serà diagonalitzable.

9) Donada la matriu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Trobeu els seus valors propis i els vectors propis associats.

En aquest cas el polinomi característic és el següent:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

Es tracta d'un polinomi de grau 3, i no és fàcil obtenir les rels. Probem amb el mètode de Ruffini

$$\begin{array}{rrrrrl} & 1 & -2 & -5 & 6 & \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 & \\ & 1 & -1 & -6 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-6) \\ -2 & 0 & -2 & 6 & & \\ & 1 & -3 & 0 & & (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3) \end{array}$$

De manera que els valors propis són $\lambda = 1, -2, 3.$ Com són valors propis diferents, la matriu serà diagonalitzable.

En el cas $\lambda = 1$ tenim

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per resoldre el sistema homogèni fem servir el mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema d'equacions equivalent resulta ser:

$$
\begin{aligned}
-y+4z &= 0\\
x+z &= 0
\end{aligned}
$$

i per tant $x = -z,\ y = 4z$ i resulta:

$$(x,y,z) = (-z,4z,z) = z(-1,4,1)$$

i tenim

$$Nuc(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \langle(-1,4,1)\rangle$$

En el cas $\lambda = -2,$ tenim que

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

Per resoldre el sistema homogeni, tornem a fer servir el mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4\\ 0 & 5 & -5\\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i el sistema equivalent és:

$$
\begin{aligned}
3x-y+4z &= 0\\
y-z &= 0
\end{aligned}
$$

Resulta doncs $y = z, x = -z$ i per tant:

$$(x,y,z) = (-z,z,z) = z(-1,1,1)$$

$$Nuc(\mathbf{A}+2\mathbf{I}) = \langle(-1,1,1)\rangle$$

Finalment, en el cas $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4\\ 3 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

El mètode de Gauss porta a:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4\\ 3 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4\\ 0 & -5 & 10\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les equacions equivalents són:

$$
\begin{aligned}
2x+y-4z &= 0\\
-y+2z &= 0
\end{aligned}
$$

i tenim $y = 2z,\ x = z.$ Els vectors són de la forma:

$$(x,y,z) = (z,2z,z) = z(1,2,1)$$

i

$$Nuc(\mathbf{A}+3\mathbf{I}) = \langle(1,2,1)\rangle$$

La matriu del canvi de base és ara:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la seva inversa és:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i observem que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

essent

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10) **Si es compleix que** $a + b + c = 0$, **trobeu els valors propis de la matriu**:

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

Els valors propis són les rels del polinomi característic:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & c & b \\ c & b-\lambda & a \\ b & a & c-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-\lambda+c+b & c & b \\ c+b-\lambda+a & b-\lambda & a \\ b+a+c-\lambda & a & c-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & c & b \\ -\lambda & b-\lambda & a \\ -\lambda & a & c-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b-\lambda & a \\ 1 & a & c-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 0 & b-c-\lambda & a-c \\ 0 & a-c & c-b-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\begin{vmatrix} b-c-\lambda & a-c \\ a-c & c-b-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[(b-c-\lambda)(c-b-\lambda) - (a-c)(a-b)] = 0$$

$$= \lambda[(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) - \lambda^2] = 0$$

Ara be, com

$$a + b + c = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 0$$

tenim que:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = 0$$
$$-ab-ac-bc = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

es a dir

$$\lambda[(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)-\lambda^2] = \lambda\Big[\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)-\lambda^2\Big] = 0$$

i aleshores els valors propis d'aquest endormorfisme són:

$$\lambda = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)}$$

11) **Proveu que els valors propis d'una matriu $\mathbf{A}$ idempotent**:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$$

son 0 ó 1.

Si λ és un valor propi i $\mathbf{v}$ és un vector propi de valor propi λ es complirà que:

$$\mathbf{A}v = \lambda\mathbf{v}$$

Aleshores

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{v}) &= \mathbf{A}\lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A}\mathbf{A})\mathbf{v} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2\mathbf{v} = \lambda(\lambda\mathbf{v})\\ &\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}\\ &\Leftrightarrow (\lambda^2-\lambda)\mathbf{v} = 0\end{aligned}$$

i com $\mathbf{v}$ és un vector propi $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ i aleshores ens queda que

$$(\lambda^2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, 1.$$

12) **Donada la matriu**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

trobeu la matriu $\mathbf{A}^{10}$ i la matriu $\mathbf{A}^n$.

Aquesta matriu és la mateixa que apareix en el problema 9, on hem vist que era diagonaliztable. En aquest cas tenim les relacions següents:

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}$$

on P és la matriu del canvi de base, que conté en les columnes els vectors propis.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Ara tenim que:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{10} &= (\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1})\cdots(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1})\\ &= \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{I}\mathbf{D}\cdots\mathbf{I}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} =\\ &= \mathbf{P}\mathbf{D}^{10}\mathbf{P}^{-1}\end{aligned}$$

i de manera general:

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$$

Ara, com una vegada diagonalitzada, la matriu diagonal és:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

resultarà que:

$$\mathbf{D}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & (3)^{10} \end{pmatrix}$$

i també:

$$\mathbf{D}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n} & 0 \\ 0 & 0 & (3)^{n} \end{pmatrix}$$

La matriu inversa del canvi de base resulta ser:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i aleshores:

$$\mathbf{A}^{10} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{10}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & (3)^{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Es a dir:

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{pmatrix} 29\,866 & 341 & 28\,501 \\ 58\,707 & -340 & 60\,071 \\ 29\,183 & -341 & 30\,548 \end{pmatrix}$$

Finalment, tenim també que:

$$\mathbf{A}^{n} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{n}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n} & 0 \\ 0 & 0 & (3)^{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i resultarà:

$$\mathbf{A}^{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-2)^n + \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{6} & \frac{1}{3}(-2)^n - \frac{1}{3} & \frac{1}{2}3^n - (-2)^n + \frac{1}{2} \\ 3^n - \frac{1}{3}(-2)^n - \frac{2}{3} & \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & (-2)^n + 3^n - 2 \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{3}(-2)^n - \frac{1}{6} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & (-2)^n + \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$