

Física de Fluids

Propietats dels fluids

Índex

Continguts	2
1.1 Introducció i objectius	2
1.2 Definició de fluid	2
1.3 Densitat	5
1.4 Pressió	5
1.5 Viscositat, fluids newtonians y no-newtonians	6
1.6 Tensió superficial	10
1.7 Els límits de la descripció del continu: recorregut lliure mitjà	16
1.8 Nombre de Knudsen	16
Bibliografia	18
Complements formatius	19
Exercicis	21

Continguts

1.1 Introducció i objectius

La mecànica de fluids és la disciplina que descriu el comportament de líquids i gasos en repòs o en moviment. Cobreix una gran varietat de fenòmens que ocorren a la natura; hi ha pocs aspectes de les nostres vides on no hi trobem fluids, directament o indirecta.

L'estudi dels fluids és l'estudi de la matèria pròpiament, de les seves manifestacions i de les seves transformacions. La matèria pot trobar-se condensada o no condensada, en estat cristal·lí o no cristal·lí, vitri, líquid o gasós. Tant en els sòlids com en els fluids, l'energia cinètica i potencial dels àtoms depèn de l'ordenament intern de la matèria i en determina les seves propietats massiques.

Els objectius del tema són els següents:

- ▶ Definir fluid
- ▶ Descriure els fluids como un medi continu
- ▶ Introduir els conceptes de densitat i pressió
- ▶ Definir viscositat i descriure els fluids newtonians y no newtonians
- ▶ Definir els límits de la descripció del continu, el concepte de recorregut lliure mitjà i de nombre de Knudsen

Molts dels conceptes d'aquest tema són elementals i es basen en els capítols introductoris dels llibres de ([White, 2011](#)) i ([Kundu i Cohen, 2002](#)). Altres conceptes es desenvolupen en la bibliografia que figura al final del tema, i que se cita en el seu context.

1.2 Definició de fluid

Les diferències entre sòlids i fluids poden explicar-se qualitativament sobre la base de l'estructura molecular. Una distinció més operativa es basa en descriure com es deformen sota l'acció d'una força externa.

Un fluid es defineix com una substància que es deforma contínuament quan actua sobre ella un esforç tangencial de qualsevol magnitud.

És a dir, un fluid canvia la seva forma de manera contínua quan se sotmet a un esforç tangencial (o de tallant), por més petit que aquest sigui. És a dir, un fluid no pot suportar un esforç tangencial sense moure's immediatament.

L'aplicació d'un esforç tangencial constant τ produeix sobre un fluid una deformació contínua creixent (o taxa de deformació $\dot{\theta}$) tal que

$$\tau \propto \dot{\theta} \quad (1)$$

Contràriament, un sòlid es deformarà fins un valor fix per a cada valor de la força constant aplicada. Així, mentre un sòlid experimenta un desplaçament definit (o es trenca) sota l'acció d'una força constant, en un fluid petits esforços produeixen grans deformacions no elàstiques (en general no es recupera la forma) a volum constant, que es produeixen contínuament en el temps mentre la força actua.

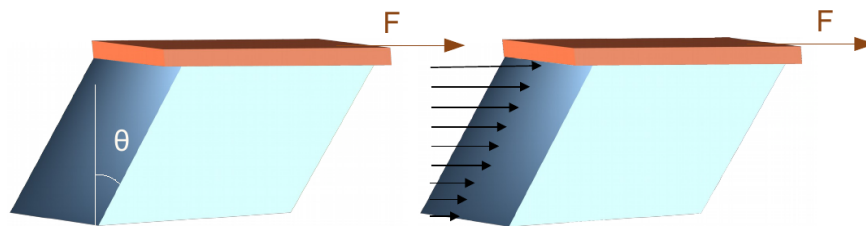


Fig. 1. Esquerra: En aplicar la força F a la placa, el sòlid elàstic es deforma fins un angle θ . Dreta: Sota l'acció de la mateixa força F , un fluid continuarà movent-se amb una taxa de deformació $\dot{\theta}$

Dins dels fluids, la principal diferència entre líquids i gasos radica en la seva compressibilitat.

- **Gasos.** Els gasos presenten gran compressibilitat, que influeix sobre les característiques del flux, ja que tant el volum com la densitat varien fàcilment. L'agitació tèrmica de les molècules de gas venç les forces atractives de cohesió entre elles, i per això els gasos tendeixen a ocupar tot el volum del recipient que els conté.
- **Líquids.** Contràriament als gasos, la compressibilitat dels líquids és molt feble. Això és degut al fet que les forces atractives entre les molècules del líquid vencen l'agitació tèrmica, les molècules col·lapsen i formen el líquid. Al contrari del que passa amb els gasos, el volum

d'un líquid no canvia gaire, i per això no pot omplir qualsevol recipient. En un camp gravitatori, es forma una superfície lliure que separa el líquid del seu vapor en equilibri.

Hipòtesi del continu

Un fluid, o qualsevol altra substància, es compon d'un gran nombre de molècules en constant moviment les quals xoquen entre si. La matèria és per tant discontinua o discreta a escales microscòpiques. En principi, és possible estudiar la mecànica del fluid estudiant el moviment de les mateixes molècules, com es fa en teoria cinètica o mecànica estadística. No obstant això, generalment estem interessats en el comportament en del fluid en *promig*, és a dir, en la manifestació mitjana del moviment de les molècules. Per exemple, les forces exercides en els límits d'un contenidor a causa del constant bombardeig de les molècules. La mitjana estadística d'aquesta força per unitat d'àrea es diu pressió, una propietat macroscòpica. Mentre no estiguem interessats en el mecanisme que origina la pressió, podem ignorar el moviment molecular i pensar que la pressió és simplement la "força per unitat d'àrea" sobre les parets del recipient que conté el fluid.

Per tant, és possible ignorar l'estructura molecular discreta de la matèria i reemplaçar-la per una distribució contínua, anomenada *continu*.

Perquè la hipòtesi del continu o enfocament macroscòpic siguin vàlides, la mida del sistema (caracteritzat, per exemple, per la grandària del cos al voltant de el qual es produeix el flux) ha de ser molt més gran que la mitjana del recorregut lliure de les molècules. Per a casos ordinaris, però, aquesta no és una gran restricció, ja que el recorregut lliure mitjà és usualment molt petit. Per exemple, per a l'aire atmosfèric estàndard és aproximadament $5 \cdot 10^{-8}$ m, veure Taula 1. En situacions especials, però, la mitjana de el camí lliure de les molècules pot ser bastant gran i l'enfocament continu ja no és vàlid [2]. A les altituds superiors de l'atmosfera, per exemple, la mitjana de el camí lliure de les molècules pot ser de l'ordre d'un metre, sent necessari un enfocament de teoria cinètica per estudiar la dinàmica d'aquests gasos enrarits.

Taula 1. Recorregut lliure mitjà (λ) de les molècules d'aire atmosfèric, en funció de l'alçària sobre el nivell del mar.

Alçària (km)	λ (m)
0 (nivell del mar)	$10^{-7} - 10^{-8}$
20 (avió U2)	10^{-6}
50 (globus meteorològics)	10^{-4}
150 (òrbita satèl·lit baixa)	1

1.3 Densitat

La densitat es defineix com la massa per unitat de volum. Les seves unitats en el sistema internacional són kg/m^3 . Per a un volum infinitesimal de fluid podem definir la densitat com:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (2)$$

La densitat és una quantitat que varia punt a punt i pot dependre del temps, per la qual cosa és un camp escalar, $\rho(\vec{r}, t)$.

La densitat d'un material pot dependre de la temperatura i de la pressió a la que se sotmet. En els líquids, que són poc compressibles en general, la densitat pot dependre de la temperatura però no depèn de la pressió, $\rho = \rho(T)$. En el cas de fluids compressibles, per exemple en un gas ideal, amb equació d'estat $pV = nRT$, la densitat serà

$$\rho(p, T) = \frac{Mp}{RT} \quad (3)$$

Sent p la pressió absoluta, T la temperatura absoluta, R la constant dels gasos i M la massa molar molecular.

1.4 Pressió

La pressió en un punt es defineix com la força normal per unitat d'àrea de la superfície sobre la que actua. La pressió pot definir-se no només sobre un objecte sòlid, sinó també en qualsevol punt d'un fluid, si suposem que una superfície infinitesimalment petita ΔS podria col·locar-se allà, donant

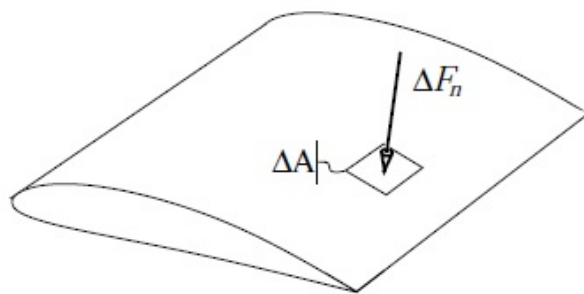


Fig. 2. Força normal ΔF_n sobre l'element d'àrea ΔA , a causa de la pressió de l'aire.

una força normal resultant, ΔF_n .

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \quad (4)$$

La pressió pot variar en l'espai i en el temps, sent en general, $p = p(\vec{r}, t)$.

1.5 Viscositat, fluids newtonians y no-newtonians

La viscositat és el paràmetre material que es relaciona amb la resistència del fluid al moviment, i té un paper anàleg a la fricció en el moviment dels sòlids. La viscositat sempre està present en major o menor mesura, però no sempre és necessari tenir-la en compte. En el cas dels fluids perfectes o no viscosos seu efecte és molt petit i no es té en compte, mentre que en el cas dels fluids reals o viscosos seu efecte és important i no és possible menysprear-la ([White, 2011](#)).

Per definir la viscositat, considerem un experiment hipotètic en el qual un fluid es col·loca entre dues plaques paral·leles, com es mostra a la Fig. 3. La placa inferior està en repòs mentre que la placa superior es pot moure lliurement amb una velocitat U . Com ja hem esmentat, el fluid es deformarà contínuament davant la presència d'un esforç tallant. Si inspeccionem més de prop el moviment del fluid entre les dues plaques, veurem que el fluid en contacte amb la placa superior es mou amb la velocitat de la placa, U , i el fluid en contacte amb la placa fixa inferior té una velocitat zero. El fluid entre les dues plaques es mou amb velocitat $u = u(y)$, amb una variació lineal, $u = U/b$ y i es genera un gradient de velocitat, du/dy , en el fluid que es troba entre les plaques. En aquest cas en particular el gradient de velocitat és constant, U/b . L'observació experimental que el fluid "s'engan-

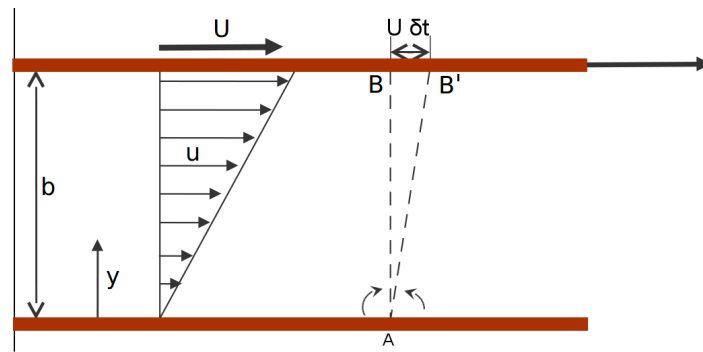


Fig. 3. Comportament d'un fluid entre dues plaques paral·leles.

xa"als contorns sòlids és molt important en mecànica de fluids i en general es coneix com la condició antilliscant (condició de *no-slip*). Tots els fluids, tant els líquids com els gasos, satisfan aquesta condició per a fluxos típics. Una excepció són els gasos enrarits.

En un petit increment de temps δt , mentre la placa superior es desplaça a la dreta $U\delta t$, la línia vertical imaginària AB gira un angle $\delta\theta \approx \tan \delta\theta = U\delta t/b$. Definim la taxa de deformació $\dot{\theta}$ (o velocitat de deformació, o taxa de tall) aleshores

$$\dot{\theta} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\theta}{\delta t} \quad (5)$$

que en aquest cas és $\dot{\theta} = U/b$.

Una continuació d'aquest experiment, realitzat amb fluids comuns com l'aigua, l'oli, la gasolina i l'aire revelaria que, a mesura que augmenta l'esforç de tall, τ , augmenta proporcionalment la velocitat de deformació, o el que és el mateix,

$$\tau \propto \dot{\theta} = \frac{du}{dy} \quad (6)$$

Aquest resultat indica que l'esforç de tall i la velocitat de deformació poden relacionar-se mitjançant la següent expressió,

$$\tau = \mu \dot{\theta} \quad (7)$$

On la constant de proporcionalitat μ és la viscositat dinàmica, la qual depèn fortament de la temperatura T . L'expressió 7 es coneix com a llei de Newton de la viscositat, de manera que als fluids que compleixen aquesta relació se'ls denomina fluids newtonians.

La tendència d'un fluid a difondre els gradients de velocitat està determi-

nada per la viscositat cinemàtica, definida com:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (8)$$

La Taula 2 recull les magnituds de la densitat, viscositat dinàmica i cinemàtica per a alguns fluids d'ús comú a 1 at i a 20°C.

Taula 2. Densitat ρ , viscositat dinàmica μ i viscositat cinemàtica ν de diferents fluids a 1 at i 20°C (adaptació de (White, 2011))

Fluid	ρ (kg/m ³)	μ (Pa·s)	ν (m ² /s)
Hidrogen	0.084	9×10^{-6}	1.05×10^{-4}
Aire	1.22	1.8×10^{-5}	1.5×10^{-5}
Gasolina	680	2.9×10^{-4}	4.22×10^{-7}
Aigua	998	1.0×10^{-3}	1.02×10^{-6}
Etanol	789	1.2×10^{-3}	1.52×10^{-6}
Mercuri	13550	1.5×10^{-3}	1.16×10^{-7}
Oli SAE30	891	0.29	3.25×10^{-4}
Glicerina	1260	1.5	1.18×10^{-3}

La reologia és la part de la física que estudia la relació entre l'esforç i la taxa de deformació dels materials, i no hem de pensar només en els fluids simples habituals. Molts materials amb estructura molecular complexa poden fluir quan s'apliquen els esforços adequats: fangs, llots, sediments, suspensions, polímers, substàncies vítrees i amorfes, així com molts compostos químics, additius, aliments, etc. La reologia és una part de la mecànica dels medis continus. Un dels objectius de la reologia és trobar equacions constitutives per modelar el comportament dels materials.

Fluids no-newtonians

Els fluids per als quals l'esforç de tall no es relaciona de forma lineal amb la velocitat de deformació s'anomenen fluids no-newtonians. En aquests fluids, el pendent de la corba esforç-taxa de deformació no és constant i no té sentit caracteritzar-los a través d'un paràmetre de viscositat com

els fluids newtonians. El seu comportament pot descriure's en funció, per exemple, de la seva viscositat aparent i de la seva variació davant canvis de la sol·licitació, de la temperatura del fluid, de la seva estructura fisicoquímica, etc. La viscositat aparent és la viscositat del fluid newtonià equivalent mesurada a una velocitat de deformació determinada.

Els fluids no newtonians es classifiquen en fluids independents del temps i fluids "dependents del temps". Aquesta nomenclatura és bastant ambigua, ja que la classe dels fluids dependents del temps arreplega fluids com per exemple algunes substàncies polimèriques com les silicones, que "envelleixen" o relaxen, i fluids electro- o magneto-reològics, que responen a l'acció d'un camp elèctric o magnètic. De fet el comportament reològic de molts fluids reals no pot descriure mitjançant una simple equació perquè depèn de l'estat de deformació previ, de si van estar en repòs i, fins i tot, per quant de temps. El diagrama reològic d'aquests fluids dependents de la història prèvia sol manifestar histèresi quan s'agiten fins a un estat de deformació particular i, després, són portats al repòs.

La major part dels fluids no-newtonians independents del temps tenen un comportament que segueix la llei de potències d'Ostwald-de Waele ([De las Heras, 2012](#)), segons la qual

$$\tau = k \left(\frac{du}{dy} \right)^n, \quad (9)$$

on k i n són respectivament els índexos de consistència i de fluència del fluid. Un fluid per al que $n < 1$ s'anomena **pseudoplàstic**, i **dilatant** si $n > 1$. Per a un fluid que segueixi la llei potencial 9, la viscositat aparent per a un cert valor de la taxa de deformació és

$$\mu_a = nk \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1}, \quad (10)$$

La viscositat aparent de molts fluids no-newtonians és relativament alta comparada amb la viscositat de l'aigua. Les solucions polimèriques, les suspensions col·loïdals i la polpa de paper en aigua són exemples de fluids pseudoplàstics, mentre que les suspensions de midó i de sorra són exemples de fluids dilatants.

Un fluid que es comporta com un sòlid fins que s'exerceix un esforç de deformació mínim, i exhibeix subseqüentment una relació lineal entre l'esforç

i la deformació, es coneix com plàstic de Bingham o ideal. El model d'esforç de tall apropiat és

$$\tau = \tau_0 + \mu_p \frac{du}{dy}, \quad (11)$$

Les suspensions d'argila, la pasta de dents o la maionesa són exemples de substàncies que presenten aquest comportament (Pritchard, 2011). El comportament dels fluids esmentats es mostra a la Fig. 4. Com hem dit en

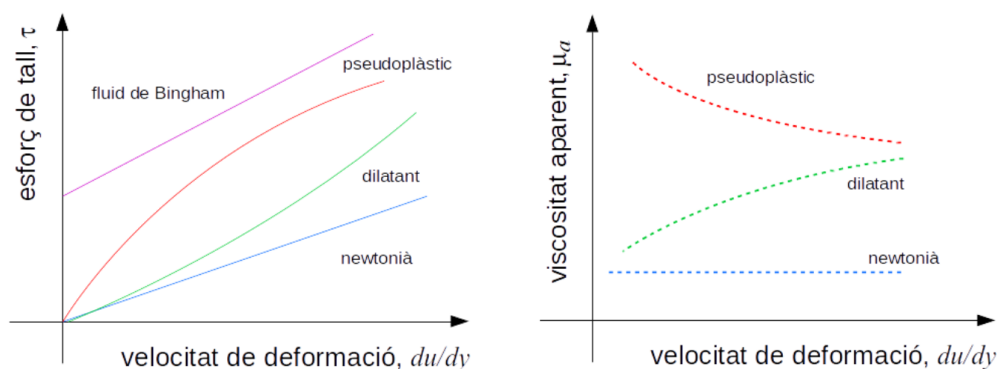


Fig. 4. Esquerra: Esforç de tall, τ . Dreta: viscositat aparent, μ_a (Eq. 10), dels diferents tipus de fluids no-newtonians, com a funció de la taxa de deformació en un flux unidimensional.

un paràgraf anterior, hi ha fluids que no obeeixen la llei de Newton de la viscositat, però el seu comportament és més complicat que el que acabem de descriure ja que aquest pot dependre del "temps". Anomenem fluids **tixotròpics** a aquells que mostren una reducció de la viscositat aparent amb el temps davant l'aplicació d'un esforç de tall constant. El iogurt, o moltes pintures, compleixen amb aquesta descripció. Els fluids **reopèctics**, en canvi, mostren un augment de la viscositat aparent amb el temps. Un cop cessa l'aplicació de l'esforç, alguns tornen parcialment a la seva forma original, a aquests fluids se'ls diu **viscoelàstics**.

1.6 Tensió superficial

Una porció de líquid no pot expandir-se il·limitadament i formarà una interfase amb un segon líquid, o un gas. Experimentalment observem que, en la superfície de separació de dues fases diferents, no miscibles, apareixen tensions que s'originen en el trencament de les simetries de les forces d'interacció entre molècules prop de la superfície de separació. Aquestes

forces són el resultat d'interaccions químiques entre diferents espècies.

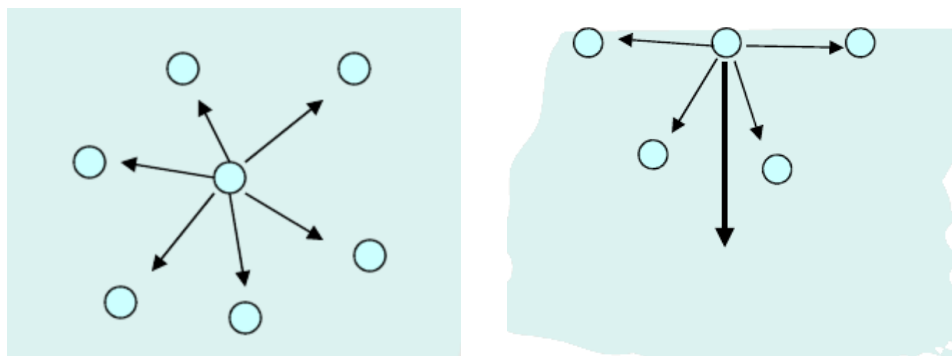


Fig. 5. Esquerra: molècula de fluid lluny d'una interfase. Dreta: Prop de la interfase amb una altre fluid. Per la asimetria de les forces cohesives, a la dreta hi ha una resultant normal a la superfície que tendeix a minimitzar l'àrea de la superfície lliure

Si féssim un tall de longitud dL en una interfase, apareixerien forces iguals i oposades de magnitud σdL normals al tall, paral·leles a la interfase, on σ és el coeficient de tensió superficial, com a la figura 6.

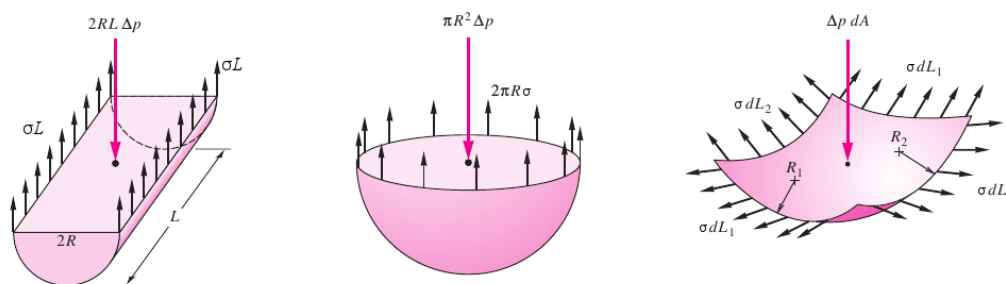


Fig. 6. Diferència de pressió neta a través d'una interfase, degut a la tensió superficial. Esquerra: interior d'un cilindre líquid; centre: interior d'una gota esfèrica; dreta: interfase general amb forma corbada. Adaptat de (White, 2011).

Es defineix la tensió superficial σ com l'energia per unitat de superfície que hem d'aportar per expandir la superfície d'una substància, quan està en contacte amb una altra fase o fases. Depèn del material o materials en contacte i de la temperatura. La tensió superficial té una gran importància en molts fenòmens, ja que domina la força d'adhesió entre dues fases, ja sigui entre líquids o en presència de superfícies sòlides; governa l'estabilitat de les emulsions, la mullabilitat, l'angle de contacte entre les fases, l'ascens capil·lar i la propagació d'ones superficials. En la Taula 3 hi ha els valors, extrets de la bibliografia, de la tensió superficial en funció de la temperatura d'alguns líquids en contacte amb aire a 1 at.

Taula 3. Tensió superficial de la interfase líquid-aire (mN/m)

Líquid	10°C	25°C	50°C	75°C	100°C
Aigua	74.2	72.0	67.9	63.6	58.9
Etanol	23.2	21.8	19.8	17.5	–
Acetona	25.4	23.0	19.7	–	–
Hexadecà (hidrocarbur)	28.5	27.0	25.1	23.8	20.5
Mercuri	488	485	480	475	470

La superfície lliure de qualsevol fluid tendeix a buscar l'equilibri entre les forces mecàniques, tèrmiques, químiques i de tensió superficial, de manera que l'energia total del sistema sigui mínima.

La llei de Laplace

La tensió superficial es relaciona amb la capacitat dels líquids de formar gotes: la forma esfèrica és la que té àrea mínima per a un volum donat. Sota l'acció de la gravetat, una massa suficient de líquid té una interfase horitzontal amb l'aire (perpendicular a g), mentre que quantitats petites prenen forma de gotes esfèriques. (Fig. 7)



Fig. 7. En absència d'altres forces, qualsevol quantitat de líquid pren la forma esfèrica (font: NASA).

La diferència entre la pressió interna dins una gota de líquid i la pressió externa és la pressió capil·lar $p_{\sigma} = p_{int} - p_{ext}$ (Fig. 8), donada per la llei de

Laplace,

$$p_{\sigma} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (12)$$

on R_1 i R_2 són els radis de curvatura principals de la superfície, com en la imatge de la dreta de la Fig. 6. El treball necessari per produir un increment de la interfase de la figura en un desplaçament elemental dóna el càlcul que expressa la llei de Laplace ([Landau i Lifschitz, 1987](#)). Un simple balanç de forces proporciona el mateix resultat, com demostrarem a l'exercici 9. Per a una gota esfèrica de radi R , la llei de Laplace és

$$p_{\sigma} = \frac{2\sigma}{R}. \quad (13)$$

Fixem-nos que en els líquids amb tensió superficial elevada, les pressions internes són també elevades. Igualant les forces gravitatòries i de tensió superficial en una gota esfèrica, surt un valor límit aproximat del radi de les gotes esfèriques en contacte amb aire: $R \lesssim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$. Que, per a la majoria de líquids, representa uns pocs mil·límetres. Per sobre d'aquesta escala, els líquids presenten una interfase horitzontal.

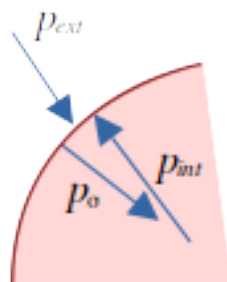


Fig. 8. Pressió interna, externa i capil·lar en una gota de líquid.

Mullabilitat

El mètode de Dupré ([De las Heras, 2012](#), pàg.54-55) descriu de forma senzilla les característiques de la interacció de dues fases a través d'una interfase (en presència d'un altre medi, l'aire per exemple). Segons aquest concepte, si es vol crear una superfície entre dues fases α i β , s'han de crear primer les de cada fase per separat, i després unir-les,

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha} + \sigma^{\beta} - w_A$$

on w_A és el treball d'adhesió, que és l'energia per unitat d'àrea que es requereix per separar dos líquids immiscibles i formar dues interfases líquid-aire. No es formarà superfície ni hi haurà interacció entre les dues fases si en aquest procés no es redueix l'energia lliure interfacial del sistema $\sigma^{\alpha\beta}$: en tal cas, $w_A = 0$, i es diu que les fases *no es mullen entre si*.

El comportament del sistema depèn de si el treball d'adhesió supera o no el treball de cohesió w_c de la fase amb menor tensió superficial, suposem α , si $\sigma^\alpha < \sigma^\beta$. Aquest valor crític que representa el treball de cohesió w_C , és l'energia necessària (per unitat de superfície) per separar la fase α en dues meitats generant una superfície de separació, $w_A = 2\sigma^\alpha$. El treball d'adhesió no és més que l'energia necessària per vèncer les forces adhesives entre molècules d'espècies diferents, respecte del treball de cohesió que dóna compte de les forces cohesives entre molècules de la mateixa espècie. Quan les forces adhesives són més grans que les cohesives, $w_A > w_C$, α *mulla* β . Si no, el líquid forma gotes lenticulars sobre el substrat o sobre l'altre líquid (Fig. 9).

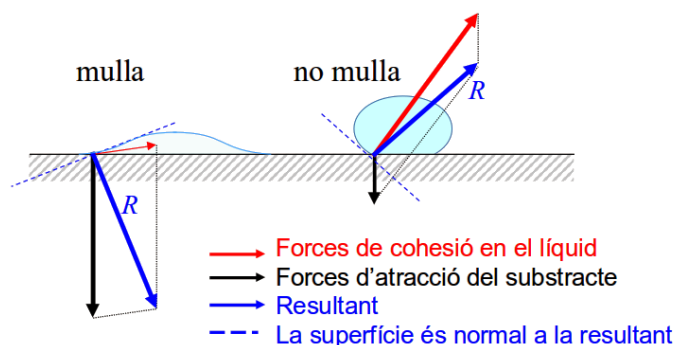


Fig. 9. Representació gràfica dels dos casos de mullabilitat.

L'estudi de l'angle de contacte θ (l'angle que formen les diferents fases entre sí, veure Fig. 10) és important per conèixer la mullabilitat en funció de canvis físics i químics dels medis en contacte. Aquest angle ve donat en equilibri per l'equació de Young,

$$\sigma^{lg} \cos \theta + \sigma^{sl} - \sigma^{sg} = 0 \quad (14)$$

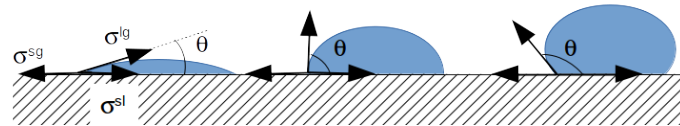


Fig. 10. Forces de tensió superficial en la línia de contacte entre el substrat sòlid (s), la gota de líquid (l) i l'aire (g).

Si l'angle de contacte θ és menor que $\pi/2$, es diu que el líquid "mulla". Si és superior, $\pi/2 < \theta < \pi$, que no mulla.

Ascens i descens capil·lar

És un fenomen que es produeix quan un líquid penetra en tubs molt prims (capil·lars), com es mostra a la Fig. 11. En aquest cas, un líquid que mulla l'interior d'un tub de vidre, com pot ser l'aigua, puja per un capil·lar estret una alçada h (veure Fig. 11).

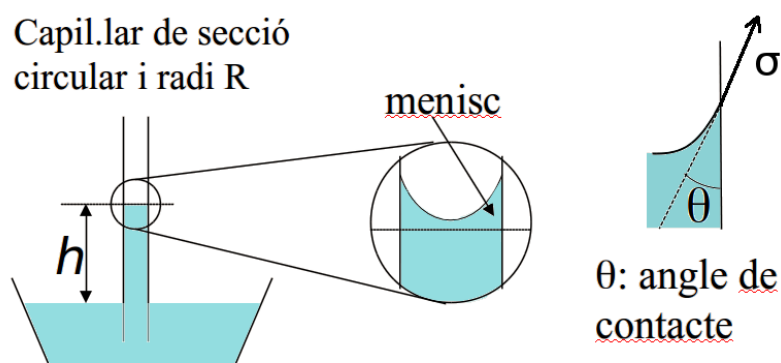


Fig. 11. Ascens capil·lar d'una columna d'aigua i formació del menisc.

L'ascens capil·lar del líquid dins el tub de radi R es pot calcular fàcilment igualant les forces de tensió superficial al llarg de la línia de contacte aire-aigua-vidre, amb valor $2\pi R\sigma \cos \theta$, amb el pes de la columna $\rho g \pi R^2 h$, on ρ és la densitat del líquid,

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g R} \quad (15)$$

Observa com, a mesura que augmenta el radi del capil·lar, l'ascens h decreix. També, que si l'angle de contacte és superior a $\pi/2$, es a dir si el

líquid no mulla el vidre (o qualsevol que sigui el material del capil·lar), l'alçada h es torna negativa, i en comptes de pujar el líquid dins el tub, baixa per sota del seu nivell en la cubeta (Fig. 12).

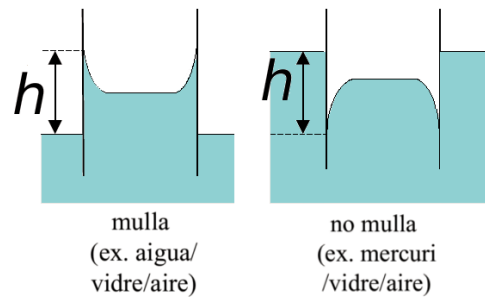


Fig. 12. Si el líquid mulla el tub, es produeix l'ascens capil·lar amb un menisc concav, si no el mulla, es produeix un descens o depressió, amb un menisc convex.

1.7 Els límits de la descripció del continu: recorregut lliure mitjà

Definim el recorregut lliure mitjà, λ , com la distància mitjana que viatgen les molècules entre col·lisió i col·lisió. La hipòtesi del continu no és vàlida quan el recorregut lliure mitjà de les molècules és de el mateix ordre que una mínima longitud característica del sistema (De las Heras, 2012, pàg. 15).

És més probable la violació de la hipòtesi del continu en gasos que en líquids. Alguns casos límit són **i)** els gasos a molt baixa pressió (on haurà d'utilitzar-se una teoria molecular de fluxos de gasos enrarits), o **ii)** gasos que es mouen a alta velocitat (fluxos supersònics). En el cas dels líquids, la hipòtesi del continu es pot violar en algunes aplicacions de microfluídica, on la longitud característica dels sistemes és molt petita (Panton, 2013, pàg. 718-719).

1.8 Nombre de Knudsen

Per determinar la validesa de la hipòtesi del continu considerem el nombre de Knudsen com la relació entre el recorregut lliure mitjà molecular λ i una longitud característica del sistema L (pot ser la dimensió lineal del recipient

que conté el fluid, o el diàmetre de la canonada per on circula, etc)

$$Kn = \frac{\lambda}{L}, \quad (16)$$

El nombre de Knudsen permet classificar les descripcions dels fluids en tres tipus ([Zamora, 1998](#)):

1. $Kn \ll 1$ Descripció hidrodinàmica, correspon a un gas dens o a pressions elevades (les habituals), on es compleix la hipòtesi del continu.
2. $Kn \gg 1$ Descripció molecular, segons la mecànica estadística, o la teoria cinètica dels gasos. El recorregut lliure mitjà de les molècules és molt gran respecte de la mida del recipient que el conté. És el cas d'un gas enrarit o a baixa pressió: els xocs entre les molècules són molt infreqüents respecte dels xocs d'aquestes amb les parets.
3. $Kn \approx 1$ Descripció intermèdia, les dues anteriors són aplicables, sempre que es tinguin en compte tant els xocs de les molècules amb les parets com entre les pròpies molècules.

Bibliografia

- De las Heras, S. (2012). *Mecánica de fluidos en ingeniería*. Barcelona, España: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Kundu, P. K., i Cohen, I. M. (2002). *Fluid mechanics*. San Diego (CA), USA: Academic Press.
- Landau, L., i Lifschitz, E. (1987). *Fluid mechanics*. Oxford: Pergamon Press.
- Panton, R. (2013). *Incompressible flow*. Wiley.
- Pritchard, P. (2011). *Fox and mcdonald's introduction to fluid mechanics, 8th edition*. John Wiley & Sons.
- White, F. (2011). *Fluid mechanics*. New York: Mc Graw Hill.
- Zamora, M. (1998). *Termo i: un estudio de los sistemas termodinámicos*. Sevilla: Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Complements formatius

Fluids no newtonians i ones de so

Una forma molt popular de veure el comportament de fluids no newtonians és a partir de l'experiment realitzat amb midó de blat de moro (maizena) i aigua. La barreja de midó de blat de moro i aigua és un fluid no newtonià, ja que el seu comportament reològic varia en funció de la força aplicada. L'excitació aplicada en aquest cas és el moviment vibratori de la membrana d'un altaveu sobre la pasta de midó-aigua. Cal notar que en el temps 0:58 s del vídeo, el muntatge es troba en vertical.

<https://www.youtube.com/watch?v=SBcMAvNLBuo>

Gotes en microgravetat

En un *vol parabòlic* com els que fleten l'Agència Espacial Europea o la NASA, es poden fer experiments en el que s'anomena "microgravetat". No vol dir que la gravetat sigui estrictament nul·la en un vol parabòlic, sinó que el sistema de referència es mou en caiguda lliure, així que aparentment, els objectes "no cauen a terra". En microgravetat, les gotes líquides poden assolir grandàries molt superiors a les que acostumem a veure sobre la superfície de la terra.

[https://www.issnationallab.org/iss360/
looking-at-liquid-motion-in-microgravity/](https://www.issnationallab.org/iss360/looking-at-liquid-motion-in-microgravity/)

És un líquid? Segur?

Un sac de sorra es pot comportar com un líquid, com mostra aquest video. Podries dir en què s'assembla, i en què es diferencia el moviment de la

sorra del video, del d'un líquid tradicional? Hi ha "viscositat"? Hi ha "tensió superficial"?

<https://www.youtube.com/watch?v=My4RA5IOFKs>

Exercicis

1. Un gas a 20°C pot considerar-se enrarit, desviant-se de la hipòtesi del continu, quan conté menys de 10^{12} molècules per mil·límetre cúbic. Si el nombre d'Avogadro és $6.023 \cdot 10^{23}$ molècules per mol i considerem que el gas és aire amb massa molecular de 28.97 kg/kmol, calcula la pressió absoluta.
2. En un fluid, el recorregut lliure mitjà λ es defineix com la mitjana de la distància recorreguda per les molècules entre col·lisions. Una fórmula proposada per estimar λ en un gas ideal és la següent,

$$\lambda = 1.26 \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{M_{mol}}{RT}}$$

on μ és la viscositat dinàmica del gas i ρ la seva densitat. M_{mol} és la massa molecular del gas.

- a) Quines són les unitats de la constant 1.26 que apareix a la fórmula?
 - b) Utilitza el valor de la viscositat dinàmica de l'aire $\mu = 1.80 \times 10^{-5}$ N·s/m², considerat com a gas ideal, a 20°C i 7 kPa de pressió, per calcular λ .
3. La variació de la viscositat dinàmica amb la temperatura pot representar-se, en el rang de temperatures $273 \leq T \leq 373$ K, mitjançant la relació empírica

$$\frac{\mu}{\mu_{293K}} = e^{[A(\frac{293}{T(K)} - 1)]}$$

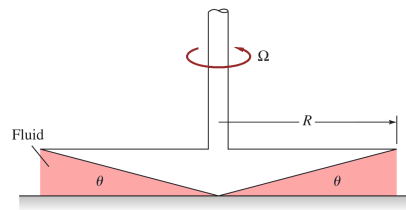
on A és una constant. Si tenim mercuri amb densitat $\rho = 13.5 \times 10^3$ kg/m³ i viscositat dinàmica $\mu = 1.56 \times 10^{-3}$ Pa·s a 20°C, calcula el valor de la viscositat cinemàtica del mercuri a 90°C. Suposa que la densitat no varia apreciablement amb la temperatura i utilitza $A = 1.07$.

4. El dispositiu de la figura s'anomena viscosímetre de placa cònica i l'espai colorejat s'omple amb el líquid de prova. Quan l'angle del con θ és molt petit ($\sin \theta \approx \theta$), els esforços són aproximadament constants en el fluid i també el gradient de velocitats vertical. La mesura de la viscositat amb aquest aparell es fa a través del parell motor M necessari per fer girar el con a una velocitat Ω . Suposant un perfil de velocitat lineal en el líquid, integra el moment de les forces viscoses en la

pel·lícula de líquid i demostra que

$$\mu = \frac{3M\theta}{2\pi\Omega R^3}.$$

Ajuda: Estudia primer l'exemple 1.10 del llibre de (White, 2011, pàg. 38).



5. Siguin dues plaques paral·leles, una movent-se a 4 m/s i l'altra quieta. Entre elles hi ha una fina capa d'oli de 5 mm. L'oli té una densitat de 800 kg/m^3 i una viscositat cinemàtica de $1.25 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. Quant val l'esforç de tall mitjà?
6. Les dades mesurades de la viscositat d'una crema espessa mostren que es comporta com un fluid pseudoplàstic, que es pot modelar mitjançant la relació de la llei de potències entre l'esforç de tall τ i la velocitat de deformació du/dy (Eq. 9), a velocitats de deformació de tall baixes. Suposa les següents dades:

	Exp. 1	Exp. 2
$\tau \text{ (N/M}^2\text{)}$	0.01	0.1
$du/dy \text{ (s}^{-1}\text{)}$	0.028	0.93

Calcula els valors dels índexos de consistència k i de fluència n del flux.

7. La mostassa i el quètxup poden modelar-se com plàstics de Bingham. A 30°C , la mostassa presenta un esforç mínim $\tau_0 = 38 \text{ Pa}$ i una viscositat plàstica $\mu_P = 0.63 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, mentre que els valors respectius en el quètxup són de $\tau_0 = 14 \text{ Pa}$ i $\mu_P = 0.08 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ a la mateixa temperatura. Sota l'acció del mateix esforç de tall, quina és la relació entre la velocitat de deformació du/dy de la mostassa i la del quètxup?
8. El recorregut lliure mitjà de les molècules d'un gas ideal és $\lambda = 9.4 \times 10^{-9} \text{ m}$, aquest gas es troba en un recipient cúbic de 1 mm de costat. Podem considerar que aquest gas compleix amb la hipòtesi del continu?
9. Fes un balanç de forces en equilibri sobre l'element de superfície general de la Fig. 6 (dreta) tenint en compte que

- i) R_1 i R_2 són els radis de curvatura principals de l'element $dA = dL_1 dL_2$ i la tensió sobre cada costat és paral·lela a la superfície i perpendicular al radi R_i ($i = 1, 2$) respectivament;
- ii) L'única component de la força en equilibri té direcció normal a l'element de superfície;
- iii) Els angles $d\theta_i \equiv dL_i/R_i$ són molt petits i es pot suposar $\sin d\theta_i \approx d\theta_i$;

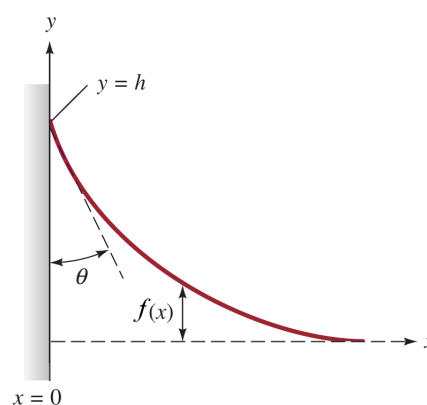
per obtenir la llei de Laplace, Eq. 12.

- 10.** Analitza la forma de la interfase aigua-aire prop d'una paret plana vertical, com mostra la figura de la dreta. La força de tensió superficial prop de la línia de contacte aire-aigua-paret, s'equilibra amb el pes de la columna de fluid que succiona.

- a) Utilitza la llei de Laplace (12) i substitueix el radi de curvatura R amb la fórmula

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2f}{dx^2}}$$

per expressar l'equació d'equilibri de forces en la direcció vertical.



- b) Suposa que la corba és prou suau, és a dir, que f' és prou petita, per utilitzar $f'(x)^2 \ll 1$ i així integrar l'equació diferencial ordinària lineal de segon ordre que en resulta.
- c) Per fixar les constants indeterminades, utilitza la condició que en $x = 0$ l'angle de contacte és θ i que en $x \rightarrow \infty$, $f \rightarrow 0$. Tal com mostra la figura, l'aigua "mulla" i l'angle de contacte és menor que $\pi/2$, és a dir f és decreixent.
- c) Quant val l'alçada h de l'aigua en $x = 0$?

- 11.** Si has fet correctament el problema anterior, a l'apartat (a) hauràs arribat a l'equació per a la línia interfacial

$$f'' - \frac{\rho g}{\sigma} f (1 + (f')^2)^{3/2} = 0 \quad (17)$$

abans de fer l'aproximació $f'^2 \ll 1$. Aquesta és una edo de segon ordre no lineal que no té solució analítica tancada. Per a una aplicació numèrica, a la plana web http://www.uskino.com/articleshow_113.html pots trobar valors de l'angle de contacte θ de la interfase aigua-aire amb diferents substrats. Tria'n qualsevol ($\theta < 90^\circ$ perquè l'aigua mulli el substrat) i pren la tensió superficial de l'aigua de la taula 3 a 25°C per exemple, ja que a baixa temperatura l'angle de contacte depèn dèbilment d'aquesta.

Integra amb un solver de la teva elecció l'equació de segon ordre 17 amb les mateixes condicions de contorn del problema 10 i compara la seva solució amb la solució aproximada del problema anterior, obtinguda fent $f'^2 \ll 1$. Et sembla aquesta una bona aproximació?