Equacions diferencials

Àlex Arenas, Sergio Gómez

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

Equacions diferencials

- Definicions
  - Una equació diferencial és una equació que involucra una funció desconeguda $y = f(x)$ i una o més de les seves derivades (y', y'', etc.).
  - Formalment, una equació diferencial d'ordre n és una equació del tipus

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

on $y^{(n)}$ és la derivada d'ordre més gran que apareix

Equacions diferencials

- Definicions
  - S’anomenen equacions diferencials ordinàries (EDO) per a distingir-les de les que contenen funcions de vàries variables i les seves derivades parcials ➡ equacions en derivades parcials (EDP)
  - També existeixen els sistemes d’equacions diferencials, que involucren diverses funcions $y_i = y_i(x)$ i les seves derivades

$$\vec{F}\left(x, \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'', \dots, \vec{y}^{(n)}\right) = \vec{0}$$

- Exemples d'EDOs
  - Equacions diferencials de primer ordre
    - Desintegració nuclear / Malthusian growth

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \qquad \frac{dN}{dt} = rN$$

    - Equació diferencial de Bernoulli

$$y' + P(x)\,y = Q(x)y^k$$

    - SIS epidèmic model

$$\frac{dI}{dt} = \beta\,\frac{I}{N}\,(N - I) - \mu I$$

- Exemples d'EDOs
  - Equacions diferencials de segon ordre
    - Segona llei de Newton ($x = x(t)$)

$$F(x, \dot{x}, t) = m\,\ddot{x}$$

    - Problemes de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\,y = -\lambda\,w(x)\,y$$

    - Equació d'Airy o de Stokes

$$y'' = xy$$

    - Equació d'Emden-Chandrasekhar

$$\frac{1}{\xi^2}\,\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\,\frac{d\psi}{d\xi}\right) = e^{-\psi}$$

- Exemples d'EDOs
  - Equacions diferencials d'ordre superior
    - Equació de Blasius de la capa límit

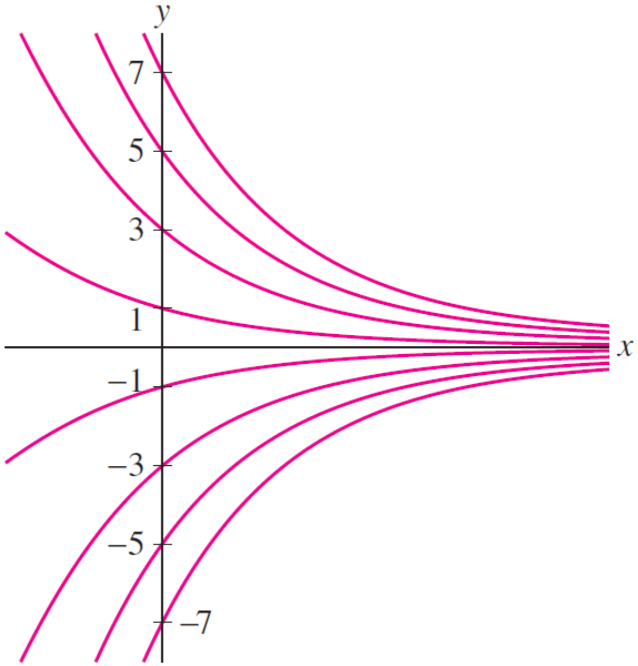
$$y''' + y\,y'' = 0$$

    - Equacions diferencials lineals

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

- Solucions d'EDOs
  - S'anomena solució particular d'una EDO a qualsevol funció que satisfà l'equació
  - La solució general d'una EDO és la família completa de solucions

Differential Equation	General Solution
$y' = -2y$	$y = Ce^{-2x}$
$\dfrac{dy}{dt} = t$	$y = \dfrac{1}{2}t^2 + C$
$y'' + y = 0$	$y = A\sin x + B\cos x$



- Solucions d'EDOs
  - S'anomena problema de valor inicial a una EDO conjuntament amb un valor inicial, és a dir, un punt o punts pels qual passa la solució. La seva solució és la solució particular de l'EDO que satisfà els valors inicials
  - En general, el valor inicial ha d'estar format per tants punts com sigui l'ordre de l'EDO

- Solucions d'EDOs
  - S'anomena problema de valor inicial a una EDO conjuntament amb un valor inicial, és a dir, un punt o punts pels qual passa la solució. La seva solució és la solució particular de l'EDO que satisfà els valors inicials
  - En general, el valor inicial ha d'estar format per tants punts com sigui l'ordre de l'EDO
  - Exemple
    - El problema de valor inicial $y' = -2y$ amb $y(0) = 3$ té solució $y(0) = 3e^{-2x}$, ja que la solució general és $y(t) = Ce^{-2x}$ amb C una constant arbitrària

- Resolució d'EDOs
  - Existeixen mètodes per a resoldre analíticament certs tipus d'EDOs
    - EDOs amb variables separables
    - EDOs homogènies
    - EDOs particulars: equacions de Bernoulli, Clairaut, Lagrange
    - EDOs exactes (o en diferencials totals)
    - EDOs que es converteixen en exactes amb factor integrant
    - EDOs lineals a coeficients constants

- Resolució d'EDOs separables
  - Una EDO és separable si és de la forma

$$y' = f(x)g(y)$$

- Resolució d'EDOs separables
  - Una EDO és separable si és de la forma

$$y' = f(x)g(y)$$

  - Per a solucionar-la, fem el següent

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx = \int f(x)dx$$

Fent el canvi de variables $y = y(x)$, $dy = y'(x)dx$

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

Per tant, la solució general s'obté fent aquestes dues integrals, incloent la constant d'integració

- Resolució d'EDOs separables
  - Una EDO és separable si és de la forma

$$y' = f(x)g(y)$$

  - Per a solucionar-la, fem el següent

De forma informal (però amb el mateix resultat)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

Resolució d'EDOs separables

Exemple

$$y' = ky$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k \, dx$$

$$\ln|y| = kx + C_1$$

$$|y| = e^{kx} e^{C_1}$$

Definint $C = e^{C_1}$, queda $C > 0$, però tenint en compte el valor absolut $|y|$, $y = \pm Ce^{kx}$, i que $y = 0$ també és solució, per tant C pot prendre qualsevol valor, i la solució general és

$$y = Ce^{kx}, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Resolució d'EDOs separables

Exemple

$$y' = 3x^2y + 2x^2 - 12y - 8$$

Encara que no sembla separable, ho és ja que es pot escriure

$$y' = (x^2 - 4)(3y + 2)$$

$$\int \frac{1}{3y+2}\,dy = \int (x^2 - 4)\,dx$$

$$\ln|3y + 2| = \frac{1}{3}x^3 - 4x + C_1$$

$$3y + 2 = \pm e^{\frac{1}{3}x^3 - 4x} e^{C_1}$$

$$y = Ce^{\frac{1}{3}x^3 - 4x} - \frac{2}{3}, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

- Resolució d'EDOs separables
  - Exemple

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$\int y\, dy = -\int x\, dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \quad \forall R > 0$$

- EDOs lineals
  - Són de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

- Si $b(x) = 0$ → EDO lineal homogènia
- Si $b(x) \neq 0$ → EDO lineal no homogènia

EDOs lineals homogènies

Són de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Linealitat

- Si $y_1(x)$, $y_2(x)$ són dues solucions, aleshores
$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$
també són solucions, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

- Per tant, les solucions d'una EDO lineal homogènia formen un espai vectorial

- Es pot demostrar que la dimensió d'aquest espai vectorial és igual a l'ordre de l'EDO

  ➡ n solucions linealment independents

EDOs lineals homogènies

- Definim l'operador lineal

$$D = \frac{d}{dx}$$

- Aquest operador permet obtenir les derivades d'ordre superior

$$D^2 = D \circ D = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2}, \qquad D^3 = \frac{d^3}{dx^3}, \qquad \ldots$$

- Podem escriure l'EDO lineal homogènia com

$$\mathcal{H}y = 0$$

amb l'operador lineal

$$\mathcal{H} \equiv a_n(x)D^n + \cdots + a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$$

- EDOs lineals homogènies a coeficients constants
  - Podem escriure l'EDO lineal homogènia com

$$\mathcal{H}y = 0$$

amb l'operador lineal

$$\mathcal{H} \equiv a_n D^n + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$$

  - Trobant les arrels i factoritzant el polinomi característic

$$p(\lambda) = a_n \lambda^{\mathrm{n}} + \cdots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

es pot simplificar el problema i trobar les solucions linealment independents

- EDOs lineals homogènies a coeficients constants
  - Exemple
$$y'' - 4y' + 3y = 0$$
    - Polinomi característic
$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$
    - Arrels: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$
$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$
    - Operador lineal
$$\mathcal{H} = D^2 - 4D + 3 = (D-1)(D-3)$$
    - Només cal solucionar per separat
      - $(D-1)y_1 = 0 \;\Rightarrow\; y_1' - y_1 = 0 \;\Rightarrow\; y_1(x) = e^x$
      - $(D-3)y_2 = 0 \;\Rightarrow\; y_2' - 3y_2 = 0 \;\Rightarrow\; y_2(x) = e^{3x}$
    - Solució general
$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

EDOs lineals homogènies a coeficients constants

Exemple

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

- Polinomi característic

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

- Arrels: $\lambda_1 = -2$

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)^2$$

- Operador lineal

$$\mathcal{H} = D^2 + 4D + 4 = (D + 2)^2$$

- Necessitem dues solucions linealment independents
  - $(D + 2)y_1 = 0 \;\Rightarrow\; y_1' + 2y_1 = 0 \;\Rightarrow\; y_1(x) = e^{-2x}$
  - La segona és $y_2(x) = xe^{-2x}$

    $$y_2'' + 4y_2' + 4y_2 = 4(x - 1)e^{-2x} + 4(1 - 2x)e^{-2x} + 4xe^{-2x} = 0$$

- Solució general

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$$

- EDOs lineals homogènies a coeficients constants
  - Exemple

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

    - Polinomi característic

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2 + 9$$

    - No hi ha arrels reals, són complexes: $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 2 - 3i$
    - Necessitem dues solucions linealment independents
      - $y_1(x) = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}} \sin(3x)$
      - $y_2(x) = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}} \cos(3x)$
    - Solució general

$$y(x) = C_1 e^{2x} \sin(3x) + C_2 e^{2x} \cos(3x)$$

- EDOs lineals no homogènies
  - Es pot demostrar que la solució general d'una EDO lineal no homogènia és

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

    amb
    - $y_h(x)$ la solució general de l'homogènia
    - $y_p(x)$ una solució particular de la no homogènia

  - Mètodes per a trobar la solució particular
    - Ansatz
    - Variació de constants (un cop coneguda y_h)
    - Operador anul·lador (un cop coneguda y_h)

EDOs lineals no homogènies

Exemple

$$y'' - 4y' + 3y = 9x$$

- Solució homogènia

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

- Solució particular de la no homogènia
  - Ansatz

$$y_p(x) = px + q \quad \Rightarrow \quad y_p'(x) = p, \;\; y_p''(x) = 0$$

$$y_p'' - 4y_p' + 3y_p = 0 - 4p + 3(px + q) = 3px + (3q - 4p) = 9x$$

$$p = 3, \; q = 4$$

$$y_p(x) = 3x + 4$$

- Solució general

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 3x + 4$$