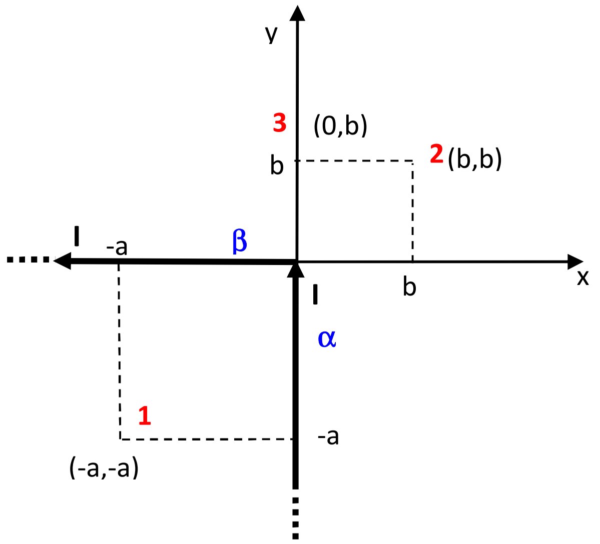
Problemes de fonts de camp magnètic i de materials magnètics

1) (proposat) Considereu una distribució de corrents com la de la figura, que consisteix en dos conductors rectilinis α i β semi-infinits que formen un angle recte situats al pla x-y i per on hi passa un corrent d'intensitat I.

a) Trobeu una expressió del camp B al punt indicat amb un '**1**' i de coordenades (-a,-a).

b) Trobeu una expressió del camp B en un punt '2' situat a les coordenades (b,b), tal i com s'indica a la figura.

c) Trobeu una expressió del camp B en un punt '**3**' situat a les coordenades (0,b), tal i com s'indica a la figura (**AJUDA**, en aquest punt, per a trobar el camp del tram α, millor usar la llei de Biot i Savart que la fórmula del camp d'un fil).



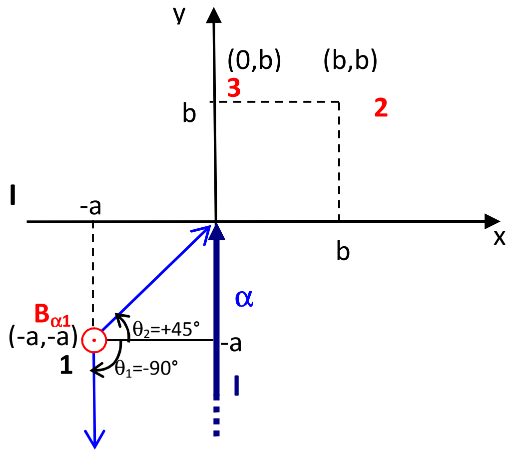
Per a trobar els camps magnètics fets per trams de fils rectilinis (infinits o no) s'ha de tenir en compte que aquest camp tal com es va demostrar a teoria te una direcció rotatòria al voltant de la recta del fil i sentit segons la regla del tirabuixó (també dita del caragol o de la ma dreta).

Per a trobar el seu mòdul es pot usar l'expressió següent:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{s} \cdot (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$, on s és la distància de la recta del fil al punt a on volem trobar el camp, I el corrent que hi passa. θ_1 i θ_2 són els angles a partir del segment perpendicular al fil sota els quals el punt veu els extrems del fil, corresponen respectivament a l'extrem inicial (θ_1) del corrent i l'extrem final (θ_2).

Al problema tenim dos trams α i β de fils, el primer comença a (0,-∞) i acaba a (0,0), en segon comença a (0,0) i acaba a (-∞,0).

a) Si per exemple estem parlant del punt **1.** del problema, el camp que li fa el segment α serà amb θ_1=-90 ° i θ_2=+45 ° . En efecte: com que l'extrem de partida s'estén fins a l'infinit l'angle amb el que el "veu" el punt 1 és de -90° des de la normal, com que l'extrem d'arribada es troba a Δx=a=Δy, resulta que el veu a +45° .Els signes - i + dels dos angles són evidents si tenim en compte que quan l'angle s'obre en sentit antihorari es considera positiu i quan ho fa en sentit horari es considera negatiu.



La distància del punt a la recta del segment α és evident que és a.

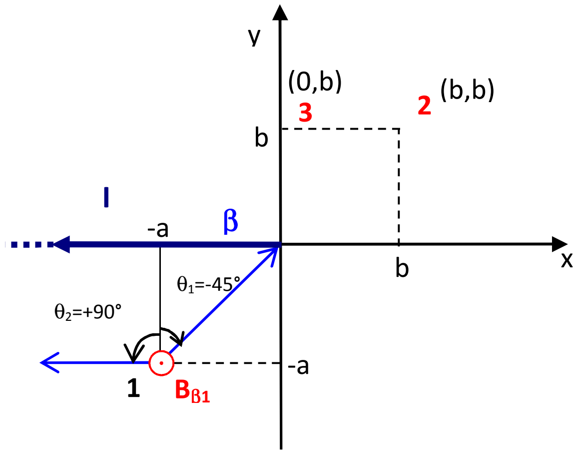
Per tant el seu mòdul serà:

$$B_{\alpha,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} \cdot (\sin 45^\circ - \sin(-90^\circ))$$

Per altra banda segons la regla del tirabuixó, el camp a **1** serà en la direcció z positiva (sortint del pla del dibuix cap a fora).

Fent el mateix, per l'altre segment β, ens trobem també una distància a i una angles θ_1=-45 ° i θ_2=+90 ° i una direcció del camp també perpendicular i sortint del pla del dibuix com l'anterior. El mòdul serà:

$$B_{\beta,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} \cdot (\sin 90^\circ - \sin(-45^\circ))$$

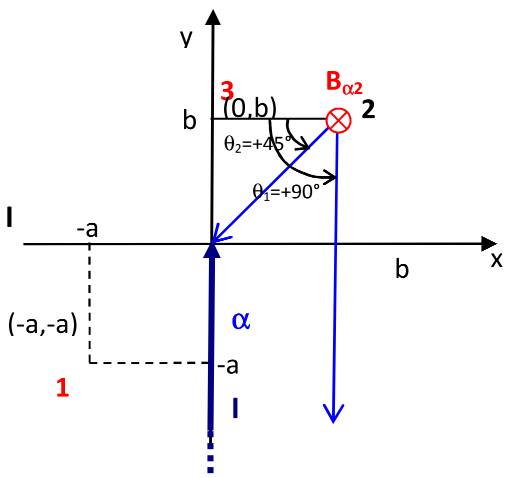


Com que els dos camps van en el mateix sentit se sumaran per a donar el camp dels dos segments alhora:

$$B_1 = B_{\alpha,1} + B_{\beta,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \cdot (\sin 45^\circ - \sin(-90^\circ)) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \cdot (\sin 90^\circ - \sin(-45^\circ)) =$$

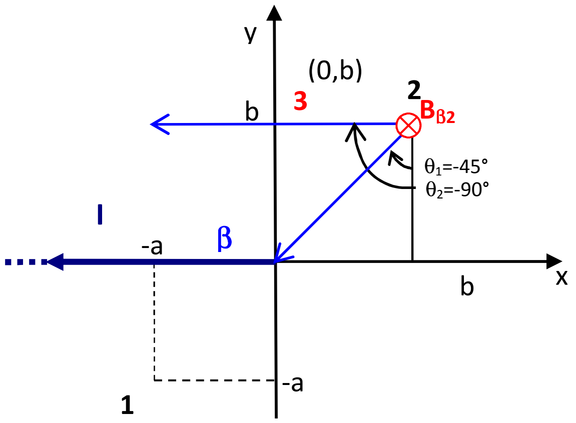
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \cdot (2\sin 45^\circ + 2\sin 90^\circ) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

b) Si ara ho volem fer pel punt **2.** del problema, la cosa es fa gairebé igual, però canviant de distància (b enlloc de a) i d'angles.



Segons la regla del tirabuixó, el sentit del camp B és ara per ambdós segments perpendicular al dibuix però cap endins (al reves del punt 1).

Els angles amb que "veu" el segment α seran ara ambdós positius θ_1=+90 ° i θ_2=+45 °, ja que s'obren en sentit antihorari des del segment normal a la recta de α. Per tant el seu mòdul serà: $B_{\alpha,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \cdot (\sin 45^\circ - \sin 90^\circ)$



Fent el mateix, per l'altre segment β, ens trobem també una distància a i una angles θ_1=-45 ° i θ_2=-90 ° ambdós negatius ja que s'obren en sentit horari des del segment normal a la recta de β. Per tant el seu mòdul serà:

$$B_{\beta,2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot(\sin(-90^\circ)-\sin(-45^\circ))$$

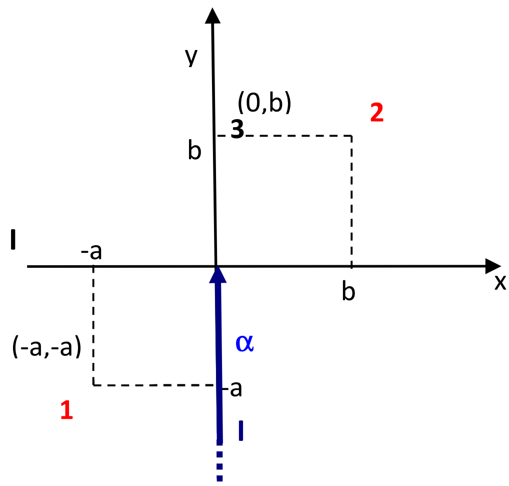
Com que els dos camps van en el mateix sentit cap endins del dibuix, se sumaran per a donar el mòdul del camp dels dos segments alhora:

$$B_2 = B_{\alpha,2} + B_{\beta,2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot(\sin 45^\circ - \sin 90^\circ) + \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot(\sin(-90^\circ)-\sin(-45^\circ)) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot(2\sin 45^\circ - 2\sin 90^\circ) = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot(\sin 45^\circ - \sin 90^\circ) = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{b}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) =$$

$$-\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{b}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \le 0$$

El valor negatiu del mòdul indica que en realitat és a l'inrevés d'abans és a dir en sentit cap endins del paper tal com ja sabíem.



c) Si ara ho volem fer pel punt **3.** i pel segment α ens trobaríem amb un problema: que la distància a la recta del punt 3 és zero (el punt 3 es troba sobre la mateixa recta del segment), per la qual cosa hauríem de dividir per zero.

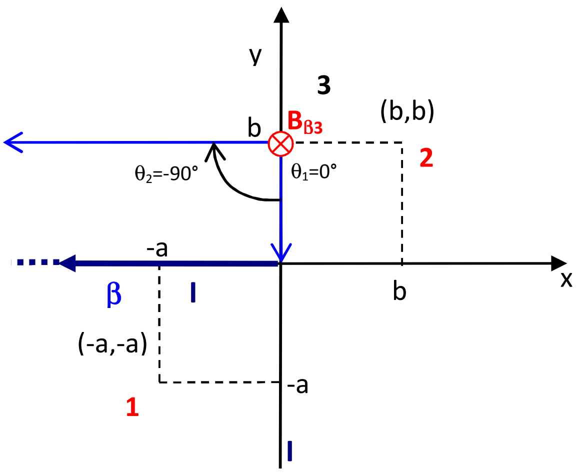
Per altra banda els dos angles són idèntics per la qual cosa sortiria un altre zero al numerador, la qual cosa produiria una indeterminació tipus 0/0.

Així doncs, aquest mètode no ens permet determinar el valor del camp per aquest segment α.

Per tant, i fent cas al que recomana l'enunciat és millor per aquest segment usar la Llei de Biot i Savart: $d\vec{B} = k_m \dfrac{I\cdot(d\vec{l}\ x\,(\vec{r}-\vec{r}_0))}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$ que ens donaria el camp fet per a cada tram diferencial d**l** del segment α.

Fixem-nos que els d**l** tenen la mateixa direcció que els vectors **r**-**r**$_0$ que anirien de l'element al punt 3, per tant el producte vectorial del numerador de la llei de Biot i Savart és entre 2 vectors alineats i paral·lels i, per tant, el resultat ha de ser zero: d**B**=0

Integrant aquest d**B** per a tots els elements del fil continua donant zero (una integral de zeros és zero). Per tant $\mathbf{B}_{\alpha,3}=0$ i es resol la indeterminació anterior a favor del zero i el podem dir que el camp del fil α és completament nul.



Així, a sobre de 3 només hi ha actua el camp del fil β, el qual va en sentit negatiu (perpendicular i cap endins del pla del dibuix), a una distància b i amb angles θ_2= -90 ° i θ_1= 0 °

Per tant:

$$B_3 = B_{\alpha,3} + B_{\beta,3} =$$

$$= 0 + \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot(\sin(-90^\circ) - \sin 0^\circ) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot\sin(-90^\circ) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot(-1)$$

indicant, com abans, el signe -, que el camp és negatiu (cap endins del pla del dibuix), cosa que ja sabem.

2) (proposat) (numèric) Considereu una distribució de corrents com la del problema anterior, es demana:

a) Quin ha de ser el quocient a/b per tal que el mòdul del camp a 1 sigui el mateix que a 2.

b) En el cas de l'apartat a) i si sabem a més que el camp a 3 te per mòdul $B_3=1\ \mu T$ i a=10 cm, quan val llavors el corrent I?

c) Quant val llavors en mòdul el camp $B_1=B_2$?

Del problema anterior tenim que:

$$|B_1| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right);\qquad |B_2| = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\qquad;\qquad |B_3| = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}$$

Si volem que $B_1=B_2$, igualem ambdues expressions i ens trobem que:

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{a}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\frac{1}{b}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}/2+1}{1-\sqrt{2}/2}\approx 5{,}83$$

b) B_3=1 μT ; a= 10 cm

Si a=10 cm a partir de la relació del resultat del problema anterior trobem:

$$b=\frac{a}{5{,}83}=\frac{10\text{ cm}}{5{,}83}=1{,}716\text{ cm}$$

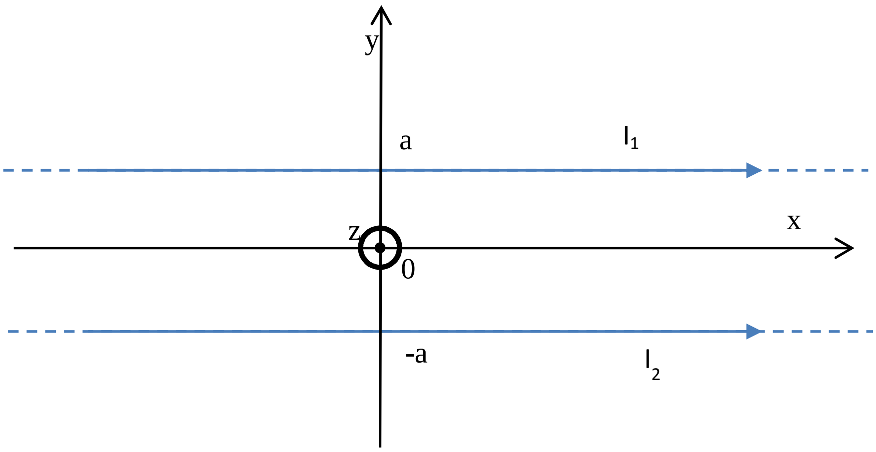
A partir d'aquest valor i sabent que: $|B_3|=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}=1\,\mu T$ Deduïm:

$$I=\frac{4\pi}{\mu_0}b{\cdot}B_3=\frac{4\pi}{4\pi\text{ x}10^{-7}\text{ N/A}^2}\cdot 1{,}716\text{ cm}\cdot 1\,\mu T=0{,}1716\text{ A}$$

c) I Llavors a partir de I i de a trobem el camp a 1 (i a 2):

$$|B_1|=|B_2|=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\frac{4\pi\text{ x}10^{-7}\text{ N/A}^2}{2\pi}\frac{0{,}1716\text{ A}}{10\text{ cm}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=0{,}586\,\mu T$$

3) (classe) Donats dos fils infinitament llargs i paral·lels a l'eix x, pels quals hi passa un corrent I_1 i I_2 i amb una posició a i –a en l'eix de les y respectivament (com a la figura). Determineu:



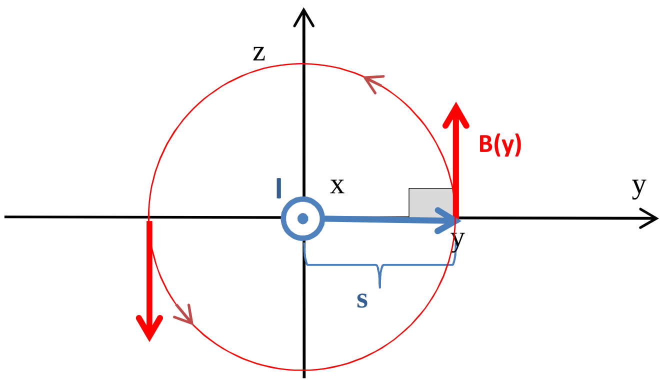
a) La direcció, sentit i una expressió del mòdul del camp magnètic generat als punts de l'eix de les y

b) Per quin valor de I_2 tindrem camp nul a l'eix de les x (y=0).

c) Pel cas de l'apartat b) determina direcció, sentit i expressió del mòdul del camp als punts (x,0,z).

Revisió teòrica prèvia: per a fer aquest problema usarem el camp creat per un fil rectilini infinitament llarg que segons se sap de teoria te les línies de camp rotatòries al voltant del fil, en el sentit de la regla de la ma dreta i el mòdul ve donat segons la fórmula: $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{s}$, on s és la distància que va del fil al punt a on volem trobar el camp i I és el corrent que hi passa.

Dibuixem per exemple el cas d'un sol fil situat sobre l'eix de les x i amb el corrent en el sentit positiu i tenim el que es mostra a la figura següent:



En aquesta figura tant l'eix x positiu com el corrent I és dibuixa perpendicular al paper cap enfora per això es veu per tant reduït a un punt.

Si ara observem quin és el camp que tindríem sobre l'eix de les y, tenint en compte les línies de camp rotatòries (cercle vermell), veiem que aquest camp és sempre paral·lel a l'eix z i de valor positiu si y>0 i de valor negatiu si y<0

La forma de l'expressió vectorial d'aquest camp que diria el mateix seria: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{y}\hat{k}$

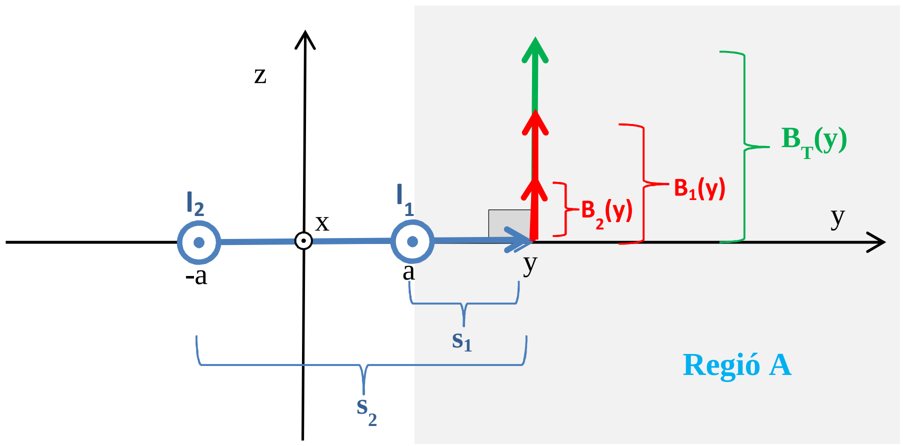
On ja es veu que per a y>0 tenim la component z del camp positiva i per y<0 la component z del camp negativa, que és tal i com hem dit que havia de ser.

a) Aquesta és l'expressió concreta que ens servirà per a trobar el camp a l'eix y dels dos fils del problema. Els dos fils estan centrats en un valor de y diferent de zero: concretament I_1 a y=+a i I_2 a y=-a. Fer això consisteix senzillament desplaçar l'origen a la fórmula anterior: allà on hi havia y hi posem y-a en el primer cas i y-(-a)=y+a en el segon, és a dir la component z del camp que surt per superposició del dos fils és:

$$\vec{B}_T(y) = \vec{B}_1(y) + \vec{B}_2(y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{y-a}\hat{k} + \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_2}{y+a}\hat{k} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left(\frac{I_1}{y-a} + \frac{I_2}{y+a}\right)\hat{k}$$

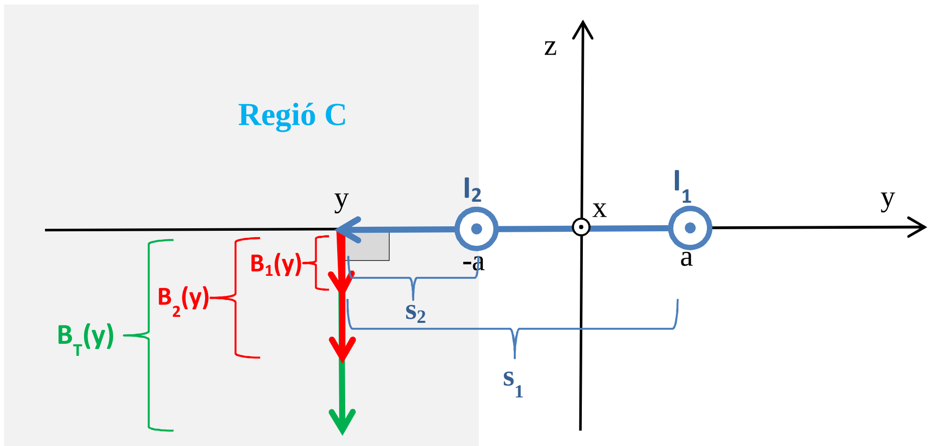
Ara farem el mateix geomètricament, és a dir tindrem en compte el signe que queda de la component z del camp $B_1(y)$ i $B_2(y)$ en funció de si estem a la dreta o a l'esquerra de cadascú dels fils, i ho dibuixarem en un diagrama. Per a fer això s'haurà de distingir tres casos depenent de la regió de l'eix y a la qual volem calcular el camp.

Aquestes són les regions: **A**, **B** i **C** tal com es mostra a continuació:



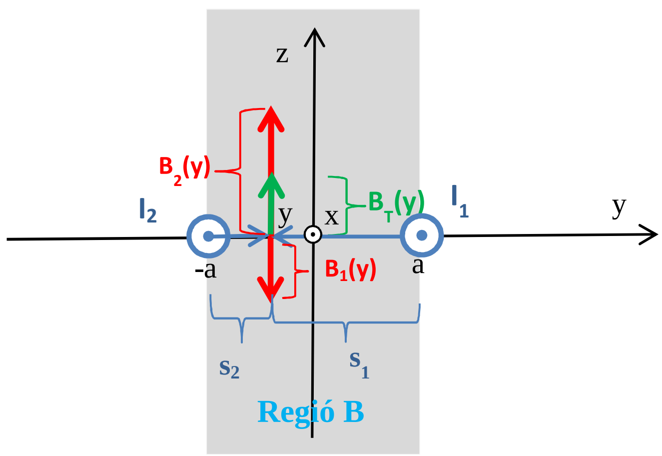
Regió A: $y>a$

Segons la regla de la ma dreta tenim ambdós camps $\mathbf{B_1}$ i $\mathbf{B_2}$ perpendiculars a la direcció i sentit de l'eix z positiu. (és a dir del vector unitari +**k**.)



Regió C: $y<-a$

Segons la regla de la ma dreta tenim ambdós camps $\mathbf{B_1}$ i $\mathbf{B_2}$ perpendiculars a la direcció i sentit de l'eix z negatiu. (és a dir del vector unitari -**k**.)



Regió B: $-a<y<a$

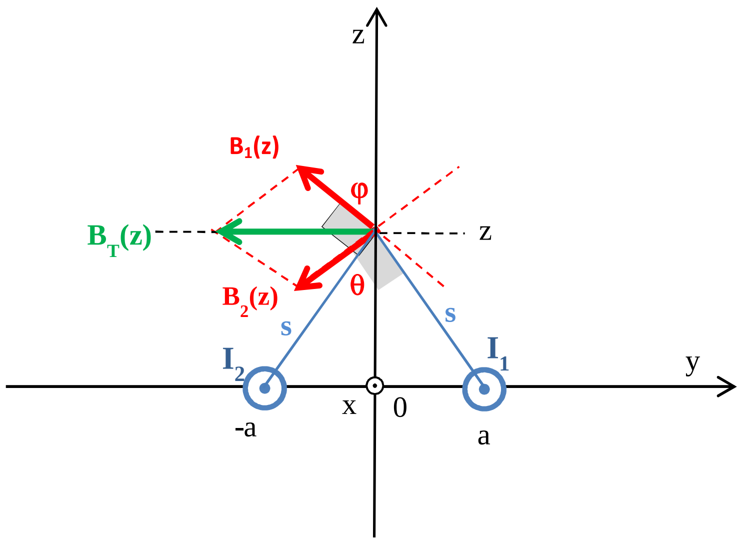
A la regió d'entremig, segons la regla de la ma dreta, tenim $\mathbf{B_1}$ en sentit de **–k** i tenim $\mathbf{B_2}$ en sentit de **k**. Així el camp resultant que multiplica a **k** es trobarà de sumar el mòdul del camp generat per I_2 i restar el mòdul del camp generat per I_1. Per tant el signe final dependrà de quin dels dos és més gran.

b) Ja es veu segons l'expressió del camp B, que per y=0 tenim

$$\vec{B}_B(y=0)=\left(\frac{I_2}{0+a}+\frac{I_1}{0-a}\right)\hat{k}=\frac{I_2-I_1}{a}\hat{k}$$

Per tant el mòdul el camp serà nul a y=0 si i només si $I_1=I_2$

c) Camp a l'eix z.
Tracem els camps que cadascú dels dos fils fa sobre un punt qualsevol de l'eix z>0, recordant que aquest és rotatori i per tant perpendicular al vector r que uneix el fil amb el punt.



Els vectors camp **B_2**(z) **i** **B_1**(z) els tenim marcats en vermell en el següent diagrama. Pel cas I_1=I_2 seran iguals en mòdul (B_1=B_2) i com que ocupen posicions simètriques de mirall a ambdós costats de l'eix a z=ct (marcat en línia discontínua negra a la figura) , la seva suma tindrà només component y negativa. La suma feta per la regla del paral·lelogram es mostra en verd a la figura. Adonem-nos que els angles θ i φ de la figura són mútuament complementaris.

La component y, i única, del camp total la podem calcular analíticament:

$$B_{yT}(z) = B_{y1}(z) + B_{y2}(z) = -B_1 \cdot \sin\varphi - B_2 \cdot \sin\varphi = -2 B_1 \cdot \cos\theta = -2\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{s} \cdot \frac{z}{s} =$$

$$= -\frac{\mu_0 \cdot I_1}{\pi} \frac{z}{s^2} = -\frac{\mu_0 \cdot I_1}{\pi} \cdot \frac{z}{z^2 + a^2}$$

On s'ha tingut en compte que $s = \sqrt{z^2 + a^2}$ per Pitàgores i que $\cos\theta = \frac{z}{s}$ per la definició del cosinus.

Per z<0 tenim la mateixa situació girant els vectors dels camps (vermells i verd) 180° al voltant de l'eix x, per tant el valor del camp B_{yT} és el mateix però canviat de signe (component y positiva)

Per simetria, i ja que els fils són infinits, aquets mateixos camps es produiran a qualsevol punt del pla x-z, es a dir sigui quina sigui la coordenada x tenim el mateix.

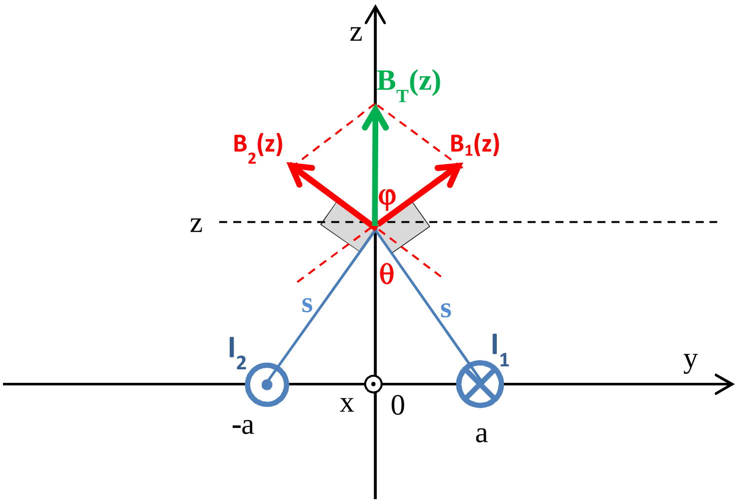
4) (proposat) (numèric) Tenim dos fils com els del problema anterior però amb la variació de que ara hi passa el mateix corrent I per ambdós fils i en sentit contrari un de l'altre. Suposem que I=50 A i que a=1 cm, es demana:

a) Calcula la direcció, sentit i mòdul del camp a l'eix de les x.

b) Calcula la direcció sentit i mòdul del camp als punts (x,0,z) amb z=1 cm.

Començarem per l'apartat b, és a dir trobarem primer el camp a l'eix z.

b) L'esquema és el mateix que l'apartat c del problema anterior, excepte que el fil I_1 el posem en sentit contrari a I_2 i per tant al revés d'abans.



Això farà que el camp B_1 estigui a la mateixa recta perpendicular al vector que va de I_1 al punt on volem trobar el camp, però en el sentit contrari al d'abans.

Mirant l'esquema veiem ara que el que s'anul·la és la component y del camp, en canvi la component z és el doble.

Per tant:

$$B_{zT}(z) = B_{z1}(z) + B_{z2}(z) = 2B_1 \cdot \cos\varphi = 2 \cdot B_1 \cdot \sin\theta = 2\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{r} \cdot \frac{a}{r} =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot I_1}{\pi} \cdot \frac{a}{z^2 + a^2} = \frac{4\pi x 10^{-7}\ N/A^2 \cdot 50\ A}{\pi} \frac{1\,cm}{1\,cm^2 + 1\,cm^2} =$$

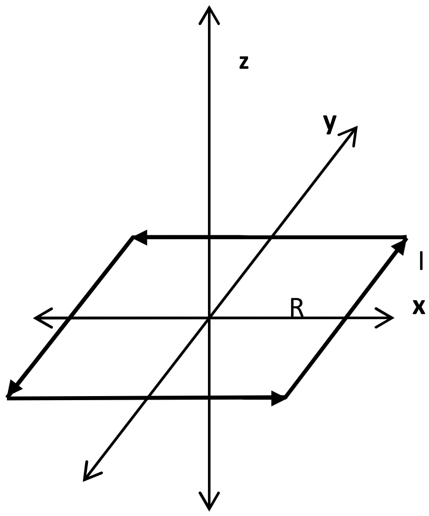
$$= \frac{4\pi x 10^{-7}\ N/A^2 \cdot 50\ A}{\pi} \frac{1}{2\ cm} = 1\,mT$$

a) L'eix x correspon a un cas particular d'aquest resultat amb z=0.

Fent z=0 a l'expressió anterior surt:

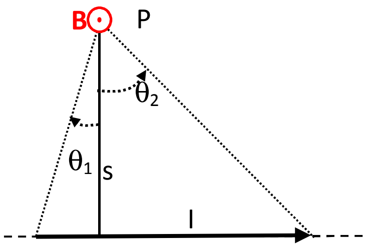
$$B_{zT}(0) = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{\pi} \cdot \frac{1}{a} = \frac{4\pi x 10^{-7}\ N/A^2 \cdot 50\ A}{\pi} \frac{1}{1\,cm} = 2\,mT$$

5) (classe) Tenim una espira quadrada de costat 2·R i per la qual hi passa un corrent I com a la figura. Es demana trobar la direcció, sentit i mòdul del camp magnètic que genera en funció de z en els punts de l'eix (z) de l'espira.



Dividim l'espira en 4 trams elementals com a la figura següent (figura 1). Els trams són: 1, 2, 3 i 4; tots trams rectilinis de llargada 2R. Considerem el punt a coordenada z sobre l'eix de l'espira, també marcat a la figura.

• Considerem de moment el camp fet pel tram 1, que protagonitza la figura de l'esquerra, a sobre del punt z.



De teoria sabem que el camp creat per un fil rectilini finit, te direcció perpendicular a la recta del fil, amb línies de camp rotatòries al voltant d'aquesta i segons la regla de la ma dreta. El seu valor en mòdul és (veure figura de l'esquerra):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{s}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1):$$

Apliquem aquest resultat al tram 1 de la figura 1. La distància del punt z a la recta del fil és r. Els angles màxim (θ_2) i mínim (θ_1) sota els quals es veuen els extrems del fil des del punt z són (fixar-se en el triangle groc **a**): $\theta_2=\theta$ i $\theta_1=-\theta$. Per tant el mòdul del camp és:

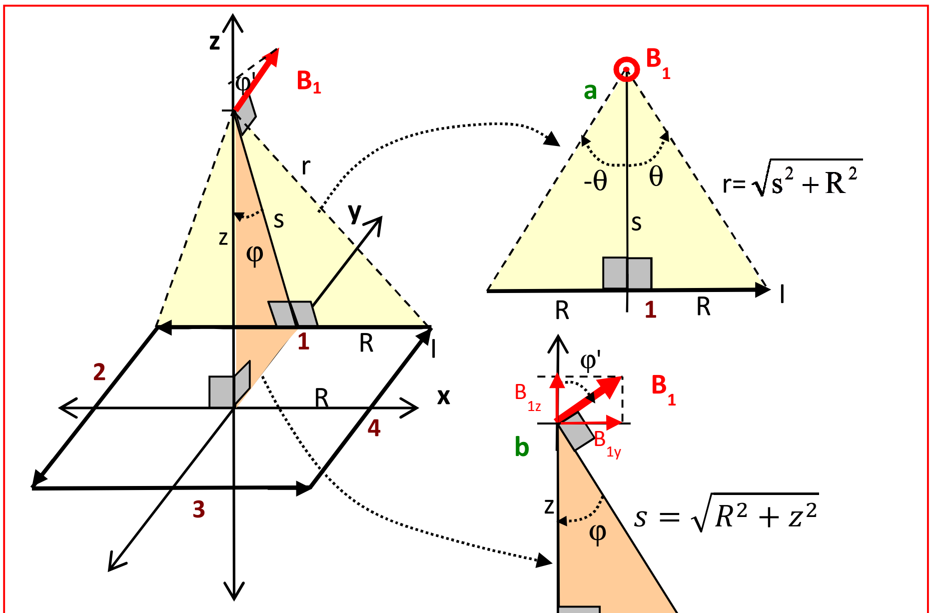


Figura 1

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{s}(\sin\theta - \sin(-\theta)) = 2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{s}\sin\theta = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s}\sin\theta$$

Les projeccions d'aquest vector B_1 sobre els 3 eixos són (veure el triangle taronja o **b**):

$B_{1x}=0$, $B_{1y}=B_1\cdot\sin\varphi' = B_1\cdot\cos\varphi$, $B_{1z}=B_1\cdot\cos\varphi' = B_1\cdot\sin\varphi$

(on φ' és la notació que fem servir per a anomenar l'angle complementari de φ)

per tant el vector $\mathbf{B}_1$ sencer en components és $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s}\sin\theta\cdot(0, \cos\varphi, \sin\varphi)$

Tenint en compte el que val $\sin\theta$, mirant el triangle groc : $\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{s^2+R^2}}$

I el que valen $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$, mirant el triangle taronja : $\sin\varphi = \frac{R}{s}$ i $\cos\varphi = \frac{z}{s}$

resulta. $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s}\frac{R}{\sqrt{s^2+R^2}}\cdot(0, \frac{z}{s}, \frac{R}{s}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s^2}\frac{R}{\sqrt{s^2+R^2}}\cdot(0, z, R)$

substituint-hi el que val la s=hipotenusa del triangle taronja: $s = \sqrt{z^2+R^2}$ tenim finalment de forma explícita:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{z^2+R^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{z^2+2R^2}}\cdot(0, z, R)$$

Ara hauríem de repetir el mateix càlcul que hem fet del camp creat pel segment 1, per la resta de segments del quadrat (2, 3 i 4). Però per sort no caldrà, ja que per als 4 segments el camp dóna gairebé el mateix: les diferències són simples rotacions successives de 90° al voltant de l'eix z. Així doncs, les components en el pla x-y s'anul·len entre elles ja que són oposades dos a dos (la del segment 1 amb la del 3, i la del segment 2 amb la del 4); en canvi, les components en el propi eix z són totes 4 idèntiques i se sumen.

Per tant, en el camp total a l'eix de l'espira quadrada només hi ha component z i aquesta surt simplement de multiplicar per 4 el d'un segment sol.

$$\vec{B}_T = 4\cdot\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{z^2+R^2}\cdot\frac{R^2}{\sqrt{z^2+2R^2}}\cdot\hat{k}$$

6) (proposat) Considera una espira circular de radi R situada perpendicularment a l'eix z i centrada a z=0. Per l'espira hi circula un corrent I que hi gira en sentir antihorari vist des de l'eix de les z positives.

a) Calcula una expressió de $B(z)/B_0$, essent B(z) el camp a l'eix a qualsevol coordenada z i B_0 el camp al centre de l'espira.

b) Calcula numèricament aquest quocient pel cas z=R i pel cas z=-R.

Agafa ara dues espires idèntiques a les de l'enunciat i les situes una (la 1) centrada a z=-R/2 i l'altre (la 2) centrada a z=R/2.

c) Calcula de nou una expressió del quocient $(B_1(z)+B_2(z))/B_0$, essent B_0 igual que abans, és a dir el camp al centre d'una espira sola.

d) Calcula numèricament aquest quocient per a z=0, z=R/4, z=R/2 i z=R. Fes el mateix pels valors de z oposats als anteriors.

e) Intenta a partir d'aquests punts traçar una gràfica del quocient de l'apartat c). A quines conclusions arribes?

a) El camp creat per una espira circular perpendicular a l'eix z, centrada a z=0, en els punts del seu eix és a partir de teoria:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} \hat{k}$$

El valor màxim d'aquest camp és al centre z=0 i te per valor:

$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(0^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Per tant, el quocient que ens demanen a aquest apartat és:

$$\frac{B(z)}{B_0} = \frac{\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}}{\frac{\mu_0 I}{2R}} = \frac{R^3}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

b) $$\frac{B(z=R)}{B_0} = \frac{R^3}{\left(R^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0{,}3536$$

$$\frac{B(z=-R)}{B_0} = \frac{R^3}{\left((-R)^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0{,}3536$$

c) El mòduls dels camps d'ambdues espires són ara el mateix que abans però desplaçant l'origen a –R/2 i +R/2 respectivament.

$$B_1(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left((z - R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} \quad ; \quad B_2(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left((z + R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Sumant ambdues quantitats i dividint per $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$

$$\frac{B_1(z) + B_2(z)}{B_0} = \frac{R^3}{\left((z - R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} + \frac{R^3}{\left((z + R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

d) Calculem això per z=0, z=R/4, z=R/2 i z=R i els seus valors oposats.

- z=0

$$\frac{B_1(0) + B_2(0)}{B_0} = \frac{R^3}{\left((0 - R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} + \frac{R^3}{\left((0 + R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} =$$
$$= \frac{1}{\left((1/2)^2 + 1\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left((1/2)^2 + 1\right)^{3/2}} = 1{,}431$$

- z=R/4

$$\frac{B_1(R/4) + B_2(R/4)}{B_0} = \frac{R^3}{\left((R/4 - R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} + \frac{R^3}{\left((R/4 + R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} =$$
$$= \frac{1}{\left((1/4 - 1/2)^2 + 1\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left((1/4 + 1/2)^2 + 1\right)^{3/2}} = 1{,}425$$

- z=-R/4

$$\frac{B_1(-R/4) + B_2(-R/4)}{B_0} = \frac{R^3}{\left((-R/4 - R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} + \frac{R^3}{\left((-R/4 + R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} =$$
$$= \frac{1}{\left((-1/4 - 1/2)^2 + 1\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left((-1/4 + 1/2)^2 + 1\right)^{3/2}} = 1{,}425$$

- z=R/2

$$\frac{B_1(R/2) + B_2(R/2)}{B_0} = \frac{R^3}{\left((R/2 - R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} + \frac{R^3}{\left((R/2 + R/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} =$$
$$= \frac{1}{\left((1/2 - 1/2)^2 + 1\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left((1/2 + 1/2)^2 + 1\right)^{3/2}} = 1{,}354$$

• z=-R/2

$$\frac{B_1(-R/2)+B_2(-R/2)}{B_0}=\frac{R^3}{\left((-R/2-R/2)^2+R^2\right)^{3/2}}+\frac{R^3}{\left((-R/2+R/2)^2+R^2\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{1}{\left((-1/2-1/2)^2+1\right)^{3/2}}+\frac{1}{\left((-1/2+1/2)^2+1\right)^{3/2}}=1{,}354$$

• z=R

$$\frac{B_1(R)+B_2(R)}{B_0}=\frac{R^3}{\left((R-R/2)^2+R^2\right)^{3/2}}+\frac{R^3}{\left((R+R/2)^2+R^2\right)^{3/2}}=$$

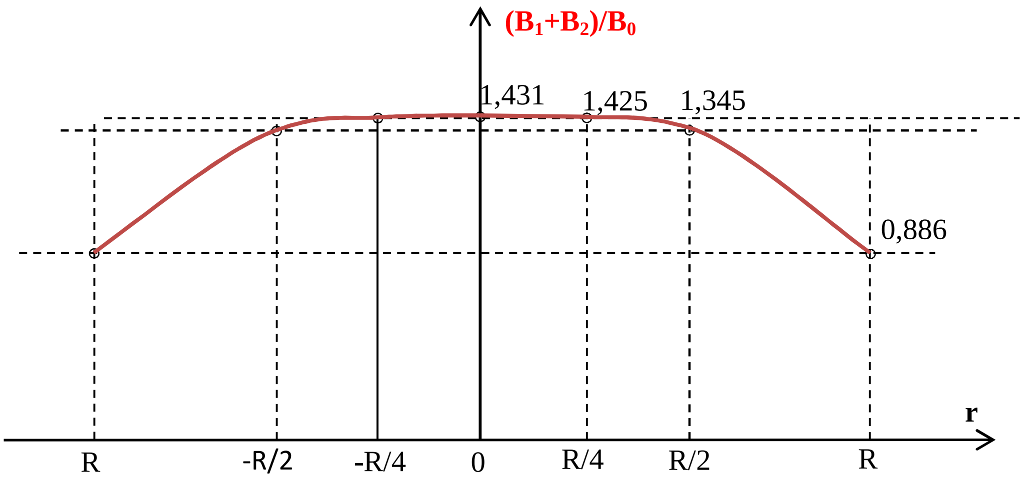
$$=\frac{1}{\left((1-1/2)^2+1\right)^{3/2}}+\frac{1}{\left((1+1/2)^2+1\right)^{3/2}}=0{,}886$$

• z=-R

$$\frac{B_1(-R)+B_2(-R)}{B_0}=\frac{R^3}{\left((-R-R/2)^2+R^2\right)^{3/2}}+\frac{R^3}{\left((-R+R/2)^2+R^2\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{1}{\left((-1-1/2)^2+1\right)^{3/2}}+\frac{1}{\left((-1+1/2)^2+1\right)^{3/2}}=0{,}886$$

e) La gràfica queda de la següent manera, fixem-nos que hi ha una zona molt àmplia des de gairebé –R/2 a +R/2 on el camp de les dues bobines alhora és pràcticament constant. És una manera pràctica de crear un camp magnètic gairebé uniforme. Vegeu la pràctica de les bobines de Helmholtz.



7) (proposat) Fes el mateix que al problema 6 però amb espires quadrades enlloc de circulars. A quines conclusions arribes?

a) El camp creat per una espira quadrada perpendicular a l'eix z, centrada a z=0, en els punts del seu eix el tenim a partir del resultat del problema 5:

$$\vec{B}(z) = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \cdot \frac{1}{z^2 + R^2} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{z^2 + 2R^2}} \cdot \hat{k}$$

El valor màxim d'aquest camp és al centre z=0 i te per valor:

$$B(0) = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \cdot \frac{1}{0^2 + R^2} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{0^2 + 2R^2}} = \frac{2\mu_0 I}{\pi R} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Per tant, el quocient que ens demanen a aquest apartat és:

$$\frac{B(z)}{B_0} = \frac{\frac{2\mu_0 I}{\pi} \cdot \frac{1}{z^2 + R^2} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{z^2 + 2R^2}}}{\frac{2\mu_0 I}{\pi R} \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot R^3}{\left(z^2 + R^2\right)\sqrt{z^2 + 2R^2}}$$

b)

$$\frac{B(z=R)}{B_0} = \frac{\sqrt{2} \cdot R^3}{\left(R^2 + R^2\right)\sqrt{R^2 + 2R^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0{,}408$$

$$\frac{B(z=-R)}{B_0} = \frac{\sqrt{2} \cdot R^3}{\left((-R)^2 + R^2\right)\sqrt{(-R)^2 + 2R^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0{,}408$$

c) El mòduls dels camps d'ambdues espires són ara el mateix que abans però desplaçant l'origen a –R/2 i +R/2 respectivament.

$$B_1(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\sqrt{2} \cdot R^3}{\left((z - R/2)^2 + R^2\right)\sqrt{(z - R/2)^2 + 2R^2}} \quad ;$$

$$B_2(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\sqrt{2} \cdot R^3}{\left((z + R/2)^2 + R^2\right)\sqrt{(z + R/2)^2 + 2R^2}}$$

Sumant ambdues quantitats i dividint per $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$

$$\frac{B_1(z) + B_2(z)}{B_0} = \frac{\sqrt{2} \cdot R^3}{\left((z - R/2)^2 + R^2\right)\sqrt{(z - R/2)^2 + 2R^2}} + \frac{\sqrt{2} \cdot R^3}{\left((z + R/2)^2 + R^2\right)\sqrt{(z + R/2)^2 + 2R^2}}$$

d) Calculem això per z=0, z=R/4, z=R/2 i z=R i els seus valors oposats.

- z=0

$$\frac{B_1(0)+B_2(0)}{B_0}=\frac{\sqrt{2}\cdot R^3}{\left((0-R/2)^2+R^2\right)\sqrt{(0-R/2)^2+2R^2}}+\frac{\sqrt{2}\cdot R^3}{\left((0+R/2)^2+R^2\right)\sqrt{(0+R/2)^2+2R^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\left((1/2)^2+1^2\right)\sqrt{(1/2)^2+2}}+\frac{\sqrt{2}}{\left((1/2)^2+1^2\right)\sqrt{(1/2)^2+2}}=1{,}508$$

- z=R/4

$$\frac{B_1(R/4)+B_2(R/4)}{B_0}=\frac{\sqrt{2}\cdot R^3}{\left((R/4-R/2)^2+R^2\right)\sqrt{(R/4-R/2)^2+2R^2}}+\frac{\sqrt{2}\cdot R^3}{\left((R/4+R/2)^2+R^2\right)\sqrt{(R/4+R/2)^2+2R^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\left((1/4-1/2)^2+1^2\right)\sqrt{(1/4-1/2)^2+2}}+\frac{\sqrt{2}}{\left((1/4+1/2)^2+1^2\right)\sqrt{(1/4+1/2)^2+2}}=1{,}492$$

- z=-R/4: El mateix resultat que per z=R/4

- z=R/2:

$$\frac{B_1(R/2)+B_2(R/2)}{B_0}=\frac{\sqrt{2}\cdot R^3}{\left((R/2-R/2)^2+R^2\right)\sqrt{(R/2-R/2)^2+2R^2}}+\frac{\sqrt{2}\cdot R^3}{\left((R/2+R/2)^2+R^2\right)\sqrt{(R/2+R/2)^2+2R^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\left(1^2\right)\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\left((1)^2+1^2\right)\sqrt{(1)^2+2}}=1{,}408$$

- z=-R/2: El mateix resultat que per z=R/2

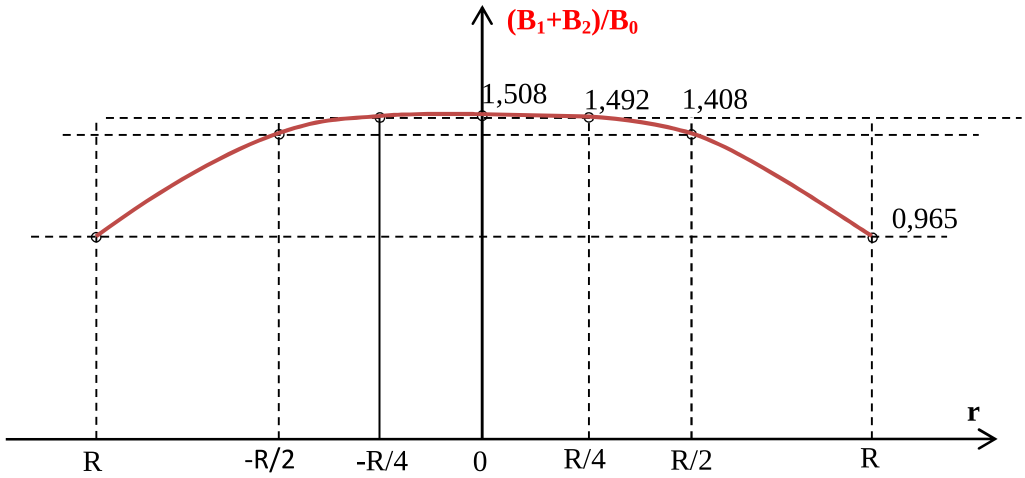
- z=R:

$$\frac{B_1(R)+B_2(R)}{B_0}=\frac{\sqrt{2}\cdot R^3}{\left((R-R/2)^2+R^2\right)\sqrt{(R-R/2)^2+2R^2}}+\frac{\sqrt{2}\cdot R^3}{\left((R+R/2)^2+R^2\right)\sqrt{(R+R/2)^2+2R^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\left((1-1/2)^2+1^2\right)\sqrt{(1-1/2)^2+2}}+\frac{\sqrt{2}}{\left((1+1/2)^2+1^2\right)\sqrt{(1+1/2)^2+2}}=0{,}965$$

- z=-R: El mateix resultat que per z=R

e) La gràfica queda de la següent manera, fixem-nos que hi ha una zona molt àmplia des de gairebé –R/2 a +R/2 on el camp de les dues bobines alhora és pràcticament constant. És una manera pràctica de crear un camp magnètic gairebé uniforme, però potser una mica menys pla que pel cas de l’espira circular (problema anterior).



8) (proposat) Sigui una fil indefinit i rectilini pel qual hi circula un corrent I. Paral·lelament a ell hi situem un tram de fil rectilini finit de longitud L pel qual hi circula el mateix corrent i en el mateix sentit que el fil indefinit. La distància entre ambdós fils coincideix amb L, la llargada del fil finit.

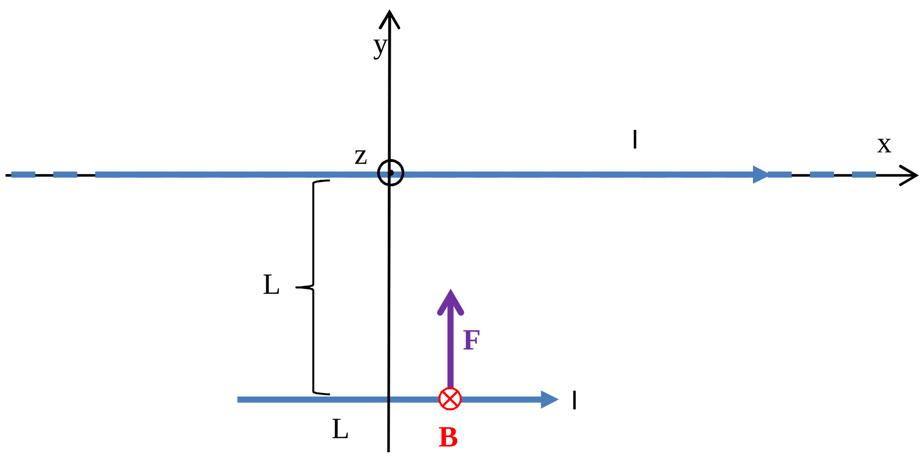
a) Calcula una expressió del mòdul de la força que el fil indefinit li fa al fil finit, en funció només de I, de L i de μ_0. En quina direcció i sentit va aquesta força.

b) Si el sentit del corrent del fil finit és ara contrari a la del fil indefinit, calcula de nou la direcció, sentit i mòdul de la força.

c) Quin corrent, I, hi ha de passar per aquests fils si volem que el mòdul de la força sigui de F=200 nN?. Discuteix una utilitat del sistema descrit.

d) Per aquest mateix corrent, quina seria la magnitud de la força, si tenim que la llargada del fil finit és 1000 vegades superior a la distància entre fils?

a) Mirem a la figura següent. En ella veiem el fil infinit situat sobre l'eix de les x. A sota el fil finit de llargada L situat paral·lelament, a una distància L també. El segon te el corrent en el mateix sentit.



B és el camp que el fil infinit fa sobre els punts on hi ha el fil finit. Recordem que el camp és rotatori al voltant del fil en el sentit de la regla de la ma dreta, i per tant, en aquests punts li tocarà anar en la direcció z negativa. El vector d'aquest camp és:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{L} \hat{k}$$

Aquest camp és el mateix al llarg del fil finit, ja que tots els punts es troben a la mateixa distància del fil infinit. Per tant el camp és uniforme al llarg d'aquest fil finit.

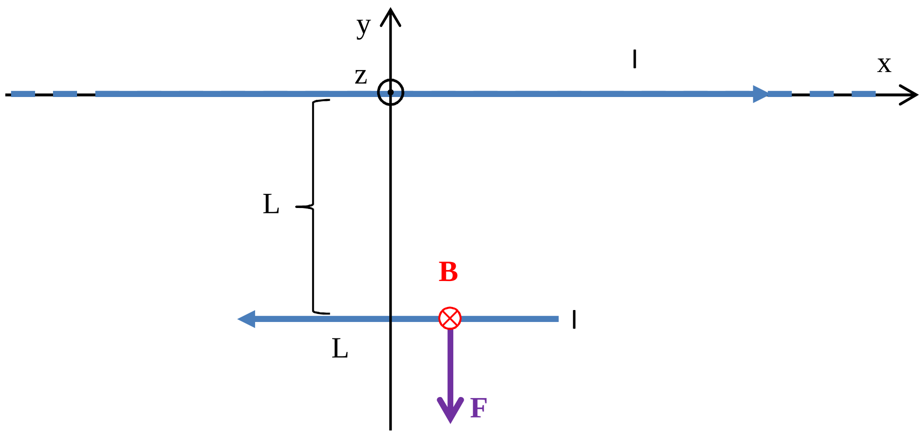
Tenint el compte la força que un camp uniforme fa sobre un fil rectilini

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} x \vec{B}$$

Veiem que la força **F** (marcada a la figura) és perpendicular al fil i al camp en el sentit de la regla de la ma dreta, i per tant va en el sentit positiu de l'eix de les y. Amb la qual cosa aquesta força atreu el fil finit cap al fil infinit. Com que **L** i **B** formen 90° el mòdul de la força és I pel producte del mòdul de **L** pel mòdul de **B**

$$F = I \cdot (Li) \cdot \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{L} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2$$

b) Mirem a la figura següent, és la mateixa que abans però amb el fil finit a l'inrevés.



El camp **B** que el fil infinit fa sobre els punts on hi ha el fil finit és el mateix que abans, però al canviar el sentit de la **L**, la força canvia de sentit ja que:

$$\vec{F} = I \cdot (-\vec{L}) x \vec{B}$$

Per tant la força **F** és en sentit repulsiu (sentit negatiu de l'eix de les y).

Com que **L** i **B** continuen formant 90° el mòdul de la força és I pel producte del mòdul de **L** pel mòdul de **B** i el resultat és el mateix que abans

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2$$

c) Si volem que aquest força sigui F=200 nN ho apliquem sobre la fórmula del mòdul de la força:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 = 200\text{x}10^{-9}\ \text{N}$$

i d'aquí aïllem el valor de la I necessària per a aconseguir-ho:

$$I = \sqrt{\frac{2\pi \cdot F}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 200\text{x}10^{-9}\ \text{N}}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N}/\text{A}^2}} = 1\ \text{A}$$

O sigui justament la unitat de corrent del S.I.: 1 A. Precisament aquest procediment s'utilitza per a definir la unitat de corrent (l'amper).

"1 amper és el corrent que passa pels dos fils de corrent paral·lels, un de finit i l'altre infinit, tal que situats entre si a una distància igual que la llargada del segon la força mútua és de 200 nN"

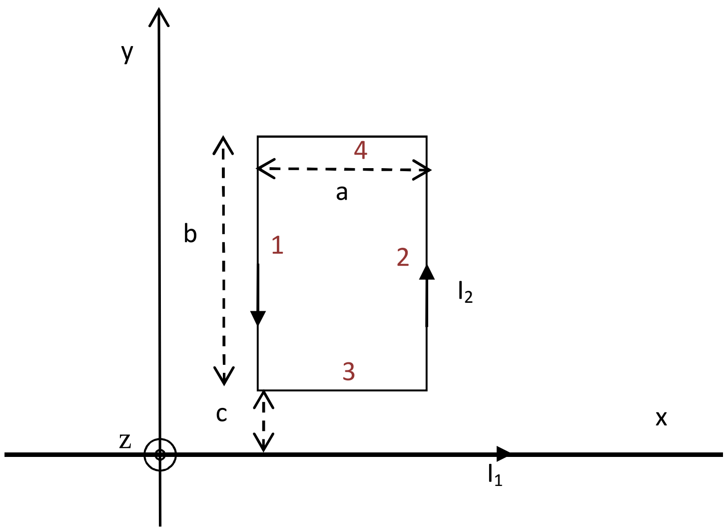
d) Si fem la llargada del fil L i fem d la distància entre els fils, llavors el mòdul del camp seria:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{d}$$

Mentre que la força seria

$$F = I \cdot L \cdot B = I \cdot L \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{d} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \cdot \frac{L}{d}$$

Com que ara el factor L/d=1000, tenim pel mateix corrent de 1 A, 1000 vegades més força que abans, és a dir F=1000·(200 nN)= 0,2 mN, que és almenys una força més gran i per tant més fàcil de mesurar i d'ajustar amb precisió. Llavors l'experiment de mesura de l'amper usant aquestes condicions de L/d=1000 (per exemple L=1 m i d=1 mm) fa de millor fer.



9) (classe) Suposem que tenim un fil rectilini infinit situat paral·lelament a l'eix x i per qual hi passa un corrent I_1 en el sentit de les x positives, tal i com es veu a la figura.

a) Descriu la forma de les línies del camp magnètic generat pel fil I_1. Concreta la direcció, sentit i mòdul d'aquest camp al pla (x-y).

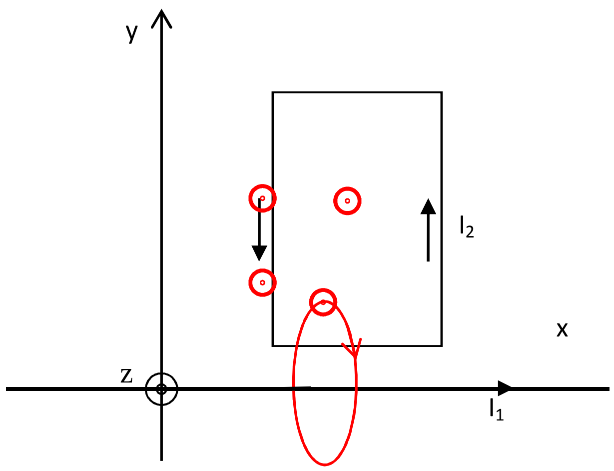
En el pla vertical (x-y) al fil anterior hi posem una espira rectangular de corrent I_2 de dimensions a x b i situada a una distància c per sobre del fil.

b) Calcula direcció i sentit de la força que el camp magnètic del fil I_1 fa sobre cadascú dels 4 segments de l'espira.

c) Determina una expressió pel mòdul de cadascuna d'aquestes 4 forces.

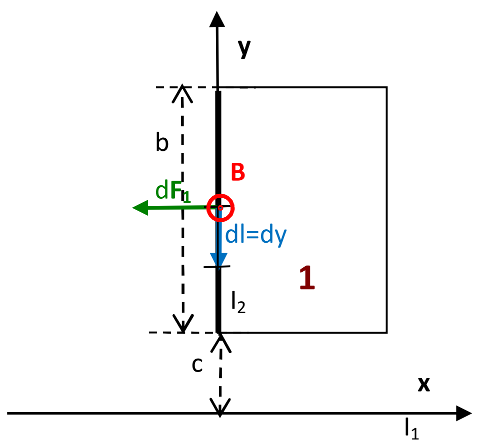
d) Calcula direcció i sentit de la força total sobre l'espira, i determina una expressió pel mòdul d'aquesta força total.

a) Mostrem una línia de camp rotatòria al voltant del fil I_1 i uns quants vectors camp mostrant que al pla de l'espira són perpendiculars a ella cap enfora.



Mòdul del camp magnètic en funció de l'alçada y:

$$B(y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{y}$$



b i c) Dividim el circuit sencer en quatre trams : 1, 2, 3 i 4 tal i com es veu a la figura de l'enunciat de més amunt.

Tram 1:

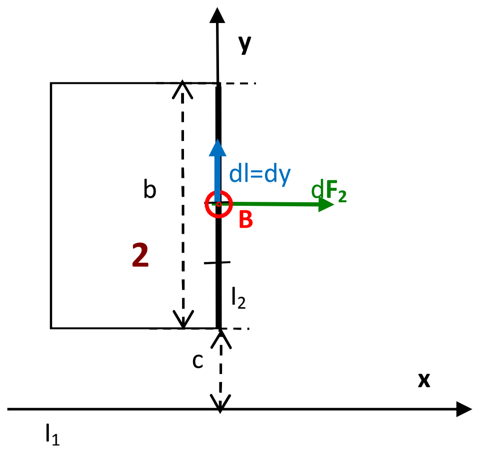
En els punts del tram vertical **1** de fil de l'esquerra el camp és perpendicular al paper del dibuix i surt cap enfora , de manera que com que els **dl** van de dalt a baix, llavors el diferencial de força que li fa el camp **B** sobre aquest element **dl** és:

$d\vec{F}_1 = I_2 \cdot d\vec{l} x \vec{B}$ i te el sentit horitzontal cap a l'esquerra com es veu a la figura. El mòdul del diferencial de la força és: $dF_1 = I_2 \cdot dy \cdot B$

En tots els elements dl=dy al llarg del fil el sentit és el mateix, per tant només cal sumar les forces i obtindrem la força total sobre l'element vertical sencer que va de y=c, fins a y=c+b. Com que el camp varia amb la y, la força també i per tant la suma cal fer-la al continu és a dir, una integral.

$$F_1 = \int_{fil\,1} dF_1 = \int_{fil\,1} I_2 \left| d\vec{l} x \vec{B} \right| = I_2 \cdot \int_c^{c+b} dy B(y) = I_2 \cdot \int_c^{c+b} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{y} dy = I_2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 \int_c^{c+b} \frac{1}{y} dy =$$

$$= I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} [\ln y]_c^{c+b} = I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} (\ln(c+b) - \ln(c)) = I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c} > 0$$



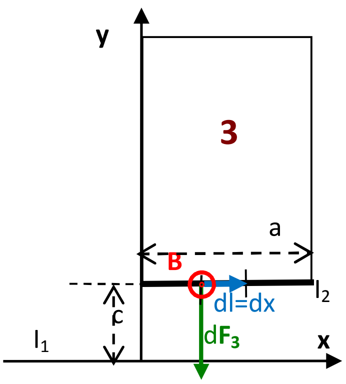
Cal calcular la força sobre els altres 3 trams.

Tram 2:

Concretament el 2 és com l'1 excepte que el corrent va cap dalt, i per tant els **dl** també, amb la qual cosa la força va cap a la dreta. El càlcul de la força total en mòdul serà el mateix, però estarà canviada de sentit: $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$

Per tant de moment les dues forces de 1 i de 2 sumen zero.

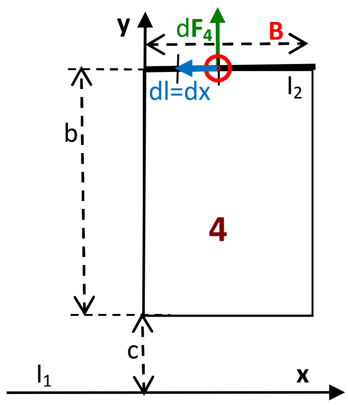
Anem a veure les forces dels trams 3 i 4 horitzontals.



Tram 3 i 4:

Tal com es veu als diagrames següents les forces són verticals però en el tram 3 inferior el sentit va cap a dalt, i en al superior 4 cap a baix.

Cal calcular els mòduls de les forces. Fem primer el del tram 3.



El càlcul del mòdul de la força es fa també per una integral, però és molt simple ja que el camp B ara és constant al llarg de tot el fil i surt tot ell fora de la integral, de manera que només queda la integral dels dx al llarg del fil 3 que dóna:

$$F_3 = \int_{fil\,3} dF_3 = \int_{fil\,3} I_2 \left| d\vec{l} x \vec{B} \right| = I_2 \cdot \int_{fil\,3} dx \cdot B(c) = I_2 \cdot \int_0^a \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{c} dx = I_2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{c}\int_0^a dx = I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{a}{c} > 0$$

En el cas del fil 4 el càlcul és similar amb la diferència de que s'ha de dividir per c+b enlloc de per c ja que la distància del fil és ara y=c+b i el camp B(y) és més dèbil.

$$F_4 = I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{a}{c+b} > 0$$

d) Sumant totes 4 forces tenim la força neta total sobre l'espira

$$\vec{F}_m = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -F_1\hat{i} + \vec{F}_1\hat{i} - F_3\hat{j} + F_4\hat{j} = (F_3 - F_4)(-\hat{j}) = \left(I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{a}{c} - I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{a}{c+b} \right)(-\hat{j}) =$$

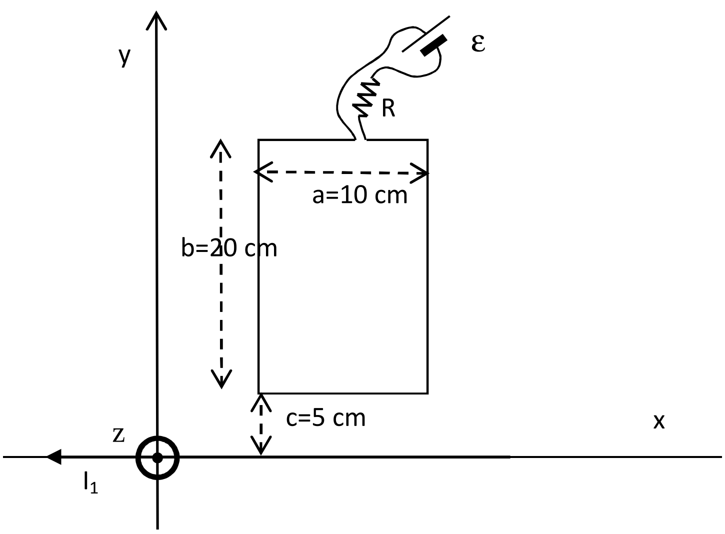
$$= I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} a \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+b} \right)(-\hat{j}) = -I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{a \cdot b}{c(c+b)}\hat{j}$$

Força que actua netament cap a baix.

10) (proposat) (numèric) Considerem una espira rectangular de dimensions a i b situada en el pla vertical x-y, i a una distància c de l'eix de les x, tal i com es veu a la figura. A aquesta espira li intercalem un petit bucle amb una font de tensió de fem ε ideal i un resistor R en sèrie tal i com també es veu a la figura.

A l'eix horitzontal x hi situem un fil de corrent rectilini i infinit i amb el corrent en sentit negatiu de les x, també com es mostra a la figura.

Negligim la resistència dels fils de l'espira i dels del bucle de la font. Suposem que la massa de tot el conjunt espira-font-resistor-bucle és m_1=10 g.



a) Calcula la direcció, sentit i valor del corrent de l'espira si la font te una fem de ε=10 V i el resistor és de R=1 Ω.

b) Calcula la direcció, sentit i magnitud de la força total que el camp magnètic generat per I_1 li fa a l'espira.

Deixa la magnitud únicament en funció de I_1.

c) Per quin valor de corrent I_1 l'espira es posa a levitar sobre el fil a la distància c? AJUDA, afegeix el pes al sistema i fes equilibri de forces amb la força magnètica de l'apartat b).

a) Si ε=10 V i R=1 Ω llavors per la llei d'Ohm surt el corrent:

$I_2 = V/R = 10\ V / 1\ \Omega = 10\ A$

El corrent és en sentit antihorari vist des del pla del dibuix igual que al problema anterior.

b) Aquest problema és similar al d'abans excepte que el corrent del fil I_1 va cap a l'esquerra enlloc de cap a la dreta. Amb això el camp rotatori al voltant d'aquest fil serà a l'inrevés i per tant els camps són perpendiculars al pla de l'espira però entrant, enlloc de sortint.

Per això les forces estaran invertides respecte abans. Ara les 4 van cap endins de l'espira enlloc de cap enfora.

Les dues forces dels segments 1 i 2 seran horitzontals iguals i oposades com abans i per tant es cancel·len.

Les dues forces dels segments 3 i 4 seran vertical i oposades cam abans però la del segment 3 és més intensa ja que el camp és més intens pel fet d'estar més a prop del fil I_1. Com que guanya la del segment 3 que va cap a dalt contra la del segment 4 que va cap avall, la força neta que serà la diferència F_3-F_4 sortirà cap amunt.

$$\vec{F}_m = I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} a \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+b} \right) \hat{j} = I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{a \cdot b}{c(c+b)} \hat{j}$$

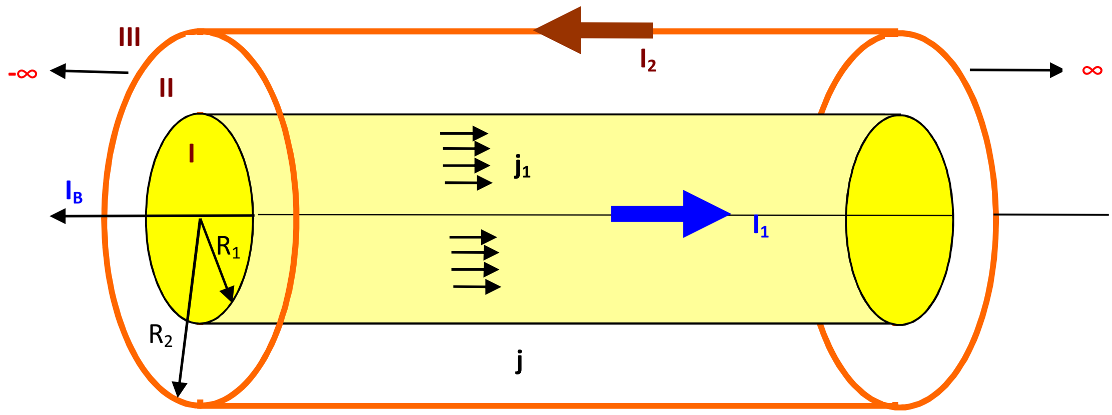
c) Si la força magnètica actua impulsant l'espira sencera cap amunt i el seu pes l'impulsa cap avall, l'espira es posa a levitar si el pes iguala la força magnètica en magnitud. És a dir:

$$m \cdot g = I_2 \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{a \cdot b}{c(c+b)}$$

La qual cosa permet aïllar i calcular el corrent I_1 que ho faria possible:

$$I_1 = \frac{m \cdot g}{I_2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{a \cdot b}{c(c+b)}} = \frac{10\ g \cdot 9{,}81\ m/s^2}{10\ A \cdot \frac{4\pi x10^{-7}\ N/A^2}{2\pi} \underbrace{\frac{10\ cm \cdot 20\ cm}{5\ cm(5\ cm + 20\ cm)}}_{1{,}6}} = \frac{10x10^{-3}\ kg \cdot 9{,}81\ m/s^2}{10\ A \cdot 2x10^{-7}\ N/A^2 \cdot 1{,}6} = 30656\ A$$

11) (classe) Tenim un tub cilíndric infinitament llarg de radi R_1 (com el de la figura) pel qual hi circula un corrent I_1 d'esquerra a dreta amb densitat de corrent uniforme $\mathbf{j_1}$ en tota la seva secció.



A l'exterior d'aquest cilindre coaxialment i a un radi R_2 hi col·loquem una capa cilíndrica de gruix negligible de corrent I_2 de dreta a esquerra (al revés que la del cilindre interior). Es demana:

a) Determina una expressió per a la densitat de corrent $\mathbf{j}_A$ del cilindre interior, en funció de I_1 i del radi R_1.

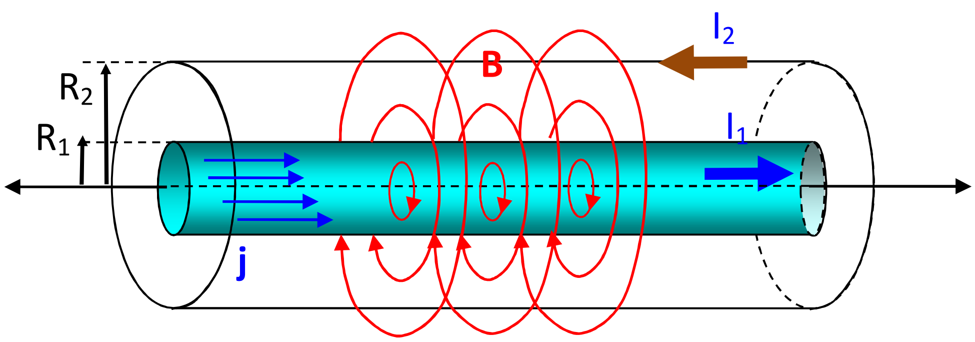
b) Dibuixa la forma i sentit de les línies de camp a les tres regions I, II i III suposant $I_1>0$, $I_2>0$ i $I_1>I_2$.

c) Aplicant el teorema d'Ampere calcula una expressió del mòdul del camp magnètic B en funció de r a les 3 regions: I. $0< r <R_1$; II. $R_1< r <R_2$; III. $R_2 < r < \infty$

d) Fes una gràfica del camp magnètic B en funció de r discutint la possible continuïtat a $r=R_1$ i $r=R_2$, suposant $I_1>0$, $I_2>0$ i $I_1>I_2$.

a) La j surt de dividir tot el corrent de la barra per la secció d'aquesta: $j_A = \dfrac{I_1}{S_{barra}} = \dfrac{I_1}{\pi R_1^{\,2}}$

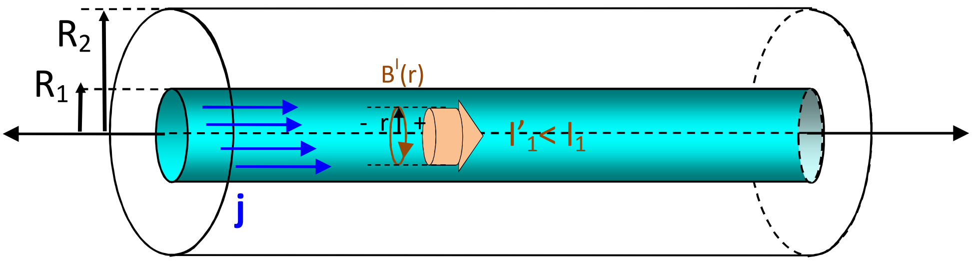
b) Totes les línies són rotatòries al voltant de l'eix per la simetria cilíndrica del sistema. Com que segons l'enunciat I_1 és positiu (és a dir va realment cap on indica el dibuix, o sigui, cap a la dreta) el sentit de rotació és antihorari vist des de la dreta a les regions I i II. (ja que en aquestes regions el teorema d'Ampere només inclou o bé tot I_1 com a la regió II o bé una part de I_1 a la regió I).



Igualment a la regió III el camp rotatori continua anat igual en sentit antihorari, ja que si bé el corrent que travessa segons el teorema d'Ampere serà ara I_1 menys I_2 (que va a l'inrevés), aquesta resta continua donant el mateix signe que I_1 ja que segons l'enunciat I_1 és major que I_2.

c) Regió I. $0 < r < R_1$

Fem la línia d'Ampere com un cercle de radi r concèntric al sistema. La circulem en sentit horari mirant-la des de l'esquerra. Així la cara – està a l'esquerra i la cara + a la dreta.



El càlcul de la circulació és molt fàcil en simetria cilíndrica i segons la teoria és:

$$© = \oint_{C(r)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B^I(r) \cdot 2\pi r$$

El teorema de Ampere diu que hem d'igualar això a μ_0 per la suma de corrents que travessen l'àrea tancada per la línia d'Ampere. En aquest cas correspon a una part de I_1, la que està inclosa només dins la línia d'Ampere de radi r, i que a al figura apareix com a I'_1 . Compta com a positiu ja que va de esquerra (cara -) a dreta (cara +).

Aquest corrent el calculem a partir de la densitat de corrent multiplicada per l'àrea interna de la línia d'Ampere, és a dir j per $\pi \cdot r^2$.

Així:

$$© = B^I(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot j \pi \cdot r^2$$

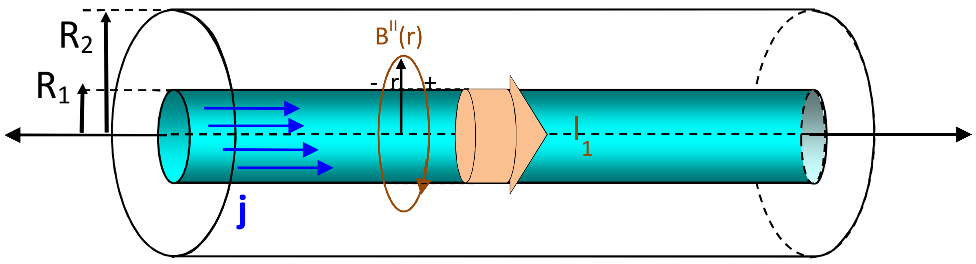
A partir d'aquí aïllem el mòdul del camp a la regió I:

$$B^I(r) = \frac{\mu_0 \cdot j}{2} r = \frac{\mu_0 \cdot \frac{I}{\pi R_1^2}}{2} r = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R_1^2} r$$

En el segon pas hem substituït la j per la seva expressió segons l'apartat a)

Regió II. $R_1 < r < R_2$

Fem la línia d'Ampere com un cercle de radi r concèntric al sistema i de valor més gran que abans.



El càlcul de la circulació és fa igual: $\copyright = B^{II}(r)\cdot 2\pi r$

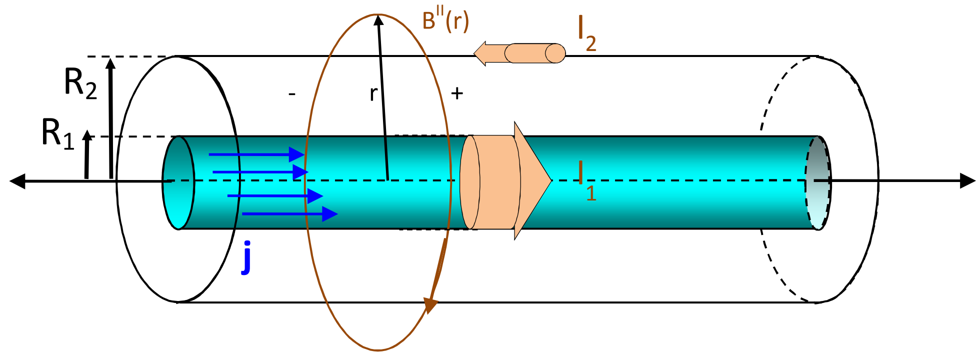
El teorema d'Ampere diu que hem d'igualar això a μ_0 per la suma de corrents que travessen l'àrea tancada per la línia d'Ampere. En aquest és tot I_1 de la barra central, que contribueix en positiu (esquerra a dreta)

Amb això aplicant el teorema d'Ampere

$$\copyright = B^{II}(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I_A \Rightarrow \quad B^{II}(r) = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r}$$

Regió III. $R_2 < r < \infty$

Fem la línia d'Ampere com un cercle de radi $r > R_2$ concèntric al sistema, de radi exterior



Novament: $\copyright = B^{III}(r)\cdot 2\pi r$

El teorema d'Ampere diu que hem d'igualar això a μ_0 per la suma de corrents que travessen l'àrea tancada per la línia d'Ampere. En aquest cas és $I_1 - I_2$.

$$\copyright = B^{III}(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot (I_1 - I_2) \quad \Rightarrow \quad B^{III}(r) = \frac{\mu_0 \cdot (I_1 - I_2)}{2\pi \cdot r}$$

El camp és nul a la part externa del sistema. Això és a causa de que torna per fora el mateix corrent que va per dins.

d) - Continuïtat a $r=R_1$:

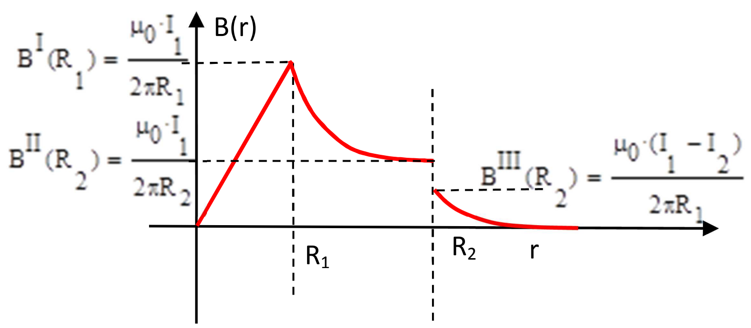
$$B^{I}(r=R_1)=\frac{\mu_0\cdot I_1}{2\pi R_1^{\,2}}R_1=\frac{\mu_0\cdot I_1}{2\pi R_1} \quad ; \; B^{II}(r=R_1)=\frac{\mu_0\cdot I_1}{2\pi R_1} \quad \Rightarrow \text{és continu a } R_1$$

- Continuïtat a $r=R_2$:

$$B^{II}(r=R_2)=\frac{\mu_0\cdot I_1}{2\pi R_2}\; ; \; B^{III}(r=R_2)=\frac{\mu_0\cdot (I_1-I_2)}{2\pi\cdot R_2} \quad \Rightarrow \text{ no és continu a } R_2,$$

Lògic que no ho sigui ja que tenim una distribució superficial de corrent a R_2 (s'anomena una **k**, similar al que feia una distribució de càrrega σ superficial en el cas del camp elèctric).

La gràfica que surt te en compte les típiques formes: una recta amb pendent positiu a la regió I, una hipèrbola tipus 1/r a la regió II, una altra hipèrbola tipus 1/r a la III, la continuïtat a R_1 i la discontinuïtat a R_2.



12) (proposat) (numèric) Tenim una distribució de corrents cilíndrica com la del problema anterior. Suposem que $j_1=10$ A/cm^2 i que $R_1=5{,}64$ mm.

a) Calcula el valor del corrent I_1.

b) Si volem que no hi hagi gens de camp magnètic a la regió III, quan ha de valer I_2 ?

c) Quin ha de ser el radi del conductor coaxial extern, R_2, per tal que el camp del punt més extern de la regió II, és a dir $B^{II}(R_2)$, sigui de 200 μT?

d) Fes la gràfica del camp pel cas dels números del problema (indica-hi els valors de R_1 i $B(R_1)$ i també de R_2 i $B^{II}(R_2)$.

a) Del problema anterior tenim la següent relació entre j_1 i I_1: $\quad j_A=\dfrac{I_1}{\pi R_1^{\,2}}$

Per tant : $$I_1 = j_A \cdot \pi R_1^{\,2} = 10\ A/cm^2\ \pi \cdot (5{,}64\ mm)^2 = 10\ A$$

b) Com que: $$B^{III}(r) = \frac{\mu_0 \cdot (I_1 - I_2)}{2\pi \cdot r}$$

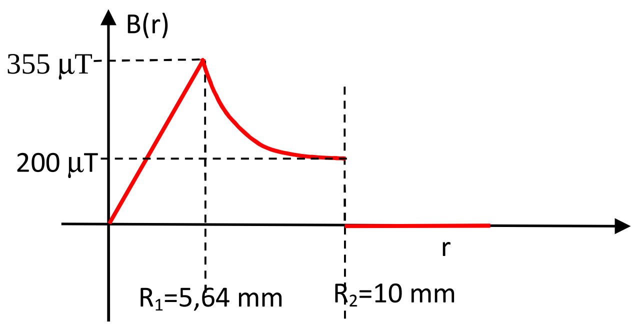
Si volem que $B^{III}(r)$ sigui 0 cal que I_1-I_2=0, és a dir I_1 i I_2 han de ser iguals, i llavors I_2=10 A

c) Com que del problema anterior:

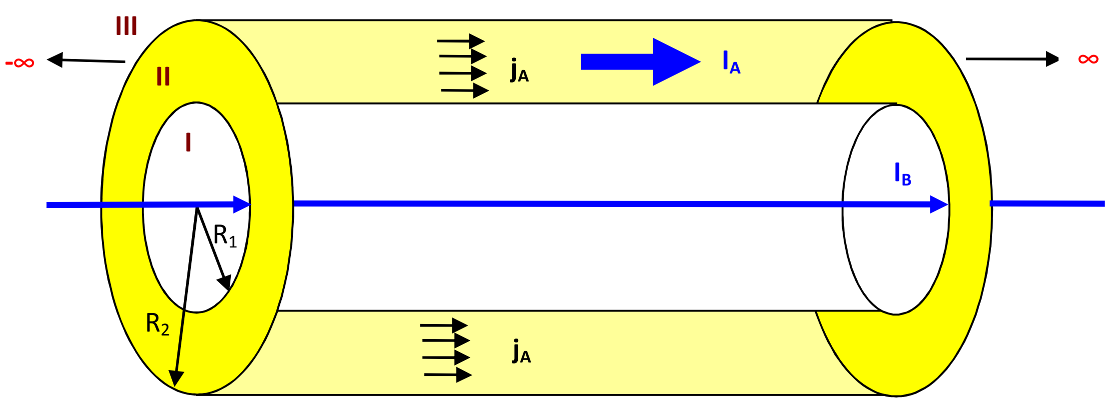
$$B^{II}(R_2) = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi R_2}$$

llavors: $$R_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot B^{II}(R_2)} = \frac{4\pi\ x10^{-7}\ \ N/A^2 \cdot 10\ A}{2\pi \cdot 200\ \mu T} = 1\ cm$$

d) $$B^{I}(R_1) = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi R_1} = \frac{4\pi\ x10^{-7}\ \ N/A^2 \cdot 10\ A}{2\pi \cdot 5{,}64\ mm} = 355\ \mu T$$



13) (classe) Tenim un tub cilíndric infinitament llarg de radi exterior R_2 i radi interior R_1 pel qual hi circula un corrent I_A d'esquerra a dreta amb densitat de corrent uniforme en tota la seva secció.



A l'interior d'aquest cilindre i just a l'eix hi col·loquem un fil infinit (molt llarg) de corrent I_B també d'esquerra a dreta. Es demana:

a) Determina una expressió per a la densitat de corrent $\mathbf{j_A}$ en el tub exterior en funció de R_1, R_2 i I_A.

b) Dibuixa la forma i sentit de les línies de camp a les tres regions I, II i III suposant $I_A>0$, $I_B>0$ i $I_A>I_B$.

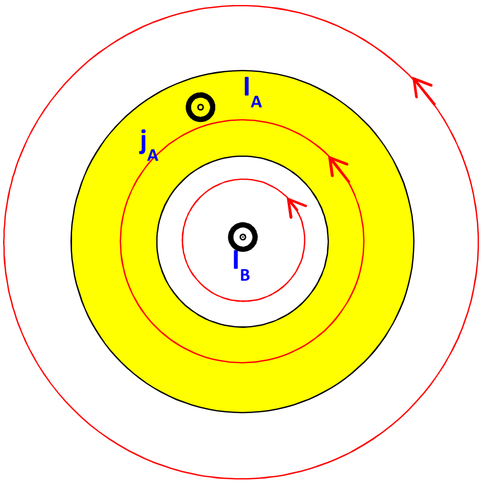
c) Aplicant el teorema d'Ampere calcula una expressió del mòdul del camp magnètic B en funció de r a les 3 regions: I. $0< r <R_1$; II. $R_1< r <R_2$; III. $R_2 < r < \infty$

d) Fes una gràfica del camp magnètic B en funció de r discutint la possible continuïtat a $r=R_1$ i $r=R_2$, suposant $I_A>0$, $I_B>0$ i $I_A>I_B$.

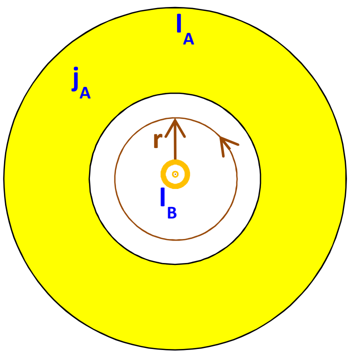
a) $$\vec{j}_A = \frac{I_A}{S_{tub}}\hat{e} = \frac{I_A}{\pi(R_2^{\ 2} - R_1^{\ 2})}\hat{e},$$

on $\hat{e}$,es el vector unitari en direcció de l'eix i sentit de I_A

b) Línies de camp: Tots els corrents són positius, per tant si ho dibuixem en secció amb els corrents mirant cap a nosaltres, tenim totes les línies de camp rotatòries en sentit antihorari.



c) Regió I. $0< r <R_1$



Fem la línia d'Ampere com un cercle de radi r concèntric al sistema. La circulem en sentit horari mirant-la des de l'esquerra. Així la cara – està a darrera i la cara + al davant.

Així el càlcul de la circulació en simetria cilíndrica és molt fàcil i es a seguint la següent fórmula de teoria:

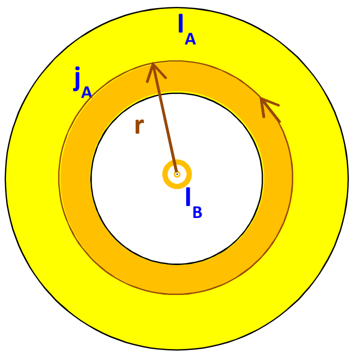
$$\text{©} = B(r)\cdot 2\pi r$$

El teorema d'Ampere diu que hem d'igualar això a μ_0 per la suma de corrents que travessen l'àrea tancada per la línia d'Ampere, en aquest cas només I_B del fil central, que va en positiu ja que va d'esquerra a dreta(cara – a cara +). Així:

$$\text{©} = B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0\cdot(I_B) \quad \Rightarrow \quad B^{I}(r) = \frac{\mu_0 \cdot I_B}{2\pi r} = \frac{A}{r}$$

Regió II. $R_1 < r < R_2$

Fem la línia d'Ampere com un cercle de radi r concèntric al sistema.



El càlcul de la circulació és el mateix que abans:

$$\text{©} = B(r)\cdot 2\pi r$$

El teorema d'Ampere diu que hem d'igualar això a μ_0 per la suma de corrents que travessen l'àrea tancada per la línia d'Ampere. En aquest és I_B del fil central + la part de corrent del tub extern I_A que està inclòs a dins d'un cercle de radi r entre R_1 i r (marcat en taronja a la figura)

L'àrea d'aquesta porció del tub és $A(r)=\pi\cdot(r^2-R_1^2)$, per tant el corrent és

$$I_A(r)=A(r)\cdot j_A= j_A\cdot\pi\cdot(r^2-R_1^2)$$

Amb això aplicant el teorema d'Ampere

$$\text{©}=B(r)\cdot 2\pi r= \mu_0\cdot[I_B + I_A(r)] = \mu_0\cdot[I_B + j_A\cdot\pi\cdot(r^2-R_1^2)] \Rightarrow$$

$$B^{II}(r) = \frac{\mu_0\cdot\left(I_B + j_A\cdot\pi(r^2-R_1^2)\right)}{2\pi r}$$

Substituint-hi el valor de j_A que havíem trobat a l'apartat a)

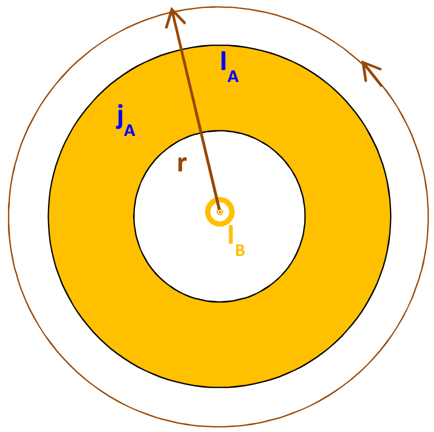
$$B^{II}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(I_A\left(\frac{r^2-R_1^2}{R_2^2-R_1^2}\right)+I_B\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_A}{R_2^2-R_1^2}\cdot r + \frac{I_B - I_A\dfrac{R_1^2}{R_2^2-R_1^2}}{r}\right) = B\cdot r + \frac{C}{r}$$

Regió III. $R_2 < r < \infty$

Fem la línia d'Ampere com un cercle de radi $r > R_2$ concèntric al sistema.

El càlcul de la circulació és el mateix que abans:

$$© = B(r) \cdot 2\pi r$$



El teorema d'Ampere diu que hem d'igualar això a μ_0 per la suma de corrents que travessen l'àrea tancada per la línia d'Ampere. En aquest és I_B del fil central + el corrent del tub extern I_A. (tot ell en taronja ara)

$$© = B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot (I_A + I_B) \quad \Rightarrow$$

$$B^{III}(r) = \frac{\mu_0 \cdot (I_A + I_B)}{2\pi r} = \frac{D}{r}$$

c) Continuïtat a $r = R_1$:

$$B^{I}(r = R_1) = \frac{\mu_0 \cdot I_B}{2\pi R_1}$$

$$B^{II}(r = R_1) = B^{II}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(I_A\left(\frac{R_1^{\,2} - R_1^{\,2}}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}\right) + I_B\right) = \frac{\mu_0 I_B}{2\pi R_1},$$

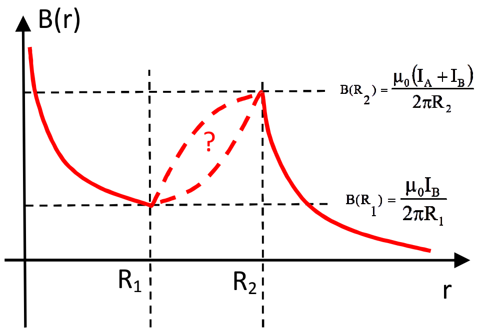
és continu a R_1

Continuïtat a $r = R_2$:

$$B^{II}(r = R_2) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(I_A\left(\frac{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}\right) + I_B\right) = \frac{\mu_0 (I_A + I_B)}{2\pi R_2}; \quad B^{III}(r = R_2) = \frac{\mu_0 \cdot (I_A + I_B)}{2\pi R_2},$$

és continu a R_2

Gràfica:



A la regió I tenim una corba tipus A/r que és una hipèrbola.

A la regió III tenim també una corba tipus D/r que és una hipèrbola.

En canvi a la regió II tenim la suma d'una recta i una hipèrbola: $B \cdot r + C/r$, la qual cosa no queda clar quina forma te i menys si no sabem els valors de B i C (a partir de I_A, I_B, R_1 i R_2)

De totes formes coneixem per continuïtat els seus valors extrems i podem traçar una corba genèrica més o menys raonable entre ells. Ho indiquen amb ? a la gràfica.

14) (proposat) (numèric) Tenim una distribució cilíndrica de corrents com la del problema anterior.

Suposem que I_A=10 A i que R_1=5 mm i R_2=10 mm.

a) calcula la densitat j_A en A/cm^2.

b) Calcula el valor del corrent I_B per tal que la gràfica del camp B(r) de la regió II sigui una recta amb pendent, tal que si la perllonguéssim cap a la regió I passaria per l'origen de coordenades (r=0,B=0).

c) Calcula $B(R_1)$ i $B(R_2)$.

d) Fes la gràfica del camp pel cas dels números del problema (indica-hi els valors de R_1 i $B(R_1)$ i també de R_2 i $B(R_2)$.

a)

$$j_A = \frac{I_A}{\pi(R_2^{\,2} - R_1^{\,2})} = \frac{10\ \text{A}}{\pi\left((10\ \text{mm})^2 - (5\ \text{mm})^2\right)} = 0{,}042440\ \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} = 42440\ \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

b) Del problema anterior tenim pel camp de la regió II la següent expressió:

$$B^{II}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(I_A\left(\frac{r^2 - R_1^{\,2}}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}\right) + I_B\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_A}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}\cdot r + \frac{I_B - I_A\dfrac{R_1^{\,2}}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}}{r}\right)$$

Tindrem una recta a la regió II si el terme tipus 1/r desapareix. Llavors el seu numerador hauria de ser zero:

$$I_B - I_A\frac{R_1^{\,2}}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}} = 0$$

Per tant:

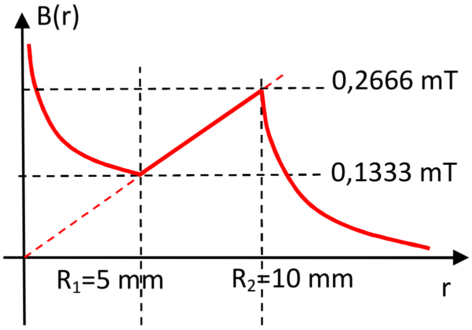
$$I_B = I_A\frac{R_1^{\,2}}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}} = 10\ \text{A}\frac{(5\ \text{mm})^2}{(10\ \text{mm})^2 - (5\ \text{mm})^2} = 10\ \text{A}\frac{25}{100 - 25} = 10\ \text{A}\frac{25}{75} = \frac{10}{3}\ \text{A} = 3{,}333\ \text{A}$$

c) De les expressions del problema anterior:

$$B(R_1) = \frac{\mu_0\cdot I_B}{2\pi R_1} = \frac{4\pi\ \text{x}10^{-7}\ \dfrac{\text{N}}{\text{A}^2}\cdot\dfrac{10}{3}\ \text{A}}{2\pi\cdot 5\ \text{mm}} = \frac{4}{3}\ \text{x}10^{-4}\ \text{T} = 0{,}1333\ \text{mT}$$

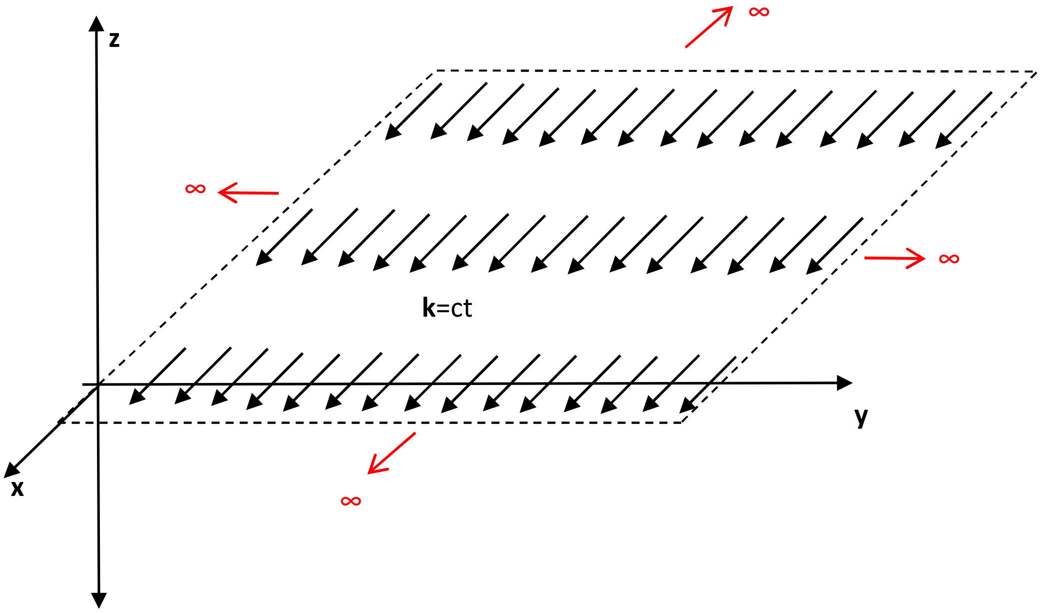
$$B(R_2)=\frac{\mu_0\cdot(I_A+I_B)}{2\pi R_2}=\frac{4\pi\,x10^{-7}\,\frac{N}{A^2}\cdot\left(10\text{ A}+\frac{10}{3}\text{ A}\right)}{2\pi\cdot 10\text{ mm}}=\frac{8}{3}\,x10^{-4}\text{ T}=0{,}2666\text{ mT}$$

$B(R_2)$ és just el doble de $B(R_1)$Lògic ja que R_2 és també just el doble de R_1 i si la gràfica ha de formar una recta que passaria per l'origen, llavors també $B(R_2)$ ha de ser el doble de $B(R_1)$.



d)

15) (classe) Tenim un pla infinitament extens que ocupa el pla x-y pel qual hi circula un corrent, uniformement distribuït i en el sentit de les x positives, tal i com es veu a la figura. Com a dada sabem que la quantitat de corrent que travessa per unitat de longitud a l'eix y és k. No cal dir que aquesta distribució de corrent no te gruix, això és el que anomenen *llençol de corrent*. Anem a estudiar el camp magnètic generat.



Es demana:

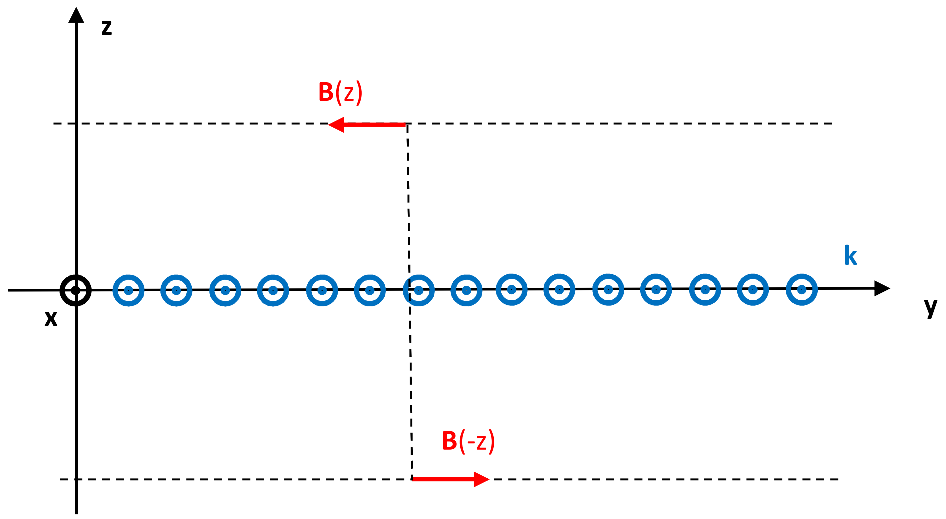
a) Raonar quin és per simetria l'únic sentit possible del camp magnètic generat en els punts de sobre del pla (z>0). Varia aquest camp si només ens movem al llarg de x o de y (és a dir, paral·lelament al pla)? Dibuixa les línies de camp.

b) Suposant coneguda la direcció, sentit i mòdul del camp **B**(z) per z>0, raonar quina direcció, sentit i mòdul hauria de tenir per simetria el camp a un punt situat a la mateixa distància però a l'altre costat **B**(-z).

c) Dedueix una expressió pel mòdul del camp B(z) a les dues regions: I: z>0   i II: z<0, tot usant adequadament el teorema d'Ampere.

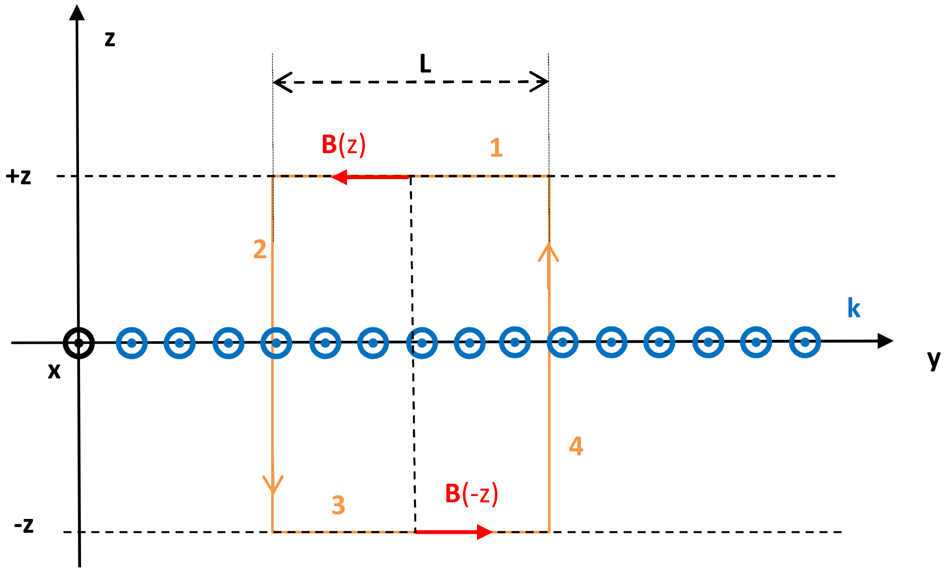
a) El camp en un punt situat a una certa distància z del llençol de corrent, ha de ser perpendicular tant a les línies de corrent **k** com al vector **r** perpendicular i agafat des del pla de corrent, ja que el camp magnètic va com **k**x**r** i segons la regla del tirabuixó te la direcció marcada a la figura. A més, en ser la distribució plana, infinita i idèntica per tots 4 costats, la influència dels punts de l'esquerra i de la dreta ha de ser idèntica així com la influència dels punts de davant i de darrera, el camp B tindrà el mateix valor, direcció i sentit a tots els punts situats a la mateixa alçada (z) independentment de si ens movem al llarg dels punts de la distribució plana.

A la següent figura hem dibuixat la distribució vista amb l'eix x positiu perpendicular al paper i cap enfora i hi hem marcat la direcció del camp magnètic a una z concreta.



b) Per altra banda, si en un costat el camp és en una direcció, a l'altre costat i a la mateixa distància serà igual però en sentit oposat; ja que si donem mig tomb a la distribució al voltant de l'eix x, la distribució serà idèntica i per tant el camps també hauran de ser idèntics. Això és una simetria de mirall o especular. Això és el que també es mostra a la figura anterior.

c) Usem una línia d'Ampere rectangular com la de color taronja de la figura següent i que li donem una amplada (a l'eix y) de valor L arbitrari, pel que fa a l'eix z la línia va de –z a +z, per tant ocupa una posició simètrica respecte el pla del corrent.



La circulació a través d'aquesta línia C, $© = \int_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$, la podem desglossar en els 4 trams, 1, 2, 3 i 4 de que està formada la línia tancada d'Ampere.

En els trams 2 i 4 la circulació és nul·la ja que **B** i **dl** hi són perpendiculars: $©_2+©_4=0$

En els trams 1 i 3, en canvi, la **B** és cte. i te el mateix sentit que els **dl** i per tant

$$©_1+©_3=2\cdot B(z)\cdot L$$

Així $© = ©_1+©_2+©_3+©_4 = 2\cdot B(z)\cdot L$

Aplicant el teorema d'Ampere:

$$©=2\cdot B(z)\cdot L=\mu_0\cdot \Sigma I_{trav}$$

els corrents que travessen estan formats per tots els del pla de corrent **k**, que van perpendicularment i que travessen per dins de per la línia d'Ampere d'amplada L. Tots ho fan des de la cara – (darrera) a la cara + (davant) per tant compten com a positius.

El corrent total que travessa és: $I_{trav}=k\cdot L$.

Per tant: $2\cdot B(z)\cdot L=\mu_0\cdot k\cdot L \quad \Rightarrow \quad B(z) =\mu_0\cdot k/2$

que és un camp que no depèn ni de z.

Hem obtingut per tant al semiespai superior z>0 un camp uniforme de valor:

$$\vec{B}(z) = \mu_0 \frac{k}{2}(-\hat{j})$$

En canvi en el semiespai inferior, z<0, un altre camp uniforme oposat a l'anterior:

$$\vec{B}(z) = \mu_0 \frac{k}{2} \hat{j}$$

16) (proposat) (numèric) Tenim dos plans infinitament extensos i situats ambdós paral·lelament al pla x-y.

El primer es troba a z=1 cm i el corrent que el travessa està uniformement distribuït i va en el sentit de l'eix x positiu i te un valor de corrent per unitat de longitud de k_1=10 A/cm.

El segon es troba a z=-1 cm i el corrent que el travessa està uniformement distribuït i va en el sentit de l'eix y positiu i te un valor de corrent per unitat de longitud de k_2=5 A/cm. Es demana:

a) Calcula les dues components x i y del camp B uniforme que es forma a l'espai entre els dos plans: -1 cm<z<1 cm

b) Calcula les dues components x i y del camp B uniforme que es forma per sobre del pla superior: z>1 cm.

c) Calcula les dues components x i y del camp B uniforme que es forma per sota del pla inferior: z<-1 cm. Segons el problema anterior, el pla situat a z=1 cm amb corrent per unitat de llargada $\mathbf{k}_1$ en el sentit de les x positives, dóna lloc a uns camps uniformes per sobre i per sota d'ell, de valors respectius:

- $z \geq 1$ cm: $\vec{B}_{1+} = -\mu_0 \frac{k_1}{2} \hat{j}$
- $z \leq 1$ cm: $\vec{B}_{1-} = +\mu_0 \frac{k_1}{2} \hat{j}$

Anàlogament trobaríem que el pla de corrent situat a z=-1 cm amb $\mathbf{k}_2$ en el sentit de les y positives, donaria lloc a uns camps uniformes per sobre i per sota de z=1 cm de valors respectius:

- $z \geq -1$ cm: $\vec{B}_{2+} = +\mu_0 \frac{k_2}{2} \hat{i}$
- $z \leq -1$ cm: $\vec{B}_{2-} = -\mu_0 \frac{k_2}{2} \hat{i}$

La direcció (vector unitari **i**) del camp es podria raonar igual que en el problema anterior tot usant la regla de la ma dreta amb el corrent $\mathbf{k}_2$ dirigit cap al sentit de les y positives.

a) Així en l'espai situat entre els dos plans: $-1 \text{ cm} \leq z \leq 1 \text{ cm}$, tenim la superposició del camp de baix de $\mathbf{k}_1$ i el de dalt de $\mathbf{k}_2$:

$$\vec{B}_{-1\,cm\le z\le 1\,cm} = \vec{B}_{1-} + \vec{B}_{2+} = +\mu_0 \frac{k_1}{2}\hat{j} + \mu_0 \frac{k_2}{2}\hat{i} = \mu_0\left(\frac{10\ A/cm}{2}\hat{j} + \frac{5\ A/cm}{2}\hat{i}\right) =$$

$$= 4\pi\ x10^{-7}\ \frac{N}{A^2}\left(5\cdot\hat{j} + 2{,}5\cdot\hat{i}\right)\frac{A}{10^{-2}\ m} = \left(200\pi\cdot\hat{j} + 100\pi\cdot\hat{i}\right)\mu T$$

b) A l'espai situat sobre el pla $\mathbf{k}_1$ (z ≥ 1 cm) , tenim la superposició del camp de dalt de $\mathbf{k}_1$ i el de dalt de $\mathbf{k}_2$:

$$\vec{B}_{z\ge 1\,cm} = \vec{B}_{1+} + \vec{B}_{2+} = -\mu_0 \frac{k_1}{2}\hat{j} + \mu_0 \frac{k_2}{2}\hat{i} = \mu_0\left(-\frac{10\ A/cm}{2}\hat{j} + \frac{5\ A/cm}{2}\hat{i}\right) =$$

$$= 4\pi\ x10^{-7}\ \frac{N}{A^2}\left(-5\cdot\hat{j} + 2{,}5\cdot\hat{i}\right)\frac{A}{10^{-2}\ m} = \left(-200\pi\cdot\hat{j} + 100\pi\cdot\hat{i}\right)\mu T$$

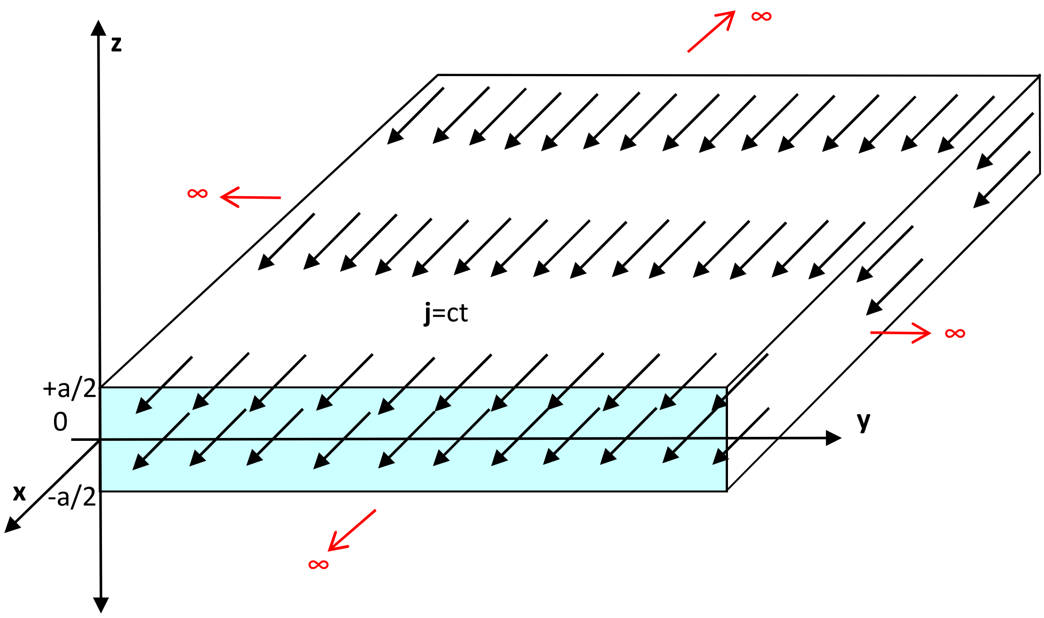
c) A l'espai situat sota el pla $\mathbf{k}_2$ (z ≥ 1 cm), tenim la superposició del camp de baix de $\mathbf{k}_1$ i el de baix de $\mathbf{k}_2$:

$$\vec{B}_{z\le -1\,cm} = \vec{B}_{1-} + \vec{B}_{2-} = +\mu_0 \frac{k_1}{2}\hat{j} - \mu_0 \frac{k_2}{2}\hat{i} = \mu_0\left(\frac{10\ A/cm}{2}\hat{j} - \frac{5\ A/cm}{2}\hat{i}\right) =$$

$$= 4\pi\ x10^{-7}\ \frac{N}{A^2}\left(5\cdot\hat{j} - 2{,}5\cdot\hat{i}\right)\frac{A}{10^{-2}\ m} = \left(200\pi\cdot\hat{j} - 100\pi\cdot\hat{i}\right)\mu T$$

A les 3 regions tenim camp uniforme, del mateix mòdul, però dirigit en direccions diferents.

17) (proposat) Donada una distribució de corrents com la de la figura, on per una làmina infinitament extensa, perpendicular a l'eix z i de gruix *a*, hi passa una densitat de corrent uniforme de valor **j** en direcció i sentit positiu de l'eix x (corrent paral·lel a la làmina). Es demana:



a) Trobar la direcció única possible pel camp magnètic en tots els punts a causa de la simetria (plana unidireccional) del problema. Dibuixa les línies de camp.

b) Quina relació mútua tindrien els camps a +z i a –z, és a dir a la mateixa distància però costats oposats del pla de simetria central del problema z=0

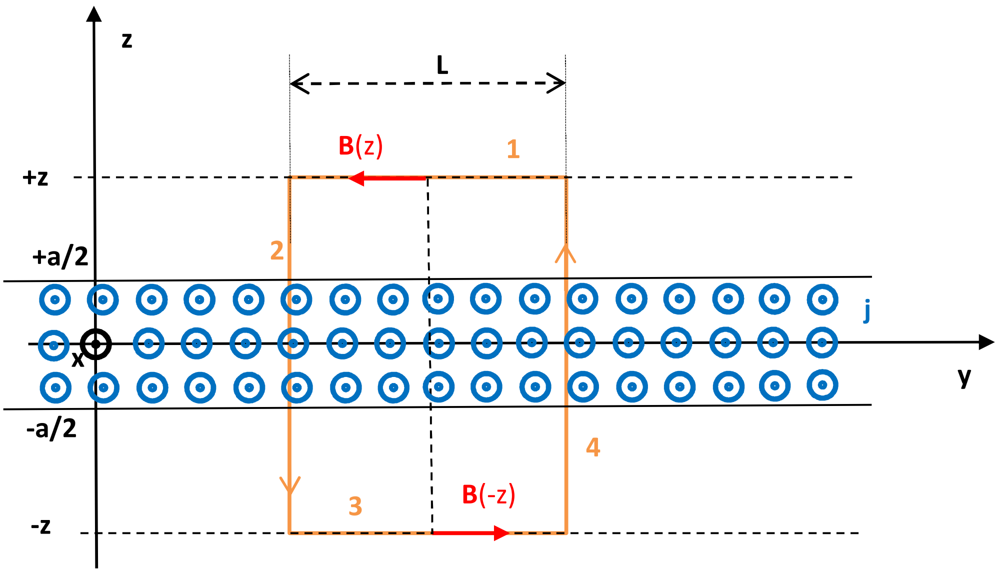
c) Trobar el valor del mòdul del camp magnètic a les regions:

I. z>a/2 (fora i per sobre de la làmina)
II. –a/2<z<a/2 (dins de la làmina)
III. z<-a/2 (fora i per sota de la làmina)

d) Representa gràficament els camps per als diferents valors de z. Valora'n la continuïtat a z=a/2 i z=-a/2.

a) El camp en un punt situat a una certa distància z del pla central (z=0), ha de ser perpendicular tant a les línies de corrent **j** com al vector **r** perpendicular i agafat des del pla central, ja que el camp magnètic va com **j**x**r** i segons la regla del tirabuixó te la direcció marcada a la figura. A més, en ser la distribució plana, infinita i idèntica per tots 4 costats, la influència dels punts de l'esquerra i de la dreta ha de ser idèntica així com la influència dels punts de davant i de darrera, el camp B tindrà el mateix valor, direcció i sentit a tots els punts situats a la mateixa alçada (z) independentment de si ens movem al llarg dels punts de la distribució plana.

A la següent figura hem dibuixat la distribució vista amb l'eix x positiu perpendicular al paper i cap enfora i hi hem marcat la direcció del camp magnètic a una z concreta.



b) Per altra banda, si en un costat el camp és en una direcció, a l'altre costat i a la mateixa distància serà igual però en sentit oposat; ja que si donem mig tomb a la distribució al voltant de l'eix x, la distribució serà idèntica i per tant el camps també hauran de ser idèntics. Això és una simetria de mirall o especular. Això és el que també es mostra a la figura anterior.

c) Regions I i III: $z \geq a/2$ i $z \leq -a/2$

Fem us de la línia d'Ampere rectangular de color marró a la figura anterior de dimensions $2z\cdot L$.

La circulació a través d'aquesta línia C, $\copyright = \int_C \vec{B}\cdot d\vec{l}$, la podem desglossar en 4 trams, 1, 2, 3 i 4. En els trams 2 i 4 la circulació és nul·la ja que **B** i d**l** hi són perpendiculars:

$\copyright_2+\copyright_4=0$

En els trams 1 i 3, en canvi, la **B** és cte. i te el mateix sentit que els d**l** i per tant

$\copyright_1+\copyright_3=2\cdot B(z)\cdot L$

Així $\copyright = \copyright_1+\copyright_2+\copyright_3+\copyright_4 = 2\cdot B(z)\cdot L$

Aplicant el teorema d'Ampere:

$\copyright=2\cdot B(z)\cdot L=\mu_0\cdot\Sigma I_{trav}$ els corrents que travessen estan formats per tots els que travessen per la superfície marcada en blau cel suau d'àrea $L\cdot a$ i és per tant

$\Sigma I_{trav}=j\cdot L\cdot a$. Així finalment igualant amb la circulació $2\cdot B(z)\cdot L=\mu_0\cdot j\cdot L\cdot a$

i d'aquí aïllem el camp

$$B(z)=\mu_0\frac{j}{2}a$$

és a dir al camp B(z) als punts exteriors tampoc depèn de z, és uniforme.

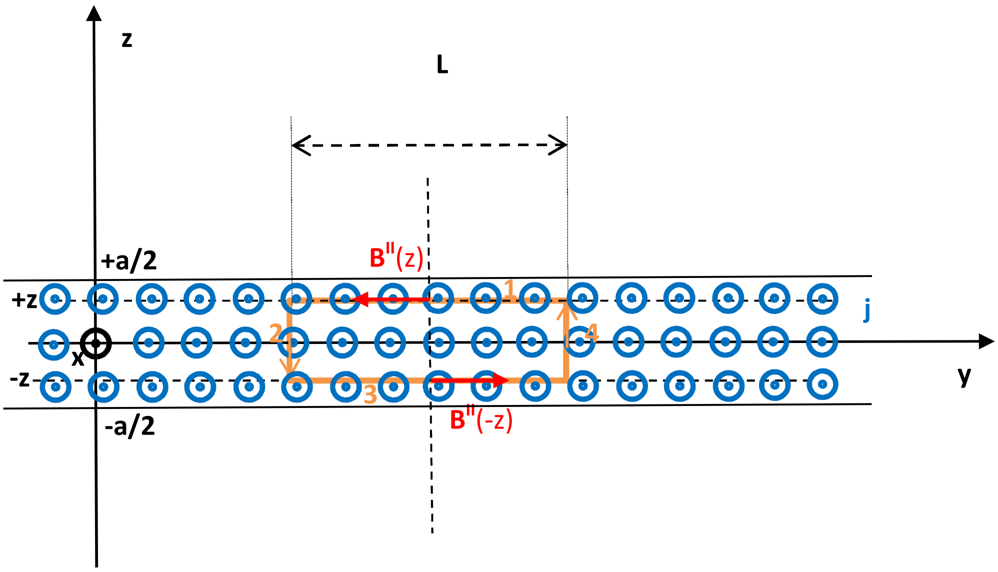
Lògicament el camp uniforme que hem trobat te el mateix mòdul a les regions I i III, però sentits oposats

Regió I : $z\geq a/2 \qquad \vec{B}^{I}(z)=-\mu_0\frac{j}{2}a\cdot\hat{j}$

Regió III : $z\leq -a/2 \qquad \vec{B}^{III}(z)=+\mu_0\frac{j}{2}a\cdot\hat{j}$

ULL en aquestes expressions: no confonguem la j (mòdul de la densitat de corrent) amb la $\hat{j}$ (vector unitari en la direcció y positiva).

Regions II: Fem-ho ara pels punts interiors de la distribució, és a dir -a/2<z<a/2. Agafem per això la línia d'Ampere de la figura següent, un rectangle igual que abans però d'alçada 2z tal que entra dins de la distribució.

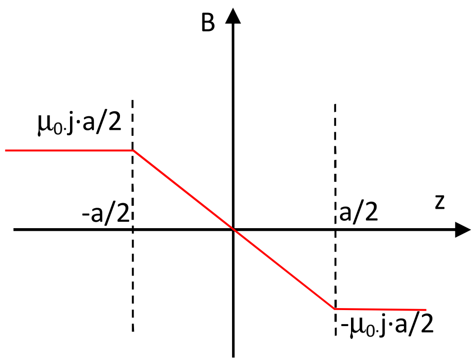


El càlcul de la circulació dóna formalment el mateix que abans ja que a 2 i 4 és zero i a 1 i 3 dóna B(z)·L a cada línia.

Per tant aplicant el teorema d'Ampere i tenint en compte ara que el corrent que travessa és menor que abans i només és el que passa per l'àrea situada dins de la línia d'Ampere d'alçada 2z:

$$©=2\cdot B^{II}(z)\cdot L=\mu_0\cdot j\cdot L\cdot 2z \quad ==> B^{II}(z)=\mu_0\cdot jz,$$ el camp varia linealment amb la z

d) Efectivament el camp és continu per z=a/2 i per z=-a/2. Només cal mirar les dues expressions anteriors. La gràfica B(z) és la següent:



18) (proposat) (numèric i analític) Tenim una bobina cilíndrica de longitud L=20 cm i amb un diàmetre mitjà de les espires de D=1 cm.

Per a bobinar-la usem fil de coure (Cu) de diàmetre d=0,5 mm, de manera que les espires estan totalment ajuntades (cada volta es toca físicament amb la següent) tot formant n=3 capes de bobinat una sobre l'altra. Fem passar un corrent I=2 A pel fil de la bobina. Si convé posem un nucli a la bobina que serà una *hexaferrita de bari* de permeabilitat relativa μ_R=500. El Cu te una resistivitat de ρ_{Cu}=1,75 x10^{-8} $\Omega\cdot$m.

Es demana:

a) Escriu una expressió per a trobar la densitat de flux de camp magnètic a l'interior de la bobina, sense nucli: B_0 i amb nucli: B. Calcula B_0 i B numèricament.

b) Escriu una expressió per a la llargada del fil de la bobina: LL. Escriu una expressió per a la resistència del fil de la bobina: R. Calcula LL i R numèricament.

c) Calcula numèricament la potència P dissipada en forma de calor per efecte Joule a la bobina.

d) Calcula numèricament la intensitat de camp magnètic H a dins de la bobina. Calcula numèricament la densitat de magnetització M a dins del nucli.

a) Necessitem primer calcular quantes espires te la bobina en total.

Si el fil te un diàmetre d i les espires es toquen cadascuna amb la següent, resulta que el total d'espires per cada capa és L/d com que hi ha n capes tenim en total un número d'espires de:

$$N = n\cdot\frac{L}{d} = 3\cdot\frac{20\text{ cm}}{0{,}5\text{ mm}} = 3x400 = 1200$$

Amb això el camp sense nucli seria, d'acord amb la fórmula donada a teoria pel camp a l'interior d'una bobina llarga:

$$B_0 = \mu_0 I\frac{N}{L} = 4\pi\,x10^{-7}\,\frac{N}{A^2}2\text{ A}\frac{1200}{20\text{ cm}} = 0{,}0151\text{ T}$$

El camp amb nucli consistiria en multiplicar això per μ_r:

$$B = \mu_r\cdot B_0 = 500x0{,}0151\text{ T} = 7{,}540\text{ T}$$

b) La llargada del fil serà el número d'espires multiplicat per la llargada de cada volta circular de diàmetre mitjà D.

$$L=\pi D\cdot N=\pi\cdot 1\text{ cm}\cdot 1200=37{,}70\text{ m}$$

La resistència d'un fil d'aquesta llargada i de diàmetre d és:

$$R = \rho_{Cu}\cdot\frac{L}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 1{,}75\,x10^{-8}\,\Omega\cdot m\cdot\frac{37{,}70\text{ m}}{\pi(0{,}25\text{ mm})^2} = 3{,}36\,\Omega$$

Quantitat no negligible de resistència. Una bobina sempre acumula una resistència relativament apreciable en el seu fil llarg que la forma.

c) La potència dissipada es calcularà per la fórmula de l'efecte Joule:

$$P = R \cdot I^2 = 3{,}36\ \Omega \cdot (2\ A)^2 = 13{,}44\ W$$

Quantitat tampoc gens negligible: la bobina s'escalfarà.

d) $H = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{0{,}0151\ T}{4\pi\ x10^{-7}\ \frac{N}{A^2}} = 12016\ \frac{A}{m}$

Com que: $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

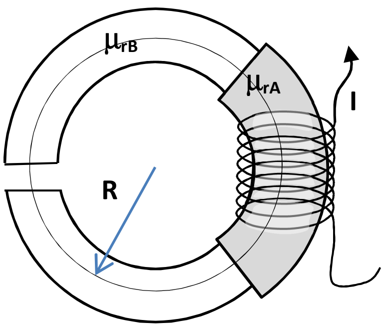
La densitat de moment magnètic o camp de magnetització M serà

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{7{,}540\ T}{4\pi\ x10^{-7}\ \frac{N}{A^2}} - 12016\ \frac{A}{m} = 5988000\ \frac{A}{m}$$

Tots els camps $\mathbf{B_0}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ i $\mathbf{M}$ són uniformes i van en el mateix sentit: al llarg de l'eix de la bobina en el sentit de la regla de la ma dreta segons el sentit de gir de les espires.

19) (classe) Tenim un circuit magnètic toroïdal quasi tancat com el de la figura. El radi del toroide (radi de la circumferència que recorre pel centre del nucli) és R i el seu valor és desconegut de moment. El circuit està format per:

1. - un tram de nucli cilíndric de material ferromagnètic B amb permitivitat relativa μ_{rA} =400 i diàmetre D_A= 3 cm. Aquest ocupa el 25% del perímetre del toroide.



2.-Un tram de nucli de material ferromagnètic B de permeabilitat relativa μ_{rB} =900 i diàmetre D_B= 2 cm

3.- Un tram d'entreferro situat entremig del tram de material A. Aquest ocupa un 1 % del perímetre del toroide.

4.- Una bobina enrotllada tal com s'indica a la figura, formada per N voltes de corrent I.

Es demana:

a) Calculeu una expressió de la reluctància del tram de nucli fet de material A: $\Re_A$. Calculeu una expressió de la reluctància del tram de nucli fet de material B: $\Re_B$. Calculeu una expressió de la reluctància de l'entreferro: $\Re_e$. Deixeu les expressions en funció de R/μ_0. Quina de les 3 és la més gran i perquè?

b) Si N= 1000 i I=1 A, calculeu el flux de camp magnètic Φ únic que travessa el circuit. Deixeu-lo en funció de μ_0/R

c) Calculeu una expressió per a la densitat de flux magnètic o camp d'inducció B al material A, B i a l'entreferro, deixeu-lo en funció de μ_0/R

d) Calculeu una expressió de la intensitat de camp magnètic o camp d'excitació H al material A, B i a l'entreferro, deixeu-lo en funció de 1/R.

e) Volem usar l'entreferro com a capçal de gravació magnètica sobre una cinta magnetofònica digital. Per a poder gravar-hi un "1" a la cinta necessitem que a l'entreferro hi hagi com a mínim un camp H de $5x10^5$ A/m. Es demana quin ha de ser el radi màxim R del toroide per a aconseguir-ho?

a) S_A i S_B són les seccions del tram de cada material, relacionades amb els diàmetres:

$$S_A = \pi\cdot(D_A/2)^2 = \pi\cdot(3\text{ cm}/2)^2 \qquad ; \qquad S_e = S_B = \pi\cdot(D_B/2)^2 = \pi\cdot(2\text{ cm}/2)^2$$

El sistema és toroïdal de radi R però: el tram de material A te un 25% de la llargada; el tram de l'entreferro te l'1% de la llargada; per tant el trem del material B tindrà la resta que és el 74% de la llargada.

Així les llargades de cada tram són:

$$L_A = 2\pi R\cdot 0{,}25 \qquad ; \qquad L_B = 2\pi R\cdot 0{,}74 \qquad ; \qquad L_e = 2\pi R\cdot 0{,}01$$

Amb tot això podem calcular les reluctàncies:

$$\Re_A = \frac{1}{\mu_0\mu_{rA}}\frac{L_A}{S_A} = \frac{1}{\mu_0 400}\frac{2\pi R\cdot 0{,}25}{\pi\left(\frac{D_A}{2}\right)^2} = \frac{1}{\mu_0 400}\frac{2\cdot R\cdot 0{,}25}{\frac{(3\text{ cm})^2}{4}} = \frac{1}{400}\frac{2}{(3x10^{-2}\text{m})^2}\frac{R}{\mu_0} = \frac{20000}{3600\text{ m}^2}\frac{R}{\mu_0} = \frac{5{,}\widehat{5}}{\text{m}^2}\frac{R}{\mu_0}$$

$$\Re_B = \frac{1}{\mu_0\mu_{rB}}\frac{L_B}{S_B} = \frac{1}{\mu_0 900}\frac{2\pi R\cdot 0{,}74}{\pi\left(\frac{D_B}{2}\right)^2} = \frac{1}{\mu_0 900}\frac{2\cdot R\cdot 0{,}74}{\frac{(2\text{ cm})^2}{4}} = \frac{1}{900}\frac{5{,}92}{(2x10^{-2}\text{m})^2}\frac{R}{\mu_0} = \frac{59200}{3600\text{m}^2}\frac{R}{\mu_0} = \frac{16{,}\widehat{4}}{\text{m}^2}\frac{R}{\mu_0}$$

$$\Re_e = \frac{1}{\mu_0\mu_{re}}\frac{L_e}{S_e} = \frac{1}{\mu_0\cdot 1}\frac{2\pi R\cdot 0{,}01}{\pi\left(\frac{D_B}{2}\right)^2} = \frac{1}{\mu_0}\frac{2\cdot R\cdot 0{,}01}{\frac{(2\text{ cm})^2}{4}} = \frac{0{,}08}{(2x10^{-2}\text{m})^2}\frac{R}{\mu_0} = \frac{200}{\text{m}^2}\frac{R}{\mu_0}$$

La més gran amb diferència és la de l'entreferro. Això és perquè, malgrat la bastant menor llargada d'aquest (1% de la llargada només), aquest fet es veu sobradament compensat per la molt menor permitivitat relativa de l'aire: μ_{re}=1 respecte la dels altres materials.

La reluctància total del circuit magnètic serà la suma sèrie de les reluctàncies parcials:

$$\Re_T = \Re_A + \Re_B + \Re_e = \frac{5,\widehat{5}}{m^2}\frac{R}{\mu_0} + \frac{16,\widehat{4}}{m^2}\frac{R}{\mu_0} + \frac{200}{m^2}\frac{R}{\mu_0} = \frac{222}{m^2}\frac{R}{\mu_0}$$

b) Igualem la força magnetomotriu F_{mm} =N· I amb el producte del flux per la suma de reluctàncies. F_{mm}= N· I=Φ· ($\Re_A$+$\Re_B$+$\Re_e$) . Aquesta llei és l'anàleg a la llei d'Ohm però pels circuits magnètics. Això implica:

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{\Re_A + \Re_B + \Re_e} = \frac{1000 \cdot 1\ A}{\frac{5,\widehat{5}}{m^2}\frac{R}{\mu_0} + \frac{16,\widehat{4}}{m^2}\frac{R}{\mu_0} + \frac{200}{m^2}\frac{R}{\mu_0}} = \frac{1000\ A}{\frac{222}{m^2}\frac{R}{\mu_0}} = 4,5045\ Am^2 \cdot \frac{\mu_0}{R}$$

c) Calculem les densitats de flux magnètic de cada tram, tot dividint el flux comú per les seccions de cada tram

$$B_A = \frac{\Phi}{S_A} = \frac{4,5045\ Am^2 \cdot \frac{\mu_0}{R}}{\pi\left(\frac{D_A}{2}\right)^2} = \frac{4,5045\ Am^2 \cdot \frac{\mu_0}{R}}{\pi\left(\frac{3\ x10^{-2}\ m}{2}\right)^2} = 6373\ A \cdot \frac{\mu_0}{R}$$

$$B_B = \frac{\Phi}{S_B} = \frac{4,5045\ Am^2 \cdot \frac{\mu_0}{R}}{\pi\left(\frac{D_B}{2}\right)^2} = \frac{4,5045\ Am^2 \cdot \frac{\mu_0}{R}}{\pi\left(\frac{2\ x10^{-2}\ m}{2}\right)^2} = 14340\ A \cdot \frac{\mu_0}{R}$$

$$B_e = \frac{\Phi}{S_e} = \frac{\Phi}{S_B} = B_B = 14340\ A \cdot \frac{\mu_0}{R}$$

d) Les intensitats de camp magnètic H es troben dividint les densitats de flux magnètic B per la permeabilitat absoluta: $\mu_0 \cdot \mu_r$

$$H_A = \frac{B_A}{\mu_0 \mu_{rA}} = \frac{6373\ A \cdot \frac{\mu_0}{R}}{\mu_0 400} = \frac{6373\ A \cdot}{400}\frac{1}{R} = 15,93\ A \cdot \frac{1}{R}$$

$$H_B = \frac{B_B}{\mu_0 \mu_{rB}} = \frac{14340\ A \cdot \frac{\mu_0}{R}}{\mu_0 900} = \frac{14340\ A}{900} \cdot \frac{1}{R} = 15,93\ A \cdot \frac{1}{R}$$

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0 \cdot 1} = \frac{14340\ A \cdot \frac{\mu_0}{R}}{\mu_0} = \frac{14340\ A}{1} \cdot \frac{1}{R} = 14340\ A \cdot \frac{1}{R}$$

Com veiem el H_e és el més gran amb diferència, la raó és que queda dividit només per μ_{re}=1 mentre que les altres per μ_r molt més grans.

e) Necessitem $H_e \geq 5x10^5$ A/m per a poder usar-lo com a capçal magnètic.

Això implica:

$$H_e = 14340\ A \cdot \frac{1}{R} \geq 5x10^5\ \frac{A}{m}$$

Per tant:

$$R \leq \frac{14340\ A}{5x10^5\ \frac{A}{m}} = 0{,}0287\ m = 2{,}87\ cm$$

Radis del circuit inferiors a 2,87 cm ho permetrien.

20) (proposat) Tenim un circuit magnètic format per un nucli de secció rectangular i de forma també rectangular com el de la figura on s'hi posen les dimensions. El material magnètic del nucli és ferro dolç amb una μ_r=5000.

Les dimensions del transformador que es resumeixen a la figura estan referides a la llargada de l'entreferro: h=1 mm

Injectem a la bobina 1 un corrent de valor I_1=1 A, aquest bobinat te N_1=1000 voltes.

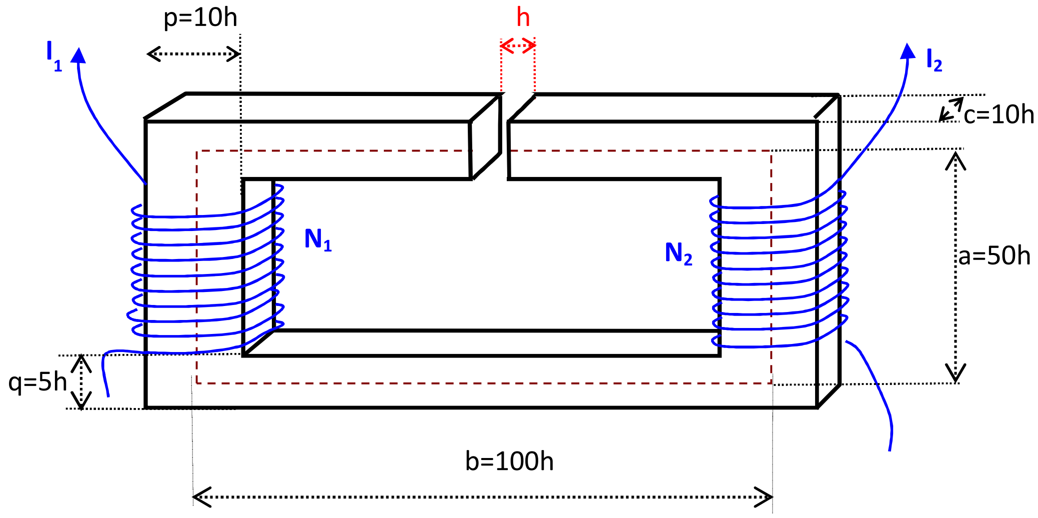
Injectem a la bobina 2 un corrent de valor I_2=2 A, aquest bobinat te N_2=250 voltes.

a) Calculeu la reluctància acumulada dels 2 trams verticals del nucli: $\Re_V$. Calculeu la reluctància acumulada dels 2 trams horitzontals del nucli: $\Re_H$. Calculeu la reluctància de l'entreferro: $\Re_e$. Quina de les 3 és la més gran i perquè?

b) Calculeu el flux de camp magnètic Φ_B únic que travessa el circuit.

c) Calculeu la densitat de flux magnètic o camp d'inducció B als trams verticals, horitzontals i a l'entreferro.

d) Calculeu la intensitat de camp magnètic o camp d'excitació H als trams verticals, horitzontals i a l'entreferro.



La bobina $N_1 \cdot I_1$ és de 1000·1 A= 1000 A i donaria un camp que travessaria per dins del circuit magnètic en sentit horari des del punt de vista del dibuix.

En canvi la bobina $N_2 \cdot I_2$ és de 250·2 A= 500 A i donaria un camp que travessaria per dins del circuit magnètic en sentit antihorari des del punt de vista del dibuix.

Ambdues bobines donen fluxos contraris per tant el flux total vindrà de la diferència entre les dues corresponents forces magnetomotrius i guanya la $N_1 \cdot I_1$ per 500 A per tant agafarem el sentit del flux magnètic en sentit horari. Llavolrs la força magnetomotriu total serà: $F_{mm} = N_1 \cdot I_1 - N_2 \cdot I_2 = 1000\text{ A} - 500\text{ A} = 500\text{ A}$

a) S_H , S_V i S_e són respectivament les seccions rectangulars dels trams horitzontals, verticals del nucli i de l'entreferro:

$S_H = 10h \cdot 5h = S_e$; $S_V = 10h \cdot 10h$

Les llargades de cada tram són:

$L_H = (100+99)h$; $L_V = 2 \cdot 50h$; $L_e = h$

Amb tot això podem calcular les reluctàncies:

$$\Re_H = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{L_H}{S_H} = \frac{1}{\mu_0 \cdot 5000} \frac{199 \cdot h}{50 h^2} = \frac{1}{4\pi\,x10^{-7}\,\frac{N}{A^2} \cdot 5000} \frac{199}{50 \cdot 1\text{ mm}} = 633\,400\,\frac{A}{Wb}$$

$$\Re_V = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{L_V}{S_V} = \frac{1}{\mu_0 \cdot 5000} \frac{100 \cdot h}{100 \cdot h^2} = \frac{1}{4\pi\,x10^{-7}\,\frac{N}{A^2} \cdot 5000} \frac{100}{100 \cdot 1\text{ mm}} = 159\,200\,\frac{A}{Wb}$$

$$\Re_e = \frac{1}{\mu_0 \cdot 1} \frac{L_e}{S_e} = \frac{1}{\mu_0 \cdot 5000} \frac{h}{50 h^2} = \frac{1}{4\pi\,x10^{-7}\,\frac{N}{A^2}} \frac{1}{50 \cdot 1\text{ mm}} = 15\,915\,500\,\frac{A}{Wb}$$

La més gran amb diferència és la de l'entreferro. Això és perquè, malgrat la bastant menor llargada d'aquest (h front a 199 h i 100 h dels altres), aquest fet es veu sobradament compensat per la molt menor permitivitat relativa de l'aire: μ_{re}=1 respecte la del nucli μ_r=5000

La reluctància total del circuit magnètic serà la suma sèrie de les reluctàncies parcials:

$$\Re_T = \Re_H + \Re_V + \Re_e = 633\,400\ \frac{A}{Wb} + 159\,200\ \frac{A}{Wb} + 15\,915\,500\ \frac{A}{Wb} = 16\,708\,100\ \frac{A}{Wb}$$

La reluctància de l'entreferro és el 95,3 % de la total.

b) Igualem la força magnetomotriu $F_{mm} = N_1 \cdot I_1 - N_2 \cdot I_2$ amb el producte del flux per la suma de reluctàncies. $F_{mm} = N \cdot I = \Phi \cdot (\Re_A + \Re_B + \Re_e)$. Aquesta llei és l'anàleg a la llei d'Ohm però pels circuits magnètics. Això implica:

$$\Phi = \frac{N_1 \cdot I_1 - N_2 \cdot I_2}{\Re_H + \Re_V + \Re_e} = \frac{1000 \cdot 1\ A - 250 \cdot 2\ A}{16\,708\,100\ \frac{A}{Wb}} = \frac{500\ A}{16\,708\,100\ \frac{A}{Wb}} = 2{,}993\ x10^{-5}\ Wb$$

c) Calculem les densitats de flux magnètic de cada tram, tot dividint el flux comú per les seccions de cada tram

$$B_H = \frac{\Phi}{S_H} = \frac{2{,}993\ x10^{-5}\ Wb}{50 \cdot h^2} = \frac{2{,}993\ x10^{-5}\ Wb}{50 \cdot (1\ mm)^2} = 0{,}599\ T$$

$$B_V = \frac{\Phi}{S_V} = \frac{2{,}993\ x10^{-5}\ Wb}{100 \cdot h^2} = \frac{2{,}993\ x10^{-5}\ Wb}{100 \cdot (1\ mm)^2} = 0{,}300\ T$$

$$B_e = \frac{\Phi}{S_e} = \frac{\Phi}{S_H} = B_H = 0{,}599\ T$$

d) Les intensitats de camp magnètic H es troben dividint les densitats de flux magnètic B per la permeabilitat absoluta: $\mu_0 \cdot \mu_r$

$$H_H = \frac{B_H}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0{,}599\ T}{4\pi\ x10^{-7}\ \frac{N}{A^2} \cdot 5000} = 95{,}33\ \frac{A}{m}$$

$$H_V = \frac{B_V}{\mu_0 \mu_r} = \frac{0{,}300\ T}{4\pi\ x10^{-7}\ \frac{N}{A^2} \cdot 5000} = 47{,}67\ \frac{A}{m}$$

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0 \cdot 1} = \frac{0{,}599\ \text{T}}{4\pi\ \text{x}10^{-7}\ \dfrac{\text{N}}{\text{A}^2}} = 476\ 700\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Com veiem el H_e és el més gran amb diferència, la raó és que queda dividit només per μ_{re}=1 mentre que les altres per μ_r=5000 molt més gran.