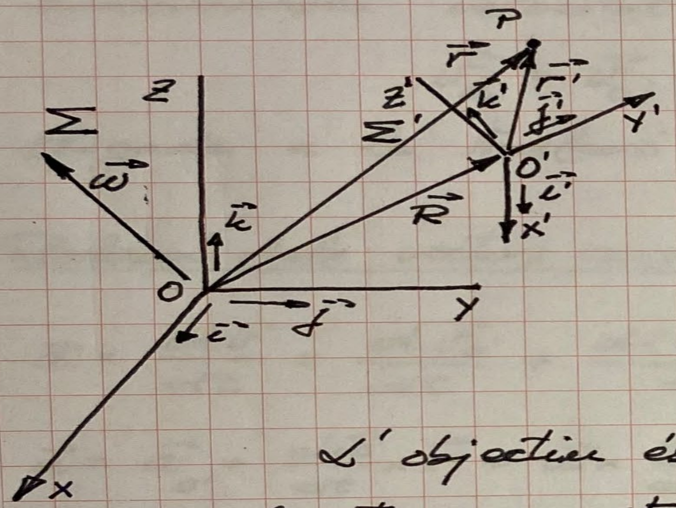
MOVIMENT SEGUIT DES DE SISTEMES RELATIUS

Introducció

La segona llei de Newton es vàlida solament en sistemes de referència INERCIALS (no accelerats en relació al sistema absolut de la galaxia)

No obstant el seguiment i observació des de sistemes NO INERCIALS (accelerats) és necessari, moltes vegades convenient i algunes vegades imprescindible.



Σ : sistema referència absolut ≡ inercial

Σ' : sistema referència relatiu ≡ no inercial

Com situació més general podem admetre que Σ' es trasllada amb acceleració i gira accelerat en relació a Σ'.

La traslació la seguirà el vector $\vec{R}$.

La rotació la seguirà el vector $\vec{\omega}$

L'objectiu és comparar les lectures que fan Σ i Σ' de les tres magnituds cinemàtiques del punt generic P. :

* Relació entre $\vec{r}$ i $\vec{r}'$
* Relació entre $\vec{v}$ i $\vec{v}'$
* Relació entre $\vec{a}$ i $\vec{a}'$

Relació dels vectors de posició

Per suma de vectors:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

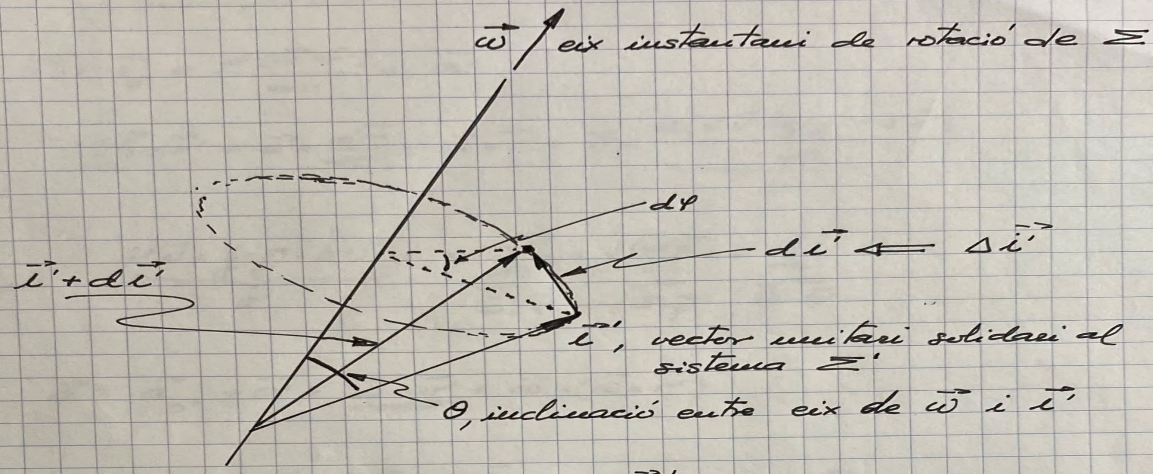
Relació dels vectors velocitat

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{R}+\vec{r}\,')}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d(x'\vec{i}\,'+y'\vec{j}\,'+z'\vec{k}\,')}{dt}$$

aquesta derivació la fa Σ i per tant també $\vec{i}\,', \vec{j}\,'$ i $\vec{k}\,'$ són variables! si $\vec{\omega} \neq 0$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \dot{x}'\vec{i}\,' + \dot{y}'\vec{j}\,' + \dot{z}'\vec{k}\,' + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt} \quad (1)$$

VOLEM AVALUAR $\dfrac{d\vec{i}'}{dt}$??



- El caracter vectorial de $\dfrac{d\vec{i}'}{dt}$ està representat per $d\vec{i}'$ i per tant serà $\perp$ a $\vec{i}'$.
- Tal i com s'observa a la figura també $\dfrac{d\vec{i}'}{dt}$, serà $\perp$ $\vec{\omega}$
- Per tant serà un vector $\perp$ al pla $\vec{\omega} - \vec{i}'$
- El seu mòdul $\left|\dfrac{d\vec{i}'}{dt}\right| = \dfrac{|d\vec{i}'|}{dt}$

$$\underbrace{|d\vec{i}'|}_{\text{arc}} = \underbrace{|\vec{i}'| \cdot \sin\theta}_{\text{radi}} \cdot \underbrace{d\varphi}_{\text{angle (en radiants)}}$$

Per tant:

$$\left|\frac{d\vec{i}'}{dt}\right| = |\vec{i}'| \, \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin\theta = |\vec{i}'| \cdot |\omega| \cdot \sin\theta$$

$$\left|\frac{d\vec{i}'}{dt}\right| = |\vec{\omega} \times \vec{i}'| \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}'}$$

Per tant la equació (1) ens queda:

$$\vec{v} = \vec{v}_{0'} + \vec{v}' + x' \cdot \vec{\omega} \times \vec{i}' + y' \cdot \vec{\omega} \times \vec{j}' + z' \cdot \vec{\omega} \times \vec{k}'$$

i finalment

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}'}$$

O sigui que una velocitat mesurada per Σ': $\vec{v}'$, si el sistema absolut, Σ, la vol utilitzar l'ha de corregir afegint la anomenada velocitat d'arrossegament

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

lligada a la translació i a la rotació de Σ' en relació a Σ.

Relació dels vectors acceleració

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{0'}}{dt} + \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')}{dt} + \frac{d(\dot{x}'\vec{i}\,' + \dot{y}'\vec{j}\,' + \dot{z}'\vec{k}\,')}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}\,'}{dt} + (\ddot{x}'\vec{i}\,' + \ddot{y}'\vec{j}\,' + \ddot{z}'\vec{k}\,') + \dot{x}'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,' + \vec{v}\,') + \vec{a}\,' + \dot{x}'(\vec{\omega}\times\vec{i}\,') + \dot{y}'(\vec{\omega}\times\vec{j}\,') + \dot{z}'(\vec{\omega}\times\vec{k}\,')$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + \vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{a}\,' + \vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

Conseqüentment:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{a}\,'}$$

NOTA: anomenem termes d'arrosegament com aquells que detecta Σ malgrat el punt P, que estem seguint, estigui parat per Σ'

O sigui que una acceleració mesurada per Σ': $\vec{a}\,'$, si el sistema absolut, Σ, la vol utilitzar l'ha de corregir afegint els termes que componen l'acceleració d'arrosegament

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

i un terme adicional anomenada acceleració de Coriolis.

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$