Tema 2

Física de Fluids

Hidrostàtica

Índex

Continguts

2.1 Introducció i objectius

Molts problemes en mecànica de fluids no impliquen moviment de les partícules de fluid. Tenen el seu origen en la distribució de pressions en un fluid estàtic i el seu efecte sobre superfícies sòlides o sobre cossos totalment o parcialment submergits. Quan la velocitat del fluid és zero, o condició d'equilibri hidrostàtic, la variació de la pressió es deu únicament al pes del fluid, immers aquest en el camp gravitatori. Aleshores, la pressió es pot calcular fàcilment per integració. Importants aplicacions d'aquest resultat són per exemple la distribució de pressions a l'atmosfera i als oceans, el disseny de manòmetres, i les forces d'empenta sobre superfícies i objectes. El càlcul de les forces d'empenta és l'aspecte general que exemplifica el conegut principi d'Arquimedes.

Els objectius que volem assolir són els següents,

- Definir element de volum del fluid
- Distingir forces de volum i de superfície en un fluid
- Definir el tensor d'esforços i de pressions
- Establir l'equació diferencial de l'equilibri dels fluids
- Determinar l'equació fonamental de la hidrostàtica mitjançant integració
- Comprendre les seves conseqüències: principi de Pascal, paradoxa hidrostàtica, principi d'Arquímedes.
- Definir la força de flotació i centre de pressions, i calcular-los sobre superfícies planes i corbes

Els conceptes d'aquest tema es basen en els continguts dels llibres de (White, 2011, pp. 78-80) i (De las Heras, 2012, pp. 31-33, 62-64).

2.2 Element de volum de fluid

Consisteix en una fracció del volum del fluid, referenciat per les seves coordenades en un sistema de coordenades ortogonal adequat a la geometria del problema: coordenades cartesianes, cilíndriques, esfèriques, etc. Per als nostres propòsits, podem considerar el sistema de coordenades cartesià. El nostre element de volum és matemàticament un volum prismàtic infinitesimal, $dV = dxdydz$, centrat en el punt (x, y, z).

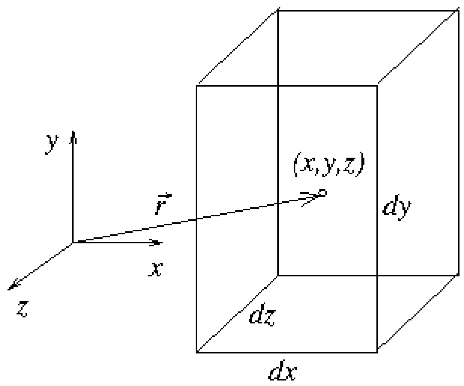


Fig. 1. Element de volum en coordenades cartesianes

Físicament, aquest element de volum no pot ser infinitesimal, ja que les magnituds físiques que caracteritzen el continu deixen de tenir sentit per sota de l'escala microscòpica (veure Tema 1). Aleshores parlem d'element de volum de fluid com una mena d'abstracció matemàtica, amb la qual és fàcil treballar, calcular esforços i pressions, descriure el moviment i establir lleis de conservació.

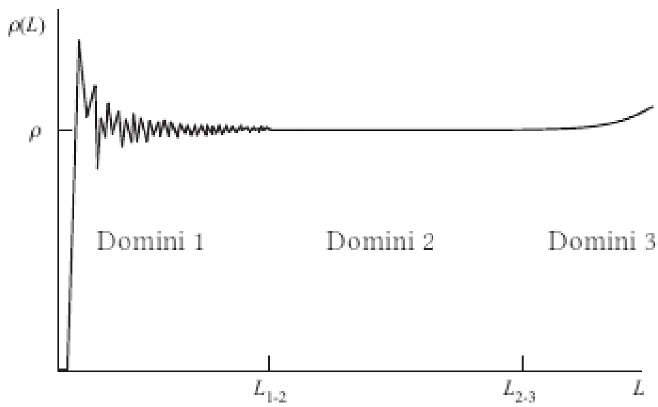


Fig. 2. L'element de volum és el més petit possible físicament, als límits del Domini 2 per l'esquerra, però mai infinitesimal. La densitat mitjana ρ no està ben definida als dominis 1 i 3

2.3 Naturalesa de les forces en un fluid

Considerem un element de volum de fluid dV. Es distingeixen tres tipus de forces que poden actuar sobre els fluids com a medi continu: forces màssiques o inercials; forces volumètriques o electromagnètiques, i forces superficials o de contacte. Les forces de contacte que actuen sobre la superfície d'una partícula fluïda en moviment es deuen a l'agitació i a la interacció molecular i són de molt curt abast. Entre aquestes forces, les lineals o capil·lars només apareixen a la superfície de separació de dos mitjans no miscibles i en general no afecten el moviment del fluid.

Forces màssiques i volumètriques

Són les forces que no depenen de la interacció de dV amb el fluid que l'envolta. Per tant, existirien també si dV estigués envoltat pel buit. Les forces màssiques són proporcionals a la massa, sent $\vec{f}_m$ la força per unitat de massa i $\rho\vec{f}_m$ la força per unitat de volum corresponent. Són d'aquest tipus les forces gravitatòries, per a les quals $\vec{f}_m = -g\vec{k}$, i també, si estudiem el moviment del fluid en un sistema de referència no inercial, ho són les forces d'inèrcia degudes a l'acceleració del sistema no inercial,

$$\vec{f}_m = -\vec{a}_0 - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \tag{1}$$

on $\vec{a}_0$ és l'acceleració lineal d'arrossegament i $\vec{\omega}$ la velocitat angular del sistema en rotació, sent $\vec{v}_r$ la component radial de la velocitat del fluid. El segon i el tercer terme de l'equació anterior són, respectivament, la força centrífuga i la de Coriolis.

En el cas de fluids conductors de l'electricitat, com els plasmes, cal tenir en compte forces electromagnètiques, que són forces volumètriques (proporcionals al volum, no a la massa),

$$\vec{f}_v = \rho_e\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \tag{2}$$

on ρ_e és la densitat de càrrega, $\vec{E}$ el camp elèctric, $\vec{J}$ la densitat de corrent i $\vec{B}$ el camp magnètic.

Forces de contacte o de superfície

Són les forces que depenen de la interacció de dV amb el fluid adjacent i, per tant, s'exerceixen sobre dV a través de la seva superfície, dS. Naturalment, per la tercera llei de Newton, el fluid a dV exerceix forces iguals i contràries sobre els elements de fluid adjacents. Des del punt de vista físic,

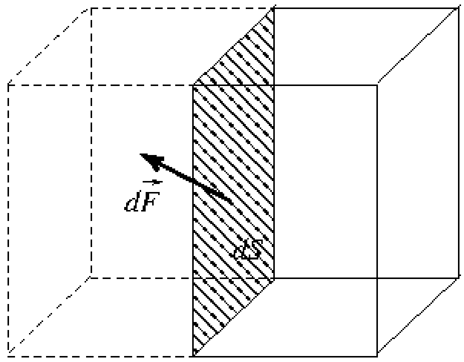


Fig. 3. Força de contacte $d\vec{F}$ sobre la superfície dS de l'element de volum de fluid

aquestes forces poden tenir dos orígens:

1. El transport de quantitat de moviment per migració de molècules a través de la superfície de contacte dS
2. Les forces intermoleculars, que les molècules d'un costat de dS exerceixen sobre les molècules de l'altre costat de dS (en líquids només)

En tots dos casos destaquem el caràcter superficial d'aquestes forces–les forces intermoleculars són de curt abast. Les forces superficials se solen expressar en termes dels esforços, o forces per unitat de superfície, $\vec{f}$, definits a cadascuna de les cares del nostre element de volum dV.

Per a cada element de volum del fluid, interessa establir la resultant de les forces de superfície, calculada sobre l'àrea que el limita.

2.4 El tensor d'esforços

En un element de volum les forces de superfície actuen sobre totes les cares de l'element. Si denotem $\vec{n}$ el vector unitari normal a una cara, un element de volum com el de la Fig. 1 té 6 cares i està sotmès a esforços a través de totes elles per part dels elements de volum contigus. El tensor

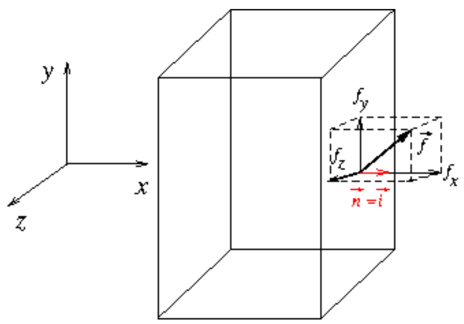


Fig. 4. Components de l'esforç sobre una de les cares d'un element de volum.

d'esforços **o de tensions** és un camp derivat dels vectors $d\vec{F}$ i $\vec{n}$, i per tant té dos índexs: el primer fa referència a l'orientació de $\vec{n}$ en el sistema de coordenades utilitzat, i el segon a la component de la força sobre el pla considerat (Fig. 5). El tensor de tensions és simètric, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Els components diagonals són els esforços normals, i els extradiagonals els esforços tangencials.

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{3}$$

El tensor d'esforços indica l'estat de tensions a cada punt d'un medi continu, i permet calcular l'esforç a qualsevol punt i qualsevol orientació de la superfície de contacte,

$$\vec{f} = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Finalment, el tensor de pressions és igual al tensor d'esforç canviat de signe,

$$\vec{\vec{P}} = -\vec{\vec{\sigma}}.$$

Per això, encara que la pressió sigui un camp escalar, representem les pressions apuntant çap a dins"de l'element de volum, mentre que els esforços es representen çap a fora".

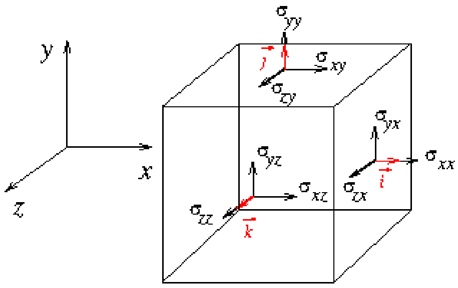


Fig. 5. Components del tensor de tensions al sistema de coordenades cartesià. Els vectors $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ són els vectors normals a les tres cares considerades de l'element de volum.

2.5 L'equació diferencial d'equilibri d'un fluid

Un fluid es defineix com un medi que no pot restar en equilibri sota l'acció d'esforços tangencials. Per tant, el tensor d'esforços en un fluid en equilibri només té components diagonals,

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

on p és el camp de pressió. En equilibri, doncs, un element de volum immers en el fluid està sotmès a pressions sobre cadascuna de les cares. Per exemple al llarg de l'eix x (Fig. 6), sobre les cares $dA = dydz$, la resultant de la força de contacte és $\frac{\partial p}{\partial x} dxdidz$, i la total

$$\vec{F} = (-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{\partial p}{\partial z})\, dxdydz = -\nabla p\, dV$$

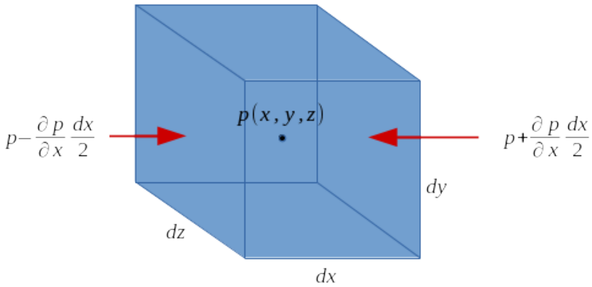


Fig. 6. Les forces de contacte en equilibri sobre les cares $\pm\vec{i}$ de l'element de volum $dV = dxdydz$.

Si actuen les forces màssiques perquè l'element de volum fluid, de densitat ρ, està dins del camp gravitatori on g és l'acceleració de la gravetat, aleshores la condició d'equilibri s'escriu

$$-\nabla p\, dV - \rho g dV \vec{j} = 0.$$

És a dir, l'equació diferencial de l'equilibri d'un fluid en un camp gravitatori és

$$\boxed{-\nabla p - \rho g \vec{j} = 0.}$$

2.6 L'equació fonamental de la hidrostàtica

Integrant l´equació diferencial de l'equilibri entre dos punts d'un fluid en equilibri sota l'acció de la gravetat, obtenim la coneguda equació fonamental de la hidrostàtica,

$$p = p_0 - \rho g(y - y_0)$$

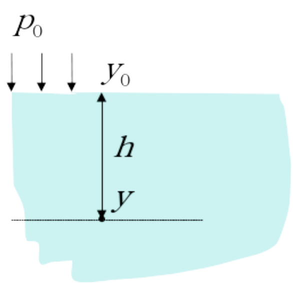


Fig. 7. L'alçada de referència y_0 sol situar-se sobre la superfície lliure, on p_0 sol ser la pressió atmosfèrica.

Aquesta equació és vàlida **mentre la densitat del fluid es pugui considerar constant en tota la seva extensió**, com és el cas dels **líquids**. El punt (y_0, p_0) és un punt qualsevol del líquid, pres com a referència, i que sol situar-se sobre la superfície lliure del mateix. L'equació fonamental de la hidrostàtica ens diu que la pressió en un líquid només depèn de la profunditat $h \equiv y_0 - y$

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h} \tag{4}$$

és a dir, que la diferència de pressió entre dos punts d'un fluid es deu únicament al pes de la columna de fluid entre aquests punts.

Igualment, la pressió atmosfèrica sobre un punt és el pes per unitat de superfície de tota la columna d'aire que hi ha sobre aquest punt, però per trobar-ne el valor cal tenir en compte que tota l'extensió de l'atmosfera és un fluid compressible, i per tant que la densitat no és constant (veure apartat 2.8). En canvi, l'acceleració de la gravetat es pot considerar constant en tota la seva extensió i varia un 0,6% des del nivell del mar fins a la troposfera. A nivell del mar, el valor de la pressió atmosfèrica és de 101.325 Pa.

2.7 Aplicacions

En aquest apartat veurem alguns exemples d'aplicació del càlcul de la pressió en un fluid i de l'equació fonamental de la hidrostàtica.

La pressió sobre un volum finit

Si la resultant de les forces de pressió sobre un element de volum dV és $\nabla p dV$, la resultant sobre un volum arbitrari V de fluid és la integral de volum

$$\int_V \nabla p \, dV.$$

Ara bé, aquesta integral no és res més que la suma de les forces de pressió sobre cadascuna de les cares dels elements de volum en què podem dividir V. Com que les forces internes cancel·len, sobre un volum finit V la resultant consisteix en la suma sobre les cares externes dels elements de volum, és a dir sobre la superfície S que envolta V.

La pressió sobre cada punt del líquid en equilibri que està en contacte amb parets sòlides és igual a la que farien elements de volum de fluid situats a la mateixa profunditat (Fig. 9). A més, el fluid que està en contacte amb parets sòlides, exercirà a cada punt forces idèntiques i de sentit contrari a les forces de pressió a què està sotmès.

L'anomenada *paradoxa hidrostàtica* (Fig. 10) es refereix a què sembla un enigma, el fet que en un conjunt de vasos comunicants l'alçada de la superfície lliure arribi al mateix nivell, sigui quina sigui la forma dels recipients. Però és una conseqüència evident de l'equació fonamental de la hidrostàtica: els punts d'un fluid en equilibri que són a la mateixa profunditat estan

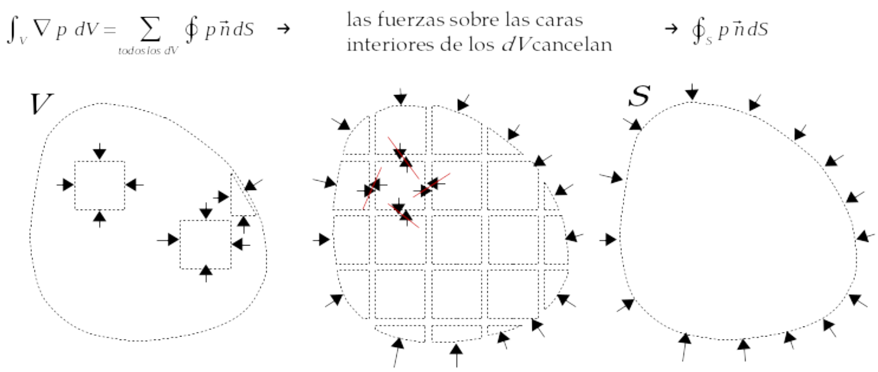


Fig. 8. La integral de volum de la força de pressió és igual a la integral de superfície de p sobre les cares externes dels elements de volum.

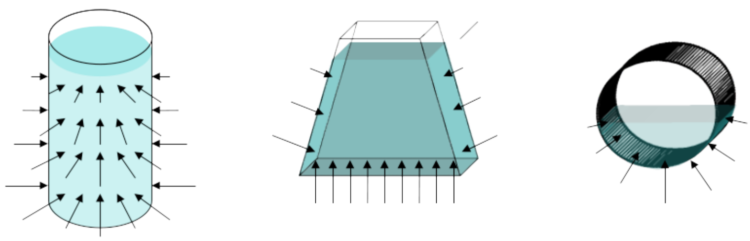


Fig. 9. Pressions sobre el líquid en contacte amb les parets d'un recipient que el conté.

sotmesos a la mateixa pressió.

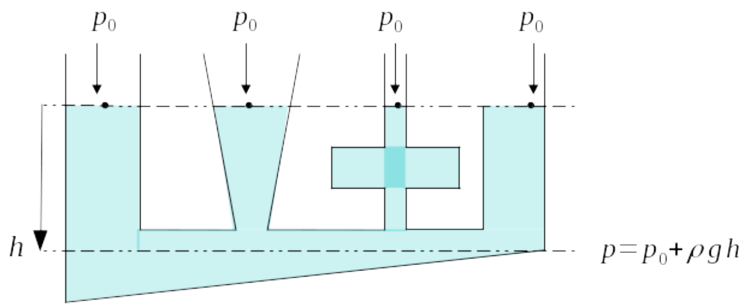


Fig. 10. Paradoxa hidrostática.

Manòmetres

L'equació fonamental de la hidrostàtica serveix de base conceptual per a la construcció de manòmetres. El més senzill consisteix en un tub en U, parcialment ple amb un líquid de densitat ρ, com mostra la Fig. 11. Dues pressions diferents, p_1 i p_2, s'apliquen a les dues branques del tub, amb el resultat que les dues columnes de líquid arriben a alçades diferents, h_1 i h_2. Prenent la referència del punt més baix del líquid, tenim $p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2$, per tant

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1)$$

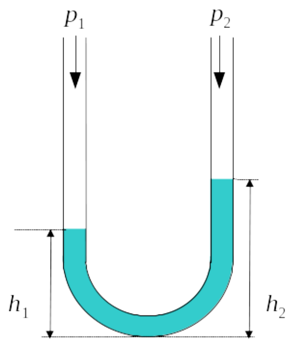


Fig. 11. Manómetre de tub en U.

Forces de flotació

El conegut principi d'Arquimedes, segons el qual la força d'empenta sobre un objecte parcialment o totalment submergit en un fluid és igual al pes del volum de fluid desplaçat, se segueix directament del resultat obtingut per a la pressió sobre un volum finit V de fluid (Fig. 8). Aquest principi és vàlid per a qualsevol fluid, sigui líquid o gas.

Efectivament, en equilibri la resultant de les forces de pressió sobre V ha de ser igual (però de sentit contrari) al pes de V. Com que les forces de pressió no depenen de la naturalesa de la superfície sobre la qual s'apliquen, són idèntiques a les que actuen sobre la porció submergida V d'un objecte qualsevol amb la mateixa forma i volum, submergit a la mateixa profunditat. Per tant, un objecte submergit estarà sotmès a aquestes mateixes forces d'empenta, la resultant de les quals és idèntica al pes del fluid desplaçat.

Forces sobre superfícies submergides

En aquest cas ens referim exclusivament a líquids, ja que en gasos la pressió no varia apreciablement amb la profunditat. Quan es tracta de calcular la força de pressió sobre una superfície no tancada, submergida totalment o parcialment en un líquid –per a les tancades ja tenim el principi d'Arquimedes, hem de calcular la integral de superfície corresponent,

$$\vec{F} = \int_S p\,\vec{n}\,dS.$$

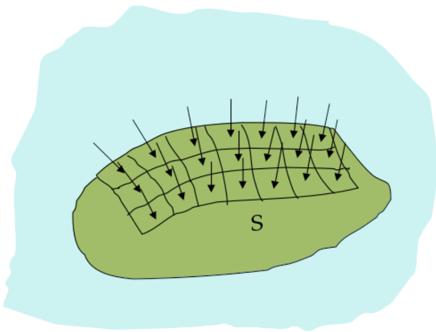


Fig. 12. Força de contacte resultant sobre la superfície S

En general, interessa calcular la resultant $\vec{F}$ de les forces de pressió, així com el centre de pressions. Aquest és el punt d'aplicació de $\vec{F}$, on el moment resultant s'anul·la. Els teoremes de la mecànica vectorial asseguren l'existència del centre de pressions en casos tipus: superfícies planes, superfícies corbes en 2D, o en porcions de superfícies esfèriques. En tots aquests casos el sistema de les forces de pressió sobre la superfície es pot reduir a un únic vector, la resultant de les forces de pressió, perquè existeix un únic centre de reducció on situar el centre de pressions. En una superfície 3D general, però, no hi ha un centre de pressions.

Hi ha casos molt simples en què es poden donar resultats generals. El més senzill és el cas d'una placa plana de forma arbitrària (Fig. 13), orientada un angle θ respecte de l'horitzontal. En el cas d'una superfície plana, tots els vectors $\vec{n}$ tenen la mateixa orientació i en podem calcular la resultant integrant el mòdul de les forces de pressió.

Ara prendrem l'eix y segons l'orientació θ, i l'origen de coordenades O el situarem a la superfície lliure del líquid, amb l'eix x contingut dins la superfície lliure (perpendicular al pla del paper). Així cada element de superfície dS de la placa se situa a una profunditat $y\,\sin\,\theta$ diferent.

Per calcular la força resultant, integrem sobre la superfície total de la placa S les forces de pressió elementals: sobre cada dS actua una força de pressió $(p_0 + \rho g y\,\sin\theta)dS$. El càlcul de la integral de superfície resulta

$$F = p_0 S + \rho g\,\sin\,\theta \int_S y dS = (p_0 + \rho g\,\sin\,\theta\,y_G)S$$

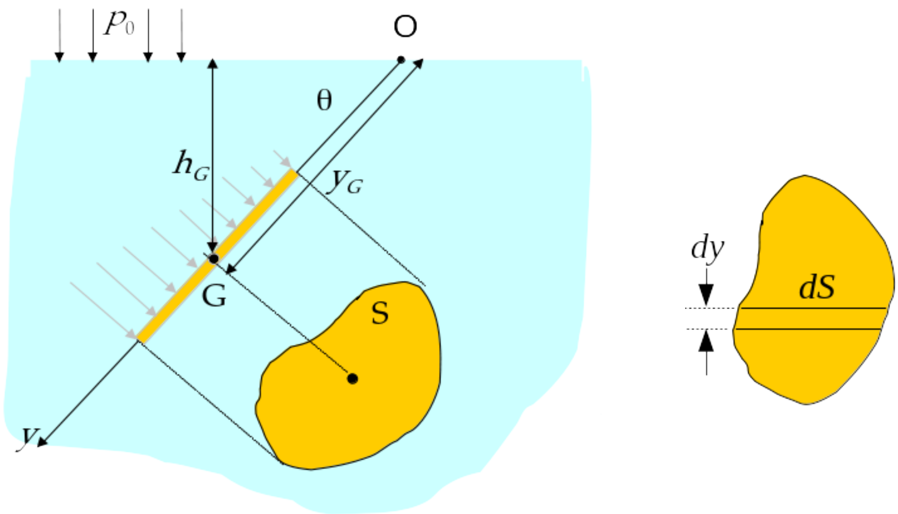


Fig. 13. Superfície plana submergida, amb el seu centroide G situat a una profunditat h_G respecte de la superfície lliure del líquid.

$$\boxed{F = (p_0 + \rho g\, h_G)S} \tag{5}$$

És a dir, la contribució del líquid a les forces de pressió sobre la placa és $\rho g\, h_G S$, o el que és el mateix, té el mateix valor que si tota la superfície estigués concentrada al punt on es troba el centroide.

El centre de pressions y_P és el centre de vectors paral·lels (*Centro de un sistema de vectores paralelos*, n.d.) del sistema de forces de pressió elementals. Es troba calculant el moment M_F de les forces de pressió respecte de l'origen de coordenades O (Fig. 14),

$$\begin{aligned} M_F \equiv y_P F = & \int_S (p_0 + \rho g \sin\theta\, y) y dS = p_0 y_G S + \rho g \sin\theta \int_S y^2 dS \\ = & p_0 y_G S + \rho g \sin\theta\, I_x \end{aligned}$$

on I_x és el moment d'inèrcia de la superfície plana respecte de l'eix x. El moment d'inèrcia el podem referir a un eix paral·lel a x que passa per G, que és més convenient ja que els moments d'inèrcia de les geometries més senzilles es troben tabulats referits a eixos que passen pels centroides. Així doncs, pel teorema de Steiner, $I_x = I_{Gx} + y_G^2 S$, i el moment resultant de les forces de pressió sobre la placa és

$$
\begin{aligned}
y_P F =& p_0 y_G S + \rho g \sin\theta \, I_{Gx} + \rho g \sin\theta \, y_G^2 S \\
=& p_0 y_G S + \rho g \, h_G \, y_G S + \rho g \sin\theta \, I_{Gx} \\
=& y_G F + \rho g \sin\theta \, I_{Gx}
\end{aligned}
$$

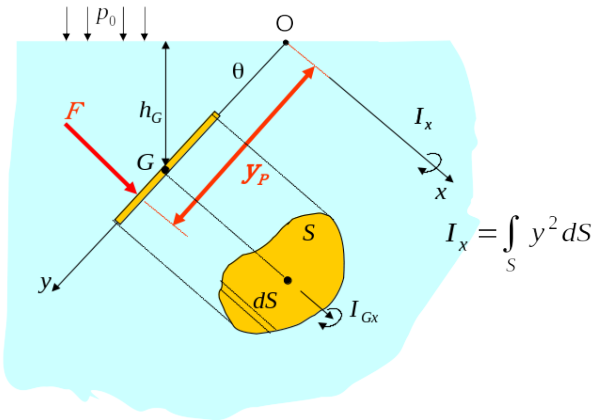


Fig. 14. Esquema per al càlcul del centre de pressions.

És a dir, el centre de pressions y_P s'aplica a una distància $\rho g \sin\theta \, I_{Gx}/F$ per sota de G sobre la placa,

$$\boxed{y_P = y_G + \frac{\rho g \sin\theta \, I_{Gx}}{F}.} \tag{6}$$

En el cas de superfícies corbes, la geometria complica generalment les integrals per calcular la força resultant i el moment. Resulta més fàcil utilitzar un volum auxiliar limitat per parets planes per fer un balanç en equilibri i calcular indirectament les forces (Fig. 15), com veurem detalladament en un exemple de classe. El càlcul de la resultant passa per calcular les compo-

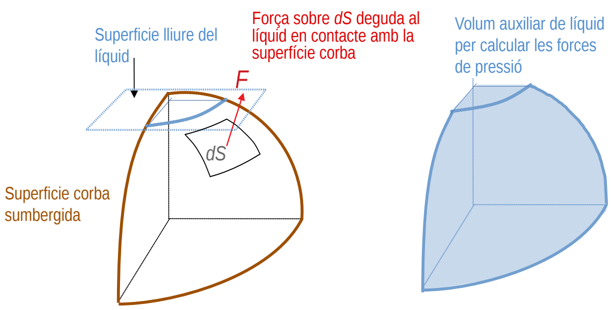


Fig. 15. Superfície corba i porció de líquid auxiliar per calcular la força de pressió.

nents de la força sobre cadascuna de les cares orientades segons els eixos coordenats, que són planes, i la condició d'equilibri sobre el volum auxiliar proporciona les tres components de la força resultant sobre la superfície corba. La força que fa el líquid sobre la superfície és igual i de sentit contrari al que fa la superfície corba sobre el líquid. El que resulta evident és que les tres components no concorreran en un punt en en una superfície corba en 3D. Sí que ho fan si la superfície corba té forma esfèrica o cilíndrica, però no en un cas general.

2.8 Equilibri sota l'acció de forces inercials

Hi ha dos casos particulars en què podem escriure una condició d'equilibri per a un líquid que no està e repòs en el sistema laboratori: quan un líquid es troba sotmès a forces d'inèrcia pel fet que hi ha una acceleració d'arrossegament constant o una rotació rígida, segons les lleis de la mecànica podem fer un balanç de forces afegint la força d'inèrcia. En cap dels dos casos hi ha moviment en el si del líquid, doncs no hi ha moviment relatiu d'unes partícules de líquid respecte d'altres (16). Considerem el cas en què un líquid està en un recipient que accelera amb una acceleració constant a perpendicular a la gravetat, direcció que podem triar com la direcció de l'eix de les x positiu. Les forces d'inèrcia són forces màssiques, i sumen com un terme més en l'equació diferencial de l'equilibri en el sistema accelerat:

$$-\nabla p - \rho g\vec{j} - \rho a\vec{i} = 0,$$

Amb un signe $-$ ja que si l'acceleració és $a\vec{i}$, la densitat de força inercial va en sentit contrari, $-\rho a\vec{i}$.

L'altre cas elemental en què trobem forces d'inèrcia és en un recipient de líquid sotmès a un moviment circular uniforme amb velocitat angular ω, respecte d'un eix paral·lel a la gravetat. Aquí apareix la força centrífuga en el sistema no inercial que gira amb el recipient. En coordenades cilíndriques, on l'eix vertical és l'eix de les z, la condició d'equilibri s'escriu en el sistema en rotació

$$-\nabla p - \rho g\vec{k} + \rho\omega^2\vec{r} = 0,$$

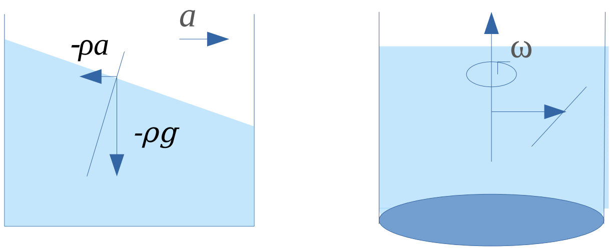


Fig. 16. Dos casos d'equilibri en un sistema de referència no inercial: un líquid sota una acceleració constant a (esquerra) i sota rotació uniforme (dreta).

Bibliografia

Centro de un sistema de vectores paralelos. (n.d.). https://docplayer.es/35098001-2-1-centro-de-un-sistema-de-vectores-paralelos.html. (Consultat 22-12-2022)

De las Heras, S. (2012). *Mecánica de fluidos en ingeniería*. Barcelona, España: Universitat Politècnica de Catalunya.

White, F. (2011). *Fluid mechanics*. New York: Mc Graw Hill.

Complements formatius

Pressió hidrostàtica en gasos. L'atmosfera estàndar

A l'apartat 2.6 hem integrat l'equació de la pressió en un líquid en equilibri. L'aire i els gasos en general pesen molt poc i si la seva extensió és petita es poden considerar incompressibles. Però si la seva extensió és prou gran, com en el cas de l'atmosfera, la densitat i la pressió ja no són uniformes. A més a més, la temperatura varia amb l'altitud, segons un perfil empíric que trobaràs descrit al llibre. Les variacions de temperatura s'han de tenir en compte per a una valoració acurada de la pressió atmosfèrica en funció de l'alçada.

White, F.M. (2011). Fluid Mechanics. Mc Graw Hill.7 ª ed. pp. 72-75

Forces sobre superfícies planes y corbes

A la darrera aplicació de l'apartat 2.7 hem calculat la resultant de les forces de pressió sobre una superfície plana i el centre de pressions. En aquest recurs trobaràs exemples d'aplicació interessants. A banda de les superfícies planes, també es tracta el cas de les superfícies corbes, que en els casos més senzills (superfícies esfèriques i cilíndriques) es poden resoldre sense necessitat de calcular directament la integral de superfície, com hem explicat a la secció 2.7.

White, F.M. (2011). Fluid Mechanics. Mc Graw Hill.7 ª ed. pp. 82-91

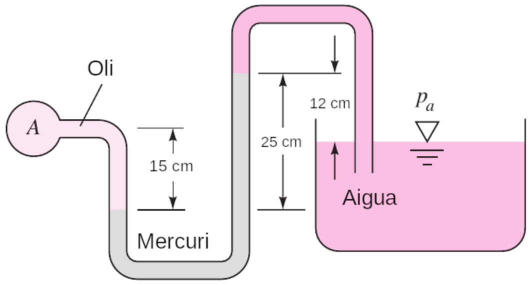
Equilibri relatiu

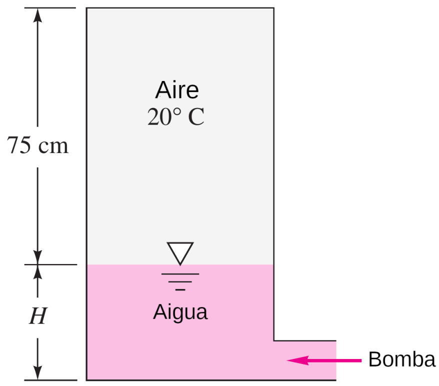
En aquest tema hem considerat que el fluid està en repòs o moviment uniforme en un sistema inercial, per poder escriure l'equació diferencial de l'equilibri de l'apartat 2.5. Però hi ha dos casos particulars de moviment d'un fluid en els quals, encara que hi hagi acceleració, no s'originen esforços tallants entre capes de fluid que puguin provocar moviment relatiu entre elles. És a dir, en aquests moviments, el fluid es pot considerar un sòlid rígid respecte al sistema de referència no inercial, per la qual cosa tots dos casos s'engloben dins de l'estàtica. Es tracta del moviment uniformement accelerat i la rotació uniforme respecte a un eix vertical. En la secció 2.8 hem descrit esquemàticament aquests dos casos, però en aquest recurs en trobareu més detalls.

De las Heras, S. (2012). Mecánica de Fluidos en Ingeniería. Universitat Politècnica de Catalunya. pp. 62-64
https://upcommons.upc.edu/handle/2099.3/36608

Exercicis

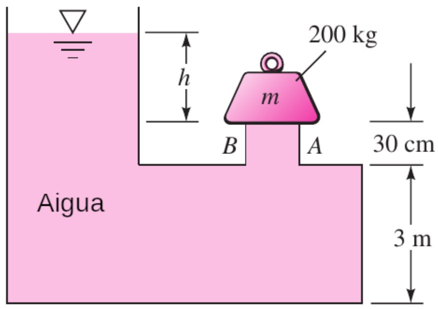
1. El sistema de la figura està a 20°C. Calcula la pressió relativa en A —és més gran o més petita que la pressió atmosfèrica p_a? En A hi ha un oli de gravetat específica 0.85.





2. Un dipòsit cilíndric s'omple mitjançant una bomba que impulsa l'aigua a una pressió de sortida de 175 kPa. En l'instant que es mostra a la figura de la dreta, la pressió de l'aire és de 110 kPa i H = 35 cm. La bomba s'atura quan ja no pot augmentar més la pressió de l'aigua. Considerant que la compressió de l'aire és isotèrmica, estima H en aquest moment.

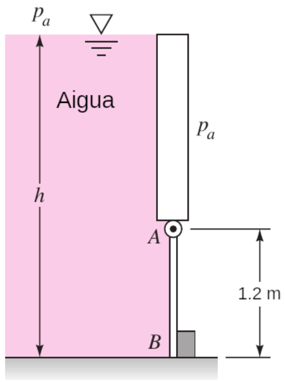
3. La comporta AB tanca una obertura circular de 80 cm de diàmetre. La porta es manté tancada per una massa de 200 kg que hi ha a sobre, tal com es mostra a la figura. A quin nivell d'aigua h s'aixecarà la porta? Densitat de l'aigua $\rho = 1000$ kg/m^3.



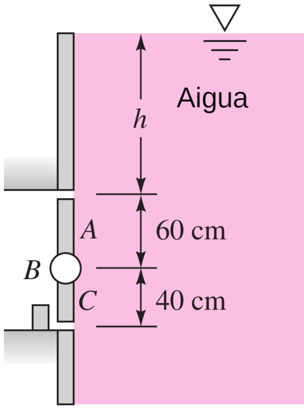
4. La comporta AB de la figura, de 1.5 m d'amplada en la direcció perpendicular al paper, no té pes apreciable, s'aguanta amb frontisses en A i s'atura amb un topall en B.

a) Calcula la força de pressió de l'aigua sobre la comporta, i el seu punt d'aplicació, si la profunditat de l'aigua h és de 3 m.

b) Quines són les forces de reacció sobre el topall B i la frontissa A?



Problema 4

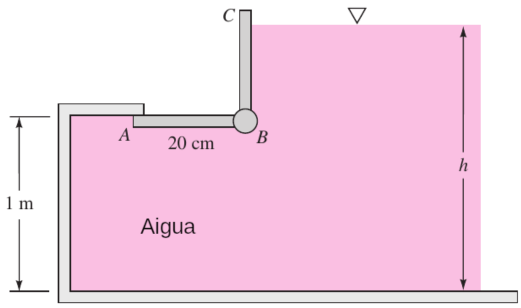


Problema 5

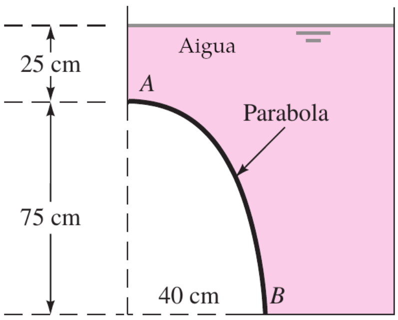
5. La comporta ABC de la figura fa 1 m^2 i està articulada en B. S'obrirà automàticament quan el nivell d'aigua h es faci prou elevat. Determina l'alçada més baixa per a la qual s'obrirà la comporta. Aquest resultat és independent de la densitat del líquid? No cal que tinguis en compte la pressió atmosfèrica, perquè si no hi ha líquid, la comporta no es mou (la pressió atmosfèrica actua per les dues bandes de la comporta i el seu efecte s'equilbra).

6. La porta ABC de la figura té una línia de frontissa fixa a B i és de 2 m de llargada en la direcció perpendicular al paper.

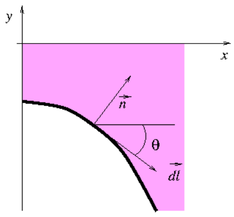
La porta s'obrirà des de A per alliberar aigua, si la profunditat de l'aigua és prou alta. Calcula el valor de h per al qual es començarà a obrir la porta.



7. El panell AB és una paràbola amb el seu màxim al punt A, i té una dimensió transversal al pla del paper de $L = 150$ cm.
Troba les components de la força que fa l'aigua (descarta la pressió atmosfèrica) sobre el panell de dues maneres, i comprova que ambdues donen el mateix:



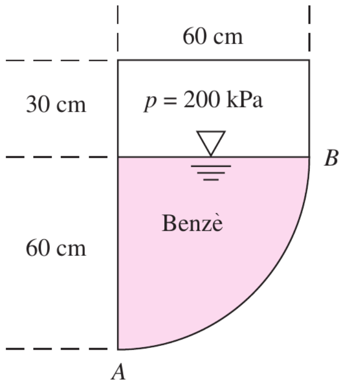
a) Integrant la força de pressió de l'aigua al llarg del panell S,



$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\int_S p d\vec{S} = -\int p\, dl\, L\, \vec{n} \\ &= -\int \rho g(0-y)\sqrt{dx^2+dy^2} L\,(-\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}) \\ &= L\int \rho g y\,(-dy\,\vec{i}+dx\,\vec{j})\end{aligned}$$

b) Plantejant l'equilibri estàtic en un volum auxiliar de líquid limitat en el pla del paper per: i) el panell parabólic, ii) la superfície lliure del líquid, iii) la paret vertical entre A i la superfície lliure, iv) B i la superfície lliure. La força de pressió sobre el líquid en contacte amb la superfície és igual a la força sobre la superfície deguda al líquid, però va en sentit contrari.

c) Calcula, amb la porció auxiliar de líquid de l'apartat b, el centre de pressions. Dibuixa la força que actua sobre la superfície parabòlica en el seu punt d'aplicació.

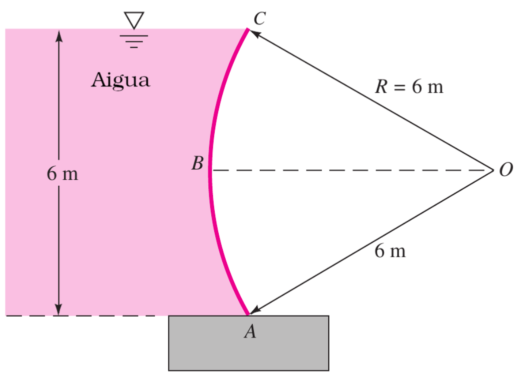


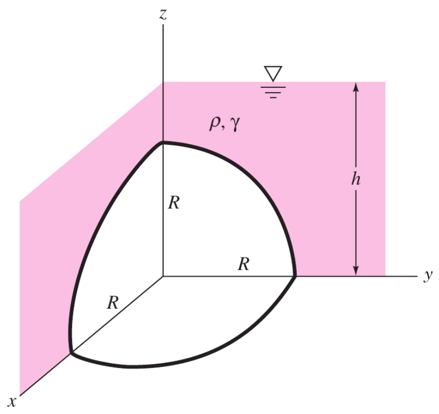
8. El tanc de la figura té $L = 1$ m de llargada, conté benzè (densitat 876 kg/m^3) i està pressuritzat a 200 kPa de pressió relativa[a]. Determina la força de pressió sobre la superfície corba i la seva línia d'acció.

[a] La pressió relativa és l'absoluta menys la pressió atmosfèrica local

9. La porta ABC, anomenada comporta de Tainter, és un arc circular que pot elevar-se i baixar-se pivotant sobre el punt O.

Per a la posició que mostra la figura, determina la força de pressió de l'aigua sobre la comporta i la seva línia d'acció. Passa pel punt O?





10. A la figura, un quadrant esfèric de radi R resta submergit en un líquid de pes específic γ i profunditat $h > R$. Troba una expressió analítica per a les components de la força de pressió deguda a l'aigua sobre el quadrant, i situa la seva línia d'acció.[a]

[a] Trobaràs el centroide d'un quadrant a https://ca.wikipedia.org/wiki/Taula_de_centroides