Tema 4

Física de Fluids

Flux viscós

Índex

Continguts

4.1 Introducció i objectius

Les lleis de conservació que hem estudiat al Tema 3 son vàlides per als fluids *ideals*. Un fluid ideal és un fluid sense fregament. Als fluids *reals*, les forces de fricció entre unes parts i unes altres del fluid (fricció interna) o entre el fluid i les parets del recipient que el conté, només apareixen quan el fluid està en moviment.

El fregament, o més exactament les anomenades forces viscoses que apareixen als fluids reals en moviment, s'han d'afegir a l'equació per a la conservació del moment que vam veure al Tema 3. Per caracteritzar-les requereixen un model verificable empíricament, igual que les forces de fregament als sòlids. Aquí intervé el model de viscositat característic de cada fluid: com vam veure al Tema 1, els fluids Newtonians es caracteritzen per esforços tallants proporcionals a la taxa de deformació (llei de Newton de la viscositat), i la constant de proporcionalitat és la viscositat absoluta μ. Però hi ha un altre tipus de fluids, els fluids No Newtonians, que no obeeixen a la llei de Newton de la viscositat, i en aquest apartat hi ha una gran varietat de fluids, amb comportaments molt variats.

Les forces de contacte associades amb la viscositat no van ser modelades adequadament fins ben entrat el segle XIX, gràcies a les contribucions de Claude Navier, Augustin Cauchy, Siméon Poisson, Adhémar Barré de Saint-Venant i George Gabriel Stokes.

Aquestes mateixes forces viscoses fan que la conservació de l'energia no es compleixi, sinó que haguem d'escriure al seu lloc un *balanç* d'energia, on haurem d'incloure l'energia dissipada per les forces viscoses.

Les equacions que governen els fluids reals en moviment no són les lleis de conservació per a la massa, moment i energia (equacions d'Euler) sinó les que inclouen els termes de viscositat i es coneixen com a equacions de Navier-Stokes. Són aquestes les que resol la Dinàmica de Fluids Computacional en aplicacions de tota mena.

Sobre les equacions de Navier-Stokes tracta precisament aquest tema. Igual que les equacions d'Euler, són equacions diferencials en derivades parcials, però a diferència d'aquelles, que constitueixen un sistema hiperbòlic, resulten ser de tipus *parabòlic*, a causa dels esforços viscosos que introdueixen els termes difusius. Tractarem sobre la seva formulació, les condicions de contorn per a la seva solució, i els nombres adimensionals que apareixen després d'adimensionalitzar-les, els quals juguen un paper molt important en la dinàmica de fluids en general. Els objectius del tema són els següents:

- Especificar el tensor d'esforços per als fluids reals
- Obtenir les equacions de Navier-Stokes
- Introduir les condicions de contorn, (en particular, la condició de *no-slip*)
- Introduir l'anàlisi dimensional de les equacions de Navier-Stokes i aprendre a discriminar els nombres adimensionals rellevants en un problema.

La bibliografia rellevant d'aquest tema està als llibres (Gerhart, Gerhart, i Hochstein, 2016, pàg. 370-374), (De las Heras, 2012, pàg. 33-37, 75-103), (Panton, 2013, pàg. 150-159, 163-165, 170-174) y (White, 2011, pàg. 229-245).

4.2 Equació constitutiva per a un fluid newtonià

El tensor d'esforços $\vec{\vec{\sigma}}$ va ser introduït al Tema 2. Les components diagonals són els esforços normals, i les extradiagonals els esforços tangencials.

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

En equilibri, i en fluids ideals en moviment on no hi ha forces viscoses, el tensor d'esforços és directament $\vec{\vec{\sigma}} = -p\mathbb{1}$, on $\mathbb{1}$ és la matriu identitat. Però els fluids reals presenten resistència a la "taxa" de deformació, i aquesta constatació empírica porta a la llei de Newton de la viscositat, com vam veure al Tema 1. Aleshores el tensor d'esforços es pot escriure com la suma d'una part d'equilibri, $-p\mathbb{1}$, més una part de no equilibri $\vec{\vec{\sigma}}_v$. Aquesta última depèn de la taxa de deformació del fluid, a traves del tensor *gradient de* *velocitat*, $\nabla\vec{v}$,

$$\nabla\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{2}$$

El tensor gradient de velocitat, com qualsevol altre tensor d'ordre dos, es pot descompondre en una part simètrica i una antisimètrica [1]. La part simètrica de $\nabla\vec{v}$, que denotarem $(\nabla\vec{v})^S$, es denomina tensor de deformació,

$$(\nabla\vec{v})^S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{3}$$

L'expresió explícita de la part simètrica del gradient de velocitat, $(\nabla\vec{v})^S$ és

$$(\nabla\vec{v})^S = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Al seu torn, la part antisimètrica,

$$(\nabla\vec{v})^A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{5}$$

representa la velocitat de rotació del fluid considerat com un sòlid rígid, i els seus components es relacionen amb el vector axial $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$, és a dir la vorticitat. Per a una informació més detallada sobre la descomposició del tensor $\nabla\vec{v}$, consulta el primer recurs de l'apartat de Complements d'aquest tema.

Per a un fluid homogeni i isótrop, la llei experimental de Navier-Poisson estableix que la relació entre els esforços viscosos $\vec{\vec{\sigma}}_v$ i la taxa de deformació representada pel tensor gradient de velocitats és lineal,

$$\vec{\vec{\sigma}}_v = 2\mu(\nabla\vec{v})^S + \lambda\nabla\cdot\vec{v}\,\mathbb{1} \tag{6}$$

i que el coeficient de proporcionalitat és la viscositat dinàmica o absoluta, μ. El coeficient λ, que multiplica $\nabla\cdot\vec{v}$ és independent de μ. Aquesta llei empíri-

[1] Si $\vec{\vec{T}}$ és un tensor qualsevol d'ordre dos, $\vec{\vec{T}} = \vec{\vec{T}}^S + \vec{\vec{T}}^A$, la part simètrica T^S es calcula fent la suma $T^S = \frac{1}{2}(T + T^T)$, on el superíndex T indica matriu transposada. La part antisimètrica T^A es calcula, respectivament, com $T^A = \frac{1}{2}(T - T^T)$.

ca és una equació constitutiva, no hi ha manera d'obtenir-la més que d'una observació directa i de les mesures experimentals pertinents. Observem que la traça de $(\nabla\vec{v})^S$ és precisament la divergència de $\vec{v}$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{7}$$

De fet, el tensor de deformació $(\nabla\vec{v})^S$ es pot separar encara en dos components *irreduïbles*, per una banda la part isótropa (la traça de $(\nabla\vec{v})^S$, igual a $\nabla\cdot\vec{v}$) i d'altra banda, un tensor simètric i sense traça, $(\nabla\vec{v})^{S0}$, de la manera següent,

$$(\nabla\vec{v})^{S0} \equiv \frac{1}{2}[(\nabla\vec{v}) + (\nabla\vec{v})^T] - \frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{v}\mathbb{1}.$$

Per tant, la relació 6 es pot escriure com

$$\vec{\vec{\sigma}}_v = 2\mu(\nabla\vec{v})^{S0} + (\tfrac{2}{3}\mu + \lambda)\nabla\cdot\vec{v}\,\mathbb{1}, \tag{8}$$

on el segon terme defineix la viscositat de volum, $\zeta = \frac{2}{3}\mu + \lambda$. Aquesta definició permet expressar l'equació constitutiva d'un fluid newtonià com

$$\boxed{\vec{\vec{\sigma}}_v = 2\mu(\nabla\vec{v})^{S0} + \zeta\nabla\cdot\vec{v}\,\mathbb{1}}\ . \tag{9}$$

Observa que si el flux és incompressible (en líquids, i en gasos a baixa velocitat) la condició que la densitat sigui constant, per l'equació de conservació de la massa del Tema 3, es tradueix en $\nabla\cdot\vec{v} = 0$, i la viscositat de volum no juga cap paper. La divergència de la velocitat s'associa a compressions i expansions dels elements fluids, que impliquen forces viscoses en gasos reals.

La viscositat de volum s'anul·la en un *fluid de Stokes*. Per l'equació 8, això implica que $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. Però que la viscositat de volum sigui zero només es compleix en gasos monoatòmics. A la resta de fluids, la viscositat de volum té valors comparables als de la viscositat dinàmica μ.

4.3 Les equacions de Navier-Stokes

Les equacions de Navier-Stokes són balanços microscòpics de matèria, moment i energia, vàlides per a qualsevol tipus de flux. Les variables són la densitat del fluid, la velocitat del flux i l'energia per unitat de volum, ε. Al límit invíscid, es redueixen a les equacions d'Euler. La conservació de la massa, que vam obtenir al Tema 3, segueix sent vàlida sense cap restricció,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0. \tag{10}$$

La conservació del moment,

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} - \rho g \vec{j}, \tag{11}$$

també és vàlida, tenint en compte que el tensor d'esforços $\vec{\vec{\sigma}}$ conté ara els termes viscosos, igual que el balanç d'energia,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \vec{v}) = \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\vec{\sigma}}) - \rho g \vec{j} \cdot \vec{v} + \dot{Q}, \tag{12}$$

que formalment vam obtenir també al Tema 3. Fent ús de l'equació constitutiva 6, es poden escriure les equacions de Navier-Stokes per a un fluid Newtonià. Aquí cal ser molt meticulosos amb els càlculs i fixar-s'hi bé: un punt entre dos vectors indica un producte escalar i, per tant, l'operació dóna un escalar (un nombre). Un punt o producte escalar entre un tensor d'ordre dos i un vector dóna lloc a un vector (columna). Un punt entre un vector i un tensor d'ordre dos dóna un vector (fila), i així sempre, tenint en compte l'ordre de les operacions tensorials. Si no hi ha punt, no hi ha contracció, i per això $\nabla \vec{v}$, el gradient de velocitat, és un tensor de segon ordre, però $\nabla \cdot \vec{v}$, la divergència de la velocitat, és un escalar. A l'hora de desenvolupar les operacions, utilitzem sempre la notació d'Einstein, que és compacta i inequívoca: índexs repetits indiquen que hi ha un producte escalar. A més a més, el sumatori sobre totes les components està implícit.

Balanç de moment

Primer, separem el tensor d'esforços en les parts d'equilibri i viscosa, amb la qual cosa $\nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}}$ es pot escriure

$$\nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}}_v$$

La divergència del tensor d'esforços és un vector fila, pel que hem dit més amunt. La seva component j es pot desenvolupar amb l'ajuda de la notació d'Einstein per obtenir l'expressió següent,

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}_v)_j = &\ \partial_i\sigma_{v,ij} = \partial_i[\mu(\partial_i v_j+\partial_j v_i)]+\partial_i(\lambda\nabla\cdot\vec{v})\delta_{ij}\\ = &\ \partial_i[\mu(\partial_i v_j+\partial_j v_i)]+\partial_j(\lambda\nabla\cdot\vec{v})\end{aligned}$$

Considerem que els coeficients de viscositat μ, λ són constants, per simplificar els resultats, però si no ho fossin, hauríem de prendre les derivades parcials també sobre els coeficients. En el cas més simple, μ i λ són constants, però poden dependre de la taxa de deformació mateixa (fluids no newtonians) o de la temperatura, per exemple, i si hi ha gradients de temperatura, hi haurà canvis locals de la viscositat. En el primer terme de l'expressió anterior, ∂_i^2 sumat sobre tots els índexs i resulta en la laplaciana de la velocitat. En el segon, els índexs i sumats implícitament a $\partial_i v_i$, proporcionen la divergència de $\vec{v}$. Finalment doncs,

$$(\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}_v)_j = \mu\nabla^2 v_j+\mu\partial_j(\nabla\cdot\vec{v})+\lambda\partial_j(\nabla\cdot\vec{v}),$$

és a dir,

$$\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}_v = \mu\nabla^2\vec{v}+(\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) = \mu\nabla^2\vec{v}+(\tfrac{1}{3}\mu+\mu_v)\nabla(\nabla\cdot\vec{v}).$$

Aquest terme viscós representa la *difusió de moment*. En un flux incompressible, es compleix $\nabla\cdot\vec{v}=0$ i per tant

$$\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}_v = \mu\nabla^2\vec{v}.$$

Per altra banda, si la densitat és constant, podem transformar el primer membre de l'equació 11 treient ρ fora de les derivades,

- $\dfrac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} = \rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$
- $\nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) = \rho\nabla\cdot(\vec{v}\vec{v}) = \rho(\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}+\vec{v}\nabla\cdot\vec{v}) = \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$

I així finalment, l'equacide transport de moment per a un flux incompressible viscós queda

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla p+\mu\nabla^2\vec{v}-\rho g\vec{j}. \tag{13}$$

Balanç d'energia

Ara cal desenvolupar el terme $\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\vec{\sigma}}_v)$ de l'equació de balanç d'energia 12, on apareix implícit en la descomposició del tensor d'esforços:

$$\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\vec{\sigma}}) = -\nabla(p\vec{v}) + \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\vec{\sigma}}_v).$$

Aquest terme és un escalar (perquè el producte $\vec{v} \cdot \vec{\vec{\sigma}}_v$ dóna un vector) que es pot desenvolupar amb ajuda de 6, tot suposant que, igual que anteriorment, μ i λ són constants,

$$\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\vec{\sigma}}_v) = \partial_i(v_j \sigma_{v,ji}) = \mu \partial_i[v_j(\partial_j v_i + \partial_i v_j)] + \lambda \partial_i(v_j \nabla \cdot \vec{v}\, \delta_{ij}),$$

És un bon exercici desenvolupar terme a terme cadascuna d'aquestes contribucions, per apartar i eliminar els termes en $\nabla \cdot \vec{v}$ que s'anul·len en un flux incompressible,

- introduint v_j sota la derivada ∂_j al primer terme, mitjançant la regla de la derivada del producte;

$$\partial_i(v_j \partial_j v_i) = \partial_i \partial_j (v_j v_i) - \partial_i(v_i \partial_j v_j) = \nabla\nabla : \vec{v}\vec{v} - \nabla \cdot (\vec{v} \nabla \cdot \vec{v})$$

- reescrivint el segon terme com

$$\partial_i(v_j \partial_i v_j) = \tfrac{1}{2} \partial_i^2 v_j v_j = \tfrac{1}{2} \nabla^2 v^2 \,,$$

- i el tercer com

$$\partial_i(v_j \nabla \cdot \vec{v}\, \delta_{ij}) = \partial_i(v_i \nabla \cdot \vec{v}) = \nabla \cdot (\vec{v} \nabla \cdot \vec{v}).$$

Sumant tots els termes obtenim

$$\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\vec{\sigma}}_v) = \mu[\nabla\nabla : \vec{v}\vec{v} + \tfrac{1}{2}\nabla^2 v^2] + (\lambda - \mu) \nabla \cdot (\vec{v} \nabla \cdot \vec{v}).$$

Quan el flux és incompressible i per tant $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, els termes $\nabla \cdot (\varepsilon \vec{v})$ i $-\nabla p \vec{v}$ també poden desenvolupar-se i simplificar-se,

$$\nabla \cdot (\varepsilon \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \varepsilon + \varepsilon \nabla \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \nabla \varepsilon$$

$$-\nabla(p\vec{v}) = -\vec{v}\nabla p - p \nabla \cdot \vec{v} = -\vec{v} \nabla p.$$

Amb tot això, l'equació de balanç microscòpic d'energia queda

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varepsilon = -\vec{v}\nabla \cdot p + \mu[\nabla\nabla : \vec{v}\vec{v} + \tfrac{1}{2}\nabla^2 v^2] - \rho g \vec{j} \cdot \vec{v} + \dot{Q}. \tag{14}$$

Els termes que depenen de la viscositat representen l'escalfament viscós i per això són positius, és a dir: la fricció genera calor. Quan no s'estudien efectes tèrmics en el flux, aquesta equació és irrellevant i no es pren en consideració.

Equacions de Navier-Stokes per a un flux incompressible en absència d'efectes tèrmics

Sense el balanç d'energia, les equacions es redueixen a la conservació de la massa i del moment,

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ &\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho\vec{v} \cdot \nabla\vec{v} = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{g}. \end{aligned}} \tag{15}$$

On hem seguit incloent la força de gravetat, en representació de qualsevol força externa que pugui actuar sobre el fluid. A l'equació de transport de moment s'han d'afegir les forces d'inèrcia, si hem de prendre un sistema de referència no inercial per al moviment del fluid. Encara que estan escrites en forma vectorial, les equacions 15 representen quatre equacions, la condició d'incompressibilitat, més tres equacions escalars per a cadascuna de les components de la velocitat (en tres dimensions).

Les equacions 15 es poden escriure en qualsevol sistema de coordenades que calgui. Normalment s'utilitzen en cartesianes o cilíndriques, desenvolupant els operadors gradient i divergència (Gerhart et al., 2016, pàg. 321-322), però es poden escriure també en un sistema de coordenades generalitzat (Petrila i Trif, 2005, pàg. 144-147).

Les equacions de Navier-Stokes constitueixen un sistema d'equacions en derivades parcials (EDP) per al camp de velocitat, de primer ordre en el temps, de segon en l'espai. Per això s'han d'acompanyar d'un conjunt de condicions suplementàries per resoldre'ls. En el cas d'un flux incompressible no estacionari i sense efectes tèrmics, cal especificar les condicions *inicials* per a $\vec{v}$, així com les *condicions de contorn* que ha de satisfer $\vec{v}$ a les fronteres del domini del nostre problema.

No es coneix solució analítica general per al problema de Navier-Stokes, ni tan sols hi ha un teorema general que garanteixi la seva existència i unicitat. De fet aquest és un dels problemes de matemàtica aplicada que queden pendents de fa més d'un segle, i hi ha una suculenta recompensa per a qui el resolgui. Per començar, els problemes de contorn són difícils de tractar, sobretot si són tridimensionals: no es pot garantir que hi hagi una solució per a qualsevol condició de contorn que puguem imaginar. Després, el terme no lineal $\vec{v} \cdot \nabla\vec{v}$ del primer membre de l'equació de transport de moment dificulta enormement el tractament del problema. Aquest terme ja apareix a les equacions d'Euler, però no oblidem que aquestes són de *primer ordre* en l'espai, i en ser conservatives, tenen una integral primera. Aquesta integral en el cas estacionari dóna lloc a l'equació de Bernouilli, que "resol" el problema, ni que sigui formalment.

Fixa't que la densitat ρ no apareix com a variable en l'equació 15, ja que el flux és incompressible: amb què el camp de velocitat satisfaci la condició $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, es garanteix la constància de la densitat. El camp de pressió p ha de ser consistent amb aquest requisit, i per tant, l'equació d'estat és irrellevant. Només quan es tracta de flux compressible, hem de tenir en compte l'equació d'estat del fluid (que relaciona densitat, pressió i temperatura), i afegir-la al problema.

4.4 Condicions de contorn per a les equacions de Navier-Stokes

En ser equacions de segon ordre en l'espai, ja que la derivada d'ordre superior és la que apareix al terme de la laplaciana de la velocitat, $\nabla^2\vec{v}$, necessitem especificar condicions de contorn adequades. En problemes d'EDP lineals, se sap que determinats tipus de condicions de contorn donen lloc a problemes "ben plantejats", perquè tenen solució (en anglès, *well-posed*, en contraposició a *ill-posed*, és a dir "mal plantejats"). A la pràctica, els problemes "well-posed" són aquells que tenen solució i aquesta és única. L'existència i unicitat de la solució deriva de les propietats de la funció de Green (Arfken, Weber, i Harris, 2013, pàg. 447–467) per a problemes *lineals*. En el

Condicions de contorn típiques en MF	
Dirichlet	$\vec{v} = 0$ o $\vec{v} = \vec{v}_0$
Neumann	$\vec{n} \cdot \nabla \vec{v} = 0$ ($\vec{n}$ vector normal a la frontera)
Robin	$\vec{n} \cdot \nabla T = -H(T - T_\infty)$, ($T_\infty$, H constants)

Taula 1. Tipus de condicions de contorn utilitzades en Mecànica de Fluids.

cas dels problemes de la física matemàtica, aquestes condicions que donen lloc a problemes "well-posed" són concretament del tipus no mixte (no barregen els valors de la funció i/o de la seva derivada en els extrems del contorn). Entre aquestes condicions de tipus no mixte, es poden distingir les de "Dirichlet", les de "Neumann", i una combinació de les dues: "Robin". Les condicions de tipus Robin no solen aparèixer en problemes de transport de moment, però sí són molt habituals en transport de calor; la condició de refredament de Newton n'és un exemple (Taula 1).

En general, el domini en els problemes de MF no s'estén fins a l'infinit. Només en alguns casos podrem estendre el medi fins a l'infinit i emprar condicions de contorn "naturals": tot s'anul·la a l'infinit, o bé s'esvaeix la influència del contorn sòlid. Per contra, les condicions de sortida –com el valor de la pressió, per exemple, condicionen el moviment del fluid igual que les d'entrada: pensem en el flux en una canonada. Si focalitzem el problema en un domini limitat (com se sol fer en CFD) per facilitar-ne la resolució, parlem d'aigües amunt quan ens referim a tot el que hi ha abans del domini de resolució, i d'aigües avall per referir-nos al que passa més enllà, un cop hem sortit del domini, en el sentit del flux. Substituïm el que hi hagi aigües "amunt" i "avall" per condicions de contorn apropiades.

Condició de *no-slip*

La condició $\vec{v} = 0$ de tipus Dirichlet que apareix a la Taula 1 és la condició anomenada de *no-slip* (que significa "no lliscament"), escrita per a un contorn sòlid en repòs al sistema de referència utilitzat. Efectivament, es considera que el fluid que es troba molt a prop d'una paret sòlida té la mateixa velocitat que la pròpia paret, a causa de l'atracció entre el substrat i les molècules de fluid, com si veritablement s'hi adherís. Observa a l'enllaç següent `https://www.youtube.com/watch?v=cUTkqZeiMow` quin és l'efecte observable d'aquestes forces cohesives entre el fluid i les superfícies sòlides. En general, la condició de *no-slip* s'escriu com

$$\vec{v} = \vec{v}_w \qquad \text{sobre el contorn sòlid} \tag{16}$$

on $\vec{v}_w$ és la velocitat de la paret sòlida.

La condició de *no-slip* regeix en els fluxos macroscòpics de fluids reals a prop de parets pràcticament sense excepció. L'excepció són els gasos enrarits: molt a prop de la paret, a distàncies comparables o inferiors al lliure recorregut mitjà de les molècules de fluid, les molècules reboten sobre la paret i llisquen en major o menor grau. Però perquè aquest efecte sigui tangible, s'ha de tractar de gasos enrarits on el nombre de Knudsen no sigui excessivament petit, ja que a les densitats habituals aquestes distàncies es tornen tan petites que a la pràctica s'anul·len. La condició de lliscament o *slip* implica que, mentre que la component de la velocitat del flux normal a la paret és igual a la de la mateixa paret,

$$(\vec{v} - \vec{v}_w) \cdot \vec{n} = 0$$

i és de tipus Dirichlet, la velocitat del flux paral·lela a la paret, que podem denotar com a u per no complicar la notació,

$$u - u_w = \beta \vec{n} \cdot \nabla u \tag{17}$$

satisfà per contra una condició de tipus Robin, amb β la longitud de lliscament, que és de l'ordre del recorregut lliure mitjà.

Condicions de contorn en una interfície entre dos fluids

En un problema amb dos fluids en contacte, regeixen condicions de contorn específiques, que es resumeixen en un balanç de forces a través dels dos medis. Imaginem una interfície com la de la Fig. 1, on considerem una superfície S limitada per un contorn tancat L. La curvatura és manté gràcies a l'acció de la tensió superficial σ, una força per unitat de longitud en la direcció de $\vec{s}$ en cada punt al llarg de L i que actua per aplanar la superfície S.

Realitzem un balanç integral de forces sobre un element de volum V (colorejat a la figura) que tanca la superfície interfacial S limitada pel contorn L,

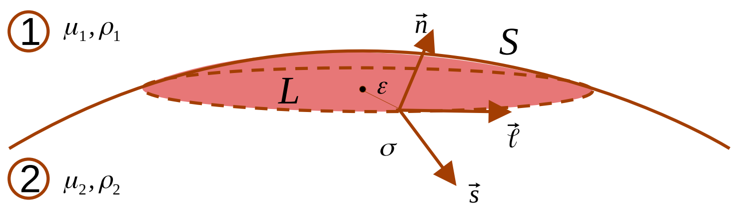


Fig. 1. Interfície entre dos medis: el medi 1, a dalt, amb densitat ρ_1 i viscositat dinàmica μ_1; i 2, a baix, amb ρ_2, μ_2. El vector $\vec{\ell}$ és el vector unitari tangent a la corba L en cada punt, $\vec{n}$ és el vector normal a la superfície, i $\vec{s}$ és el vector tangent a S i perpendicular als altres dos.

igual que l'Eq. 10 del Tema 3,

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v})\right] dV = \int_V \rho \vec{g}\, dV + \oint_S \vec{\vec{\pi}} \cdot \vec{n}\, dS + \oint_L \sigma \vec{s}\, d\ell$$

El primer membre representa el terme inercial, degut a l'acceleració del fluid, amb la derivada material del moment integrada al volum V (ja hem convertit el balanç de moment a través de la superfície S en una integral de volum gràcies al teorema de Gauss). El primer terme del segon membre són les forces màssiques, i la diferència respecte de l'Eq. 10 del Tema 3 és que

- $\oint_S \vec{\vec{\pi}} \cdot \vec{n}\, dS$ és simplement la integral de superfície de les forces de contacte sobre S, on hem reemplaçat $\vec{\vec{\sigma}}$ per $\vec{\vec{\pi}}$ com a símbol per al tensor d'esforços, per no confondre'l amb
- el símbol σ de la força de tensió superficial, la qual s'exerceix al llarg de la corba L que limita S.

Quan l'element de superfície S és prou petit, la seva dimensió típica $\epsilon \to 0$. Si $V \sim \varepsilon^3$ i $S \sim \varepsilon^2$, els termes de volum (terme inercial i forces màssiques, o tot el que porta la densitat, per entendre'ns) se'n van a zero ràpidament, mentre que les forces de superfície, és a dir les degudes al contacte amb els fluids i la tensió superficial, ho fan més a poc a poc. Per tant, en aquest límit on la superfície S és una fina làmina, el balanç de forces ha de ser

$$0 \approx \int_S (\vec{\vec{\pi}}_1 - \vec{\vec{\pi}}_2) \cdot \vec{n}\, dS + \int_L \sigma \vec{s}\, d\ell$$

on $\vec{\vec{\pi}}_1$, $\vec{\vec{\pi}}_2$ es refereixen al medi 1 i 2, respectivament, i hem utilitzat que $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$. És una mica laboriós transformar la integral de línia del segon terme en una integral de superfície, però utilitzant el teorema de Stokes es pot demostrar que [2]

$$\oint_L \sigma \vec{s}\, d\ell = \int_S (\nabla\sigma - \sigma\vec{n}\cdot\nabla\vec{n})\, dS$$

Per tant,

$$0 = \int_S (\vec{\vec{\pi}}_1 - \vec{\vec{\pi}}_2)\cdot\vec{n}\, dS + \int_S (\nabla\sigma - \sigma\vec{n}\cdot\nabla\vec{n})\, dS$$

Com que S és un element de superfície arbitrari, la condició que s'ha de complir a la interfície és

$$(\vec{\vec{\pi}}_1 - \vec{\vec{\pi}}_2)\cdot\vec{n} + \nabla\sigma - \sigma\vec{n}\cdot\nabla\vec{n} = 0 \tag{18}$$

Què representen, terme a terme, aquestes contribucions? Els primers termes són evidents,

$\vec{\vec{\pi}}_1$	Esforç (força/àrea) exercit per 1 sobre 2 (generalment tindrà components tant normals com tangencials)
$\vec{\vec{\pi}}_2$	Esforç (força/àrea) exercit per 2 sobre 1 (generalment tindrà components tant normals com tangencials)

Dels termes de tensió superficial, un és d'esforç tangencial i l'altre normal:

$\nabla\sigma$	Esforç tangencial associat a gradients de tensió superficial
$\sigma\vec{n}\cdot\nabla\vec{n}$	Força normal de curvatura per unitat d'àrea (associada a la curvatura local de la superfície).

[2]Primer escrivim $\vec{s} = -\vec{n}\times\vec{\ell}$. Després, si prenem un vector auxiliar *constant* $\vec{a}$ qualsevol, i el multipliquem escalarment per la integral de línia que volem transformar, obtindrem

$$\vec{a}\cdot\int_L \sigma\vec{s}d\ell = -\int_L \sigma\vec{a}\cdot(\vec{n}\times d\vec{\ell}) = \int_L (\sigma\vec{n}\times\vec{a})\cdot d\vec{\ell}$$

Ara apliquem el teorema de Stokes,

$$\int_L (\sigma\vec{n}\times\vec{a})\cdot d\vec{\ell} = \int_S [\nabla\times(\sigma\vec{n}\times\vec{a})]\cdot\vec{n}\, dS$$

Utilitzant les identitats del càlcul vectorial es pot desenvolupar la darrera igualtat, i obtindrem

$$\int_S [\nabla\times(\sigma\vec{n}\times\vec{a})]\cdot\vec{n}dS = \vec{a}\cdot\int_S [\vec{n}(\vec{n}\cdot\nabla\sigma) - \sigma\vec{n}\,\nabla\cdot\vec{n} + \nabla\sigma + \sigma(\nabla\vec{n})\cdot\vec{n}]\, dS$$

El producte escalar $\vec{n}\cdot\nabla\sigma = 0$ perquè el gradient de σ ha d'estar contingut dins de S, mentre que $(\nabla\vec{n})\cdot\vec{n} = 1/2\nabla(\vec{n}\cdot\vec{n}) = 1/2\nabla(1) = 0$. Així doncs,

$$\vec{a}\cdot\int_L \sigma\vec{s}d\ell = \vec{a}\cdot\int_S [-\sigma\vec{n}\,\nabla\cdot\vec{n} + \nabla\sigma]\, dS$$

Prescindint de $\vec{a}$, que és arbitrari, hem obtingut la igualtat que buscàvem.

Exemple: Condicions en una interfície plana entre dos fluids, sense tensió superficial

Escriu les condicions de contorn a la interfície entre dos fluids incompressibles, quan les forces de tensió superficial són inapreciables (interfície plana).

La condició Eq. 18 és particularment simple quan no cal tenir en compte la tensió superficial,

$$\vec{\vec{\pi}}_1 \cdot \vec{n} = \vec{\vec{\pi}}_2 \cdot \vec{n}$$

És a dir, l'esforç és continu sobre la interfície. Situem la superfície en $z = 0$ ($\vec{n} = \vec{k}$). En la direcció normal (z) la condició anterior s'escriu

$$-p_1 + 2\mu_1 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_1 = -p_2 + 2\mu_2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_2$$

on hem utilitzat les Eqs. 4 i 6 amb l'aproximació de flux incompressible ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$). En la direcció tangent a la superfície, per exemple x, l'esforç és també continu,

$$\mu_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_1 = \mu_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_2$$

4.5 Anàlisi dimensional

Un cop establertes les equacions de transport dels fluids, amb les seves equacions constitutives, la geometria particular del problema i les condicions de contorn adequades, podríem pensar que el problema està llest per ser resolt. Però no sol ser fàcil: analíticament, això s'aconsegueix en molt pocs casos, a causa de la mateixa naturalesa de les equacions, que són no lineals en la velocitat. Per conèixer els detalls del flux en els problemes que es presenten a la física i l'enginyeria, es recorre als experiments o alternativament a la CFD.

L'anàlisi dimensional sorgeix de la necessitat de facilitar el disseny experimental mitjançant la simplificació dels problemes, utilitzant models a petita escala comparables al sistema real. Actualment, es realitza un gran volum de recerca en CFD mentre que es recorre a l'experimentació, que sol ser relativament més costosa en mitjans, només per verificar els resultats finals d'un nombre reduït de prototips. Ambdues estratègies es complementen i s'uneixen esforços darrere d'una major comprensió del flux de fluids en ciència i enginyeria.

Les lleis de la naturalesa són relacions entre magnituds físiques, vàlides independentment de les unitats utilitzades. Per això és perfectament lícit escriure-les en funció de *magnituds adimensionals*, que no tenen unitats. Aquesta és la base de lanàlisi dimensional.

Mitjançant l'anàlisi dimensional, podem formar agrupacions adimensionals i treballar-hi, en lloc de fer-ho amb magnituds físiques reals. Amb això es redueix el nombre de variables per tractar: contra menys agrupacions resultin en un problema, menys experiments cal fer. El mètode científic es basa en la tècnica del control de paràmetres, és a dir variar un sol paràmetre cada cop, mentre els altres es mantenen constants. De manera que, com més paràmetres o agrupacions adimensionals en resultin, més gran serà el nombre d'experiments que haurem de fer per cobrir el rang de variació, i per comprendre un fenomen determinat. Un altre avantatge addicional que ens proporciona la teoria dimensional és predir els resultats d'un model real, en base als obtinguts assajant amb un model a escala.

4.6 Teorema Π de Buckingham i definició de nombres adimensionals

Hi ha dues qüestions fonamentals sobre el punt anterior que hem de contestar, 1) A quantes variables podem reduir l'estudi del nostre problema? 2) Quines són les variables adimensionals que substitueixen la llista original de variables?

La resposta a aquestes preguntes la proporciona el teorema bàsic de l'anàlisi dimensional o el teorema Π de Buckingham, que estableix el següent:

Si una equació dimensionalment homogènia implica n variables, es pot reduir a una relació entre $n - r$ grups adimensionals (grups Π), on r és el nombre mínim de dimensions bàsiques de referència, requerides per descriure les n variables.

En un problema real, hi sol intervenir un nombre elevat de magnituds físiques. No totes són fonamentals. En problemes de flux de fluids sense forces electromagnètiques ni reaccions químiques, només intervenen variables mecàniques (com ara la velocitat i la densitat) i tèrmiques (com la temperatura i la calor específica). Les dimensions de totes poden expressar-se en termes de quatre dimensions bàsiques: massa M, longitud L, temps T, i temperatura θ. És a dir, quan no es consideren efectes tèrmics, totes les variables poden expressar-se en funció de tres úniques dimensions fonamentals, M, L, i T. Denotarem la dimensió d'una variable q com a $[q]$. Per exemple, la dimensió de la velocitat v és $[v]$ = L/T, i la de la pressió és $[p]$ = [força]/[superfície] = ML^{-1} T^{-2}.

La descripció de l'anàlisi dimensional que exposarem es basa en el mateix mètode de Buckingham de 1914. Si $q_1, q_2, ...q_n$ són n variables i paràmetres descriptius d'un problema que intervenen en una llei física, ha d'existir entre ells una relació del tipus

$$f(q_1, q_2, ...q_n) = 0.$$

Aquesta relació s'ha de poder reescriure en funció dels $n - r$ grups Π adimensionals,

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, ...\Pi_{n-r}) = 0 \quad \text{o també,} \qquad \Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3...\Pi_{n-r}) \tag{19}$$

Els grups adimensionals no són únics, però un nombre $(n-r)$ forma un conjunt independent i complet de variables, que descriu l'espai de paràmetres de la solució.

El procés danàlisi dimensional es pot separar en un seguit de passos. Per il·lustrar-ho, l'aplicarem a determinar la dependència funcional de la caiguda de pressió Δp entre dos punts d'una canonada circular per la qual flueix un fluid viscós.

- 1. Seleccionar variables i paràmetres.
  La llista de paràmetres ha de contenir una única variable desconeguda, al nostre exemple, Δp. La resta de variables procedirà de la geometria del problema, les condicions de contorn, les condicions inicials i els paràmetres materials. Constants físiques dimensionals (com ara g, per exemple) també es poden incloure. Com menor sigui el nombre

de variables, més útils seran els resultats. A l'exemple de la canonada, la distància ℓ que separa els dos punts de la mateixa on cau la pressió, el seu diàmetre D i la seva rugositat ϵ, més la densitat ρ i la viscositat μ del fluid que circula, serien paràmetres geomètrics i materials addicionals. A més, la condició de contorn imposa un valor característic per a la velocitat a la secció d'entrada, U. L'equació que relaciona les variables del problema exemple es pot escriure com

$$f(\Delta p, \ell, D, \epsilon, \rho, \mu, U) = 0$$

El nombre total de variables es $n = 7$.

- 2. Crear la matriu dimensional.
  La matriu dimensional té n columnes. El nombre de files és igual al nombre de dimensions fonamentals, que és $r = 3$ en problemes purament mecànics. Al nostre exemple, la matriu dimensional és de dimensió 3×7. Els elements de la matriu són els exponents de les n variables sobre les r dimensions fonamentals. Per trobar-los, cal descompondre els n paràmetres a les r dimensions (M,L,T),

	Δp	ℓ	D	ϵ	ρ	μ	U
M	1	0	0	0	1	1	0
L	-1	1	1	1	-3	-1	1
T	-2	0	0	0	0	-1	-1
	$ML^{-1}T^{-2}$	L	L	L	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	LT^{-1}

- 3. Determinar el rang de la matriu dimensional.
  El rang de la matriu $r \times n$ és el més gran entre els rangs de totes les submatrius que es puguin construir. En el nostre exemple, el rang és 3 (prova-ho calculant a mà els determinants de les submatrius 3×3, o definint la matriu a MATLAB i calculant el seu rang amb la funció `rank`). Si el rang fos inferior a 3, voldria dir que alguna de les variables fonamentals seria irrellevant i caldria eliminar-la de l'anàlisi.
- 4. Determinar el nombre de grups adimensionals.
  A l'exemple, $n - r = 4$, per tant la relació es pot escriure entre 4 grups adimensionals independents, els quals hem de determinar.
- 5. Construir els grups adimensionals
  Referit al problema de la canonada, primer cal seleccionar tres pa-

ràmetres relacionats amb les dimensions fonamentals M, L, i T que seran els "maons" amb què construirem els quatre grups adimensionals. En funció de la selecció d'aquests paràmetres, podem arribar a diferents variants, igualment vàlides, per a la nostra relació adimensional. Quins són els tres paràmetres que tenen sentit?

- Amb el diàmetre de la canonada D podem mesurar les longituds en el problema,
- la densitat ρ resulta ser un bon paràmetre per dimensionar la massa del fluid, amb $[\rho][D^3]$=M,
- com que temps característic al sistema no n'hi ha, utilitzarem la velocitat U com a paràmetre per construir una escala de temps amb l'ajuda de D, ja que $[D][U^{-1}]$=T.

Pot ser que per a certes dimensions bàsiques, hi hagi altres possibilitats, en general això depèn de cada problema. Per exemple, podríem pensar en ℓ com a variable representativa de L, en comptes de D, i això és possible. En funció de quines variables seleccionem com a bàsiques, els grups adimensionals prendran un aspecte o un altre, i tot depèn de quina variable volem que aparegui com a variable de control. La informació en tot cas serà la mateixa. Així doncs, fixant-nos en els exponents que apareixen a la matriu dimensional, construirem quatre grups adimensionals,

- Π_1 amb Δp i el conjunt de paràmetres $\{D, \rho, U\}$,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{(\rho D^3) D^{-1} (D U^{-1})^{-2}} = \frac{\Delta p}{\rho U^2},$$

- $\Pi_2 = \ell / D$,
- $\Pi_3 = \epsilon / D$,
- Π_4 con μ y $\{D, \rho, U\}$,

$$\Pi_4 = \frac{\mu}{(\rho D^3) D^{-1} (D U^{-1})^{-1}} = \frac{\mu}{\rho D U}.$$

▶ 6. Escriure la relació dimensional.

Aquest pas es redueix a expressar la relació 19 substituint els grups adimensionals que hem construït. Per al nostre exemple particular,

$$\frac{\Delta p}{\rho U^2} = \Phi\left(\frac{\ell}{D}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{\mu}{\rho D U}\right).$$

Aquesta és una relació en què clarament s'ha simplificat la dependència funcional de les variables respecte de la relació inicial, ja que hi ha quatre grups on abans hi havia set variables. Els grups adimensionals que han aparegut a la nostra anàlisi són importants i reben noms ben coneguts, com veurem de seguida.

L'anàlisi dimensional ha de complementar-se finalment amb algun indici sobre com és aquesta relació funcional (és a dir, si la dependència és lineal, quadràtica, etc, en els grups adimensionals). Lamentablement, això no ho pot dir l'anàlisi dimensional: totes les relacions funcionals són en principi possibles. En general, les relacions funcionals entre els grups adimensionals es determinen mitjançant experiments.

4.7 Els nombres adimensionals en Mecànica de Fluids

Sovint la tècnica de generar grups adimensionals resulta feixuga i de vegades fins i tot confusa per a un principiant. Però és molt instructiu veure com els números adimensionals apareixen a l'anàlisi gairebé sense voler. Suposem un exemple en què intervenen alhora totes les possibles forces sobre un flux: de pressió (p), de gravetat (g), de fricció (μ), d'elasticitat (k, mòdul de compressibilitat) i de tensió superficial (σ). Hi ha una forma funcional que relaciona la resultant F amb les altres forces, i per descomptat sabem que és la suma de totes, però també, per descomptat podem expressar aquesta relació a través de la dependència en les variables $\{p, g, \mu, k, \sigma\}$ més els paràmetres L (una longitud característica del flux), ρ i U, que són per cert, els mateixos tres paràmetres amb què hem construït les escales bàsiques MLT a l'exemple de la canonada de l'apartat anterior. Aquesta relació pren la forma

$$f(F, \rho, L, U, p, g, \mu, k, \sigma) = 0.$$

Podem seguir tots els passos de l'exercici anterior per construir la matriu dimensional del problema 3×9, veure que és de rang 3, i tornar a triar les 3 variables L, ρ, U per a la nostra anàlisi. La resta, 9-3 = 6, es poden reescriure en termes de grups dimensionals independents. La dimensió característica de la resultant F es pot expressar en funció de U, L i ρ en la forma,

$$[F] = [m][a] = [\rho][L]^2[U]^2.$$

On, igual que abans, els claudàtors [ ] indiquen que no es tracta de relacions entre els valors de les magnituds físiques, sinó entre les seves *dimensions*. Les diferents dimensions característiques de les forces que intervenen es poden expressar també com

força de pressió	$[F_P] = [p][L]^2$,
força de gravetat	$[F_g] = [\rho][g][L]^3$,
forces viscoses	$[F_\mu] = [\mu][U][L]$,
forces elàstiques	$[F_E] = [k][L]^2$,
força de tensió superficial	$[F_\sigma] = [\sigma][L]$.

És obvi que dividint la resultant F, així com cadascuna d'aquestes forces per $\rho L^2 U^2$, s'obtindran tots els grups adimensionals:

$$\frac{F_p}{\rho L^2 U^2} = \frac{p}{\rho U^2},$$
$$\frac{F_g}{\rho L^2 U^2} = \frac{gL}{U^2},$$
$$\frac{F_\mu}{\rho L^2 U^2} = \frac{\mu}{\rho L U},$$
$$\frac{F_E}{\rho L^2 U^2} = \frac{k}{\rho U^2},$$
$$\frac{F_\sigma}{\rho L^2 U^2} = \frac{\sigma}{\rho L U^2},$$

de manera que l'equació dimensional s'escriu

$$\frac{F}{\rho L^2 U^2} = \Phi\left(\frac{p}{\rho U^2}, \frac{gL}{U^2}, \frac{\mu}{\rho L U}, \frac{k}{\rho U^2}, \frac{\sigma}{\rho L U^2}\right).$$

Cadascun daquests cinc grups adimensionals rep un nom específic i té rellevància en mecànica de fluids. Són els *nombres adimensionals* (Taula 2). Caracteritzen els problemes de flux de fluids en diferents situacions i estableixen les lleis de semblança dinàmica, com veurem a l'apartat següent. La llista que apareix a la Taula 2 no és exhaustiva. Hi ha més nombres adimensionals, a banda dels esmentats, relacionats amb fenòmens de transport de calor, amb les condicions de contorn, etc. Pots consultar quins són els més importants, i el que signifiquen, en el recurs que s'esmenta a l'apartat Complements d'aquest tema.

Nombres adimensionals en MF	
Nombre de Euler	Eu = $\frac{p}{\rho U^2}$
Nombre de Froude	Fr = $\frac{U}{\sqrt{gL}}$
Nombre de Reynolds	Re = $\frac{\rho L U}{\mu}$
Nombre de Mach	Ma = $\frac{U}{\sqrt{k/\rho}} = \frac{U}{c}$ (c: velocitat del so)
Nombre de Weber	We = $\frac{U}{\sqrt{\sigma/(\rho L)}}$

Taula 2. Alguns nombres adimensionals que apareixen en els problemes de transport de moment a Mecànica de Fluids

4.8 Lleis de semblança

Per aconseguir una semblança perfecta entre un model i un prototipus de prova, tots els grups adimensionals Π han de ser exactament iguals. D'ordinari, això no es compleix amb tots els grups Π simultàniament, i la semblança completa no és possible.

Normalment, la semblança serà parcial. En lloc de semblança completa, es parla de tipus particulars de semblança, sent les més corrents

- Semblança geomètrica: es compleix si i només si a les tres coordenades de l'espai hi ha el mateix factor d'escala al model i al prototip (com en una maqueta a escala). Tots els angles, totes les direccions del flux, totes les orientacions relatives, es preserven quan es compleix la semblança geomètrica.
- Semblança cinemàtica: si es compleix, a banda de tenir el mateix factor d'escala geomètrica, el factor d'escala temporal manté dues partícules que ocupen posicions homòlogues al model i al prototip, en posicions homòlogues en qualsevol instant de temps. L'equivalència de les escales de temps requereix, a banda de la semblança geomètrica, consideracions dinàmiques com l'equivalència dels nombres de Reynolds i de Mach.
- Semblança dinàmica: Si el prototip té escales geomètriques i temporals que compleixen les lleis de semblança geomètrica i cinemàtica, llavors la semblança dinàmica es compleix si hi ha equivalència en els

grups dimensionals de les diferents forces implicades: nombres d'Euler i de Mach, de Reynolds, Froude i Weber, en funció del problema de què es tracti.

Semblança física

La semblança física es basa en l'adimensionalització de les equacions de transport, juntament amb les condicions de contorn que governin el flux, i és el mètode més complet per obtenir els grups adimensionals rellevants d'un problema. Perquè encara que aquestes equacions no es puguin resoldre en general, revelen la forma dels grups adimensionals bàsics, com ho és el nombre de Reynolds, i donen idea de les circumstàncies en què alguns termes es poden menysprear en front d'altres.

Podem mostrar aquesta tècnica breument, a partir de la versió més simple de les equacions de Navier-Stokes 15 per a un flux incompressible, sense superfície lliure, on el coeficient de viscositat és constant. Ometrem el balanç d'energia. Les condicions de contorn típiques per a aquestes equacions són

$$\begin{gathered} \vec{v} = 0 \;\text{ als contorns sòlids} \\ \vec{v}, \;\text{ o }\; p, \;\text{ coneguts a l'entrada i la sortida del flux} \end{gathered} \tag{20}$$

Les equacions 15 i 20 contenen les dimensions M, L, i T. Les variables p, $\vec{v}$, $\vec{r}$ poden adimensionalitzar-se utilitzant la densitat ρ i els dos paràmetres característics del flux U i L: U podria ser la velocitat de referència, sigui a l'entrada o a la sortida, i L podria ser el diàmetre d'un cos immers al flux, o el de la canonada per on circula el fluid.

A partir d'aquestes definim les variables adimensionals, que denotem mitjançant un asterisc,

$$\begin{gathered} \vec{v}^* = \vec{v}/U \qquad \vec{r}^* = \vec{r}/L \\ \nabla^* = L\nabla \qquad t^* = \frac{U}{L}t \\ p^* = \frac{p+\rho g z}{\rho U^2} \end{gathered} \tag{21}$$

Per a la pressió adimensional, hem inclòs el terme piezomètric $\rho g z$, que absorbeix sota el gradient de pressió l'energia potencial gravitatòria. Ara només queda substituir a les equacions les variables dimensionals per les variables amb l'asterisc, per exemple

$$\nabla \cdot \vec{v} = L\nabla^* \cdot (U\vec{v}^*) = UL\nabla^* \cdot \vec{v}^*$$

ja que U i L (així com ρ) són constants. El mateix es fa amb tots els termes de l'equació del balanç de moment, de manera que les equacions de Navier-Stokes adimensionalitzades s'escriuen

$$\begin{aligned} &\nabla^* \cdot \vec{v}^* = 0 \\ &\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \cdot \nabla^* \vec{v}^* = -\nabla^* p^* + \frac{\mu}{\rho U L} \nabla^{*2} \vec{v}^* \end{aligned} \tag{22}$$

A les equacions diferencials cal afegir les condicions de contorn escrites també en variables adimensionals,

$$\begin{gathered} \vec{v}^* = 0 \ \text{ als contorns sòlids} \\ \text{coneguts} \ \ \vec{v}^*, \ \text{ o } \ p^*, \ \text{ a l'entrada i la sortida del flux} \end{gathered} \tag{23}$$

Aquest sistema d'equacions, que governa el transport de moment en variables adimensionalitzades, conté un sol paràmetre, el nombre de Reynolds (consulta la Taula 2), generalment considerat com el nombre adimensional més important en mecànica de fluids,

$$\text{Re} = \frac{UL\rho}{\mu}$$

La semblança física a la pràctica pot implicar molts altres números adimensionals (consulta l'apartat Complements), associats a diferents efectes o fenòmens físics. Tenir-los tots en compte pot complicar molt el problema, però estudiant les equacions de transport i la importància relativa dels termes que hi intervenen també ho pot simplificar. Hi ha una petita i important excepció a aquesta manera de procedir: els fenòmens de capa límit són "petits" al seu abast, però molt importants perquè canvien completament el caràcter de la solució de les equacions de Navier-Stokes. Ja ho veurem més endavant: no sempre el que és petit és menyspreable.

Bibliografia

Arfken, G. B., Weber, H. J., i Harris, F. E. (2013). *Capítol 10 - Green's functions, mathematical methods for physicists*. Boston: Academic Press. doi: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-384654-9.00010-4

De las Heras, S. (2012). *Mecánica de fluidos en ingeniería*. Universitat Politècnica de Catalunya.

Gerhart, P., Gerhart, A., i Hochstein, J. (2016). *Munson, Young, and Okiishi's Fundamentals of fluid mechanics*. Wiley.

Panton, R. (2013). *Incompressible flow*. Wiley.

Petrila, T., i Trif, D. (2005). *Basics of fluid mechanics and introduction to computational fluid dynamics*. Springer.

White, F. (2011). *Fluid mechanics*. Mc Graw Hill.

Complements

Descomposició del tensor gradient de velocitat, $\nabla\vec{v}$

En aquest recurs trobaràs alguns detalls més sobre el tensor gradient de velocitat, les seves parts irreduïbles i el que representen.

De las Heras, S. (2012). Mecánica de Fluidos en Ingeniería. Universitat Politècnica de Catalunya. pp. 33-35
https://upcommons.upc.edu/handle/2099.3/36608

Demostració del teorema Π de Buckingham

Aquesta demostració no apareix als llibres de text de mecànica de fluids, que utilitzen el teorema sense cap referència ni justificació, com a molt citant l'article d'Edgar Buckingham de 1914. Només un petit nombre de documents es poden trobar per internet que hi refereixen, com la d'aquest recurs que ofereix d'una forma entenedora, (no estrictament "matemàtica" però, en el sentit que fa referència a sistemes d'unitats, dels qual les matemàtiques no en saben res), el raonament algebraic sobre el que se sustenta la demostració del teorema.

Hanche-Olsen, H. (1998). Buckingham's pi-theorem.
https://folk.ntnu.no/hanche/notes/buckingham/buckingham-a4.pdf

Més nombres adimensionals

Els cinc grups adimensionals esmentats a la secció 4.7 són només un petit —encara que rellevant, conjunt de nombres adimensionals utilitzats en l'escalat de models i en genearal, en molts anàlisis en mecànica de fluids. No obstant, n'hi ha molts més. Consulta aquest recurs per trobar un resum dels nombres adimensionals més importants en mecànica de fluids i la seva interpretació.

De las Heras, S. (2012). Mecánica de Fluidos en Ingeniería. Universitat Politècnica de Catalunya. pp. 100-103
https://upcommons.upc.edu/handle/2099.3/36608

Exemples típics de l'ús de models

El problema de la pèrdua de pressió al llarg d'una canonada, que ens ha servit a la secció 4.6 per introduir l'anàlisi dimensional, és un dels molts casos pràctics de la seva utilització. En aquest recurs se n'examinen uns quants exemples.

Gerhart, P.M., Gerhart, A.L., Hochstein, J.I. (2016). Munson, Young, and Okiishi's Fundamentals of Fluid Mechanics. Wiley 8ª ed. pp. 376-386

Més sobre semblança física

Per exemplificar l'adimensionalització de les equacions de Navier-Stokes a l'apartat 4.8, hem fet servir únicament l'equació de continuïtat i la de transport de moment, en un fluid amb densitat i viscositat constants, cosa que juntament amb certes condicions de contorn, habituals a la mecànica de fluids, ha donat lloc a un sistema d'equacions adimensionalitzades dependents d'un únic paràmetre, el nombre de Reynolds. Al recurs es mostra un cas més general.

De las Heras, S. (2012). Mecánica de Fluidos en Ingeniería. Universitat Politècnica de Catalunya. pp. 97-100
https://upcommons.upc.edu/handle/2099.3/36608

Exercicis

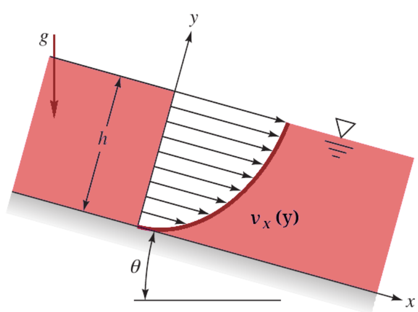
1. Considera un flux estacionari i incompressible en dues dimensions, d'un fluid newtonià de viscositat μ en el qual el camp de velocitats ve descrit per: $v_x = 2xy$, $v_y = x^2 - y^2$, $v_z = 0$.
   a) Satisfà aquest flux l'equació de conservació de la massa?
   b) Troba el camp de pressió, $p(x, y)$ si la pressió en $x = 0$, $y = 0$ és igual a p_a.

2. Per a un flux incompressible en coordenades polars,
   a) Troba la forma més general d'un moviment purament circulatori, $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$, amb $v_r = 0$, que satisfà l'equació de continuïtat,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

   b) Sense tenir en compte la gravetat i amb l'ajuda de les expressions per a coordenades colíndriques de l'apèndix d'aquest tema, obtén l'equació diferencial que satisfà v_θ. Demostra que la seva solució és $v_\theta = C_1 r + C_2/r$, on C_1 i C_2 són constants.
   c) Interpreta físicament aquesta solució exacta de les equacions de Navier-Stokes.

3. Una fina pel·lícula de líquid flueix en moviment laminar per una placa inclinada un angle θ, com mostra la figura. El perfil de velocitat és $v_x = Cy(2h - y)$, $v_y = 0$, $v_z = 0$.
   a) Expressa la constant C en termes de la densitat del líquid, l'acceleració de la gravetat, la viscositat i l'angle θ.
   b) Obtén el cabal volumètric per unitat de longitud en la coordenada transversal z, integrant la velocitat sobre l'espessor h de la pel·lícula.



4. Per al problema anterior, quines són les condicions de contorn apropiades
   a) En $y = 0$,
   b) Sobre la superfície lliure, $y = h$?

5. Demostra que el flux incompressible en coordenades cilíndriques

$$v_r = 0 \qquad v_\theta = Cr^n \qquad v_z = 0$$

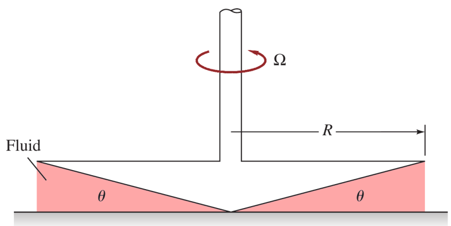
on C és una constant,

a) satisfà l'equació de Navier-Stokes per a només dos valors de n. No tinguis en compte la gravetat.

b) Sabent que $p = p(r)$, troba la pressió en cada cas, assumint que la pressió en $r = R$ és p_0. Quina situació podrien representar aquests dos casos?

6. El parell τ requerit per fer girar un viscosímetre de plat cònic (Problema 4 del tema 1) depèn del radi R, la velocitat de rotació Ω, la viscositat del fluid μ, i l'angle θ d'obertura del con:

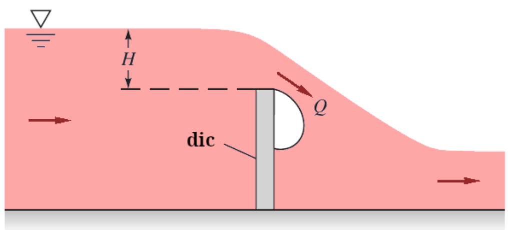
$$\tau = f(R, \Omega, \mu, \theta)$$



a) Reescriu aquesta relació en forma adimensional

b) Si se sap que el parell és inversament proporcional a θ, com s'escriu aleshores la dependència del parell en la resta de variables?

7. En un canal s'utilitza una obstrucció per mesurar el cabal Q que hi circula. Si el cabal depèn de la gravetat g, l'ample B del canal en la direcció perpendicular al paper, i l'alçada H de l'aigua sobre el dic,

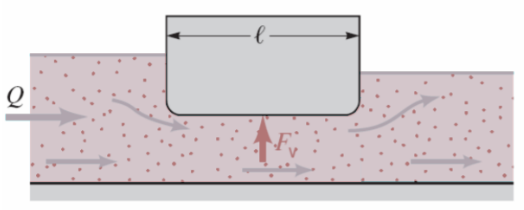


$$Q = f(g, B, H)$$

a) Reescriu aquesta relació en forma adimensional.

b) Si se sap que el cabal és proporcional a B, com s'escriu aleshores la dependència de Q en la resta de variables?

8. L'aigua que flueix sota l'obstacle de la figura fa una força vertical, F_v, sobre l'obstacle. S'assumeix que aquesta força és funció del cabal Q, de la densitat de l'aigua ρ, de la gravetat g, i d'una longitud ℓ, que caracteritza les dimensions de l'obstacle.



a) Reescriu aquesta relació en forma adimensional.
b) Utilitzem un model a escala para predir la força vertical sobre el prototipus, amb els valors següents:

	Q (m^3/s)	F_V (N)
model		80
prototipus	30	

Calcula la força F_V sobre un prototipus a escala 20 vegades més gran que les dimensions del model, en condicions de semblança dinámica.

9. En un sistema d'injecció de combustible es formen petites gotes degut a la ruptura del líquid del jet. Suposa que el diàmetre de les gotes, d, depèn de la densitat ρ, de la viscositat μ i de la tensió superficial σ del líquid, i del diàmetre D i la velocitat V del doll.
a) Fes l'anàlisi dimensional del problema i defineix els grups pi apropiats.
b) Si volem fer un experiment amb aigua, i no amb combustible, les propietats materials del qual figuren a la taula, com hem d'escalar el diàmetre D i la velocitat V del doll, en condicions de semblança dinàmica?

	ρ (kg/m^3)	μ (Pa·s)	σ (N/m)
aigua	1000	$1 \cdot 10^{-3}$	$72.3 \cdot 10^{-3}$
benzina	750	$6 \cdot 10^{-4}$	$21.61 \cdot 10^{-3}$

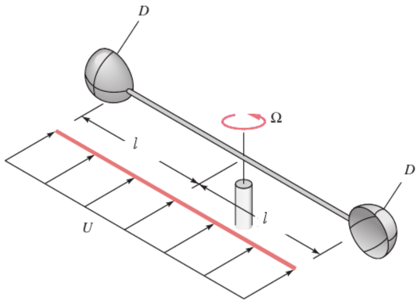
c) Quin és, per tant, el diàmetre de les gotes d'aigua que hem d'esperar (el factor d'escala)?

10. Aquest problema es basa en un projecte del llibre de (White, 2011, p. 344).
A la taula de sota s'adjunten les dades obtingudes pel professor Robert Kirchhoff i els seus estudiants a la Universitat de Massachusetts,

l=0.212		l=0.322		l=0.458		l=0,574	
U (ft/s)	Ω (rpm)	U (ft/s)	Ω (rpm)	U (ft/s)	Ω (rpm)	U (ft/s)	Ω (rpm)
18..95	435	18.95	225	20.10	140	23.21	115
22.20	545	23.19	290	26.77	215	27.60	145
25.90	650	29.15	370	31.37	260	32.07	175
29.94	760	32.79	425	36.05	295	36.05	195
38.45	970	38.45	495	39.03	327	39.60	215

per a la velocitat de gir d'un anemòmetre de cassoletes.

L'anemòmetre estava constituït per una pilota de ping-pong de D=1.5 in de diàmetre, tallada en dues meitats, i enganxada a dues varetes primes (de $\frac{1}{4}$ in de diàmetre) unides per un eix central.



Es van utilitzar quatre longituds diferents l per a les varetes: 0.212, 0.322, 0.458, i 0.574 ft. S'obtingueren mesures per a les velocitats de rotació de l'anemòmetre Ω, en funció de la velocitat U del túnel de vent. Suposa que la velocitat angular de l'anemòmetre és funció de la velocitat del vent U, la densitat ρ de l'aire i la seva viscositat μ, de la longitud de les varetes l, i del diàmetre D de les cassoletes. Per a tots els casos, l'aire és a la temperatura de 20°C i a la pressió de 1 at.

a) Realitza l'anàlisi dimensional del problema i defineix els grups Π apropiats.

b) Utilitza MATLAB per fer gràfics de les dades en funció de les variables adimensionals rellevants. Considera la possibilitat que hi hagi errors de mesura associats a aquestes dades.

c) Com a aplicació de disseny, imagina que hem d'utilitzar aquesta geometria per construir un anemòmetre a gran escala (D = 30 cm), per a un aeroport. Si les velocidats del vent assoleixen els 25 m/s i la mitjana de la velocitat de rotació que volem obtenir és d'uns 120 rpm, respon,
   - quina hauria de ser la longitud l apropiada per a les varetes?
   - prediu la velocitat de gir Ω del teu anemòmetre (en rpm) sota la incidència de vents entre 0 i 25 m/s.

Apèndix

Equacions del moviment en coordenades cilíndriques

Aquí pots trobar desenvolupats en coordenades cilíndriques els operadors diferencials que apareixen a les equacions del moviment, en el cas particular però habitual d'un fluid incompressible amb densitat ρ i viscositat μ constants. Les coordenades cilíndriques (r, θ, z), es relacionen amb les coordenades cartesianes (x, y, z) segons

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

Les components de la velocitat són v_r, v_θ, i v_z. En coordenades cilíndriques, la derivada convectiva i l'operador laplaciana s'expressen:

Derivada convectiva:

$$\vec{v}\cdot\nabla = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Operador laplaciana:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

I les equacions de conservació de la matèria i transport de moment prenen la forma següent,

- Equació de continuïtat:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

- Equació del transport de moment
  Component r:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)v_r - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)$$

Component θ:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_\theta - \frac{v_\theta v_r}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

Component z:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu \nabla^2 v_z$$

Així mateix, és útil tenir a mà les expressions per a la vorticitat i les components del tensor d'esforços,

- Vorticitat $\vec{\Omega}$

$$\Omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$\Omega_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$\Omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

- Components del tensor d'esforços (part viscosa):

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad \tau_{\theta\theta} = 2\mu \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] \quad \tau_{\theta z} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \quad \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$