Espacio Afín

Definición

- Sea V un espacio vectorial sobre un campo conmutativo.

Definición

- Sea V un espacio vectorial sobre un campo conmutativo.
- Sea A un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman puntos.

Definición

- Sea V un espacio vectorial sobre un campo conmutativo.
- Sea A un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman puntos.
- Sea $+ : A \times V \longrightarrow A$ una aplicación (llamada adición) y denotemos $+(a, \overrightarrow{v}) = a + \overrightarrow{v}$ para cada $a \in A$ y cada $\overrightarrow{v} \in V$.

Definición

- Sea V un espacio vectorial sobre un campo conmutativo.
- Sea A un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman puntos.
- Sea $+ : A \times V \longrightarrow A$ una aplicación (llamada adición) y denotemos $+(a, \overrightarrow{v}) = a + \overrightarrow{v}$ para cada $a \in A$ y cada $\overrightarrow{v} \in V$.

Decimos que $\mathcal{A} = (A, V, +)$ es un **espacio afín**, siempre que se cumplan las siguientes condiciones.

Definición

- Sea V un espacio vectorial sobre un campo conmutativo.
- Sea A un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman puntos.
- Sea $+ : A \times V \longrightarrow A$ una aplicación (llamada adición) y denotemos $+(a, \overrightarrow{v}) = a + \overrightarrow{v}$ para cada $a \in A$ y cada $\overrightarrow{v} \in V$.

Decimos que $\mathcal{A} = (A, V, +)$ es un **espacio afín**, siempre que se cumplan las siguientes condiciones.

AF1. Para todo $a, b \in A$, existe un único vector $\overrightarrow{v} \in V$ tal que

$$a + \overrightarrow{v} = b.$$

Definición

- Sea V un espacio vectorial sobre un campo conmutativo.
- Sea A un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman puntos.
- Sea $+ : A \times V \longrightarrow A$ una aplicación (llamada adición) y denotemos $+(a, \overrightarrow{v}) = a + \overrightarrow{v}$ para cada $a \in A$ y cada $\overrightarrow{v} \in V$.

Decimos que $\mathcal{A} = (A, V, +)$ es un **espacio afín**, siempre que se cumplan las siguientes condiciones.

AF1. Para todo $a, b \in A$, existe un único vector $\overrightarrow{v} \in V$ tal que

$$a + \overrightarrow{v} = b.$$

AF2. Para todo $a \in A$ y todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$,

$$(a + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = a + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).$$

Importante

En geometría afín podemos sumar un punto y un vector pero **no podemos sumar dos puntos**.

Importante

En geometría afín podemos sumar un punto y un vector pero **no podemos sumar dos puntos**.
En muchos casos la notación utilizada para puntos y vectores es similar y **parece** que sumamos puntos.

Observación

- Para todo $a \in A$ la restricción de "$+$" al conjunto $\{a\} \times V$ es biyectiva y se puede ver como

$$\begin{aligned} \varphi_a : V &\longrightarrow A \\ \overrightarrow{v} &\longrightarrow a + \overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

Observación

- Para todo $a \in A$ la restricción de "+" al conjunto $\{a\} \times V$ es biyectiva y se puede ver como

$$\begin{aligned}\varphi_a : V &\longrightarrow A\\ \overrightarrow{v} &\longrightarrow a + \overrightarrow{v}.\end{aligned}$$

- Si $b = \varphi_a(\overrightarrow{v})$, entonces $b = a + \overrightarrow{v}$ y podemos destacar la relación entre el vector $\overrightarrow{v} \in V$ y los puntos $a, b \in A$ denotando

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ab}.$$

Observación

- Si $\mathcal{A} = (A, V, +)$ es un espacio afín, entonces para todo $a \in A$ podemos ver A como $a + V$. En este sentido

$$A = \{a + \overrightarrow{v} : \overrightarrow{v} \in V\} = a + V.$$

Por lo tanto,

$$\varphi_a^{-1}(A) = V.$$

Observación

- Si $\mathcal{A} = (A, V, +)$ es un espacio afín, entonces para todo $a \in A$ podemos ver A como $a + V$. En este sentido

$$A = \{a + \overrightarrow{v} : \overrightarrow{v} \in V\} = a + V.$$

  Por lo tanto,

$$\varphi_a^{-1}(A) = V.$$

- En este caso se dice que V es la dirección de $\mathcal{A}$. También es usual decir que V es el espacio vectorial subyacente al espacio afín $\mathcal{A}$.

Observación

- Si $\mathcal{A} = (A, V, +)$ es un espacio afín, entonces para todo $a \in A$ podemos ver A como $a + V$. En este sentido

$$A = \{a + \overrightarrow{v} : \overrightarrow{v} \in V\} = a + V.$$

  Por lo tanto,

$$\varphi_a^{-1}(A) = V.$$

- En este caso se dice que V es la dirección de $\mathcal{A}$. También es usual decir que V es el espacio vectorial subyacente al espacio afín $\mathcal{A}$.
- Se define la dimensión de $\mathcal{A}$ como la dimensión de V.

Notación

- En general $\mathcal{A} = (A, V, +)$ será denotado por $\mathcal{A} = (A, V)$, omitiendo la mención explicita de la aplicación $+$.

Notación

- En general $\mathcal{A} = (A, V, +)$ será denotado por $\mathcal{A} = (A, V)$, omitiendo la mención explicita de la aplicación $+$.
- Si el espacio vectorial V es claro en el contexto, entonces diremos que A es un espacio afín, omitiendo la mención explicita del espacio V y de la aplicación $+$.

Notación

- En general $\mathcal{A} = (A, V, +)$ será denotado por $\mathcal{A} = (A, V)$, omitiendo la mención explicita de la aplicación $+$.
- Si el espacio vectorial V es claro en el contexto, entonces diremos que A es un espacio afín, omitiendo la mención explicita del espacio V y de la aplicación $+$.
- Si el espacio vectorial está definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces diremos que el espacio afín está definido sobre $\mathbb{K}$.

Notación

- En general $\mathcal{A} = (A, V, +)$ será denotado por $\mathcal{A} = (A, V)$, omitiendo la mención explicita de la aplicación $+$.
- Si el espacio vectorial V es claro en el contexto, entonces diremos que A es un espacio afín, omitiendo la mención explicita del espacio V y de la aplicación $+$.
- Si el espacio vectorial está definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces diremos que el espacio afín está definido sobre $\mathbb{K}$.
- Este curso, $\mathbb{K}$ siempre será conmutativo.

Notación

- En general $\mathcal{A} = (A, V, +)$ será denotado por $\mathcal{A} = (A, V)$, omitiendo la mención explicita de la aplicación $+$.
- Si el espacio vectorial V es claro en el contexto, entonces diremos que A es un espacio afín, omitiendo la mención explicita del espacio V y de la aplicación $+$.
- Si el espacio vectorial está definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces diremos que el espacio afín está definido sobre $\mathbb{K}$.
- Este curso, $\mathbb{K}$ siempre será conmutativo.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces diremos que $\mathcal{A}$ es un espacio afín real, de manera similar haremos en el caso complejo.

Ejemplo

Todo espacio vectorial V es un espacio afín.

Ejemplo

Todo espacio vectorial V es un espacio afín.
Esto es, $(V, V, +)$ es un espacio afín.

Ejemplo

Todo espacio vectorial V es un espacio afín.
Esto es, $(V,V,+)$ es un espacio afín.
En este caso la aplicación $+$ que define el espacio afín es la misma que se usa para sumar vectores.

Ejercicio

Sea $A=\mathbb{R}^3$ y $V=\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ es el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado a lo sumo 2. Prueba que $\mathcal{A}=(A,V,+)=(\mathbb{R}^3,\mathbb{P}_2[\mathbb{R}],+)$ es un espacio afín con la aplicación $+$ definida por $(x,y,z)+(at^2+bt+c)=(x+a,y+c,z+b)$.

Ejercicio

Sea $A = \mathbb{R}^3$ y $V = \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ es el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado a lo sumo 2. Prueba que $\mathcal{A} = (A, V, +) = (\mathbb{R}^3, \mathbb{P}_2[\mathbb{R}], +)$ es un espacio afín con la aplicación $+$ definida por $(x,y,z) + (at^2 + bt + c) = (x+a, y+c, z+b)$.

Solución:

- AF1 se cumple ya que para cada par de puntos $p = (x,y,z)$ y $p' = (x',y',z')$ existe un único vector $\overrightarrow{v} = at^2 + bt + c$, definido por $a = x' - x$, $b = z' - z$ y $c = y' - y$, tal que $p + \overrightarrow{v} = p'$.

Ejercicio

Sea $A = \mathbb{R}^3$ y $V = \mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ es el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado a lo sumo 2. Prueba que $\mathcal{A} = (A, V, +) = (\mathbb{R}^3, \mathbb{P}_2[\mathbb{R}], +)$ es un espacio afín con la aplicación $+$ definida por $(x,y,z) + (at^2 + bt + c) = (x+a, y+c, z+b)$.

Solución:

- AF1 se cumple ya que para cada par de puntos $p = (x,y,z)$ y $p' = (x', y', z')$ existe un único vector $\overrightarrow{v} = at^2 + bt + c$, definido por $a = x' - x$, $b = z' - z$ y $c = y' - y$, tal que $p + \overrightarrow{v} = p'$.
- Veamos que AF2 se cumple. Sean $p = (x,y,z)$, $\overrightarrow{v} = at^2 + bt + c$ y $\overrightarrow{w} = a't^2 + b't + c'$. Entonces

Ejercicio

Sea $A=\mathbb{R}^3$ y $V=\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ es el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado a lo sumo 2. Prueba que $\mathcal{A}=(A,V,+)=(\mathbb{R}^3,\mathbb{P}_2[\mathbb{R}],+)$ es un espacio afín con la aplicación $+$ definida por $(x,y,z)+(at^2+bt+c)=(x+a,y+c,z+b)$.

Solución:

- AF1 se cumple ya que para cada par de puntos $p=(x,y,z)$ y $p'=(x',y',z')$ existe un único vector $\overrightarrow{v}=at^2+bt+c$, definido por $a=x'-x$, $b=z'-z$ y $c=y'-y$, tal que $p+\overrightarrow{v}=p'$.
- Veamos que AF2 se cumple. Sean $p=(x,y,z)$, $\overrightarrow{v}=at^2+bt+c$ y $\overrightarrow{w}=a't^2+b't+c'$. Entonces

$$\begin{aligned}(p+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}&=(x+a,y+c,z+b)+(a't^2+b't+c')\\&=(x+a+a',y+c+c',z+b+b')\\&=(x,y,z)+((a+a')t^2+(b+b')t+(c+c'))\\&=p+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}).\end{aligned}$$

Ejemplo

Sean f y g dos funciones reales de variable real definidas por $f(x) = e^x - 5$ and $g(x) = 0$. En este caso $\mathcal{A} = (\{f\}, \{g\}, +)$ es un espacio afín dimension 0.

Ejemplo

Si $A = \{(x, x+3): \ x \in \mathbb{R}\}$ y V es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ generado por el vector $\overrightarrow{v} = (1,1)$, entonces (A, V) es un espacio afín de dimension 1.

Ejemplo

Si $A = \{(x, x+3): \; x \in \mathbb{R}\}$ y V es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ generado por el vector $\overrightarrow{v} = (1,1)$, entonces (A,V) es un espacio afín de dimension 1.
Por brevedad, se suele decir que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3-y=0\}$ es un espacio afín.

Ejemplo

Si $A = \{(x, x+3) : \ x \in \mathbb{R}\}$ y V es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ generado por el vector $\overrightarrow{v} = (1,1)$, entonces (A,V) es un espacio afín de dimension 1.
Por brevedad, se suele decir que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3-y=0\}$ es un espacio afín.

Ejemplo

Si $A=\{(x,x+3): \ x\in\mathbb{R}\}$ y V es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ generado por el vector $\overrightarrow{v}=(1,1)$, entonces (A,V) es un espacio afín de dimension 1.
Por brevedad, se suele decir que $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+3-y=0\}$ es un espacio afín.
En este caso, para $a=(0,3)$ tenemos $A=a+V$.

Ejemplo

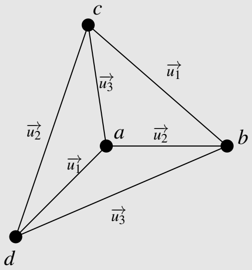
Sea $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=z-5\}$ y V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$. Nótese que (A,V) es un espacio afín de dimension 2.

Ejemplo

Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = z-5\}$ y V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$. Nótese que (A,V) es un espacio afín de dimension 2.
Por brevedad, se suele decir que $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = z-5\}$ es un espacio afín.

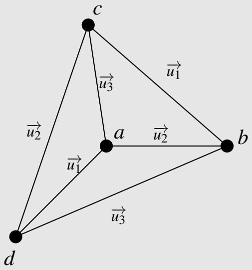
Ejemplo

Sea $V = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{0}\}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $GF(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donde $\overrightarrow{u_i} + \overrightarrow{u_j} = \overrightarrow{u_k}$ siempre que $i,j,k \in \{1,2,3\}$ son diferente, mientras $\overrightarrow{u_i} + \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}$ para todo $i \in \{1,2,3\}$.
Sea $A = \{a,b,c,d\}$. No es difícil ver que $(A,V,+)$ es un espacio afín, donde la aplicación suma $+ : A \times V \longrightarrow A$ se define por el siguiente esquema.



Ejemplo

Sea $V=\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{0}\}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $GF(2)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donde $\overrightarrow{u_i}+\overrightarrow{u_j}=\overrightarrow{u_k}$ siempre que $i,j,k\in\{1,2,3\}$ son diferente, mientras $\overrightarrow{u_i}+\overrightarrow{u_i}=\overrightarrow{0}$ para todo $i\in\{1,2,3\}$.
Sea $A=\{a,b,c,d\}$. No es difícil ver que $(A,V,+)$ es un espacio afín, donde la aplicación suma $+:A\times V\longrightarrow A$ se define por el siguiente esquema.



Este espacio se conoce como el espacio afín de 4 puntos. Nótese que este espacio es $(\mathbb{K}^2,\mathbb{K}^2,+)$, donde $\mathbb{K}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejercicio

Determina el espacio afín asociado a un espacio vectorial de dimensión 3 sobre el cuerpo $GF(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejercicio

Determina el espacio afín asociado a un espacio vectorial de dimensión 3 sobre el cuerpo $GF(2)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Solución

Los únicos escalares son 0 y 1, de ahí que si una base de V es $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$, solo hay 8 vectores,

$$\overrightarrow{0},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}.$$

Ejercicio

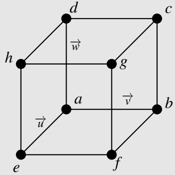
Determina el espacio afín asociado a un espacio vectorial de dimensión 3 sobre el cuerpo $GF(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Solución

Los únicos escalares son 0 y 1, de ahí que si una base de V es $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, solo hay 8 vectores,

$$\overrightarrow{0}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}.$$

En este caso, podemos tomar $\overrightarrow{u} = 100, \overrightarrow{v} = 010, \overrightarrow{w} = 001$ y los puntos del espacio afín se pueden ver como los vértices de un hexaedro.



Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva) Sean $a, b, c \in A$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$. Si $a + \overrightarrow{u} = b$, $b + \overrightarrow{v} = c$ y $a + \overrightarrow{w} = c$, entonces $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

(b) Para todo $a \in A$, $a + \overrightarrow{0} = a$.

(c) Sea $a, b \in A$ y $\overrightarrow{v} \in V$. Si $a + \overrightarrow{v} = b$, entonces $b + (-\overrightarrow{v}) = a$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva) Sean $a, b, c \in A$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$. Si $a + \overrightarrow{u} = b$, $b + \overrightarrow{v} = c$ y $a + \overrightarrow{w} = c$, entonces $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

(b) Para todo $a \in A$, $a + \overrightarrow{0} = a$.

(c) Sea $a, b \in A$ y $\overrightarrow{v} \in V$. Si $a + \overrightarrow{v} = b$, entonces $b + (-\overrightarrow{v}) = a$.

Solución (a)

Si $a + \overrightarrow{u} = b$, $b + \overrightarrow{v} = c$ y $a + \overrightarrow{w} = c$, entonces por AF2

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva) Sean $a, b, c \in A$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$. Si $a + \overrightarrow{u} = b$, $b + \overrightarrow{v} = c$ y $a + \overrightarrow{w} = c$, entonces $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

(b) Para todo $a \in A$, $a + \overrightarrow{0} = a$.

(c) Sea $a, b \in A$ y $\overrightarrow{v} \in V$. Si $a + \overrightarrow{v} = b$, entonces $b + (-\overrightarrow{v}) = a$.

Solución (a)

Si $a + \overrightarrow{u} = b$, $b + \overrightarrow{v} = c$ y $a + \overrightarrow{w} = c$, entonces por AF2

$$a + \overrightarrow{w} = c = b + \overrightarrow{v} = (a + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = a + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).$$

Ejercicio

Sea $\mathcal{A}=(A,V)$ un espacio afín. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva) Sean $a,b,c\in A$ y $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in V$. Si $a+\overrightarrow{u}=b$, $b+\overrightarrow{v}=c$ y $a+\overrightarrow{w}=c$, entonces $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.

(b) Para todo $a\in A$, $a+\overrightarrow{0}=a$.

(c) Sea $a,b\in A$ y $\overrightarrow{v}\in V$. Si $a+\overrightarrow{v}=b$, entonces $b+(-\overrightarrow{v})=a$.

Solución (a)

Si $a+\overrightarrow{u}=b$, $b+\overrightarrow{v}=c$ y $a+\overrightarrow{w}=c$, entonces por AF2

$$a+\overrightarrow{w}=c=b+\overrightarrow{v}=(a+\overrightarrow{u})+\overrightarrow{v}=a+(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).$$

Por lo tanto, AF1 implica que $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$. □

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva) Sean $a, b, c \in A$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$. Si $a + \overrightarrow{u} = b$, $b + \overrightarrow{v} = c$ and $a + \overrightarrow{w} = c$, entonces $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

(b) Para todo $a \in A$, $a + \overrightarrow{0} = a$.

(c) Sea $a, b \in A$ y $\overrightarrow{v} \in V$. Si $a + \overrightarrow{v} = b$, entonces $b + (-\overrightarrow{v}) = a$.

Solución (b)

Sea $\overrightarrow{v} \in V$ tal que $a + \overrightarrow{v} = a$. En este caso, por AF2

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva) Sean $a, b, c \in A$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$. Si $a + \overrightarrow{u} = b$, $b + \overrightarrow{v} = c$ and $a + \overrightarrow{w} = c$, entonces $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

(b) Para todo $a \in A$, $a + \overrightarrow{0} = a$.

(c) Sea $a, b \in A$ y $\overrightarrow{v} \in V$. Si $a + \overrightarrow{v} = b$, entonces $b + (-\overrightarrow{v}) = a$.

Solución (b)

Sea $\overrightarrow{v} \in V$ tal que $a + \overrightarrow{v} = a$. En este caso, por AF2

$$a + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}) = (a + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} = a + \overrightarrow{v}.$$

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva) Sean $a, b, c \in A$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$. Si $a + \overrightarrow{u} = b$, $b + \overrightarrow{v} = c$ and $a + \overrightarrow{w} = c$, entonces $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

(b) Para todo $a \in A$, $a + \overrightarrow{0} = a$.

(c) Sea $a, b \in A$ y $\overrightarrow{v} \in V$. Si $a + \overrightarrow{v} = b$, entonces $b + (-\overrightarrow{v}) = a$.

Solución (b)

Sea $\overrightarrow{v} \in V$ tal que $a + \overrightarrow{v} = a$. En este caso, por AF2

$$a + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}) = (a + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} = a + \overrightarrow{v}.$$

Y por AF1, $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva) Sean $a, b, c \in A$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$. Si $a + \overrightarrow{u} = b$, $b + \overrightarrow{v} = c$ and $a + \overrightarrow{w} = c$, entonces $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

(b) Para todo $a \in A$, $a + \overrightarrow{0} = a$.

(c) Sea $a, b \in A$ y $\overrightarrow{v} \in V$. Si $a + \overrightarrow{v} = b$, entonces $b + (-\overrightarrow{v}) = a$.

Solución (b)

Sea $\overrightarrow{v} \in V$ tal que $a + \overrightarrow{v} = a$. En este caso, por AF2

$$a + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}) = (a + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} = a + \overrightarrow{v}.$$

Y por AF1, $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$. Por lo tanto, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ y así $a + \overrightarrow{0} = a$. $\square$

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva) Sean $a, b, c \in A$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$. Si $a + \overrightarrow{u} = b$, $b + \overrightarrow{v} = c$ and $a + \overrightarrow{w} = c$, entonces $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

(b) Para todo $a \in A$, $a + \overrightarrow{0} = a$.

(c) Sea $a, b \in A$ y $\overrightarrow{v} \in V$. Si $a + \overrightarrow{v} = b$, entonces $b + (-\overrightarrow{v}) = a$.

Solución (c)

Si $a + \overrightarrow{v} = b$, entonces por AF2 y (b) obtenemos

$$b + (-\overrightarrow{v}) = (a + \overrightarrow{v}) + (-\overrightarrow{v}) = a + (\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v})) = a + \overrightarrow{0} = a.$$

$\square$

Ejercicio

Expresa el enunciado anterior en términos de vectores usando la equivalencia, $a + \overrightarrow{v} = b$ si y solo si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ab}$.

Ejercicio

Expresa el enunciado anterior en términos de vectores usando la equivalencia, $a+\overrightarrow{v}=b$ si y solo si $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{ab}$.

Solución

Para todo espacio afín $\mathcal{A}=(A,V)$ se cumple:

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva)

Ejercicio

Expresa el enunciado anterior en términos de vectores usando la equivalencia, $a+\overrightarrow{v}=b$ si y solo si $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{ab}$.

Solución

Para todo espacio afín $\mathcal{A}=(A,V)$ se cumple:

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva)
$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}=\overrightarrow{ac}$ para todo $a,b,c\in A$.

Ejercicio

Expresa el enunciado anterior en términos de vectores usando la equivalencia, $a + \overrightarrow{v} = b$ si y solo si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ab}$.

Solución

Para todo espacio afín $\mathcal{A} = (A, V)$ se cumple:

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva)
$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$ para todo $a, b, c \in A$.

(b) $\overrightarrow{aa} = \overrightarrow{0}$ para todo $a \in A$.

Ejercicio

Expresa el enunciado anterior en términos de vectores usando la equivalencia, $a+\overrightarrow{v}=b$ si y solo si $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{ab}$.

Solución

Para todo espacio afín $\mathcal{A}=(A,V)$ se cumple:

(a) (Relación de Chasles o propiedad aditiva)
$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}=\overrightarrow{ac}$ para todo $a,b,c\in A$.

(b) $\overrightarrow{aa}=\overrightarrow{0}$ para todo $a\in A$.

(c) $\overrightarrow{ab}=-\overrightarrow{ba}$ para todo $a,b\in A$.

Regla del paralelogramo

Corolario

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Dados cuatro puntos $a, a', b, b' \in A$, si $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'}$, entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'}$.

Regla del paralelogramo

Corolario

Sea $\mathcal{A}=(A,V)$ un espacio afín. Dados cuatro puntos $a,a',b,b'\in A$, si $\overrightarrow{aa'}=\overrightarrow{bb'}$, entonces $\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{a'b'}$.

Demostración:

Si asumimos que $\overrightarrow{aa'}=\overrightarrow{bb'}$, entonces por la propiedad aditiva,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ab}&=\overrightarrow{aa'}+\overrightarrow{a'b}\\&=\overrightarrow{bb'}+\overrightarrow{a'b}\\&=\overrightarrow{a'b}+\overrightarrow{bb'}\\&=\overrightarrow{a'b'}.\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio

Expresa la regla del paralelogramo en términos de puntos más vectores.

Ejercicio

Expresa la regla del paralelogramo en términos de puntos más vectores.

Solución

Sea $\mathcal{A}=(A,V)$ un espacio afín. Dados cuatro puntos $a,a',b,b'\in A$ y dos vectores $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in V$, si $a+\overrightarrow{u}=a'$, $b+\overrightarrow{u}=b'$ y $a+\overrightarrow{v}=b$, entonces $a'+\overrightarrow{v}=b'$.

Ejercicio

Expresa la regla del paralelogramo en términos de puntos más vectores.

Solución

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Dados cuatro puntos $a, a', b, b' \in A$ y dos vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$, si $a + \overrightarrow{u} = a'$, $b + \overrightarrow{u} = b'$ y $a + \overrightarrow{v} = b$, entonces $a' + \overrightarrow{v} = b'$.

Ejercicio

Demuestra el enunciado anterior usando esta notación.

Solución

Si $a+\overrightarrow{u}=a'$, $b+\overrightarrow{u}=b'$ y $a+\overrightarrow{v}=b$, entonces

$$\begin{aligned}
a'+\overrightarrow{v} &= (a+\overrightarrow{u})+\overrightarrow{v} \\
&= a+(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) \\
&= a+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}) \\
&= (a+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{u} \\
&= b+\overrightarrow{u} \\
&= b'.
\end{aligned}$$

$\square$

¿Cómo definir subespacio afín?