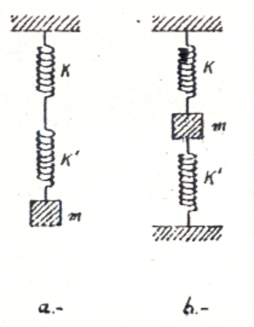
Assignatura: FÍSICA I
Problemes resolts d'oscil·lacions.

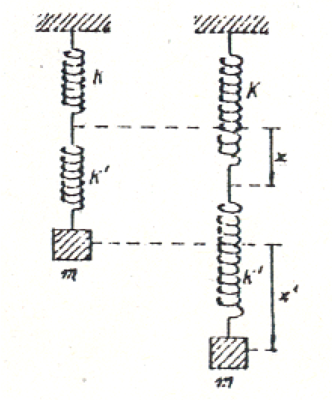
Problema 1.- Les constants recuperadores dels ressorts de la figura són K i K'. Calculeu el període de l'oscil·lació en cadascun dels dos casos a i b.



Resolució:

a) Per a obtenir el període hem d'aconseguir avaluar la constant equivalent de les dues molles i quan la coneguem podrem obtenir la pulsació i, en conseqüència, el període.

Per aconseguir K_{eq} hem d'arribar a l'equació diferencial que regeix el moviment de la massa m. La K_{eq} serà el coeficient de x quan m ho sigui de $\ddot{x}$. En una situació de no equilibri, com aquesta que expressem en la figura adjunta, la massa m sofreix l'acció de la molla amb la qual manté contacte, de constant recuperadora K'. L'elongació que té és (x'-x), per tant, segons la 2^a llei de Newton: $m\,\ddot{x}' = -k'(x'-x)$. Hem d'escriure aquesta equació només en funció de la coordenada x'. I això ho aconseguirem tenint en compte l'acció de les molles en el punt intermedi, el qual suposem que no té massa: $-k\cdot x + k'(x'-x) = 0$.



Aïllant x de l'equació anterior tenim: $x = \dfrac{k'}{k+k'}x'$. Ara introduïm aquest valor en l'equació de moviment per a m, i ens queda:

$$m.\ddot{x}' = -k'\left(x' - \frac{k'}{k+k'}x'\right)$$, d'on obtenim:

$$m.\ddot{x}' + \frac{k'\cdot k}{k+k'}\cdot x' = 0$$, la qual cosa vol dir que

$$K_{eq} = \frac{k'\cdot k}{k+k'}$$, o bé $\dfrac{1}{K_{eq}} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k'}$, expressió que ens dóna la K_{eq} per a ressorts col·locats en sèrie.

Coneguda ja la K_{eq}, el període serà $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{K_{eq}/m}}$

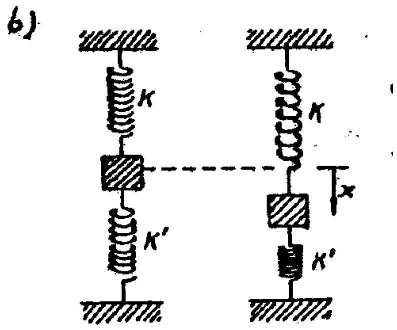
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(k+k')m}{k\cdot k'}}$$

b) En una situació de no equilibri com la representada en la adjunta, l'equació diferencial del moviment de *m* és: $m\cdot\ddot{x} = -k\cdot x - k'\cdot x$

$$m\cdot\ddot{x} + (k+k')\cdot x = 0 \Rightarrow K_{eq} = k+k'$$

Aquesta és la K_{eq} per a ressorts col·locats en paral·lel. El període serà:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{K_{eq}/m}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k+k'}}$$



Problema 2.- Per a un moviment harmònic simple calculeu les mitjanes al llarg del temps de x, x^2, energia cinètica i energia potencial, així com les mitjanes que fan referència a la posició de les dues classes d'energia.

Resolució:

Partim d'una expressió sinusoïdal $x = A\cdot\sin(\omega\cdot t' + \alpha)$, si canviem l'origen de temps, fins i tot la podem escriure $x = A\cdot\sin(\omega\cdot t)$, expressió que és més fàcil d'utilitzar.

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T A\cdot\sin(\omega\cdot t)dt = \frac{A}{T}\left[\frac{-\cos(\omega\cdot t)}{\omega}\right]_0^T = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 0$$

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T A^2\sin^2(\omega\cdot t)dt = \frac{A^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega\cdot t)}{2}dt \Rightarrow \bar{x}^2 = \frac{A^2}{T}\left[\frac{1}{2}\cdot t - \frac{\sin(2\omega\cdot t)}{4\omega}\right]_0^T \Rightarrow \bar{x}^2 = \frac{A^2}{2}$$

$$\bar{E}c = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}k\cdot A^2\cos^2(\omega\cdot t)dt = \frac{k\cdot A^2}{2\cdot T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega\cdot t)}{2}dt$$

$$\Rightarrow \bar{E}c = \frac{k\cdot A^2}{4\cdot T}\left[t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^T \Rightarrow \bar{E}c = \frac{k\cdot A^2}{4}$$

$$\overline{E}p = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\cdot k\cdot A^2 \sin^2(\omega\cdot t)dt = \frac{k\cdot A^2}{2\cdot T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega\cdot t)}{2}dt$$

$$\overline{E}p = \frac{k\cdot A^2}{4\cdot T}\left[t - \frac{\sin(2\omega\cdot t)}{2\omega}\right]_0^T \Rightarrow \overline{E}p = \frac{k\cdot A^2}{4}$$

Això que ara hem calculat són mitjanes temporals, però també podem parlar de mitjanes espacials. Calculem les mitjanes espacials de l'energia cinètica i de l'energia potencial:

$$Ec_{med} = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}m\cdot\dot{x}^2\,dx$$

$$Ec_{med} = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}k\cdot\left(A^2 - x^2\right)dx$$

$$Ec_{med} = \frac{k}{4A}\left[A^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-A}^{A}$$

$$Ec_{med} = \frac{k\cdot A^2}{3}$$

$$Ep_{med} = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}k\cdot x^2\,dx$$

$$Ep_{med} = \frac{k}{4A}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-A}^{A}$$

$$Ep_{med} = \frac{k\cdot A^2}{6}$$

Problema 3.- En el cas d'un oscil·lador esmorteït, la quantitat $\tau = 1/2\ \gamma$ es denomina "temps de relaxació".

a) Verifiqueu que té unitats de temps.

b) Quina ha estat la variació de l'amplitud de l'oscil·lador després d'un temps τ?

c) Expresseu, en funció de τ, el temps necessari per a que l'amplitud es redueixi a la meitat del seu valor inicial.

d) Quins són els valors de l'amplitud després de temps iguals a dos, tres, etc. vegades el valor obtingut anteriorment?

Resolució:

a)

$$[\tau] = \left[\frac{1}{2\gamma}\right] = \left[\frac{1}{2\frac{b}{2m}}\right] = \left[\frac{m}{b}\right] = \frac{M}{[b]}$$

$$[b] = \frac{[F]}{[\dot{x}]} = M\,T^{-1} \Rightarrow [\tau] = T$$

b) En un oscil·lador esmorteït l'amplitud respon a l'expressió $A' = A \cdot e^{-\gamma t}$. El seu valor inicial (t = 0) es $A_o' = A$, en $t = \tau \Rightarrow A_\tau' = A \cdot e^{-1/2} \Rightarrow A_\tau' = \frac{A}{\sqrt{e}}$. Per tant, podem dir que en el temps τ decreix en un factor $\sqrt{e^{-1}}$.

c) Ens demanen el temps invertit en la transformació

$$A \rightarrow \frac{A}{2}, \quad \frac{A}{2} = A \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{t}{2\tau}} \rightarrow 2 = e^{\frac{t}{2\tau}}$$, per tant,

$$t = 2 \cdot \tau \cdot \ln 2$$

d) Les amplituds en els instants $t_n = n \cdot 2\tau \cdot \ln 2$ seran:

$$A_n = Ae^{-\frac{1}{2\tau} n\, 2\tau \ln 2} = Ae^{-n \ln 2}$$

d'on obtenim, fent servir logaritmes, $\frac{A}{A_n} = 2^n$ i, per tant, $A_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$, constituint una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{2}$ i primer terme A.