Grafos planares: ejercicios

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

Ejercicio

Sea G un grafo 3-regular planar conexo de orden 20. Determina en cuántas regiones queda dividido el plano al hacer una representación plana de G. ¿Y si el grafo tiene 3 componentes conexas?

Ejercicio

Sea G un grafo 3-regular planar conexo de orden 20. Determina en cuántas regiones queda dividido el plano al hacer una representación plana de G. ¿Y si el grafo tiene 3 componentes conexas?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}3\text{- regular}\\ n=20\end{array}\right\} \to m=\frac{n\cdot 3}{2}=30$$

planar conexo $\to$ $m+2=n+c$

$30+2=20+c$

$c=12$

planar y 3 componentes $\to$ $\underset{30}{m}+\underset{3}{k}+1=\underset{20}{n}+c$

$c=14$

Ejercicio

Sea G un grafo planar conexo de orden n y medida m. Calcula los valores de n y m si se sabe que G tiene 6 caras, un vértice de grado 5, un vértice de grado 3, tres vértices de grado 2, dos vértices de grado 1 y los demás tienen grado 4.

Ejercicio

Sea G un grafo planar conexo de orden n y medida m. Calcula los valores de n y m si se sabe que G tiene 6 caras, un vértice de grado 5, un vértice de grado 3, tres vértices de grado 2, dos vértices de grado 1 y los demás tienen grado 4.

Solución:

$m = ?\quad n = ?\qquad c = 6,\quad m + 2 = n + c \longrightarrow \boxed{m = n + 4}$

$2m = \sum \delta(v) = 1\cdot 5 + 1\cdot 3 + 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 4x,\qquad n = 1 + 1 + 3 + 2 + x$

$2m = 16 + 4x \qquad\qquad \boxed{n = 7 + x}$

$\boxed{m = 8 + 2x} \longrightarrow \qquad \longleftarrow \boxed{m = 11 + x}$

$8 + 2x = 11 + x$

$\underline{x = 3} \longrightarrow m = 14,\ n = 10$

Ejercicio

Prueba que todo grafo planar tiene al menos un vértice de grado menor o igual que 5.

Ejercicio

Prueba que todo grafo planar tiene al menos un vértice de grado menor o igual que 5.

Solución:

Supongamos que $\delta(v) \geq 6, \ \forall v.$

$$2m = \sum \delta(v) \geq 6 \cdot n \rightarrow m \geq 3n$$

$$\text{Planar} \rightarrow m \leq 3n - 6$$

$$3n \leq m \leq 3n - 6$$

$$\Downarrow$$

$$3n \leq 3n - 6$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq -6 \quad \text{Falso}$$

$$\exists v \in V(G) : \delta(v) \leq 5 \leftarrow$$

Ejercicio

Prueba que para todo grafo planar conexo cuyas caras son ciclos de longitud g, se cumple

$$m = \frac{g}{g-2}(n-2).$$

Ejercicio

Prueba que para todo grafo planar conexo cuyas caras son ciclos de longitud g, se cumple

$$m = \frac{g}{g-2}(n-2).$$

Solución:

$$\boxed{m+2=n+c}$$

Cada arista está en dos caras $\longrightarrow$ $\boxed{g \cdot c = 2m}$

$$m+2 = n + \frac{2m}{g}$$

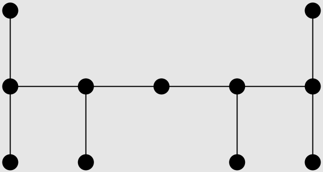
$$m - \frac{2m}{g} = n-2$$

$$m \cdot \frac{g-2}{g} = n-2$$

$$m = \frac{g}{g-2}(n-2) \checkmark$$

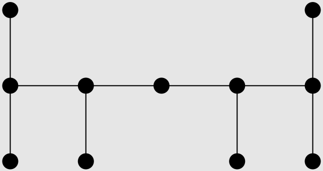
Ejercicio

Determina si el complemento del grafo de la figura es planar.



Ejercicio

Determina si el complemento del grafo de la figura es planar.



Solución:

Los vértices de grado 1 serán todos adyacentes entre si en el complemento de G. Entonces, G^c contiene un subgrafo isomorfo a K_6, por el teorema de Kuratowski concluimos que G^c no es planar.

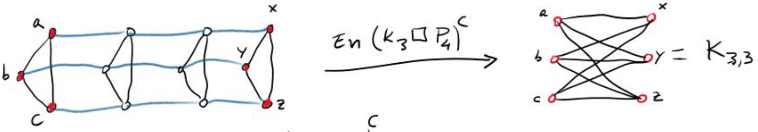
Ejercicio

Estudia la planaridad del complemento de $G = K_3 \Box P_4$.

Ejercicio

Estudia la planaridad del complemento de $G = K_3 \Box P_4$.

Solución:



$(K_3 \Box P_4)^c$ $\underline{\underline{no}}$ es planar

Ejercicio

Determina para qué valores de k los hipercubos Q_k son grafos planares.

Ejercicio

Determina para qué valores de k los hipercubos Q_k son grafos planares.

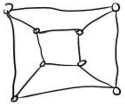
Solución:

$k=1 \to$ o—o ✓

$k=2 \to$

✓

$k=3 \to$



✓

$k=4$???

Q_4 es bipartito, $m \overset{?}{\leq} 2n-4$

$n=16$, $m=\frac{16\cdot 4}{2}=32 \not\leq 28 = 2n-4 \to Q_4$ no es planar

Q_k es planar $\longleftrightarrow k\in\{1,2,3\}$

Ejercicio

Sea G un grafo planar conexo con igual número de caras que de vértices. Existen representaciones planas de G donde todas las caras son triángulos o cuadrados de modo que el número de triángulos y cuadrados difiere en uno. Calcula el orden de G.

Ejercicio

Sea G un grafo planar conexo con igual número de caras que de vértices. Existen representaciones planas de G donde todas las caras son triángulos o cuadrados de modo que el número de triángulos y cuadrados difiere en uno. Calcula el orden de G.

Solución:

$n = c,\quad m + 2 = n + c \longrightarrow m = 2n - 2$

$c = x_3 + x_4 \qquad 2m = 4x_3 + 4x_4 - 4 \qquad 3x_3 + 4x_4 = 2m$

$4x_3 + \cancel{4x_4} - 4 = 3x_3 + \cancel{4x_4}$

$\underline{x_3 = 4}$

$x_3 = 4$ y $x_4 = 5 \longrightarrow n = 9,\ m = 16$

o

$x_3 = 4$ y $x_4 = 3 \longrightarrow n = 7,\ m = 12$

$\boxed{n = 7 \text{ o } n = 9}$

Ejercicio

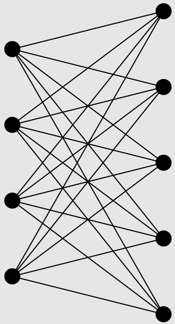
Muestra que $K_{4,5}$ tiene un subgrafo homeomorfo a K_5.

Ejercicio

Muestra que $K_{4,5}$ tiene un subgrafo homeomorfo a K_5.

Solución:

A la izquierda de la figura se muestra el grafo $K_{4,5}$ y a la derecha se muestra un subgrafo de este que es homeomorfo a K_5. Los vértices de grado 2 indican las subdivisiones elementales.



Ejercicio

Se sabe que un grafo 3-regular, planar y conexo tiene c caras y todas ellas son hexágonos o pentágonos. Calcula el número de hexágonos y de pentágonos.

Ejercicio

Se sabe que un grafo 3-regular, planar y conexo tiene c caras y todas ellas son hexágonos o pentágonos. Calcula el número de hexágonos y de pentágonos.

Solución:

$\delta = 3, \quad m = \frac{n \cdot \delta}{2} \longrightarrow 2m = 3n$

$5x_5 + 6x_6 = 2m = 3n$

$m + 2 = n + c$

$\frac{3n}{2} + 2 = n + x_5 + x_6$

$x_5 + x_6 = \frac{n}{2} + 2$

$$\left.\begin{aligned} 5x_5 + 6x_6 &= 3n \\ x_5 + x_6 &= \frac{n}{2} + 2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow x_5 = 12, \quad x_6 = \frac{n-20}{2}$$

Ejercicio

La secuencia de grados de un grafo planar conexo G es $4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3,\ 3, 3, 3, 3$. Sabiendo que una cara de G es un ciclo de 8 vértices y que las demás caras son triángulos y cuadrados, determina el número de triángulos y de cuadrados de G.

Ejercicio

La secuencia de grados de un grafo planar conexo G es $4,4,4,4,3,3,3,3,\ 3,3,3,3$. Sabiendo que una cara de G es un ciclo de 8 vértices y que las demás caras son triángulos y cuadrados, determina el número de triángulos y de cuadrados de G.

Solución:

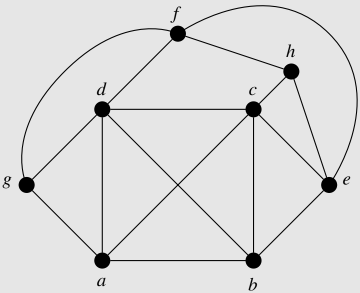
$n=12, \quad 2m = 4\cdot 4 + 3\cdot 8 = 40 \qquad m+2 = n+c \rightarrow c=10$

$m=20 \qquad (m=20,\ n=12)$

$$\begin{cases} 8+3x_3+4x_4 = 2m = 40 \\ 1+x_3+x_4 = c = 10 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{c} 3x_3+4x_4=32 \\ x_3+x_4=9 \\ \hline x_3 = 4, \quad x_4 = 5 \end{array}$$

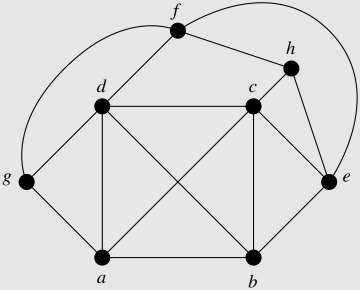
Ejercicio

Determina si el grafo línea del grafo G representado en la siguiente figura es planar.



Ejercicio

Determina si el grafo línea del grafo G representado en la siguiente figura es planar.



Solución:

Como el grafo G tiene vértices de grado 5, el grafo $L(G)$ tiene subgrafos isomorfos a K_5. Por lo tanto, por el Teorema de Kuratowski podemos concluir que el grafo $L(G)$ no es planar.

Ejercicio

Prueba que si G es un grafo planar de orden $n > 10$, entonces G^c no es planar.

Ejercicio

Prueba que si G es un grafo planar de orden $n > 10$, entonces G^c no es planar.

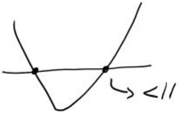
Solución:

si G planar $\quad m(G) \leq 3n-6$

si G^c planar $\quad m(G^c) \leq 3n-6$

$$\frac{n(n-1)}{2} = m(G) + m(G^c) \leq 6n-12$$

$$n^2 - 13n + 24 \leq 0$$



$$n = \frac{13 \pm \sqrt{73}}{2} < 11$$

$n > 10 \rightarrow G^c$ no es planar

Ejercicio

Sea G un grafo planar conexo de orden $n = 15$. Sabiendo que dos caras de G son triángulos y las demás son cuadrados, calcula el número de aristas de $G \square C_4$.

Ejercicio

Sea G un grafo planar conexo de orden $n = 15$. Sabiendo que dos caras de G son triángulos y las demás son cuadrados, calcula el número de aristas de $G\square C_4$.

Solución:

$n=15$, $c = 2 + x$, $m + 2 = n + c \longrightarrow \boxed{m = x + 15}$

$x = \#$ de $\square$

$2 \cdot 3 + 4x = 2m \longrightarrow \boxed{m = 2x + 3}$

$\longrightarrow x = 12, \; m = 27$

$G \square C_4$ tiene $4m + 4n = 4 \cdot 27 + 4 \cdot 15 = 168$ aristas