La recta en el plano

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

La recta

Sea l una recta definida por los puntos $p = (x_0, y_0)$ y $q = (x_1, y_1)$.

$$l = \{p + \lambda \overrightarrow{pq}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

La recta

Sea l una recta definida por los puntos $p = (x_0, y_0)$ y $q = (x_1, y_1)$.

$$l = \{p + \lambda \overrightarrow{pq}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Ecuación vectorial

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(x', y'), \tag{1}$$

donde $(x', y') = \overrightarrow{pq} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ es un vector director de l.

La recta

Sea l una recta definida por los puntos $p=(x_0,y_0)$ y $q=(x_1,y_1)$.

$$l=\{p+\lambda\overrightarrow{pq}, \quad \lambda\in\mathbb{R}\}.$$

Ecuación vectorial

$$(x,y)=(x_0,y_0)+\lambda(x',y'), \tag{1}$$

donde $(x',y')=\overrightarrow{pq}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$ es un vector director de l.

- Si $y'=0$, entonces la ecuación es $y=y_0$ y la recta l es paralela el eje x.
- Si $x'=0$, entonces la ecuación es $x=x_0$ y la recta l es paralela el eje y.

Ecuaciones paramétricas

$x = x_0 + \lambda x'$,
$y = y_0 + \lambda y'$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ecuaciones paramétricas

$x = x_0 + \lambda x'$,
$y = y_0 + \lambda y'$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ecuación general

$$ax + by = c,$$

donde $(a,b) \perp (x',y')$.

Ecuaciones paramétricas

$x = x_0 + \lambda x'$,
$y = y_0 + \lambda y'$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ecuación general

$$ax + by = c,$$

donde $(a,b) \perp (x',y')$.

Pendiente de una recta

En la ecuación

$$y = mx + n,$$

la pendiente de la recta es $m = -\frac{a}{b} = \tan\alpha$, donde α es el ángulo que forma la recta con el eje x orientado por el vector canónico $(1,0)$.

Ejercicio

Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $(-3,2)$ y $(1,6)$.

Ejercicio

Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $(-3,2)$ y $(1,6)$.

Solución

La mediatriz de un segmento es una recta que pasa por el punto medio del segmento y que es ortogonal a éste. Un vector definido a partir de estos puntos es $\overrightarrow{v} = (4,4)$ y el punto medio del segmento es $(-1,4)$. Por lo tanto, la ecuación es $x+y=3$.

Ejercicio

Hallar la ecuación de una recta de pendiente $m = -4$ que corta las rectas de ecuación $2x + y = 8$ y $3x - 2y = -9$ en su punto de intersección.

Ejercicio

Hallar la ecuación de una recta de pendiente $m = -4$ que corta las rectas de ecuación $2x + y = 8$ y $3x - 2y = -9$ en su punto de intersección.

Solución

Como el punto de intersección de las rectas de ecuación $2x + y = 8$ y $3x - 2y = -9$ es $(1,6)$, obtenemos la solución $y + 4x = 10$. $\square$

Ejercicio

Considera un triángulo en el plano, determina la ecuación de su recta de Euler y comprueba tu solución usando Geogebra.

Ejercicio

Sea l la recta de ecuación $2x+3y=5$, sea $p=(2,2)$ un punto del plano y $\overrightarrow{v}=(1,3)$ un vector.

(a) Determina la ecuación general de la recta l' que es ortogonal a l y contiene el punto p' obtenido por una traslación de p de vector $\overrightarrow{v}$.

(b) Determina la ecuación de la recta l_1 obtenida por una traslación de l de vector $\overrightarrow{v}$

(c) Determina la ecuación de la recta l_2 obtenida por una rotación de l de ángulo $\alpha=\pi/3$ y centro en el origen.

Ejercicio

Sea l la recta de ecuación $2x+3y=5$, sea $p=(2,2)$ un punto del plano y $\overrightarrow{v}=(1,3)$ un vector.

(a) Determina la ecuación general de la recta l' que es ortogonal a l y contiene el punto p' obtenido por una traslación de p de vector $\overrightarrow{v}$.

(b) Determina la ecuación de la recta l_1 obtenida por una traslación de l de vector $\overrightarrow{v}$

(c) Determina la ecuación de la recta l_2 obtenida por una rotación de l de ángulo $\alpha=\pi/3$ y centro en el origen.

Solución

(a) $p'=(3,5)$ y l' tiene ecuación $-3x+2y=1$.

Ejercicio

Sea l la recta de ecuación $2x+3y=5$, sea $p=(2,2)$ un punto del plano y $\overrightarrow{v}=(1,3)$ un vector.

(a) Determina la ecuación general de la recta l' que es ortogonal a l y contiene el punto p' obtenido por una traslación de p de vector $\overrightarrow{v}$.

(b) Determina la ecuación de la recta l_1 obtenida por una traslación de l de vector $\overrightarrow{v}$

(c) Determina la ecuación de la recta l_2 obtenida por una rotación de l de ángulo $\alpha=\pi/3$ y centro en el origen.

Solución

(a) $p'=(3,5)$ y l' tiene ecuación $-3x+2y=1$.

(b) $2(x'-1)+3(y'-3)=5$ que es $2x'+3y'=16$.

Ejercicio

Sea l la recta de ecuación $2x+3y=5$, sea $p=(2,2)$ un punto del plano y $\overrightarrow{v}=(1,3)$ un vector.

(a) Determina la ecuación general de la recta l' que es ortogonal a l y contiene el punto p' obtenido por una traslación de p de vector $\overrightarrow{v}$.

(b) Determina la ecuación de la recta l_1 obtenida por una traslación de l de vector $\overrightarrow{v}$

(c) Determina la ecuación de la recta l_2 obtenida por una rotación de l de ángulo $\alpha=\pi/3$ y centro en el origen.

Solución

(a) $p'=(3,5)$ y l' tiene ecuación $-3x+2y=1$.

(b) $2(x'-1)+3(y'-3)=5$ que es $2x'+3y'=16$.

(c) $2\left(\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)+3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'\right)=5$ que es $\left(2-3\sqrt{3}\right)x'+\left(3+2\sqrt{3}\right)y'=10$.

Ejercicio

Hallar la ecuación de la circunferencia C_1 que pasa por el punto $(1,4)$ y es tangente a la circunferencia C_2 de ecuación $x^2+y^2+6x+2y+5=0$ en el punto $(-2,1)$.

Ejercicio

Hallar la ecuación de la circunferencia C_1 que pasa por el punto $(1,4)$ y es tangente a la circunferencia C_2 de ecuación $x^2+y^2+6x+2y+5=0$ en el punto $(-2,1)$.

Solución

La ecuación de C_2 es $(x+3)^2+(y+1)^2=5$, lo que implica que el centro de C_1 está en la recta L que pasa por $(-3,-1)$ y $(-2,1)$. La ecuación de L es $2x-y+5=0$. Por lo tanto, La ecuación de C_1 es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, donde

$$\left\{\begin{array}{rl} (1-h)^2+(4-k)^2 & =r^2 \\ (-2-h)^2+(1-k)^2 & =r^2 \\ 2h-k+5 & =0. \end{array}\right.$$

De ahí que, $h=-1$, $k=3$ y $r=\sqrt{5}$. La ecuación de C_1 es $(x+1)^2+(y-3)^2=5$. $\square$