VECTORS I FISICA

VECTORS. ESPAI VECTORIAL

Propietats:

operación interna tal que:

- Tenga la propiedad conmutativa:
  $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}, \quad \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in V$
- Tenga la propiedad asociativa:
  $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}, \quad \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$
- Exista el elemento neutro:
  $\exists\ \mathbf{e}\in V:\mathbf{u}+\mathbf{e}=\mathbf{u}, \forall\ \mathbf{u}\in V$
- Exista el elemento opuesto:
  $\forall\ \mathbf{u}\in V, \quad \exists-\mathbf{u}\in V:\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{e}$

Y tenga la operación producto por un escalar:

$$\begin{array}{rcccc} \text{Producto} & \cdot: & K\times V & \longrightarrow & V \\ & & (a,\mathbf{u}) & \longmapsto & a\cdot\mathbf{u} \end{array}$$

operación externa tal que:

- Tenga la propiedad asociativa:
  $a\cdot(b\cdot\mathbf{u})=(a\cdot b)\cdot\mathbf{u}, \forall\ a,b\in K, \forall\ \mathbf{u}\in V$
- Exista el elemento neutro:
  $\exists e\in K: e\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}, \forall\ \mathbf{u}\in V$
- Tenga la propiedad distributiva respecto de la suma vectorial:
  $a\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\cdot\mathbf{u}+a\cdot\mathbf{v}, \forall\ a\in K, \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in V$
- Tenga la propiedad distributiva respecto de la suma escalar:
  $(a+b)\cdot\mathbf{u}=a\cdot\mathbf{u}+b\cdot\mathbf{u}, \forall a,b\in K, \forall\ \mathbf{u}\in V$

VECTORS. PRODUCTE ESCALAR

Definició:

- a partir dels mòduls
- A partir de components

Equivalència!!!!

Propietats:

- Conmutativa
- Distributiva respecte a la suma
- **No propietat associativa**
- Associativa respecte al producte amb un escalar

Utilitats:

- Determinació d'angle
- Determinació de mòdul
- Detector de perpendicularitat

VECTORS I PRODUCTE VECTORIAL

Definició

Identitats:

Cualquiera que sean los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$:

1. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$; el producto vectorial no es asociativo
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$; anticonmutatividad
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$; cancelación por ortogonalidad.
4. Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\Rightarrow \mathbf{a} \| \mathbf{b}$; la anulación del producto vectorial proporciona la condición de paralelismo entre dos direcciones.
5. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$; distributividad por derecha e izquierda
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$; conocida como regla de la expulsión.
7. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$; conocida como identidad de Jacobi.
8. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \, |\sin \theta|$, en la expresión del término de la derecha, sería el módulo de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, siendo θ, el ángulo menor entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$; esta expresión relaciona al producto vectorial con el área del paralelogramo que definen ambos vectores.
9. El módulo o norma del producto vectorial puede calcularse fácilmente sin hacer el producto vectorial:
   $$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \left(\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2\right)^{1/2}$$
10. El vector unitario $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$ es normal al plano que contiene a los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
11. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$;[3] el producto vectorial es nilpotente
12. $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$; el producto vectorial es bihomogéneo

VECTORS. PRODUCTE MIXTE

Definició:

Es un escalar .....

Propietats:

- ❑ Propietat de ciclicitat

Utilitat:

- ○ Determinació de volums

VECTORS. MOMENT RESPECTE A UN PUNT

Es un vector útil i convenient en física ......

VECTORS. MOMENT RESPECTE A UN EIX

Es un escalar útil i convenient en física ......

CAMPS ESCALARS I CAMPS VECTORIALS

Camp escalar:

$$\varnothing = \varnothing\ (x,y,z, t)$$

Camp vectorial:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}\ (x,y,z, t)$$

OPERADORS DIFERENCIALS I INTEGRALS. OPERATIVITAT EN FISICA.

Derivada i integral de camps d'una variable.
Derivada parcial d'un escalar respecte a un paràmetre.
Derivada parcial d'un vector respecte a un paràmetre.
Integral d'un vector respecte d'un paràmetre.
Circulació d'un vector.
Flux d'un camp vectorial.
Operador vectorial nabla.
Gradient d'una funció escalar.
Divergència d'una funció vectorial.
Rotacional d'una funció vectorial.

OPERADORS DIFERENCIALS I INTEGRALS. OPERATIVITAT EN FISICA.

Significat físic del gradient d’un camp escalar. Teorema del gradient.
Significat físic de la divergència d’un camp vectorial. Teorema de Gauss.
Significat físic del rotacional d’un camp vectorial. Teorema de Stokes.
Conseqüència del teorema de Stokes.
Operador Laplaciana.