La recta real

Àlex Arenas, Sergio Gómez

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

La recta real

- Conceptes previs
- Definició axiomàtica de la recta real
  - Axiomes, fites, màxims i mínims, teorema d’unicitat
- Propietats dels nombres reals
  - Positius i negatius, part entera
  - Propietats aritmètiques, infinits racionals i irracionals
- Topologia de la recta real
  - Interval, valor absolut, distància, punts d’acumulació i aïllats, oberts
  - Teorema de Bolzano-Weierstrass

Conceptes previs

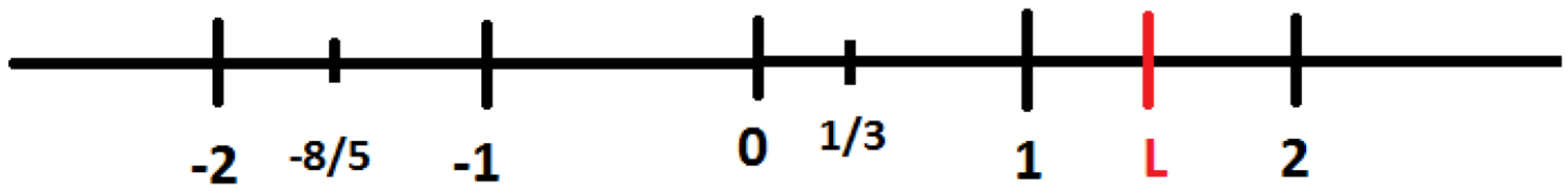
- Necessitem nombres per a representar la realitat (magnituds físiques)

Conceptes previs

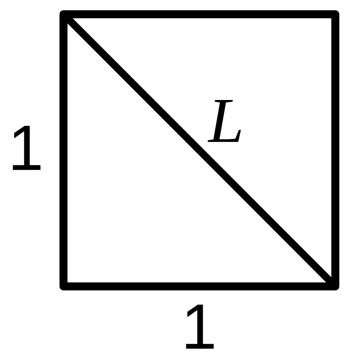
- Necessitem nombres per a representar la realitat (magnituds físiques)
- **Naturals** $\mathbb{N}$, **Enters** $\mathbb{Z}$ i **Racionals** $\mathbb{Q}$ han de formar part del sistema de mesura

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

- Prenent una unitat de mesura (definida pels nombres 0 i 1), cal poder representar tots els valors

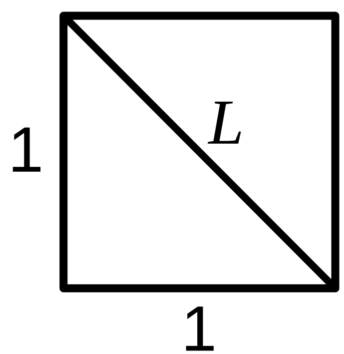


- No n'hi ha prou amb $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$
  - La diagonal d'un quadrat 1x1 no pertany a $\mathbb{Q}$



$$L^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

- No n'hi ha prou amb $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$
  - La diagonal d'un quadrat 1x1 no pertany a $\mathbb{Q}$



$$L^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$L \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{N} : L = \frac{p}{q} \wedge \mathrm{mcd}(p,q) = 1$$

$$L^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

p parell → p^2 múltiple de quatre → q parell →

→ contradicció amb $\mathrm{mcd}(p,q) = 1$ → $L \notin \mathbb{Q}$

- Els nombres reals queden determinats per la seva representació decimal

- Els nombres reals queden determinats per la seva representació decimal

- Els nombres racionals tenen representacions decimals finites o periòdiques

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\overline{3}$$

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots = 0.\overline{142857}$$

- Els nombres reals han de poder tenir representacions decimals arbitràries

- Els nombres reals han de poder tenir representacions decimals arbitràries

- Els nombres irracionals són els reals que no són racionals
  - Tenen representació decimal infinita i no periòdica

$$-\sqrt{3} = -1.732050807568877\ldots$$

$$\pi = 3.141592653589793\ldots$$

- Cada seqüencia decimal representa un únic nombre real

- Cada seqüencia decimal representa un únic nombre real

- Cada nombre real té una única representació decimal excepte els racionals amb representació finita

$$1 = 1.00000\ldots = 1.\overline{0} = 0.99999\ldots = 0.\overline{9}$$

$$14.126 = 14.1259999999 = 14.125\overline{9}$$

- Relació entre nombres naturals, enters, racionals i reals

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Definició axiomàtica de la recta real

- Necessitem definició dels nombres reals que ens asseguri que compleixen totes les propietats esperades

Definició axiomàtica de la recta real

- Necessitem definició dels nombres reals que ens asseguri que compleixen totes les propietats esperades

⬇

Definició axiomàtica

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant, 0, 1)$ és un cos commutatiu ordenat arquimedià complet que conté els racionals

- Axiomes de la suma

(A1) La suma és associativa

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$$

(A2) La suma té element neutre

$$\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$$

(A3) La suma té element simètric

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y = y + x = 0 \qquad (y \equiv -x)$$

(A4) La suma és commutativa

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$$

- Axiomes del producte

(A5) El producte és associatiu

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

(A6) El producte té element neutre

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

(A7) El producte té element simètric (excepte el 0)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x = 1 \qquad (y \equiv x^{-1})$$

(A8) El producte és commutatiu

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$$

- Axiomes de relació entre suma i producte

  (A9) Propietat distributiva

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

- Axiomes d'ordenació

(A10) L'ordenació és reflexiva

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \leqslant x$$

(A11) L'ordenació és antisimètrica

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$$

(A12) L'ordenació és transitiva

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$$

(A13) L'ordenació és total

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \vee y \leqslant x$$

- Axiomes de relació entre ordenació, suma i producte

(A14) Invariància d'ordenació per suma

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$$

(A15) Producte de positius

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow x \cdot y \geqslant 0$$

- Observació
  - Les operacions de resta i divisió, i les relacions $<$, $>$, $\geq$ es defineixen a partir de sumes, productes, $\leq$ i $=$

- Axiomes addicionals

(A16) Propietat arquimediana

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot x > y$$

(A17) Inclusió dels racionals

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ és un subcòs ordenat de $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$

(A18) Completesa

$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \varnothing$ fitat superiorment $\Rightarrow \sup(A) \in \mathbb{R}$

- Observació
  - L'axioma (A18) requereix la definició dels següents conceptes:
    - Fita superior, Fita inferior
    - Conjunt afitat superiorment, Conjunt afitat inferiorment
    - Conjunt afitat
    - Màxim, Mínim
    - Suprem, Ínfim

- Definicions
  - Sigui $A \subset \mathbb{R}$
    - A és fitat superiorment (amb fita superior α) sii

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \ \forall x \in A \quad \Rightarrow \quad x \leqslant \alpha$$

    - A és fitat inferiorment (amb fita inferior β) sii

$$\exists \beta \in \mathbb{R} : \ \forall x \in A \quad \Rightarrow \quad x \geqslant \beta$$

    - A és fitat si té al mateix temps fita superior i fita inferior

    - “sii” = “si, i només si,”
    - “iff” = “if, and only if,”

- Definicions
  - Sigui $A \subset \mathbb{R}$
    - M és el màxim de A, $M = \max A$, si $M \in A$ i és una fita superior
    - m és el mínim de A, $m = \min A$, si $m \in A$ i és una fita inferior

β

- Definicions
  - Sigui $A \subset \mathbb{R}$
    - α és el suprem de A, $\alpha = \sup A$, si és una fita superior i es compleix que

$$\alpha' < \alpha \quad \Rightarrow \quad \exists x \in A : \ \alpha' < x \leqslant \alpha$$

    - β és l'ínfim de A, $\beta = \inf A$, si és una fita inferior i es compleix que

$$\beta' > \beta \quad \Rightarrow \quad \exists x \in A : \ \beta \leqslant x < \beta'$$

- Observacions
  - A1 – A4 ➡ $(\mathbb{R},+)$ grup commutatiu
  - A5 – A8 ➡ $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ grup commutatiu
  - A1 – A6, A9 ➡ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ anell
  - A1 – A9 ➡ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ cos commutatiu
  - A10 – A13 ➡ $(\mathbb{R},\leqslant)$ conjunt totalment ordenat

- **Teorema**
  - $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ és l'únic cos commutatiu arquimedià complet que conté els racionals com a subcòs commutatiu arquimedià complet

Propietats dels nombres reals

- Definicions
  - Nombre positiu: $x > 0$
  - Nombre negatiu: $x < 0$
  - Nombre no positiu: $x \leq 0$
  - Nombre no negatiu: $x \geq 0$

- Algunes propietats
  - Si $x + y = x$, aleshores $y = 0$
  - Si $x \neq 0$ i $x\,y = x$, aleshores $y = 1$
  - $0\,x = 0$, per a tot $x \in \mathbb{R}$
  - $(-1)\,x = -x$, per a tot $x \in \mathbb{R}$
  - Si $x\,y = 0$, aleshores $x = 0$ o bé $y = 0$
  - Si $x > 0$, aleshores $-x < 0$
  - Si $x < y$, aleshores $-x > -y$
  - Si $x < 0$ i $y > 0$, aleshores $x\,y < 0$
  - Si $x < 0$ i $y < 0$, aleshores $x\,y > 0$
  - Si $x \leq y$ i $z \geq 0$, aleshores $x\,z \leq y\,z$
  - Si $0 \leq x < y$ i $n \in \mathbb{N}$, aleshores $x^n < y^n$

- Algunes propietats
  - Tot conjunt no buit i finit de reals té màxim i mínim
  - Part entera d'un real $[x] = \lfloor x \rfloor = n$

$$x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x < n+1$$

- Exemples

$$\begin{aligned} [5] &= 5 \\ [-5] &= -5 \\ [3.4] &= 3 \\ [-3.4] &= -4 \\ [\pi] &= 3 \\ [-\pi] &= -4 \end{aligned}$$

- Algunes propietats
  - Teorema
    - Entre dos reals diferents, sempre hi ha almenys un racional

$$x, y \in \mathbb{R}\,,\ x < y \ \Rightarrow\ \exists q \in \mathbb{Q} :\ x < q < y$$

    - Entre dos reals diferents, sempre hi ha almenys un irracional

$$x, y \in \mathbb{R}\,,\ x < y \ \Rightarrow\ \exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} :\ x < z < y$$

  - Corol·lari
    - Hi ha infinits racionals i irracionals entre qualsevol parella de reals diferents

Algunes propietats

Demostració de l'existència d'un racional

$$x, y \in \mathbb{R}\,,\ x < y \ \Rightarrow \ \exists q \in \mathbb{Q} : \ x < q < y$$

- Per la propietat arquimediana, $\exists n \in \mathbb{N} : n > \dfrac{1}{y-x}$
- Sigui $m = [n\,x] + 1$
- Per la definició de part entera, $m - 1 \leqslant n\,x < m$
- Queda

$$y - x > \frac{1}{n} \qquad \frac{m-1}{n} \leqslant x < \frac{m}{n}$$

- Ajuntant-ho tot $y > \dfrac{1}{n} + x \geqslant \dfrac{1}{n} + \dfrac{m-1}{n} = \dfrac{m}{n} > x$

- Per tant $q \equiv \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q} : \ x < q < y$

- Algunes propietats
  - Demostració de l'existència d'un irracional

$$x, y \in \mathbb{R},\ x < y \ \Rightarrow\ \exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} :\ x < z < y$$

- Aplicant el procediment anterior

$$\sqrt{2}\,x < \sqrt{2}\,y \ \Rightarrow\ \exists q \in \mathbb{Q} :\ \sqrt{2}\,x < q < \sqrt{2}\,y$$

- Per tant

$$x < \frac{q}{\sqrt{2}} < y$$

- Queda

$$z \equiv \frac{q}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} :\ x < z < y$$

- Mancaria demostrar que z és irracional, però es fa igual que per $\sqrt{2}$

Topologia de la recta real

- L'estudi de la topologia de la recta real es basa en els següents conceptes
  - Interval
  - Interval fitat, Interval obert, Interval tancat
  - Valor absolut
  - Distància
  - Punt aïllat, Punt d'acumulació
  - Conjunt obert

- Definicions
  - Un interval és un conjunt $I \subset \mathbb{R}$ que satisfà
    - Si $x, y \in I,\ x \leqslant y$ aleshores

$$\forall z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \ \Rightarrow \ z \in I$$

- Definicions
  - Tipus d'intervals
    - Interval buit (obert, tancat, fitat)

$$I = \varnothing$$

    - La recta real (obert, tancat, no fitat)

$$I = \mathbb{R}$$

Definicions

Tipus d'intervals

- Intervals I no buits i fitats ➡ $\exists a = \inf(I)\,,\ \exists b = \sup(I)$

$$I = [a,b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leqslant x \leqslant b\}\,, \quad a \leqslant b$$
$$I = (a,b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}\,, \quad a < b$$
$$I = [a,b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leqslant x < b\}\,, \quad a < b$$
$$I = (a,b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leqslant b\}\,, \quad a < b$$

El primer és tancat, el segon obert, i els altres no oberts i no tancats

La seva longitud és $\ell(I) = b - a$

Definicions

Tipus d'intervals

- Intervals I no buits i fitats només per un costat

$$
\begin{aligned}
I &= [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geqslant a\} \\
I &= (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\} \\
I &= (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leqslant b\} \\
I &= (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}
\end{aligned}
$$

Tots són no fitats

Els dos primers són fitats inferiorment i no fitats superiorment

Els dos últims són fitats superiorment i no fitats inferiorment

El primer i el tercer són no oberts i tancats

El segon i el quart són oberts i no tancats

- Definicions
  - El valor absolut $|x|$ d'un número $x \in \mathbb{R}$ és

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geqslant 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

- Definicions
  - Una mètrica o distància d és una aplicació

    $$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

    que satisfà les següents propietats
    - $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
    - $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria)
    - $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (propietat triangular)
  - La tupla (E, d) forma un espai mètric

Definicions

- Una mètrica o distància d és una aplicació

  $$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

  que satisfà les següents propietats

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\[2ex] \blacksquare\ d(x,y) = d(y,x) \\[2ex] \blacksquare\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y) \geqslant 0$$

- La tupla (E, d) forma un espai mètric

- Definicions
  - La distància $d(x,y)$ entre dos nombres reals $x, y \in \mathbb{R}$ és defineix com

$$d(x,y) = |x - y|$$

  - Proposició
    - $(\mathbb{R}, d)$ és un espai mètric

- **Definicions**
  - Sigui $A \subset \mathbb{R}$
    - $x \in A$ és un punt aïllat si

$$\exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \cap A = \{x\}$$

    - $x \in A$ és un punt d'acumulació si

$$\forall \delta > 0 : ((x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$$

  - Observació
    - Tot punt de A és punt aïllat o és punt d'acumulació, però mai totes dues coses alhora; són propietats excloents

- Propietats
  - Teorema de Bolzano-Weierstrass
    - Sigui $A \subset \mathbb{R}$ un conjunt infinit i fitat de nombres reals. Aleshores, A conté almenys un punt d'acumulació

- Propietats
  - Demostració del teorema de Bolzano-Weierstrass
    - Com A és fitat, té fites inferiors i superiors: $A \subset [a, b]$
    - Sigui $B = \{c \in \mathbb{R}: [c, +\infty) \cap A \text{ conté infinits elements}\}$
    - Com B no buit ($a \in B$) i fitat superiorment, $\exists \beta = \sup B$
    - β és un punt d'acumulació de B
      - Si no fos punt d'acumulació, $\exists \delta < 0$ tal que $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ conté com a molt un element d'A
      - Com $\beta + \delta \notin B$ ja que $\beta = \sup B$, l'interval $[\beta + \delta, +\infty)$ conté com a molt un nombre finit d'elements del conjunt A
      - El mateix passa per tots els intervals $[c, +\infty)$ amb $c \in (\beta - \delta, \beta]$
      - Per tant, $\beta - \delta$ resulta ser una fita superior de B, en contradicció amb $\beta = \sup B$ ∎

- # Definicions
  - Sigui $A \subset \mathbb{R}$
    - A és un obert si

$$\forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0 :\ \forall y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad y \in A$$

Tot punt de l'obert està completament envoltat per punts que també són de l'obert

  - Propietats
    - Els intervals oberts són oberts
    - La unió de dos oberts és un obert
    - La intersecció de dos oberts és un obert

- Definicions
  - Sigui

$$\tau = \{A \subset \mathbb{R} : \ A \text{ és obert}\}$$

  - τ és una topologia del la recta real ja que satisfà les següents propietats
    - El buit $\varnothing$ i $\mathbb{R}$ són oberts
    - Qualsevol unió d'oberts és un obert

$$\{A_i : i \in \mathcal{K}\} \subseteq \tau \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i \in \mathcal{K}} A_i \in \tau$$

    - La intersecció d'un nombre finit d'oberts és un obert

$$A_1, \ldots, A_k \in \tau \quad \Rightarrow \quad A_1 \cap \cdots \cap A_k \in \tau$$

  - La tupla $(\mathbb{R}, \tau)$ és un espai topològic