Exercicis integral de superfície

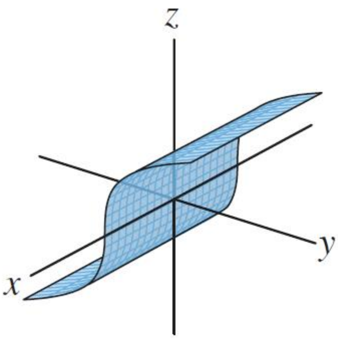
1. Emparelleu parametrització amb superfície:

   (a) $(u, \cos v, \sin v)$ **(b)** $(u, u+v, v)$

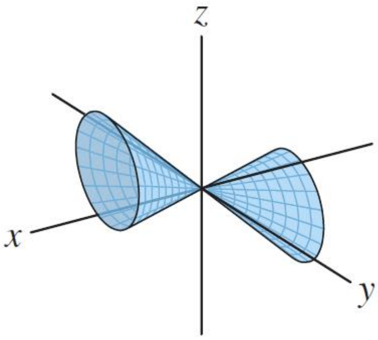
   (c) (u, v^3, v)

   (d) $(\cos u \sin v, 3\cos u \sin v, \cos v)$

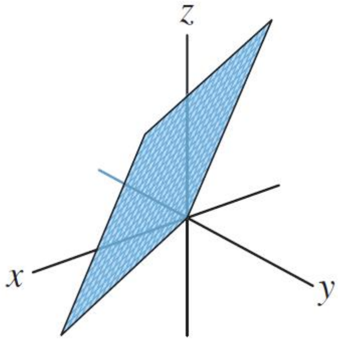
   (e) $(u, u(2+\cos v), u(2+\sin v))$



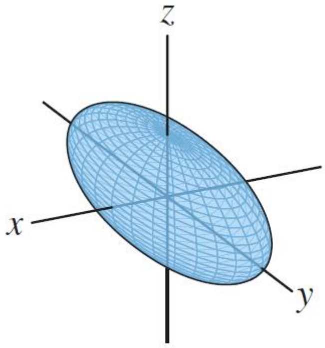
(i)



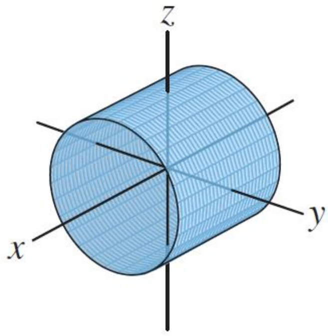
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

2. Siguin les següents parametritzacions de superfícies:

$$\mathbf{X}(s,t) = (s\cos t, s\sin t, 3s^2), \quad 0 \le s \le 2, 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\mathbf{Y}(s,t) = (2s\cos t, 2s\sin t, 12s^2), \quad 0 \le s \le 1, 0 \le t \le 4\pi.$$

   a) Demostra que les imatges de $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ són iguals. [Pista: troba l'equació de la superfície en funció de x, y, z].
   b) Calcula la integral de superfície del camp $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ per a les dues parametritzacions. Reconcilia els resultats.

3. Sigui $\boldsymbol{\phi}(x, y) = (x, y, xy)$.

   a) Calcula $\boldsymbol{T}_x$, $\boldsymbol{T}_y$ i $\boldsymbol{n}(x, y)$.
   b) Sigui S la part de la superfície amb domini de paràmetres $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Verifica la següent fórmula i avalua-la utilitzant coordenades polar:

$$\iint_S 1\, dS = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

   c) Verifica la següent fórmula i avalua-la:

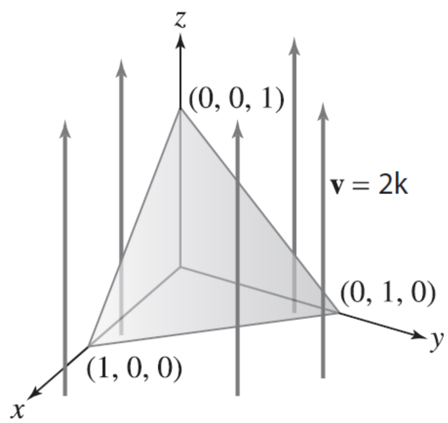
$$\iint_S z\, dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (\sin\theta \cos\theta) r^3 \sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\theta$$

4. Calcula $\boldsymbol{T}_u$, $\boldsymbol{T}_v$ i $\boldsymbol{n}(u, v)$ per a les superfícies parametritzades següents, i calcula el pla tangent en el punt indicat:

   a)
$$\Phi(u, v) = (2u + v, u - 4v, 3u); \qquad u = 1, \quad v = 4$$
   b)
$$\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi); \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

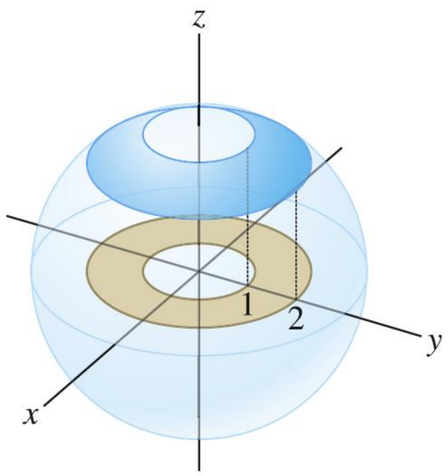
5. Un fluid flueix amb un camp de velocitats constant $v = 2\boldsymbol{k}$ (m/s). Calcula:

   a) El flux a través del triangle T.
   b) El flux a través de la projecció del triangle T sobre el pla xy.

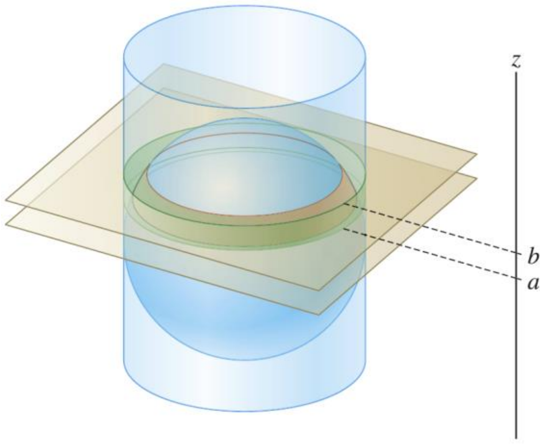


6. Sigui S la porció d'una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ amb $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ and $z \ge 0$. Troba una parametrització de S en coordenades esfèriques i utilitza-la per a calcular:

a) L'àrea de S.
b) $\int\int_S z^{-1}\, dS$.



7. Demostra el famós resultat d'Arquímedes: l'àrea de la porció de superfície d'una esfera de radi R entre dos plans horitzontals $z = a$ i $z = b$ és igual a la corresponent porció de superfície del cilindre circumscrit.



8. Calcula la superfície exterior i el volum d'una esfera de radi R, centrada a l'origen, a la qual se li ha fet un forat cilíndric de radi r i d'eix del cilindre igual a l'eix z.