Polinomio cromático

J. A. Rodríguez-Velázquez

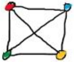
URV

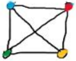
Ejercicio

Determina de cuántas formas diferentes se puede colorear K_4 con 4 colores de modo que vértices adyacentes tengan colores diferentes. ¿Y si disponemos de x colores?

Ejercicio

Determina de cuántas formas diferentes se puede colorear K_4 con 4 colores de modo que vértices adyacentes tengan colores diferentes. ¿Y si disponemos de x colores?

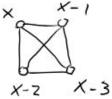




4 colores $\longrightarrow 4!$

6 colores $\longrightarrow \binom{6}{4}4! = V(6,4) = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$

x colores $\longrightarrow \binom{x}{4}4! = V(x,4) = x(x-1)(x-2)(x-3)$



Definición

Dado un grafo G, denotaremos por $P_G(x)$ el número de vértice-coloraciones de G que usan a lo sumo x colores. A $P_G(x)$ se le conoce con el nombre de polinomio cromático de G.

Proposición

Para todo grafo G de orden n se cumple que $P_G(x)$ es un polinomio de grado n.

Proposición

Para todo grafo G de orden n se cumple que $P_G(x)$ es un polinomio de grado n.

Demostración

- Para cualquier coloración de vértices de G con x colores disponibles, las clases de color no vacías constituyen una partición de $V(G)$ donde cada parte es un conjunto independiente.

Proposición

Para todo grafo G de orden n se cumple que $P_G(x)$ es un polinomio de grado n.

Demostración

- Para cualquier coloración de vértices de G con x colores disponibles, las clases de color no vacías constituyen una partición de $V(G)$ donde cada parte es un conjunto independiente.
- Podemos contar las coloraciones para una determinada partición, y luego sumar las coloraciones para todas las particiones.

Proposición

Para todo grafo G de orden n se cumple que $P_G(x)$ es un polinomio de grado n.

Demostración

- Para cualquier coloración de vértices de G con x colores disponibles, las clases de color no vacías constituyen una partición de $V(G)$ donde cada parte es un conjunto independiente.
- Podemos contar las coloraciones para una determinada partición, y luego sumar las coloraciones para todas las particiones.
- Fijemos una partición con p partes (p clases de color), siendo cada una de ellas un conjunto independiente. Asignando un color diferente a cada parte, obtenemos todas las coloraciones que pertenecen a la partición. Podemos elegir el primer color de x formas posibles, el segundo de $x-1$ formas, etc. Por lo que hay $x(x-1)\cdots(x-p+1)$ coloraciones, lo que obviamente es un polinomio.

Proposición

Para todo grafo G de orden n se cumple que $P_G(x)$ es un polinomio de grado n.

Demostración

- Para cualquier coloración de vértices de G con x colores disponibles, las clases de color no vacías constituyen una partición de $V(G)$ donde cada parte es un conjunto independiente.
- Podemos contar las coloraciones para una determinada partición, y luego sumar las coloraciones para todas las particiones.
- Fijemos una partición con p partes (p clases de color), siendo cada una de ellas un conjunto independiente. Asignando un color diferente a cada parte, obtenemos todas las coloraciones que pertenecen a la partición. Podemos elegir el primer color de x formas posibles, el segundo de $x-1$ formas, etc. Por lo que hay $x(x-1)\cdots(x-p+1)$ coloraciones, lo que obviamente es un polinomio.
- Por último, no hay ninguna partición con más de n partes y hay una única partición con exactamente n partes. Para esta partición, el número de coloraciones es un polinomio de grado n, mientras que para todas las demás particiones el polinomio tiene un grado inferior a n. La suma de este tipo de polinomios es uno de grado n. □

Observación

Para todo grafo G se cumple que $\chi(G) = \text{mín}\{x \in \mathbb{N} : P_G(x) \neq 0\}$.

Ejercicio

Determina el polinomio cromático de K_n.

Ejercicio

Determina el polinomio cromático de K_n.

Solución

Para todo grafo completo de orden n se cumple,

$$P_{K_n}(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Ejercicio

Determina el polinomio cromático de todo árbol de orden n.

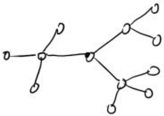
Ejercicio

Determina el polinomio cromático de todo árbol de orden n.

Solución

El polinomio cromático de todo árbol T de orden n es

$$P_T(x) = x(x-1)^{n-1}.$$

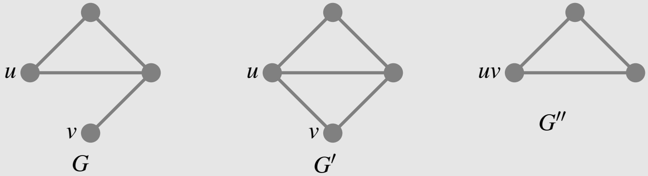
$T =$  $\rightarrow P_T(x) = x(x-1)^{11}$

$n = 12$

Notación

Sea $G \ncong K_n$. Sean u y v dos vértices no adyacentes de G. Sea G' el grafo obtenido añadiendo a G la arista $\{u,v\}$, y sea G'' el grafo simple obtenido identificando los vértices u y v.

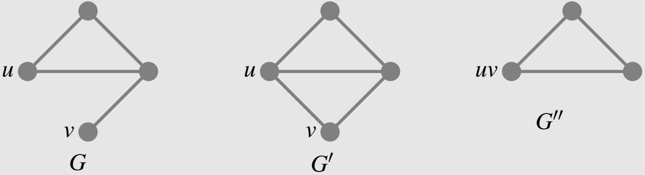
Ejemplo



Notación

Sea $G \ncong K_n$. Sean u y v dos vértices no adyacentes de G. Sea G' el grafo obtenido añadiendo a G la arista $\{u,v\}$, y sea G'' el grafo simple obtenido identificando los vértices u y v.

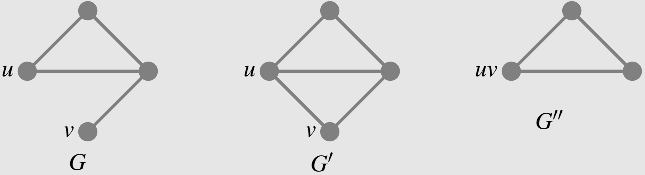
Ejemplo



Notación

Sea $G \ncong K_n$. Sean u y v dos vértices no adyacentes de G. Sea G' el grafo obtenido añadiendo a G la arista $\{u,v\}$, y sea G'' el grafo simple obtenido identificando los vértices u y v.

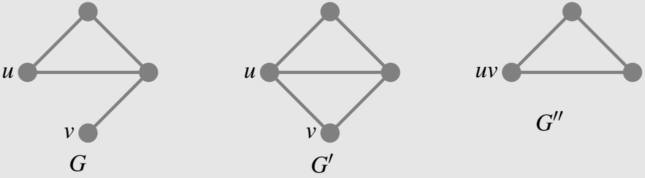
Ejemplo



Proposición

Para todo grafo $G \ncong K_n$ se cumple $P_G(x) = P_{G'}(x) + P_{G''}(x)$.

Ejemplo de aplicación del algoritmo



En este caso tenemos $P_G(x) = P_{G'}(x) + P_{G''}(x)$, además, $P_{G'}(x) = P_{K_4}(x) + P_{K_3}(x)$. Por lo tanto,

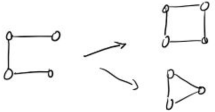
$$\begin{aligned} P_G(x) &= P_{G'}(x) + P_{G''}(x) \\ &= (P_{K_4}(x) + P_{K_3}(x)) + P_{K_3}(x) \\ &= x(x-1)(x-2)(x-3) + 2x(x-1)(x-2) \\ &= x(x-1)^2(x-2). \end{aligned}$$

Ejercicio

Determina de cuántas formas diferentes se puede colorear los vértices del ciclo C_4, con 5 colores como máximo, de modo que vértices adyacentes tengan colores diferentes.

Ejercicio

Determina de cuántas formas diferentes se puede colorear los vértices del ciclo C_4, con 5 colores como máximo, de modo que vértices adyacentes tengan colores diferentes.



$\Rightarrow$

$$P_{P_4}(x) = P_{C_4}(x) + P_{K_3}(x)$$

$$P_{C_4}(x) = P_{P_4}(x) - P_{K_3}(x) = x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2)$$

$$= x(x-1)[(x-1)^2 - (x-2)]$$

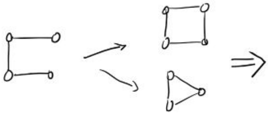
$$= x(x-1)(x^2-3x+3)$$

$$P_{C_4}(5) = 5 \cdot 4 \cdot (25-15+3)$$

$$= 260$$

Ejercicio

Determina de cuántas formas diferentes se puede colorear los vértices del ciclo C_4, con 5 colores como máximo, de modo que vértices adyacentes tengan colores diferentes.



$$P_{P_4}(x) = P_{C_4}(x) + P_{K_3}(x)$$

$$P_{C_4}(x) = P_{P_4}(x) - P_{K_3}(x) = x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2)$$

$$= x(x-1)[(x-1)^2 - (x-2)]$$

$$= \underline{x(x-1)(x^2-3x+3)}$$

$$P_{C_4}(5) = 5\cdot 4\cdot(25-15+3)$$

$$= 260$$

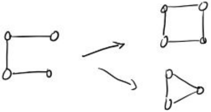
Proposición

El polinomio cromático de todo ciclo de orden n es

$$P_{C_n}(x) = (x-1)^n + (-1)^n(x-1).$$

Ejercicio

Determina de cuántas formas diferentes se puede colorear los vértices del ciclo C_4, con 5 colores como máximo, de modo que vértices adyacentes tengan colores diferentes.



$\Rightarrow$

$$P_{P_4}(x) = P_{C_4}(x) + P_{K_3}(x)$$

$$P_{C_4}(x) = P_{P_4}(x) - P_{K_3}(x) = x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2)$$

$$= x(x-1)[(x-1)^2 - (x-2)]$$

$$= x(x-1)(x^2-3x+3)$$

$$P_{C_4}(5) = 5\cdot 4\cdot(25-15+3)$$

$$= 260$$

Proposición

El polinomio cromático de todo ciclo de orden n es

$$P_{C_n}(x) = (x-1)^n + (-1)^n(x-1).$$

Demostración

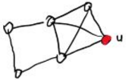
Inducción, escribe los detalles. $\square$

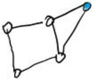
Definición

Definimos la vecindad de un vértice u de un grafo $G=(V,E)$ como $N(u)=\{v\in V : v\sim u\}$. Es decir, el grado de u es $\delta(u)=|N(u)|$.

Definición

Definimos la vecindad de un vértice u de un grafo $G=(V,E)$ como $N(u)=\{v\in V : v\sim u\}$. Es decir, el grado de u es $\delta(u)=|N(u)|$.

$G =$ 

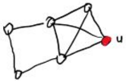
$G-\{u\} =$ 

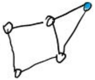
$$P_{G-\{u\}}(x) = \underline{(x-2)}\,P_{C_4}(x)$$

$$P_G(x) = \underline{(x-3)}\,P_{G-\{u\}}(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x^2-3x+3)$$

Definición

Definimos la vecindad de un vértice u de un grafo $G=(V,E)$ como $N(u)=\{v\in V : v\sim u\}$. Es decir, el grado de u es $\delta(u)=|N(u)|$.

$G =$ 

$G-\{u\} =$ 

$P_{G-\{u\}}(x) = (x-2)\,P_{C_4}(x)$

$P_G(x) = (x-3)\,P_{G-\{u\}}(x)$
$= x(x-1)(x-2)(x-3)(x^2-3x+3)$

Proposición

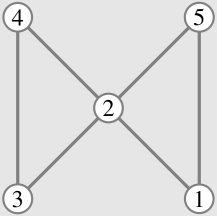
Si el subgrafo inducido por $N(u)$ es completo, entonces el polinomio cromático de G se calcula como

$$P_G(x) = (x-\delta(u))\cdot P_{G-\{u\}}(x),$$

donde $G-\{u\}$ es el subgrafo de G que se obtiene eliminando el vértice u.

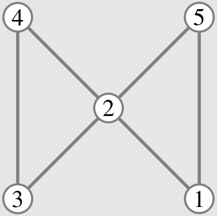
Ejercicio

Calcula el polinomio cromático del grafo G de la figura.



Ejercicio

Calcula el polinomio cromático del grafo G de la figura.



Solución

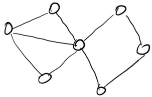
Partimos del grafo completo de vértices $\{1,2,5\}$, cuyo polinomio cromático ya conocemos: $P_{K_3}(x) = x(x-1)(x-2)$, luego consideramos el grafo G_1 que se obtiene al agregar el vértice 3. En este caso

$$P_{G_1}(x) = P_{K_3}(x)(x-1) = x(x-1)^2(x-2).$$

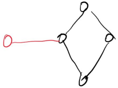
Y el grafo G se obtiene agregando el vértice 4: $P_G(x) = P_{G_1}(x)(x-2)$.

Ejercicio

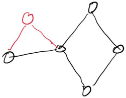
Calcula el polinomio cromático del siguiente grafo.



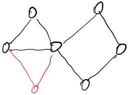
Solución



$\rightarrow (x-1)\,P_{C_4}(x)$



$\rightarrow (x-2)(x-1)\,P_{C_4}(x)$



$\rightarrow \underbrace{(x-2)^2(x-1)\,P_{C_4}(x)}$

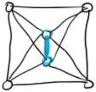
$$P_G(x) = x(x-1)^2(x-2)^2(x^2-3x+3)$$

Ejercicio

Determina el polinomio cromático de un grafo $G = K_2 + C_4$.

Ejercicio

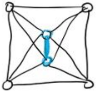
Determina el polinomio cromático de un grafo $G = K_2 + C_4$.

$G = K_2 + C_4 =$  $\longrightarrow x(x-1)\,P_{C_4}(x-2)$, $\quad P_{C_4}(x) = x(x-1)(x^2-3x+3)$

$$P_G(x) = x(x-1)\underline{\left[(x-2)(x-3)\left((x-2)^2-3(x-2)+3\right)\right]} = x(x-1)\underline{\left((x-2)(x-3)\left(x^2-7x+13\right)\right)}$$

Ejercicio

Determina el polinomio cromático de un grafo $G = K_2 + C_4$.

$G = K_2 + C_4 =$  $\longrightarrow x(x-1)\,P_{C_4}(x-2)$, $P_{C_4}(x) = x(x-1)(x^2-3x+3)$

$$P_G(x) = x(x-1)\left[(x-2)(x-3)\left((x-2)^2 - 3(x-2) + 3\right)\right] = x(x-1)\left((x-2)(x-3)(x^2-7x+13)\right)$$

Proposición

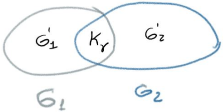
Para todo entero positivo r y todo grafo G,

$$P_{K_r+G}(x) = P_{K_r}(x)P_G(x-r).$$

Teorema

Sea $G=(V,E)$ un grafo y sean r un entero positivo. Si existen dos subgrafos de G, $G_1=(V_1,E_1)$ y $G_2=(V_2,E_2)$, tales que $\langle V_1\cap V_2\rangle \cong K_r$ y ninguna arista de G conecta $V_1-(V_1\cap V_2)$ con $V_2-(V_1\cap V_2)$, entonces

$$P_G(x)=\frac{P_{G_1}(x)P_{G_2}(x)}{P_{K_r}(x)}.$$

$G =$ 

$\chi(G)\geq r, \quad \exists P^*, P', P'' :$ $P_G(x) = P^*(x)\,P_{K_r}(x)$

$P_{G_1}(x) = P'(x)\,P_{K_r}(x)$

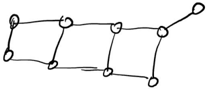
$P_{G_2}(x) = P''(x)\,P_{K_r}(x)$

No hay aristas de G_1' a G_2' $\longrightarrow P^*(x) = P'(x)\cdot P''(x)$

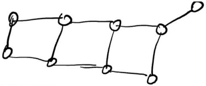
$$\frac{P_G(x)}{P_{K_r}(x)} = \frac{P_{G_1}(x)}{P_{K_r}(x)}\cdot\frac{P_{G_2}(x)}{P_{K_r}(x)} \longrightarrow P_G(x) = \frac{P_{G_1}(x)\cdot P_{G_2}(x)}{P_{K_r}(x)} \checkmark$$

Ejercicio

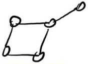
Determina el polinomio cromático del siguiente grafo.



Solución

$G =$ 

$G_1 =$ 

$G_2 =$ 

$$P_G(x) = \frac{P_{G_1}(x) \cdot P_{G_2}(x)}{P_{K_2}(x)}$$

$$= x(x-1)^2(x^2-3x+3)^3$$

$$P_{G_1}(x) = \frac{P_{C_4}(x) \cdot P_{C_4}(x)}{P_{K_2}(x)} = \frac{x^2(x-1)^2(x^2-3x+3)^2}{x(x-1)}$$

$$= x(x-1)(x^2-3x+3)^2$$

$$P_{G_2}(x) = P_{C_4}(x) \cdot (x-1)$$

$$= x(x-1)^2(x^2-3x+3)$$

Ejercicio

Determina (por 3 vías diferentes) el polinomio cromático de los siguientes grafos.

(a) $G = K_1 + P_3$.

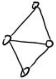
(b) $G = K_1 + (K_2 \cup K_2)$.

Ejercicio

Determina (por 3 vías diferentes) el polinomio cromático de los siguientes grafos.

(a) $G = K_1 + P_3$.

(b) $G = K_1 + (K_2 \cup K_2)$.

$K_1 + P_3 =$ 

$P_{K_1+P_3}(x) = x \cdot P_{P_3}(x-1) = x(x-1)(x-2)^2$

$P_{K_1+P_3}(x) = (x-2)\, P_{K_3}(x) = x(x-1)(x-2)^2$

$$P_{K_1+P_3}(x) = \frac{P_{K_3}(x) \cdot P_{K_3}(x)}{P_{K_2}(x)} = x(x-1)(x-2)^2$$

$G = K_1 + (K_2 \cup K_2) =$ 

$P_G = x \cdot P_{K_2 \cup K_2}(x-1) = x(x-1)^2(x-2)^2$

$P_G = (x-1)(x-2)\, P_{K_3}(x) = x(x-1)^2(x-2)^2$

$$P_G(x) = \frac{P_{K_3}(x) \cdot P_{K_3}(x)}{P_{K_1}(x)} = x(x-1)^2(x-2)^2$$

Ejercicio

Determina una fórmula para $P_{G \odot H}(x)$.

Ejercicio

Determina una fórmula para $P_{G\odot H}(x)$.

Solución

Para cada vértice $v\in V(G)$, sea H_v la copia de H asociada av en $G\odot H$. Sea x el número de colores. Para cada coloración de los vértices del subgrafo G de $G\odot H$, hay $x-1$ colores disponibles para ser usados en el subgrafo H_v, y así hay $P_{H_v}(x-1)=P_H(x-1)$ coloraciones de H_v con $x-1$ colores. Por lo tanto, si G tiene orden n,

$$P_{G\odot H}(x)=P_G(x)\prod_{v\in V(G)}P_{H_v}(x-1)=P_G(x)\left(P_H(x-1)\right)^n.$$