Homotecias

Definición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Para cada punto $o \in A$ y cada escalar λ, la aplicación $h_{(o,\lambda)} : A \longrightarrow A$, definida por $h_{(o,\lambda)}(a) = o + \lambda\overrightarrow{oa}$ para todo $a \in A$, se denomina *homotecia* o *dilatación* de centro o y razón λ.

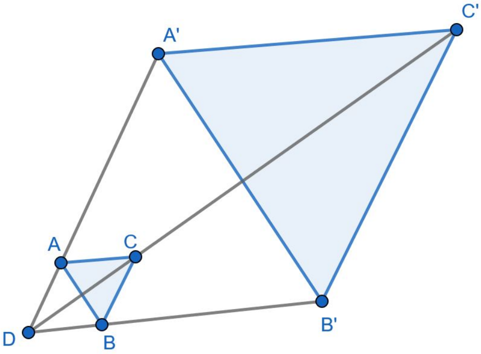
Definición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Para cada punto $o \in A$ y cada escalar λ, la aplicación $h_{(o,\lambda)} : A \longrightarrow A$, definida por $h_{(o,\lambda)}(a) = o + \lambda\overrightarrow{oa}$ para todo $a \in A$, se denomina *homotecia* o *dilatación* de centro o y razón λ.

Nótese que una homotecia de razón $\lambda = 1$ es en realidad la aplicación identidad.

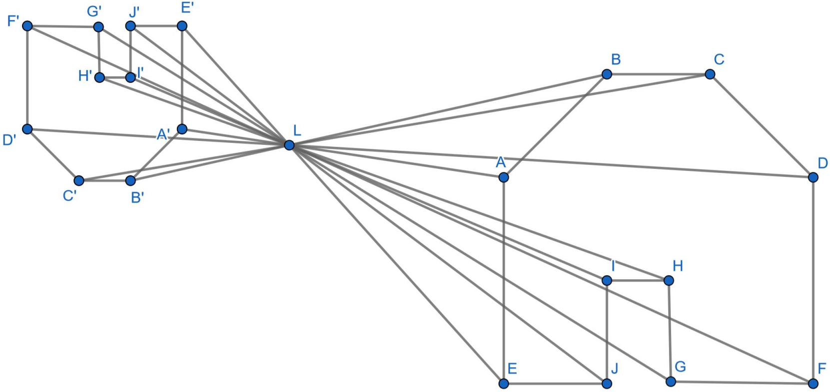
Ejemplo

La siguiente figura muestra la imagen de un triángulo ABC por una homotecia de centro D y razón $\lambda = 4$.



Ejemplo

La siguiente figura muestra la homotecia de razón $-\frac{1}{2}$ y centro L.

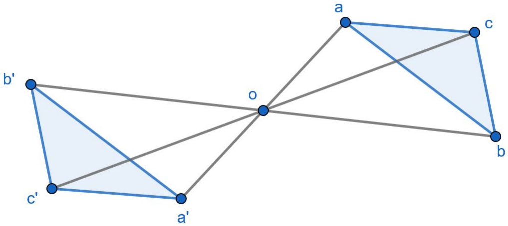


Definición

Una homotecia de razón $\lambda = -1$ y centro o, es decir $h_{(o,-1)}$, se conoce como *simetría central* de centro o y se denota como $C_o = h_{(o,-1)}$.

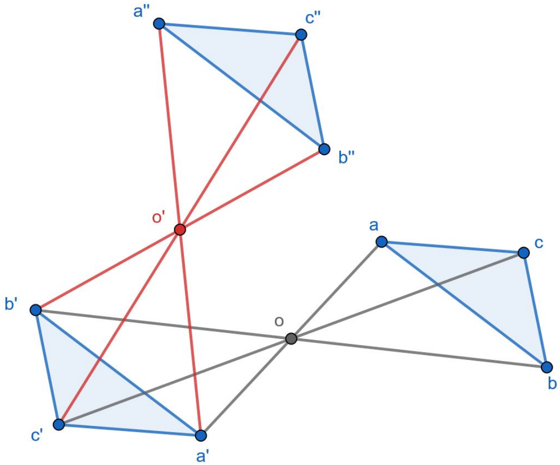
Ejemplo

En la siguiente figura mostramos la imagen de un triángulo abc por la simetría central de centro o.



Ejemplo

La figura siguiente muestra la imagen del triángulo abc por la composición de dos simetrías centrales.



Ejercicio

Demuestra que toda homotecia es una aplicación afín.

Ejercicio

Demuestra que toda homotecia es una aplicación afín.

Solución

Sea $h_{(o,\lambda)}(a) = o + \lambda\overrightarrow{oa}$ para toda $a \in A$, y $f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$.

Ejercicio

Demuestra que toda homotecia es una aplicación afín.

Solución

Sea $h_{(o,\lambda)}(a) = o + \lambda\overrightarrow{oa}$ para toda $a \in A$, y $f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$.
Nótese que que $h_{(o,\lambda)}(o) = o$ y $\overrightarrow{oh_{(o,\lambda)}(a)} = \lambda\overrightarrow{oa}$ para todo $a \in A$.

Ejercicio

Demuestra que toda homotecia es una aplicación afín.

Solución

Sea $h_{(o,\lambda)}(a) = o + \lambda\overrightarrow{oa}$ para toda $a \in A$, y $f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$.
Nótese que que $h_{(o,\lambda)}(o) = o$ y $\overrightarrow{oh_{(o,\lambda)}(a)} = \lambda\overrightarrow{oa}$ para todo $a \in A$.
De ahí que,

$$\overrightarrow{h_{(o,\lambda)}(o)h_{(o,\lambda)}(a)} = \overrightarrow{oh_{(o,\lambda)}(a)} = \lambda\overrightarrow{oa} = f(\overrightarrow{oa}).$$

Ejercicio

Demuestra que toda homotecia es una aplicación afín.

Solución

Sea $h_{(o,\lambda)}(a) = o + \lambda\overrightarrow{oa}$ para toda $a \in A$, y $f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$.
Nótese que que $h_{(o,\lambda)}(o) = o$ y $\overrightarrow{oh_{(o,\lambda)}(a)} = \lambda\overrightarrow{oa}$ para todo $a \in A$.
De ahí que,

$$\overrightarrow{h_{(o,\lambda)}(o)h_{(o,\lambda)}(a)} = \overrightarrow{oh_{(o,\lambda)}(a)} = \lambda\overrightarrow{oa} = f(\overrightarrow{oa}).$$

Por lo tanto, $h_{(o,\lambda)}$ es afín y f es la aplicación lineal asociada. □

Ejercicio

Demuestra que la composición de dos homotecias del mismo centro es una homotecia. Además, demuestra que dicha composición es conmutativa.

Ejercicio

Demuestra que la composición de dos homotecias del mismo centro es una homotecia. Además, demuestra que dicha composición es conmutativa.

Solución

Sean $h_1 = h_{(o,\lambda_1)}$ y $h_2 = h_{(o,\lambda_2)}$.

Ejercicio

Demuestra que la composición de dos homotecias del mismo centro es una homotecia. Además, demuestra que dicha composición es conmutativa.

Solución

Sean $h_1 = h_{(o,\lambda_1)}$ y $h_2 = h_{(o,\lambda_2)}$.

De $h_1(a) = o + \lambda_1 \overrightarrow{oa} = b$ y $h_2(b) = o + \lambda_2 \overrightarrow{ob}$ se deduce que

Ejercicio

Demuestra que la composición de dos homotecias del mismo centro es una homotecia. Además, demuestra que dicha composición es conmutativa.

Solución

Sean $h_1 = h_{(o,\lambda_1)}$ y $h_2 = h_{(o,\lambda_2)}$.

De $h_1(a) = o + \lambda_1 \overrightarrow{oa} = b$ y $h_2(b) = o + \lambda_2 \overrightarrow{ob}$ se deduce que

$$h_2 \circ h_1(a) =$$

Ejercicio

Demuestra que la composición de dos homotecias del mismo centro es una homotecia. Además, demuestra que dicha composición es conmutativa.

Solución

Sean $h_1 = h_{(o,\lambda_1)}$ y $h_2 = h_{(o,\lambda_2)}$.

De $h_1(a) = o + \lambda_1 \overrightarrow{oa} = b$ y $h_2(b) = o + \lambda_2 \overrightarrow{ob}$ se deduce que

$$h_2 \circ h_1(a) = h_2(h_1(a)) = h_2(b) = o + \lambda_2 \overrightarrow{ob} = o + \lambda_2 \lambda_1 \overrightarrow{oa}.$$

Por lo tanto, $h_2 \circ h_1 = h_{(o,\lambda_2\lambda_1)}$.

Análogamente, $h_1 \circ h_2 = h_{(o,\lambda_1\lambda_2)}$, y por eso $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$. $\square$

Ejercicio

Demuestra que toda homotecia transforma subespacios afines en subespacios afines paralelos.

Ejercicio

Demuestra que toda homotecia transforma subespacios afines en subespacios afines paralelos.

Solución

Sea $h_{(o,\lambda)}$ una homotecia en un espacio afín $\mathcal{A} = (A, V)$ y sea $\mathcal{B} = (B, F)$ un subespacio afín de $\mathcal{A}$.

Ejercicio

Demuestra que toda homotecia transforma subespacios afines en subespacios afines paralelos.

Solución

Sea $h_{(o,\lambda)}$ una homotecia en un espacio afín $\mathcal{A} = (A, V)$ y sea $\mathcal{B} = (B, F)$ un subespacio afín de $\mathcal{A}$.

Sabemos que la aplicación lineal asociada a $h_{(o,\lambda)}$ se define como $f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$, y como F es un subespacio vectorial de V, tenemos que $f(F) = F$.

Ejercicio

Demuestra que toda homotecia transforma subespacios afines en subespacios afines paralelos.

Solución

Sea $h_{(o,\lambda)}$ una homotecia en un espacio afín $\mathcal{A} = (A,V)$ y sea $\mathcal{B} = (B,F)$ un subespacio afín de $\mathcal{A}$.

Sabemos que la aplicación lineal asociada a $h_{(o,\lambda)}$ se define como $f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$, y como F es un subespacio vectorial de V, tenemos que $f(F) = F$.

Como la homotecia $h = h_{(o,\lambda)}$ es una applicación afín, transforma el subespacio afín $\mathcal{B} = (B,F)$ en el subespacio afín $(h(B),f(F)) = (h(B),F)$ que es paralelo a $\mathcal{B}$. $\square$

Coordenadas

Tomemos $\mathbb{R}^n$ como espacio afín, . Sea $o = (o_1, \ldots, o_n)$ un punto. La imagen de todo punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, por la homotecia $h_{(o,\lambda)}$, es $h_{(o,\lambda)}(x) = x'$ si y solo si $\overrightarrow{ox'} = \lambda \overrightarrow{ox}$, que en términos de matrices es

$$\begin{pmatrix} x_1' - o_1 \\ \vdots \\ x_n' - o_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - o_1 \\ \vdots \\ x_n - o_n \end{pmatrix}.$$

Coordenadas

Tomemos $\mathbb{R}^n$ como espacio afín, . Sea $o = (o_1, \ldots, o_n)$ un punto. La imagen de todo punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, por la homotecia $h_{(o,\lambda)}$, es $h_{(o,\lambda)}(x) = x'$ si y solo si $\overrightarrow{ox'} = \lambda \overrightarrow{ox}$, que en términos de matrices es

$$\begin{pmatrix} x'_1 - o_1 \\ \vdots \\ x'_n - o_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - o_1 \\ \vdots \\ x_n - o_n \end{pmatrix}.$$

En filas

$$h_{(o,\lambda)}(x_1, \ldots, x_n) = (1-\lambda)(o_1, \ldots, o_n) + \lambda(x_1, \ldots, x_n).$$

Coordenadas

Tomemos $\mathbb{R}^n$ como espacio afín, . Sea $o=(o_1,\ldots,o_n)$ un punto. La imagen de todo punto $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, por la homotecia $h_{(o,\lambda)}$, es $h_{(o,\lambda)}(x)=x'$ si y solo si $\overrightarrow{ox'}=\lambda\overrightarrow{ox}$, que en términos de matrices es

$$\begin{pmatrix} x'_1-o_1 \\ \vdots \\ x'_n-o_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-o_1 \\ \vdots \\ x_n-o_n \end{pmatrix}.$$

En filas

$$h_{(o,\lambda)}(x_1,\ldots,x_n)=(1-\lambda)(o_1,\ldots,o_n)+\lambda(x_1,\ldots,x_n).$$

En particular, para toda simetría central C_o de centro o tenemos $C_o=h_{(o,-1)}$, y por eso

$$C_o(x_1,\ldots,x_n)=2(o_1,\ldots,o_n)-(x_1,\ldots,x_n).$$

Ejemplo

Si $o = (1,2)$ y $p = (3,4)$, entonces $C_o(p) = 2(1,2) - (3,4) = (-1,0)$.

Ejemplo

Si $o = (1,2)$ y $p = (3,4)$, entonces $C_o(p) = 2(1,2) - (3,4) = (-1,0)$.

Ejemplo

Sea $o = (1,2)$. En $\mathbb{R}^2$ la imagen por C_o del espacio afín dado por la ecuación $x + 3y = -1$ es el subespacio afín dado por la ecuación $x + 3y = 15$.

Ejemplo

Si $o = (1,2)$ y $p = (3,4)$, entonces $C_o(p) = 2(1,2) - (3,4) = (-1,0)$.

Ejemplo

Sea $o = (1,2)$. En $\mathbb{R}^2$ la imagen por C_o del espacio afín dado por la ecuación $x + 3y = -1$ es el subespacio afín dado por la ecuación $x + 3y = 15$.

Esto es, $(x', y') = C_o(x,y) = 2(1,2) - (x,y)$, de ahí que $x = 2 - x'$ e $y = 4 - y'$. Al sustituir en la ecuación $x + 3y = -1$ se obtiene $x' + 3y' = 15$.

Ejercicio

Determina la imagen del conjunto $X = \{(x, e^x) : \quad x \in \mathbb{R}\}$ por una simetría central de centro $o = (1,2)$.

Ejercicio

Determina la imagen del conjunto $X = \{(x, e^x) : \quad x \in \mathbb{R}\}$ por una simetría central de centro $o = (1,2)$.

Solución

$C_o(X)$ está dado por la ecuación $4 - y = e^{2-x}$.

Ejercicio

Demuestra que en un espacio afín el conjunto de homotecias de un mismo centro y razón diferente de cero, con la composición de aplicaciones, es un grupo.

Ejercicio

Demuestra que en un espacio afín el conjunto de homotecias de un mismo centro y razón diferente de cero, con la composición de aplicaciones, es un grupo.

Solución

Fácil, escribe los detalles.