# Baricentro

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

## Proposición

Si $a_1,\ldots,a_k$ son puntos distintos de un espacio afín $\mathcal{A}$ y $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ son escalares tales que $\sum\alpha_i\neq 0$, entonces existe un único punto $g$ de $\mathcal{A}$ tal que

$$\sum\alpha_i\overrightarrow{ga_i}=\overrightarrow{0}.$$

Además, para todo punto $x$ de $\mathcal{A}$,

$$\left(\sum\alpha_i\right)\overrightarrow{xg}=\sum\alpha_i\overrightarrow{xa_i}.$$

## Proposición

Si $a_1, \ldots, a_k$ son puntos distintos de un espacio afín $\mathcal{A}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son escalares tales que $\sum \alpha_i \neq 0$, entonces existe un único punto $g$ de $\mathcal{A}$ tal que

$$\sum \alpha_i \overrightarrow{ga_i} = \overrightarrow{0}.$$

Además, para todo punto $x$ de $\mathcal{A}$,

$$\left(\sum \alpha_i\right) \overrightarrow{xg} = \sum \alpha_i \overrightarrow{xa_i}.$$

## Definición

El punto $g$ definido por esta proposición se denomina *baricentro* (o centro de masa) del un sistema de masas puntuales $((a_1, \alpha_1), \ldots, (a_k, \alpha_k))$.

## Demostración

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$. $\forall x \in A$, $\exists x' \in A$ tal que $\overrightarrow{xx'} = \sum \alpha_i \overrightarrow{xa_i}$. Como $\sum \alpha_i \neq 0$, $\exists g \in A$ tal que $\overrightarrow{xg} = \frac{1}{\sum \alpha_i} \overrightarrow{xx'}$. Por lo tanto, $(\sum \alpha_i) \overrightarrow{xg} = \sum \alpha_i \overrightarrow{xa_i}$.

Además,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0} &= -\left(\sum \alpha_i\right) \overrightarrow{xg} + \sum \alpha_i \overrightarrow{xa_i} \\
&= \left(\sum \alpha_i\right) \overrightarrow{gx} + \sum \alpha_i \overrightarrow{xa_i} \\
&= \sum \alpha_i (\overrightarrow{gx} + \overrightarrow{xa_i}) \\
&= \sum \alpha_i \overrightarrow{ga_i}.
\end{aligned}$$

Nótese que si $\sum \alpha_i \overrightarrow{ga_i} = \overrightarrow{0}$ y $\sum \alpha_i \overrightarrow{g'a_i} = \overrightarrow{0}$ para $g, g' \in A$, entonces

$$\overrightarrow{0} = \sum \alpha_i \overrightarrow{ga_i} = \sum \alpha_i (\overrightarrow{gg'} + \overrightarrow{g'a_i}) = \left(\sum \alpha_i\right) \overrightarrow{gg'},$$

lo que implica $g = g'$. $\square$

## Ejercicio

Demuestra que el baricentro del sistema $((a,1),(b,1))$ es el punto medio del segmento $\overline{ab}$.

## Ejercicio

Demuestra que el baricentro del sistema $((a,1),(b,1))$ es el punto medio del segmento $\overline{ab}$.

## Solución

Sea $g$ el baricentro del sistema $((a,1),(b,1))$.

## Ejercicio

Demuestra que el baricentro del sistema $((a,1),(b,1))$ es el punto medio del segmento $\overline{ab}$.

## Solución

Sea $g$ el baricentro del sistema $((a,1),(b,1))$. Como $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{ga} + \overrightarrow{gb}$ y $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ag} + \overrightarrow{gb}$ tenemos que $\overrightarrow{ab} = 2\overrightarrow{ag}$. Por lo tanto, $g = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}$. $\square$

## Ejercicio

Sean $a, b$ y $x$ puntos de un espacio afín y $\lambda$ un escalar. Prueba que $x = a + \lambda\overrightarrow{ab}$ si y solo si $x$ es el baricentro del sistema $((a, 1-\lambda), (b, \lambda))$.

## Ejercicio

Sean $a, b$ y $x$ puntos de un espacio afín y $\lambda$ un escalar. Prueba que $x = a + \lambda\overrightarrow{ab}$ si y solo si $x$ es el baricentro del sistema $((a, 1-\lambda), (b, \lambda))$.

## Solución

Sólo hay que observar que las siguientes equivalencias se cumplen.

$$\begin{aligned} x = a + \lambda\overrightarrow{ab} &\longleftrightarrow \overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{ab} \\ &\longleftrightarrow \overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{ax} + \lambda\overrightarrow{xb} \\ &\longleftrightarrow \overrightarrow{0} = (1-\lambda)\overrightarrow{xa} + \lambda\overrightarrow{xb}. \end{aligned}$$

□

## Son equivalentes:

- El baricentro del sistema $((a, 1-\lambda), (b, \lambda))$ es $x$.
- $x = h_{(a,\lambda)}(b)$.
- $\overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{ab}$.

## Proposición (Asociatividad de los baricentros)

Sean $\alpha_{1,1},\ldots,\alpha_{1,k_1},\ldots,\alpha_{r,1},\ldots,\alpha_{r,k_r}$, escalares donde $\beta_i=\sum_j^{k_i}\alpha_{i,j}\neq 0$ para todo $i$ y $\sum_{i,j}\alpha_{i,j}\neq 0$. Sea $g_i$ el baricentro del sistema $((a_{i,1},\alpha_{i,1}),\ldots,(a_{i,k_i},\alpha_{i,k_i}))$ para $i\in\{1,\ldots,r\}$. Un punto $g$ es el baricentro de

$$((g_1,\beta_1),\ldots,(g_r,\beta_r))$$

si y solo si $g$ es el baricentro del sistema

$$\left((a_{1,1},\alpha_{1,1}),\ldots,\left(a_{1,k_1},\alpha_{1,k_1}\right)\ldots,(a_{r,1},\alpha_{r,1}),\ldots(a_{r,k_r},\alpha_{r,k_r})\right).$$

## Proposición (Asociatividad de los baricentros)

Sean $\alpha_{1,1},\ldots,\alpha_{1,k_1},\ldots,\alpha_{r,1},\ldots,\alpha_{r,k_r}$, escalares donde $\beta_i=\sum_j^{k_i}\alpha_{i,j}\neq 0$ para todo $i$ y $\sum_{i,j}\alpha_{i,j}\neq 0$. Sea $g_i$ el baricentro del sistema $((a_{i,1},\alpha_{i,1}),\ldots,(a_{i,k_i},\alpha_{i,k_i}))$ para $i\in\{1,\ldots,r\}$. Un punto $g$ es el baricentro de

$$((g_1,\beta_1),\ldots,(g_r,\beta_r))$$

si y solo si $g$ es el baricentro del sistema

$$\left((a_{1,1},\alpha_{1,1}),\ldots,\left(a_{1,k_1},\alpha_{1,k_1}\right)\ldots,(a_{r,1},\alpha_{r,1}),\ldots(a_{r,k_r},\alpha_{r,k_r})\right).$$

Hay que probar que

$$\sum_{i=1}^{r}\beta_i\overrightarrow{gg_i}=\overrightarrow{0}\quad \text{si y solo si}\quad \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{i,j}\overrightarrow{ga_{i,j}}=\overrightarrow{0}.$$

## Demostración

Solo hay que observar que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} \beta_i \overrightarrow{gg_i} &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j} \overrightarrow{gg_i} \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j} (\overrightarrow{ga_{i,j}} + \overrightarrow{a_{i,j}g_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j} \overrightarrow{ga_{i,j}} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j} \overrightarrow{a_{i,j}g_i} \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j} \overrightarrow{ga_{i,j}}.
\end{aligned}$$

□

## Medianas

Una mediana de un triángulo es un segmento que va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto al vértice.

## Medianas

Una mediana de un triángulo es un segmento que va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto al vértice.

## Corolario

En un triángulo, las tres medianas son concurrentes en el baricentro del triángulo.

## Medianas

Una mediana de un triángulo es un segmento que va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto al vértice.

## Corolario

En un triángulo, las tres medianas son concurrentes en el baricentro del triángulo.

## Corolario

Si $h$ es una homotecia que asigna cada vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto, entonces el centro de la homotecia es el baricentro del triángulo y su razón es $-\frac{1}{2}$.

## Medianas

Una mediana de un triángulo es un segmento que va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto al vértice.

## Corolario

En un triángulo, las tres medianas son concurrentes en el baricentro del triángulo.

## Corolario

Si $h$ es una homotecia que asigna cada vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto, entonces el centro de la homotecia es el baricentro del triángulo y su razón es $-\frac{1}{2}$.

## Centroide o centro de gravedad de un triángulo

El baricentro de un triángulo también se conoce como centroide o centro de gravedad del triángulo.

## Ejercicio

Prueba que la imagen del baricentro del sistema $((a_1,\alpha_1),\ldots,(a_k,\alpha_k))$ por una aplicación afín $\psi$ es el baricentro del sistema $((\psi(a_1),\alpha_1),\ldots,(\psi(a_k),\alpha_k))$.

## Ejercicio

Prueba que la imagen del baricentro del sistema $((a_1,\alpha_1),\ldots,(a_k,\alpha_k))$ por una aplicación afín $\psi$ es el baricentro del sistema $((\psi(a_1),\alpha_1),\ldots,(\psi(a_k),\alpha_k))$.

## Solución

Sea $g$ el baricentro del sistema $((a_1,\alpha_1),\ldots,(a_k,\alpha_k))$ y sea $\psi$ una aplicación afín. Como $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overrightarrow{ga_i}=\overrightarrow{0}$,

$$\overrightarrow{0}=\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{0})=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ga_i})=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overrightarrow{\psi(g)\psi(a_i)}.$$

Por lo tanto, $\psi(g)$ es el baricentro del sistema $((\psi(a_1),\alpha_1),\ldots,(\psi(a_k),\alpha_k))$. $\square$

## Ejercicio

Sean $\mathcal{A} = (A, V, +)$ y $\mathcal{A}' = (A', V', +)$ dos espacios afines. Prueba que si una aplicación $\psi : A \longrightarrow A'$ transforma el baricentro de cualquier sistema de masas puntuales $((a, 1-\lambda), (b, \lambda))$ en el baricentro del sistema $((\psi(a), 1-\lambda), (\psi(b), \lambda))$, entonces esta aplicación es afín.

## Ejercicio

Sean $\mathcal{A}=(A,V,+)$ y $\mathcal{A}'=(A',V',+)$ dos espacios afines. Prueba que si una aplicación $\psi : A \longrightarrow A'$ transforma el baricentro de cualquier sistema de masas puntuales $((a,1-\lambda),(b,\lambda))$ en el baricentro del sistema $((\psi(a),1-\lambda),(\psi(b),\lambda))$, entonces esta aplicación es afín.

## Demostración

Definimos la aplicación $f : V \longrightarrow V'$ por $f(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\psi(x)\psi(y)}$. Solo hay que demostrar que $f$ es lineal.

## Ejercicio

Sean $\mathcal{A} = (A, V, +)$ y $\mathcal{A}' = (A', V', +)$ dos espacios afines. Prueba que si una aplicación $\psi : A \longrightarrow A'$ transforma el baricentro de cualquier sistema de masas puntuales $((a, 1-\lambda), (b, \lambda))$ en el baricentro del sistema $((\psi(a), 1-\lambda), (\psi(b), \lambda))$, entonces esta aplicación es afín.

## Demostración

Definimos la aplicación $f : V \longrightarrow V'$ por $f(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\psi(x)\psi(y)}$. Solo hay que demostrar que $f$ es lineal.

Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ y $a, b, c \in A$ tales que $a + \overrightarrow{u} = b$ y $b + \overrightarrow{v} = c$. Por definitión de $f$,

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) &= f(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}) \\ &= f(\overrightarrow{ac}) \\ &= \overrightarrow{\psi(a)\psi(c)} \\ &= \overrightarrow{\psi(a)\psi(b)} + \overrightarrow{\psi(b)\psi(c)} \\ &= f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

## Demostración (continuación)

Asumimos que $\psi$ transforma el baricentro de cualquier sistema de masas puntuales $((a, 1-\lambda), (b, \lambda))$ en el baricentro del sistema $((\psi(a), 1-\lambda), (\psi(b), \lambda))$.

## Demostración (continuación)

Asumimos que $\psi$ transforma el baricentro de cualquier sistema de masas puntuales $((a,1-\lambda),(b,\lambda))$ en el baricentro del sistema $((\psi(a),1-\lambda),(\psi(b),\lambda))$.

Sea $\overrightarrow{u} \in V$ y $\lambda$ un escalar. Veamos que $f(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.

## Demostración (continuación)

Asumimos que $\psi$ transforma el baricentro de cualquier sistema de masas puntuales $((a,1-\lambda),(b,\lambda))$ en el baricentro del sistema $((\psi(a),1-\lambda),(\psi(b),\lambda))$.

Sea $\overrightarrow{u} \in V$ y $\lambda$ un escalar. Veamos que $f(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.

Sea $a,b \in A$ tales que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$, y sea $g \in A$ el baricentro de $((a,1-\lambda),(b,\lambda))$.

## Demostración (continuación)

Asumimos que $\psi$ transforma el baricentro de cualquier sistema de masas puntuales $((a,1-\lambda),(b,\lambda))$ en el baricentro del sistema $((\psi(a),1-\lambda),(\psi(b),\lambda))$.

Sea $\overrightarrow{u} \in V$ y $\lambda$ un escalar. Veamos que $f(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.

Sea $a,b \in A$ tales que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$, y sea $g \in A$ el baricentro de $((a,1-\lambda),(b,\lambda))$.

Sabemos que $\overrightarrow{ag} = \lambda\overrightarrow{ab}$, y como $\psi(g)$ es el baricentro de $((\psi(a),1-\lambda),(\psi(b),\lambda))$, tenemos que $\overrightarrow{\psi(a)\psi(g)} = \lambda\overrightarrow{\psi(a)\psi(b)}$.

## Demostración (continuación)

Asumimos que $\psi$ transforma el baricentro de cualquier sistema de masas puntuales $((a,1-\lambda),(b,\lambda))$ en el baricentro del sistema $((\psi(a),1-\lambda),(\psi(b),\lambda))$.

Sea $\overrightarrow{u} \in V$ y $\lambda$ un escalar. Veamos que $f(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.

Sea $a,b \in A$ tales que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$, y sea $g \in A$ el baricentro de $((a,1-\lambda),(b,\lambda))$.

Sabemos que $\overrightarrow{ag} = \lambda\overrightarrow{ab}$, y como $\psi(g)$ es el baricentro de $((\psi(a),1-\lambda),(\psi(b),\lambda))$, tenemos que $\overrightarrow{\psi(a)\psi(g)} = \lambda\overrightarrow{\psi(a)\psi(b)}$.

Por lo tanto, $\lambda f(\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{ab}) = \lambda\overrightarrow{\psi(a)\psi(b)} = \overrightarrow{\psi(a)\psi(g)} = f(\overrightarrow{ag}) = f(\lambda\overrightarrow{u})$. $\square$