Geometría euclidiana. Introducción

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

Definición (Distancia o métrica)

Sea X un conjunto no vacío. Una métrica, o distancia, sobre X es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades.

- $d(x,y) \geq 0$ para todo $x,y \in X$ y $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.
- $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x,y \in X$.
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo $x,y,z \in X$.

Definición (Distancia o métrica)

Sea X un conjunto no vacío. Una métrica, o distancia, sobre X es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades.

- $d(x,y) \geq 0$ para todo $x,y \in X$ y $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.
- $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x,y \in X$.
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo $x,y,z \in X$.

Definición (Espacio métrico)

Un espacio métrico es un par (X,d) donde X es un conjunto no vacío y d es una métrica definida sobre X.

Ejemplo

Todo conjunto X equipado con la métrica

$$d(x,y)=\begin{cases} 1, & x\neq y;\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

es un espacio métrico y, en este caso, (X,d) se denomina espacio métrico discreto.

Ejemplo

El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ con la métrica $d(x,y) = |x-y|$ es un espacio métrico.

Ejemplo

El conjunto $C[a,b]$ de funciones reales y continuas en $[a,b]$ equipado con la métrica

$$d(f,g) = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

es un espacio métrico.

Ejercicio

Demuestra que si (X, d_X) y (Y, d_Y) son dos espacios métricos, entonces las siguientes funciones son métricas en el producto cartesiano $X \times Y$

- $d_{\square}((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y')$.
- $d_{\boxtimes}((x,y),(x',y')) = \text{máx}\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}$.

Solución

En ambos casos, las dos primeras propiedades de la métrica son bastante cómodas de escribir. Como entrenamiento, escribe los detalles de la prueba de la desigualdad triangular para ambas métricas.

Definición (Norma en un espacio vectorial)

Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una norma en X es una función $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades.

- $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$ para todo $\overrightarrow{x} \in X$, y $\|\overrightarrow{x}\| = 0$ si y solo si $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- $\|\lambda \overrightarrow{x}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{x}\|$ para todo $\overrightarrow{x} \in X$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ para todo $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X$.

Definición (Norma en un espacio vectorial)

Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una norma en X es una función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades.

- $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$ para todo $\overrightarrow{x} \in X$, y $\|\overrightarrow{x}\| = 0$ si y solo si $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- $\|\lambda \overrightarrow{x}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{x}\|$ para todo $\overrightarrow{x} \in X$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ para todo $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X$.

Definición (Espacio normado)

Un espacio normado es un par $(X, \|\cdot\|)$ donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma definida sobre X.

Definición (Norma en un espacio vectorial)

Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una norma en X es una función $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades.

- $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$ para todo $\overrightarrow{x} \in X$, y $\|\overrightarrow{x}\| = 0$ si y solo si $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- $\|\lambda\overrightarrow{x}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{x}\|$ para todo $\overrightarrow{x} \in X$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ para todo $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X$.

Ejemplos de normas en $\mathbb{R}^2$ son los siguientes

- $\|(x,y)\|_2 = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
- $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.
- $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$.

Definición (Norma en un espacio vectorial)

Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una norma en X es una función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades.

- $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$ para todo $\overrightarrow{x} \in X$, y $\|\overrightarrow{x}\| = 0$ si y solo si $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
- $\|\lambda \overrightarrow{x}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{x}\|$ para todo $\overrightarrow{x} \in X$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ para todo $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X$.

Proposición (Distancia en espacios afines dirigidos por espacios vectoriales normados)

Si $\mathcal{A} = (A, V)$ es un espacio afín donde $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces (A, d) es un espacio métrico, donde $d(a,b) = \|\overrightarrow{ab}\|$ para todo $a, b \in A$.

Demostración

Es inmediata, escribe los detalles. $\square$

Esferas en espacios métricos afines

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín donde $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y sea $d(a,b) = \|\overrightarrow{ab}\|$ para todo $a, b \in A$. Para $a \in A$ y un escalar $r > 0$ se define la esfera de centro en a y radio r como el conjunto

$$S_{a,r} = \{x \in A : \quad d(x,a) = r\}.$$

Esferas en espacios métricos afines

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín donde $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y sea $d(a,b) = \|\overrightarrow{ab}\|$ para todo $a, b \in A$. Para $a \in A$ y un escalar $r > 0$ se define la esfera de centro en a y radio r como el conjunto

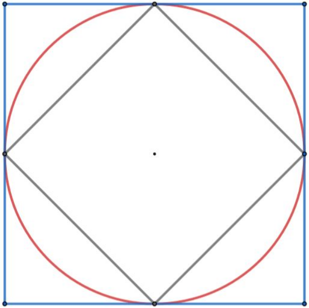
$$S_{a,r} = \{x \in A : \quad d(x,a) = r\}.$$

¿Qué forma tienen las esferas en el espacio afín $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ para cada una de las siguientes normas?

- $\|(x,y)\|_2 = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
- $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.
- $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$.

¿Qué forma tienen las esferas en el espacio afín $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ para cada una de las siguientes normas?

- $\|(x,y)\|_2 = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.
- $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$.
- $\|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{|x|,|y|\}$.



Definición (Producto escalar)

Un producto escalar en un espacio vectorial V es una aplicación bilinial, simétrica y definida positiva. Dicho de otro modo, una aplicación $\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es un producto escalar si cumple las siguientes condiciones.

- Φ es lineal en las dos variables.
- $\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \Phi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$.
- $\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \geq 0$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$ y $\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$ si y solo sí $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Definición (Producto escalar)

Un producto escalar en un espacio vectorial V es una aplicación bilinial, simétrica y definida positiva. Dicho de otro modo, una aplicación $\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es un producto escalar si cumple las siguientes condiciones.

- Φ es lineal en las dos variables.
- $\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \Phi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$.
- $\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \geq 0$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$ y $\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$ si y solo sí $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Definición (Espacio vectorial euclidiano)

Un espacio vectorial dotado de un producto escalar se dice que es un espacio vectorial euclidiano, o prehilbertiano. Algunos autores preservan el nombre *euclidiano* al caso $\mathbb{R}^n$.

Definición (Producto escalar)

Un producto escalar en un espacio vectorial V es una aplicación bilinial, simétrica y definida positiva. Dicho de otro modo, una aplicación $\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es un producto escalar si cumple las siguientes condiciones.

- Φ es lineal en las dos variables.
- $\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \Phi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$.
- $\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \geq 0$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$ y $\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$ si y solo sí $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Definición (Espacio vectorial euclidiano)

Un espacio vectorial dotado de un producto escalar se dice que es un espacio vectorial euclidiano, o prehilbertiano. Algunos autores preservan el nombre *euclidiano* al caso $\mathbb{R}^n$.

Notación

Por brevedad, usaremos la notación $\cdot$ para Φ. Es decir, $\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

Ejemplo

El producto escalar en el espacio vectorial euclidiano $\mathbb{R}^n$ se define como sigue. Si $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ and $\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Ejemplo

El producto escalar en el espacio vectorial euclidiano $\mathbb{R}^n$ se define como sigue. Si $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ and $\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Ejemplo

El producto escalar en el espacio vectorial euclidiano $C[a,b]$ de funciones reales y continuas en $[a,b]$ se define como

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Proposición (Norma en espacios euclidianos)

En todo espacio vectorial euclidiano V la aplicación $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$ es una norma.

Proposición (Norma en espacios euclidianos)

En todo espacio vectorial euclidiano V la aplicación $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$ es una norma.

Demostración

La demostración de las dos primeras propiedades de la norma son evidentes. Más adelante veremos la demostración de la desigualdad triangular como ejercicio.

Ejercicio (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Demuestra que en todo espacio vectorial euclidiano

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \text{ for every } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V.$$

Ejercicio (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Demuestra que en todo espacio vectorial euclidiano

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \text{ for every } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V.$$

Demostración

Sí $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, entonces es obvio que se cumple.

Ejercicio (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Demuestra que en todo espacio vectorial euclidiano

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \text{ for every } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V.$$

Demostración

Sí $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, entonces es obvio que se cumple.Si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos $(\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}) \geq 0$,

Ejercicio (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Demuestra que en todo espacio vectorial euclidiano

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \text{ for every } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V.$$

Demostración

Sí $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, entonces es obvio que se cumple.Si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos $(\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}) \geq 0$, y por eso

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 + 2t\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + t^2\|\overrightarrow{v}\|^2 \geq 0.$$

Ejercicio (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Demuestra que en todo espacio vectorial euclidiano

$$|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \text{ for every } \overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in V.$$

Demostración

Sí $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, entonces es obvio que se cumple.Si $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$, entonces para todo $t\in\mathbb{R}$ tenemos $(\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v})\geq 0,$ y por eso

$$\|\overrightarrow{u}\|^2+2t\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+t^2\|\overrightarrow{v}\|^2\geq 0.$$

Para $t=-\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}$ se obtiene

$$\|\overrightarrow{u}\|^2-\frac{(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\geq 0,$$

lo que implica $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|\leq\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|.$ □

Desigualdad triangular

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\| \text{ for every } \overrightarrow{u},\overrightarrow{v} \in V.$$

Desigualdad triangular

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\| \text{ for every } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V.$$

Demostración

Por definición de norma y la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

Desigualdad triangular

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\| \text{ for every } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V.$$

Demostración

Por definición de norma y la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
&\leq \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
&= (\|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$. $\square$

Definición (Espacio afín euclidiano)

Un espacio afín euclidiano es un espacio afín dirigido por un espacio vectorial euclidiano. La distancia entre dos puntos a y b se define como

$$d(a,b) = \|\overrightarrow{ab}\|.$$

Definición (Espacio afín euclidiano)

Un espacio afín euclidiano es un espacio afín dirigido por un espacio vectorial euclidiano. La distancia entre dos puntos a y b se define como

$$d(a,b) = \|\overrightarrow{ab}\|.$$

Distancia en $\mathbb{R}^n$ como espacio euclidiano.

La norma en el espacio vectorial euclidiano $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

La distancia entre dos puntos $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$ del espacio afín euclidiano $\mathbb{R}^n$ se define como

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}.$$

Definición

Dados dos puntos $x, y \in A$ de un espacio afín euclidiano $\mathcal{A} = (A, V)$, el bisector de x e y, también llamado bisector del segmento (o mediatriz del segmento) $\overline{xy}$, se define como

$$B_{x|y} = \{a \in A: \ d(a,x) = d(a,y)\}.$$

Complemento ortogonal de un subespacio vectorial

El complemento ortogonal de un subespacio vectorial F es el subespacio vectorial

$$F^{\perp} = \{\overrightarrow{u} \in V : \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \text{ for all } \overrightarrow{v} \in F\}.$$

Complemento ortogonal de un subespacio vectorial

El complemento ortogonal de un subespacio vectorial F es el subespacio vectorial

$$F^{\perp} = \{\overrightarrow{u} \in V : \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \text{ for all } \overrightarrow{v} \in F\}.$$

Todo espacio vectorial euclidiano V descompone como suma directa $V = F \oplus F^{\perp}$, lo que significa que $F \cap F^{\perp} = \{\overrightarrow{0}\}$ y para todo $\overrightarrow{u} \in V$, existen dos vectores $\overrightarrow{u}_1 \in F$ y $\overrightarrow{u}_2 \in F^{\perp}$ tales que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$.

Ejercicio

Demuestra que en un espacio afín euclidiano (A,V), para todo par de puntos $x,y \in A$, el bisector $B_{x|y}$ es en realidad el hiperplano $\mathbb{P}$ de dirección $\langle \overrightarrow{xy} \rangle^{\perp}$ que contiene el punto medio del segmento $\overline{xy}$.

Ejercicio

Demuestra que en un espacio afín euclidiano (A,V), para todo par de puntos $x,y \in A$, el bisector $B_{x|y}$ es en realidad el hiperplano $\mathbb{P}$ de dirección $\langle\overrightarrow{xy}\rangle^{\perp}$ que contiene el punto medio del segmento $\overline{xy}$.

Solución

Sea m el punto medio de $\overline{xy}$. Para todo punto $a \in A$,

Ejercicio

Demuestra que en un espacio afín euclidiano (A,V), para todo par de puntos $x,y \in A$, el bisector $B_{x|y}$ es en realidad el hiperplano $\mathbb{P}$ de dirección $\langle \overrightarrow{xy} \rangle^{\perp}$ que contiene el punto medio del segmento $\overline{xy}$.

Solución

Sea m el punto medio de $\overline{xy}$. Para todo punto $a \in A$,

$$\|\overrightarrow{xa}\|^2 = \|\overrightarrow{xm} + \overrightarrow{ma}\|^2 = \|\overrightarrow{xm}\|^2 + 2\overrightarrow{xm} \cdot \overrightarrow{ma} + \|\overrightarrow{ma}\|^2. \tag{1}$$

$$\|\overrightarrow{ya}\|^2 = \|\overrightarrow{ym} + \overrightarrow{ma}\|^2 = \|\overrightarrow{ym}\|^2 + 2\overrightarrow{ym} \cdot \overrightarrow{ma} + \|\overrightarrow{ma}\|^2. \tag{2}$$

Ejercicio

Demuestra que en un espacio afín euclidiano (A,V), para todo par de puntos $x,y \in A$, el bisector $B_{x|y}$ es en realidad el hiperplano $\mathbb{P}$ de dirección $\langle \overrightarrow{xy} \rangle^{\perp}$ que contiene el punto medio del segmento $\overline{xy}$.

Solución

Sea m el punto medio de $\overline{xy}$. Para todo punto $a \in A$,

$$\|\overrightarrow{xa}\|^2 = \|\overrightarrow{xm} + \overrightarrow{ma}\|^2 = \|\overrightarrow{xm}\|^2 + 2\overrightarrow{xm} \cdot \overrightarrow{ma} + \|\overrightarrow{ma}\|^2. \tag{1}$$

$$\|\overrightarrow{ya}\|^2 = \|\overrightarrow{ym} + \overrightarrow{ma}\|^2 = \|\overrightarrow{ym}\|^2 + 2\overrightarrow{ym} \cdot \overrightarrow{ma} + \|\overrightarrow{ma}\|^2. \tag{2}$$

Si tomamos $a \in B_{x|y} \setminus \{m\}$, entonces $\|\overrightarrow{xa}\| = \|\overrightarrow{ya}\|$ de (1) y (2) se deduce $0 = \overrightarrow{xm} \cdot \overrightarrow{ma} - \overrightarrow{ym} \cdot \overrightarrow{ma} = (\overrightarrow{xm} + \overrightarrow{my}) \cdot \overrightarrow{ma} = \overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{ma}$. Por lo tanto, $\overrightarrow{ma} \in \langle \overrightarrow{xy} \rangle^{\perp}$, y por eso $a \in \mathbb{P}$, lo que implica $B_{x|y} \subseteq \mathbb{P}$.

Ejercicio

Demuestra que en un espacio afín euclidiano (A,V), para todo par de puntos $x,y \in A$, el bisector $B_{x|y}$ es en realidad el hiperplano $\mathbb{P}$ de dirección $\langle\overrightarrow{xy}\rangle^{\perp}$ que contiene el punto medio del segmento $\overline{xy}$.

Solución

Sea m el punto medio de $\overline{xy}$. Para todo punto $a \in A$,

$$\|\overrightarrow{xa}\|^2 = \|\overrightarrow{xm}+\overrightarrow{ma}\|^2 = \|\overrightarrow{xm}\|^2 + 2\overrightarrow{xm}\cdot\overrightarrow{ma} + \|\overrightarrow{ma}\|^2. \tag{1}$$

$$\|\overrightarrow{ya}\|^2 = \|\overrightarrow{ym}+\overrightarrow{ma}\|^2 = \|\overrightarrow{ym}\|^2 + 2\overrightarrow{ym}\cdot\overrightarrow{ma} + \|\overrightarrow{ma}\|^2. \tag{2}$$

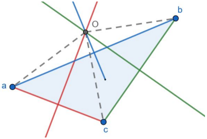
Si tomamos $a \in B_{x|y} \setminus \{m\}$, entonces $\|\overrightarrow{xa}\| = \|\overrightarrow{ya}\|$ de (1) y (2) se deduce $0 = \overrightarrow{xm}\cdot\overrightarrow{ma} - \overrightarrow{ym}\cdot\overrightarrow{ma} = (\overrightarrow{xm}+\overrightarrow{my})\cdot\overrightarrow{ma} = \overrightarrow{xy}\cdot\overrightarrow{ma}$. Por lo tanto, $\overrightarrow{ma} \in \langle\overrightarrow{xy}\rangle^{\perp}$, y por eso $a \in \mathbb{P}$, lo que implica $B_{x|y} \subseteq \mathbb{P}$.
Por otro lado, si tomamos $a \in \mathbb{P} \setminus \{m\}$, entonces $\overrightarrow{xm}\cdot\overrightarrow{ma} = 0$ y $\overrightarrow{ym}\cdot\overrightarrow{ma} = 0$. Por lo que (1) y (2) implican $\|\overrightarrow{xa}\|^2 = \|\overrightarrow{ya}\|^2$. Por consiguiente, $a \in B_{x|y}$, y de ahí se deduce que $\mathbb{P} \subseteq B_{x|y}$. □

Ejercicio

Demostrar que en el plano euclidiano, las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.

Definición

El punto de intersección de las mediatrices se conoce como el circuncentro del triángulo.

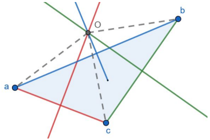


Ejercicio

Demostrar que en el plano euclidiano, las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.

Definición

El punto de intersección de las mediatrices se conoce como el circuncentro del triángulo.



Solución

Sea a,b,c un triángulo. Sea $\{o\} = B_{a|b} \cap B_{b|c}$. Como $d(o,a) = d(o,b)$ y $d(o,b) = d(o,c)$, tenemos que $d(o,a) = d(o,c)$, lo que implica que $o \in B_{a|b} \cap B_{b|c} \cap B_{a|c}$. $\square$