Sèries de Taylor

Àlex Arenas, Sergio Gómez

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

Sèries de Taylor

- Definicions
  - Sigui $\{a_n\}_{n\geq 0}$ una successió. Una sèrie de potències és una sèrie del tipus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

  - Sigui $\{a_n\}_{n\geq 0}$ una successió. Una sèrie de potències centrada en el punt $x = a$ és una sèrie del tipus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

- Definicions
  - Observacions
    - L'índex comença en $n = 0$ per a incloure el terme $a_0(x-a)^0 = a_0$
    - $x \in \mathbb{R}$
    - Els valors de a_n no depenen de x
    - Cal estudiar la convergència pels diferents valors de x

- Teorema
  - Sigui la sèrie de potències de termes $a_n x^n$. Aleshores
    - Si $a_n x^n$ sumable per $x = c \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad a_n x^n$ absolutament sumable $\forall x \colon |x| < |c|$
    - Si $a_n x^n$ no sumable per $x = d \quad \Longrightarrow \quad a_n x^n$ no sumable $\forall x \colon |x| > |d|$
  - Observació
    - Aquest teorema permet definir radis de convergència $|x| < R$ de les sèries
    - Per a sèries centrades en punts $x = a$, el radi de convergència és de la forma $|x - a| < R$

- Teorema
  - Demostració
    - Com $a_n c^n$ sumable, tendeix a zero, i per tant, escollint $\epsilon = 1$, $\exists N: \forall n > N$ tenim $|a_n c^n| < 1$. Aleshores
$$|a_n x^n| = |a_n c^n| \left|\frac{x}{c}\right|^n < \left|\frac{x}{c}\right|^n$$
    - Pel criteri de comparació, i com el terme de la dreta és una progressió geomètrica, la sèrie convergeix absolutament $\forall x: |x| < |c|$
    - Si $a_n d^n$ no sumable, no pot ser que $a_n x^n$ ho sigui per un x amb $|x| > |d|$, ja que entraria en contradicció amb el cas anterior

- Definicions
  - Conversió de sèries de potències en funcions
    - *Opció 1*: Sigui $D \subseteq \mathbb{R}$ el conjunt de valors x on una sèrie de potències és convergent. Aleshores, es podria definir la funció $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ que assigna a cada valor de x el valor de la sèrie

$$f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \,, \qquad \forall x \in D$$

- Definicions
  - Conversió de sèries de potències en funcions
    - *Opció 2*: Defineixo els monomis

$$f_n(x) \equiv a_n(x-a)^n$$

i faig la suma de tots ells

$$f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

- Definicions
  - Conversió de sèries de potències en funcions
    - *Opció 3*: Defineixo els polinomis que corresponen a les sumes parcials

$$s_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

i faig el límit

$$f(x) \equiv \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

- Definicions
  - Conversió de sèries de potències en funcions
    - Les tres opcions són vàlides
    - Es posa de manifest la necessitat de fer
      - Sumes d’infinites funcions
      - Límits sobre successions de funcions
    - Les sumes d’infinites funcions es poden considerar un cas particular de límits, definint les funcions de sumes parcials

Definicions

- Sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions definides sobre un conjunt $D \subseteq \mathbb{R}$, és dir, $f_n: D \longrightarrow \mathbb{R}$, i sigui $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ una altra funció. Aleshores
  - $\{f_n\}$ convergeix puntualment a f en D si

$$f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \forall x \in D$$

  - $\{f_n\}$ convergeix uniformement a f en D si

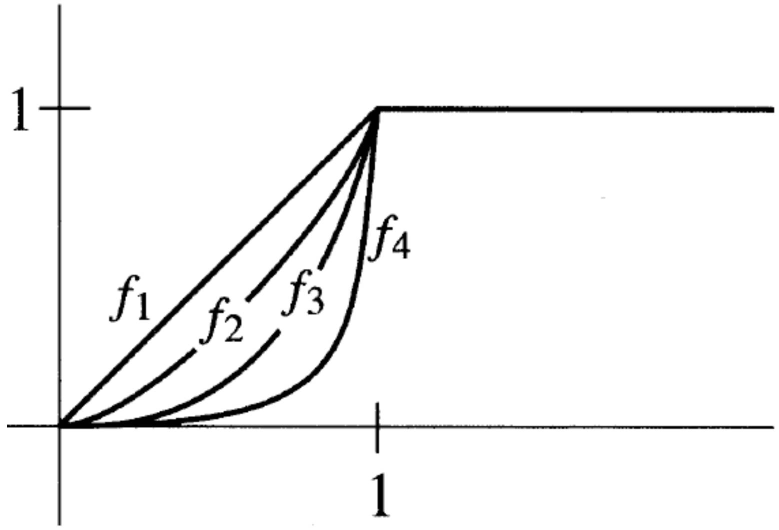
$$\forall \epsilon > 0\ \exists N > 0: \forall x \in D, \forall n \geq N \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

- Observacions
  - Convergència uniforme $\Longrightarrow$ Convergència puntual
  - En convergència puntual, N pot dependre de x

- Definicions
  - Observacions
    - Una successió de funcions contínues pot convergir a una funció discontínua

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



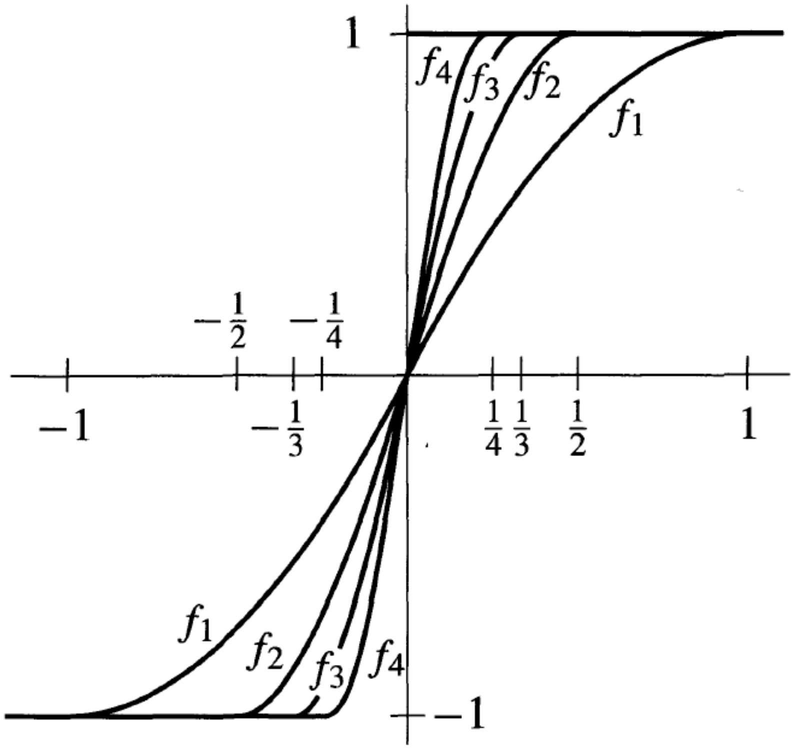
Definicions

Observacions

- Una successió de funcions diferenciables pot convergir a una funció discontínua

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -\dfrac{1}{n} \\ \sin\dfrac{n\pi x}{2}, & -\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n} \leq x \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



- Teorema
  - Sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions contínues definides en un interval $I = [a, b]$, que convergeixen uniformement a f en I. Aleshores f també és contínua en I

- Definicions
  - La successió $\{f_n\}$ és uniformement sumable si la successió $\{s_n\}$ de funcions de suma parcial convergeix uniformement, amb

$$s_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

Sèries de Taylor

- Sigui $p_n(x)$ un polinomi de grau n

$$p_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$$

- Observem que
  - $p_n'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots n a_n x^{n-1}$
  - $p_n''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \cdots (n-1) \cdot n a_n x^{n-2}$

  - $p_n(0) = a_0$
  - $p_n'(0) = a_1$
  - $p_n''(0) = 2a_2$
  - $p_n^{(k)}(0) = k!\, a_k, \quad k = 0,1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad a_k = \dfrac{p_n^{(k)}(0)}{k!}$

- **Sèries de Taylor**
  - Sigui $p_n(x)$ un polinomi de grau n centrat en $x = a$

$$p_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

  - De forma anàloga
    - $p_n(a) = a_0$
    - $p_n'(a) = a_1$
    - $p_n''(a) = 2a_2$
    - $p_n^{(k)}(a) = k!\,a_k, \quad k = 0,1,\dots,n \quad \Rightarrow \quad a_k = \dfrac{p_n^{(k)}(a)}{k!}$
  - Podem escriure

$$p_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

- Sèries de Taylor
  - Sigui $f(x)$ una funció diferenciable n vegades en un interval obert I, i sigui $a \in I$
    - El polinomi centrat en $x = a$

$$P_{n,a,f}(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

s'anomena el polinomi de Taylor de grau n de la funció f en el punt a, i compleix

$$P_{n,a,f}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

    - El polinomi de Taylor $P_{n,a,f}(x)$ és una aproximació de la funció $f(x)$ al voltant de $x = a$

- Teorema de Taylor
  - Sigui $f(x)$ una funció diferenciable $n+1$ vegades en un interval obert I, i sigui $a \in I$. Aleshores, $\forall x \in I$ es compleix

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n,a,f}(x)$$

on $R_{n,a,f}(x)$ és el residu, que admet diverses formes

  - El residu de Lagrange pren la forma

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

on ξ és un número situat entre x i a

Teorema de Taylor

Demostració

- Suposem $x > a$, i definim
$$R(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x)$$
$$G(x) = (x-a)^{n+1}$$
- Aquestes funcions satisfan $R(a) = G(a) = 0$
- Pel teorema del valor mig de Cauchy, $\exists \xi_1 \in (a, x)$ tal que
$$\frac{R(x)}{G(x)} = \frac{R(x) - R(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{R'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}$$
- Com $R'(a) = G'(a) = 0$, podem tornar a aplicar el mateix teorema del valor mig de Cauchy, $\exists \xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x)$ tal que
$$\frac{R'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{R'(\xi_1) - R'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{R''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}$$

- Teorema de Taylor
  - Demostració
    - Repetint el procés s'arriba a que $\exists \xi \in (a, x)$ tal que

$$\frac{R(x)}{G(x)} = \frac{R^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)}$$

    - Com la derivada $(n+1)$-èssima d'un polinomi de grau n és zero, aleshores $R^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$
    - D'altra banda, $G^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$
    - Per tant

$$R(x) = \frac{R^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} G(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- Sèries de Taylor
  - Sigui $f(x)$ una funció diferenciable infinites vegades en el punt $x = a$
  - S'anomena sèrie de Taylor d'aquesta funció a la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

  - En el cas $a = 0$ s'anomena sèrie de Maclaurin
  - En els cassos en que el residu tendeix a zero en un cert domini A, amb $a \in A$, es pot escriure

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad \forall x \in A$$

Sèries de Taylor

Exemples

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \forall x \in (-1,1]$$

Sèries de Taylor

Exemples

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$