Variedades lineales
o
Subespacios afines

De la clase anterior

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $a \in A$ un punto. Sabemos que la siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned} \varphi_a : V &\longrightarrow A \\ \overrightarrow{v} &\longrightarrow a + \overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

De la clase anterior

Sea $\mathcal{A}=(A,V)$ un espacio afín y $a\in A$ un punto. Sabemos que la siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned}\varphi_a : V &\longrightarrow A\\ \overrightarrow{v} &\longrightarrow a+\overrightarrow{v}.\end{aligned}$$

Son equivalentes:

- $\varphi_a(\overrightarrow{v})=b$;
- $a+\overrightarrow{v}=b$;
- $\varphi_a^{-1}(b)=\overrightarrow{v}$;
- $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{ab}$.

De la clase anterior

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $a \in A$ un punto. Sabemos que la siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned} \varphi_a : V &\longrightarrow A \\ \overrightarrow{v} &\longrightarrow a + \overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

Son equivalentes:

- $\varphi_a(\overrightarrow{v}) = b$;
- $a + \overrightarrow{v} = b$;
- $\varphi_a^{-1}(b) = \overrightarrow{v}$;
- $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ab}$.

Para todo conjunto $A' \subseteq A$ y todo $a \in A'$:

$$\varphi_a^{-1}(A') = \{\overrightarrow{v} \in V : \ a + \overrightarrow{v} \in A'\} = \{\overrightarrow{ab} : \ b \in A'\}.$$

Subespacio afín o variedad lineal

Definición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $A' \subseteq A$ un conjunto.
Si existe un punto $a \in A'$ tal que $\varphi_a^{-1}(A')$ es un subespacio vectorial de V, entonces $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un **subespacio afín** de $\mathcal{A}$, también llamado **variedad lineal** de $\mathcal{A}$.

Subespacio afín o variedad lineal

Definición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $A' \subseteq A$ un conjunto.
Si existe un punto $a \in A'$ tal que $\varphi_a^{-1}(A')$ es un subespacio vectorial de V, entonces $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un **subespacio afín** de $\mathcal{A}$, también llamado **variedad lineal** de $\mathcal{A}$.

Dicho de otro modo:

Si existe un punto $a \in A'$ tal que $F = \{\overrightarrow{ab} : \; b \in A'\}$ es un subespacio vectorial de V, entonces $\mathcal{A}' = (A', F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$.

Subespacio afín o variedad lineal

Definición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $A' \subseteq A$ un conjunto.
Si existe un punto $a \in A'$ tal que $\varphi_a^{-1}(A')$ es un subespacio vectorial de V, entonces $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un **subespacio afín** de $\mathcal{A}$, también llamado **variedad lineal** de $\mathcal{A}$.

Dicho de otro modo:

Si existe un punto $a \in A'$ tal que $F = \{\overrightarrow{ab} : \ b \in A'\}$ es un subespacio vectorial de V, entonces $\mathcal{A}' = (A', F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$.

Dicho de otro modo:

Si existe un punto $a \in A'$ y un subespacio F de V tal que $A' = a + F$, entonces $\mathcal{A}' = (A', F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$.

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín, $A' \subseteq A$ un conjunto no vacío y F un subespacio vectorial de V. Son equivalentes:

1. $\mathcal{A}' = (A', F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$.
2. Existe un punto $a \in A'$ tal que $\varphi_a^{-1}(A') = F$.
3. Existe un punto $a \in A'$ tal que $F = \{\overrightarrow{ab} : \ b \in A'\}$.
4. Existe un punto $a \in A'$ tal que $A' = a + F$

Ejercicio

Considera $\mathbb{R}^2$ como espacio afín.Demuestra que si $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, entonces $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y = \gamma\}$ es un subespacio afín.

Ejercicio

Considera $\mathbb{R}^2$ como espacio afín.Demuestra que si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, entonces $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y = \gamma\}$ es un subespacio afín.

Solución:

$$\begin{aligned} A' =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y = \gamma\} \\ =& \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x = \gamma - \beta y\right\} \\ =& \left\{ \left(\frac{\gamma - \beta y}{\alpha}, y\right) : \; y \in \mathbb{R} \right\} \\ =& \left\{ \left(\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right) + \left(-\frac{\beta}{\alpha}, 1\right) y : \quad y \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

El resultado se cumple porque para $a = \left(\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right) \in A'$ existe el subespacio $F = \left\{ \lambda \left(-\frac{\beta}{\alpha}, 1\right) : \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $A' = a + F$. $\square$

Ejercicio

Demuestra que todo subespacio afín de dimension cero consiste en un único punto.

Ejercicio

Demuestra que todo subespacio afín de dimension cero consiste en un único punto.

Solución:

- Sea $\mathcal{A}' = (A', F)$ un espacio afín de $\mathcal{A}$. Sea $a \in A'$ tal que $\varphi_a(F) = A'$.
- Si $\mathcal{A}'$ tiene dimension cero, entonces F tiene dimensión cero, lo que implica que $F = \{\overrightarrow{0}\}$.
- Si $b \in A$, entonces $a + \overrightarrow{0} = b$, por AF1.
- Por lo tanto, $a = b$, lo que implica que $A' = \{a\}$. $\square$

Puntos, rectas, planos e hiperplanos

Definición

Considera un espacio afín de dimensión n.

- Los subespacios afines de dimensión 0 son puntos.
- Los subespacios afines de dimensión 1 son llamados rectas afines, o simplente rectas.
- Los subespacios afines de dimensión 2 son llamados planos afines, o simplemente planos.
- Los subespacios afines de dimensión $n-1$ son llamados hiperplanos afines, o simplemente hiperplanos.

Ejercicio

Clasifica los siguientes subespacios afines de acuerdo a su dimensión.

- $A = \left\{ax^2 + bx + 7 : \; a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+1 & x+y \\ x-z+1 & 7+z \end{pmatrix} : \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.
- $C = \left\{\alpha e^{2x} + x + 7 : \; \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.
- $D = \{\alpha \sin x + \beta x - 9 : \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio

Clasifica los siguientes subespacios afines de acuerdo a su dimensión.

- $A = \left\{ax^2 + bx + 7 : \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+1 & x+y \\ x-z+1 & 7+z \end{pmatrix} : \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.
- $C = \left\{\alpha e^{2x} + x + 7 : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.
- $D = \{\alpha \sin x + \beta x - 9 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Solución

- A es un plano que pasa por el punto $p(x) = 7$ en la dirección $E = \langle x^2, x \rangle$, donde E es un subespacio vectorial del espacio de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales.

Ejercicio

Clasifica los siguientes subespacios afines de acuerdo a su dimensión.

- $A = \left\{ax^2 + bx + 7 : \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+1 & x+y \\ x-z+1 & 7+z \end{pmatrix} : \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.
- $C = \left\{\alpha e^{2x} + x + 7 : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.
- $D = \{\alpha \sin x + \beta x - 9 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Solución

- B es un hiperplano que pasa por el punto $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ en la dirección de $F = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, donde F es un subespacio del espacio vectorial real de matrices cuadradas de orden dos.

Ejercicio

Clasifica los siguientes subespacios afines de acuerdo a su dimensión.

- $A = \left\{ax^2 + bx + 7 : \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+1 & x+y \\ x-z+1 & 7+z \end{pmatrix} : \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.
- $C = \left\{\alpha e^{2x} + x + 7 : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.
- $D = \{\alpha \sin x + \beta x - 9 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Solución

- C es una recta que pasa por el punto $f(x) = x + 7$ en la dirección de $G = \left\langle e^{2x} \right\rangle$, donde G es un subespacio del espacio vectorial de las funciones reales de una variable real.

Ejercicio

Clasifica los siguientes subespacios afines de acuerdo a su dimensión.

- $A = \left\{ax^2 + bx + 7 : \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+1 & x+y \\ x-z+1 & 7+z \end{pmatrix} : \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.
- $C = \left\{\alpha e^{2x} + x + 7 : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.
- $D = \{\alpha \sin x + \beta x - 9 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Solución

- D es un plano que pasa por el punto $f(x) = -9$ en la dirección de $H = \langle \sin x, x \rangle$, donde H es un subespacio del espacio vectorial de las funciones reales de una variable real.

Veamos que si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces el subespacio $\varphi_a^{-1}(A')$ de V no depende de la elección de $a \in A'$.

Veamos que si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces el subespacio $\varphi_a^{-1}(A')$ de V no depende de la elección de $a \in A'$.

Proposición

Si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces existe un subespacio F de V tal que $\varphi_b^{-1}(A') = F$ para todo $b \in A'$.

Veamos que si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces el subespacio $\varphi_a^{-1}(A')$ de V no depende de la elección de $a \in A'$.

Proposición

Si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces existe un subespacio F de V tal que $\varphi_b^{-1}(A') = F$ para todo $b \in A'$.

Demostración

- Sea $F = \varphi_a^{-1}(A')$ y sean $b, x \in A'$. Veamos que $A' = b + F$.

Veamos que si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces el subespacio $\varphi_a^{-1}(A')$ de V no depende de la elección de $a \in A'$.

Proposición

Si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces existe un subespacio F de V tal que $\varphi_b^{-1}(A') = F$ para todo $b \in A'$.

Demostración

- Sea $F = \varphi_a^{-1}(A')$ y sean $b, x \in A'$. Veamos que $A' = b + F$.
- Como F es un subespacio de V, de $\overrightarrow{ab} \in F$ se infiere que $\overrightarrow{ba} \in F$.

Veamos que si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces el subespacio $\varphi_a^{-1}(A')$ de V no depende de la elección de $a \in A'$.

Proposición

Si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces existe un subespacio F de V tal que $\varphi_b^{-1}(A') = F$ para todo $b \in A'$.

Demostración

- Sea $F = \varphi_a^{-1}(A')$ y sean $b, x \in A'$. Veamos que $A' = b + F$.
- Como F es un subespacio de V, de $\overrightarrow{ab} \in F$ se infiere que $\overrightarrow{ba} \in F$. Así mismo, de $\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ax} \in F$ se deduce que $\overrightarrow{bx} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ax} \in F$. Tenemos que $x \in b + F$ para todo $x \in A'$, de ahí que $A' \subseteq b + F$.

Veamos que si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces el subespacio $\varphi_a^{-1}(A')$ de V no depende de la elección de $a \in A'$.

Proposición

Si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces existe un subespacio F de V tal que $\varphi_b^{-1}(A') = F$ para todo $b \in A'$.

Demostración

- Sea $F = \varphi_a^{-1}(A')$ y sean $b, x \in A'$. Veamos que $A' = b + F$.
- Como F es un subespacio de V, de $\overrightarrow{ab} \in F$ se infiere que $\overrightarrow{ba} \in F$. Así mismo, de $\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ax} \in F$ se deduce que $\overrightarrow{bx} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ax} \in F$. Tenemos que $x \in b + F$ para todo $x \in A'$, de ahí que $A' \subseteq b + F$.
- Sea $\overrightarrow{u} \in F$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ab}$. Como $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$, tenemos que $b + \overrightarrow{u} = (a + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{u} = a + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) \in A'$. Por lo tanto, $b + F \subseteq A'$.

Veamos que si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces el subespacio $\varphi_a^{-1}(A')$ de V no depende de la elección de $a \in A'$.

Proposición

Si $\mathcal{A}' = (A', \varphi_a^{-1}(A'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces existe un subespacio F de V tal que $\varphi_b^{-1}(A') = F$ para todo $b \in A'$.

Demostración

- Sea $F = \varphi_a^{-1}(A')$ y sean $b, x \in A'$. Veamos que $A' = b + F$.
- Como F es un subespacio de V, de $\overrightarrow{ab} \in F$ se infiere que $\overrightarrow{ba} \in F$. Así mismo, de $\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ax} \in F$ se deduce que $\overrightarrow{bx} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ax} \in F$. Tenemos que $x \in b + F$ para todo $x \in A'$, de ahí que $A' \subseteq b + F$.
- Sea $\overrightarrow{u} \in F$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ab}$. Como $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$, tenemos que $b + \overrightarrow{u} = (a + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{u} = a + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) \in A'$. Por lo tanto, $b + F \subseteq A'$.
- En resumen, $A' = b + F$. $\square$

Corolario

Si $\mathcal{A}' = (A', F)$ es un subespacio afín, entonces $F = \{\overrightarrow{xy} : \; x, y \in A'\}$.

Proposición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Para todo punto $a \in A$ y todo subespacio F de V, existe un único subespacio $\mathcal{A}' = (A', F)$ tal que $a \in A'$.

Proposición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Para todo punto $a \in A$ y todo subespacio F de V, existe un único subespacio $\mathcal{A}' = (A', F)$ tal que $a \in A'$.

En otras palabras, existe un único subespacio afín con la dirección de F que pasa por el punto a.

Proposición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Para todo punto $a \in A$ y todo subespacio F de V, existe un único subespacio $\mathcal{A}' = (A', F)$ tal que $a \in A'$.

En otras palabras, existe un único subespacio afín con la dirección de F que pasa por el punto a.

Demostración

- Sea F un subespacio de V y $a \in A$ un punto. Sea $A' = \varphi_a(F)$.

Proposición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Para todo punto $a \in A$ y todo subespacio F de V, existe un único subespacio $\mathcal{A}' = (A', F)$ tal que $a \in A'$.

En otras palabras, existe un único subespacio afín con la dirección de F que pasa por el punto a.

Demostración

- Sea F un subespacio de V y $a \in A$ un punto. Sea $A' = \varphi_a(F)$.
- Por definición, $\mathcal{A}' = (A', F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$ en la dirección de F que pasa por a.

Proposición

Sea $\mathcal{A} = (A,V)$ un espacio afín. Para todo punto $a \in A$ y todo subespacio F de V, existe un único subespacio $\mathcal{A}' = (A',F)$ tal que $a \in A'$.

En otras palabras, existe un único subespacio afín con la dirección de F que pasa por el punto a.

Demostración

- Sea F un subespacio de V y $a \in A$ un punto. Sea $A' = \varphi_a(F)$.
- Por definición, $\mathcal{A}' = (A',F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A,V)$ en la dirección de F que pasa por a.
- Sea $\mathcal{B}' = (B',F)$ un subespacio afín donde $a \in B'$. Por la proposición anterior, para todo $b \in B'$ se cumple que $F = \varphi_b^{-1}(B')$. Por lo tanto, $B' = \varphi_a(F)$.

Proposición

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Para todo punto $a \in A$ y todo subespacio F de V, existe un único subespacio $\mathcal{A}' = (A', F)$ tal que $a \in A'$.

En otras palabras, existe un único subespacio afín con la dirección de F que pasa por el punto a.

Demostración

- Sea F un subespacio de V y $a \in A$ un punto. Sea $A' = \varphi_a(F)$.
- Por definición, $\mathcal{A}' = (A', F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$ en la dirección de F que pasa por a.
- Sea $\mathcal{B}' = (B', F)$ un subespacio afín donde $a \in B'$. Por la proposición anterior, para todo $b \in B'$ se cumple que $F = \varphi_b^{-1}(B')$. Por lo tanto, $B' = \varphi_a(F)$.
- En resumen, $A' = \varphi_a(F) = B'$ y por eso $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$. $\square$

Proposición

Toda recta tiene al menos dos puntos.

Proposición

Toda recta tiene al menos dos puntos.

Demostración

Sea $\mathcal{A} = (A, F)$ una recta afín.
Como $\dim(\mathcal{A}) = \dim(F) = 1$ y $F = \{\overrightarrow{ab} : \ a, b \in A\}$, concluimos que $F \neq \{\overrightarrow{0}\}$, por lo que existen al menos dos puntos diferentes $a, b \in A$. $\square$

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales y $f: V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sea $\overrightarrow{v} \in Imf$ y $\mathcal{A}' = (A', F)$ un subespacio afín de V. Demuestra que si $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ entonces $F = \ker f$.

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sea $\overrightarrow{v} \in Imf$ y $\mathcal{A}' = (A', F)$ un subespacio afín de V. Demuestra que si $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ entonces $F = \ker f$.

Solución

- Sea $\overrightarrow{a} \in A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ tal que $\varphi_{\overrightarrow{a}}(F) = A'$.

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sea $\overrightarrow{v} \in Imf$ y $\mathcal{A}' = (A', F)$ un subespacio afín de V. Demuestra que si $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ entonces $F = \ker f$.

Solución

- Sea $\overrightarrow{a} \in A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ tal que $\varphi_{\overrightarrow{a}}(F) = A'$.
- Para todo $\overrightarrow{u} \in F$, existe $\overrightarrow{b} \in A'$ tal que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$, y como $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$, tenemos

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sea $\overrightarrow{v} \in Imf$ y $\mathcal{A}' = (A', F)$ un subespacio afín de V. Demuestra que si $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ entonces $F = \ker f$.

Solución

- Sea $\overrightarrow{a} \in A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ tal que $\varphi_{\overrightarrow{a}}(F) = A'$.
- Para todo $\overrightarrow{u} \in F$, existe $\overrightarrow{b} \in A'$ tal que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$, y como $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$, tenemos $\overrightarrow{v} + f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{v}$.

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sea $\overrightarrow{v} \in Imf$ y $\mathcal{A}' = (A', F)$ un subespacio afín de V. Demuestra que si $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ entonces $F = \ker f$.

Solución

- Sea $\overrightarrow{a} \in A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ tal que $\varphi_{\overrightarrow{a}}(F) = A'$.
- Para todo $\overrightarrow{u} \in F$, existe $\overrightarrow{b} \in A'$ tal que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$, y como $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$, tenemos $\overrightarrow{v} + f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{v}$.
  De ahí que $\overrightarrow{u} \in \ker f$ y por lo tanto $F \subseteq \ker f$.

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sea $\overrightarrow{v} \in Imf$ y $\mathcal{A}' = (A', F)$ un subespacio afín de V. Demuestra que si $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ entonces $F = \ker f$.

Solución

- Sea $\overrightarrow{a} \in A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ tal que $\varphi_{\overrightarrow{a}}(F) = A'$.
- Para todo $\overrightarrow{u} \in F$, existe $\overrightarrow{b} \in A'$ tal que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$, y como $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$, tenemos $\quad \overrightarrow{v} + f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{v}$.
  De ahí que $\overrightarrow{u} \in \ker f$ y por lo tanto $F \subseteq \ker f$.
- Sea $\overrightarrow{w} \in \ker f$.

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sea $\overrightarrow{v} \in Imf$ y $\mathcal{A}' = (A', F)$ un subespacio afín de V. Demuestra que si $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ entonces $F = \ker f$.

Solución

- Sea $\overrightarrow{a} \in A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ tal que $\varphi_{\overrightarrow{a}}(F) = A'$.
- Para todo $\overrightarrow{u} \in F$, existe $\overrightarrow{b} \in A'$ tal que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$, y como $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$, tenemos $\overrightarrow{v} + f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{v}$.
  De ahí que $\overrightarrow{u} \in \ker f$ y por lo tanto $F \subseteq \ker f$.
- Sea $\overrightarrow{w} \in \ker f$.
  Como $f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{w}) = f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{v}$, tenemos $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{w} \in f^{-1}(\overrightarrow{v}) = A' = \overrightarrow{a} + F$.

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sea $\overrightarrow{v} \in Imf$ y $\mathcal{A}' = (A', F)$ un subespacio afín de V. Demuestra que si $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ entonces $F = \ker f$.

Solución

- Sea $\overrightarrow{a} \in A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ tal que $\varphi_{\overrightarrow{a}}(F) = A'$.
- Para todo $\overrightarrow{u} \in F$, existe $\overrightarrow{b} \in A'$ tal que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$, y como $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$, tenemos $\overrightarrow{v} + f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{v}$.
  De ahí que $\overrightarrow{u} \in \ker f$ y por lo tanto $F \subseteq \ker f$.
- Sea $\overrightarrow{w} \in \ker f$.
  Como $f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{w}) = f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{v}$, tenemos $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{w} \in f^{-1}(\overrightarrow{v}) = A' = \overrightarrow{a} + F$.
  De ahí que $\overrightarrow{w} \in F$, y eso implica que $\ker f \subseteq F$.

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sea $\overrightarrow{v} \in Imf$ y $\mathcal{A}' = (A', F)$ un subespacio afín de V. Demuestra que si $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ entonces $F = \ker f$.

Solución

- Sea $\overrightarrow{a} \in A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$ tal que $\varphi_{\overrightarrow{a}}(F) = A'$.
- Para todo $\overrightarrow{u} \in F$, existe $\overrightarrow{b} \in A'$ tal que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$, y como $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$, tenemos $\overrightarrow{v} + f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{v}$.
  De ahí que $\overrightarrow{u} \in \ker f$ y por lo tanto $F \subseteq \ker f$.
- Sea $\overrightarrow{w} \in \ker f$.
  Como $f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{w}) = f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{v}$, tenemos $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{w} \in f^{-1}(\overrightarrow{v}) = A' = \overrightarrow{a} + F$.
  De ahí que $\overrightarrow{w} \in F$, y eso implica que $\ker f \subseteq F$.
- Por lo tanto, $\ker f = F$. $\square$

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales, $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im} f$, y $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$. Demuestra que $\mathcal{A}' = (A', \ker f)$ es un subespacio afín de $(V, V, +)$.

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales, $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im} f$, y $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$. Demuestra que $\mathcal{A}' = (A', \ker f)$ es un subespacio afín de $(V, V, +)$.

Solución

Sea $\overrightarrow{u_0} \in A'$. Como $\ker f$ es un subespacio vectorial de V, solo hay que probar que $A' = \overrightarrow{u_0} + \ker f$.

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales, $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im} f$, y $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$. Demuestra que $\mathcal{A}' = (A', \ker f)$ es un subespacio afín de $(V, V, +)$.

Solución

Sea $\overrightarrow{u_0} \in A'$. Como $\ker f$ es un subespacio vectorial de V, solo hay que probar que $A' = \overrightarrow{u_0} + \ker f$.
Sea $\overrightarrow{x} \in A'$. Para $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}$ tenemos

$$\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u_0}) + f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} + f(\overrightarrow{u}).$$

Así, $\overrightarrow{u} \in \ker f$, y por eso $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{u_0} + \ker f$. Por lo tanto, $A' \subseteq \overrightarrow{u_0} + \ker f$.
—

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales, $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im} f$, y $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$. Demuestra que $\mathcal{A}' = (A', \ker f)$ es un subespacio afín de $(V, V, +)$.

Solución

Sea $\overrightarrow{u_0} \in A'$. Como $\ker f$ es un subespacio vectorial de V, solo hay que probar que $A' = \overrightarrow{u_0} + \ker f$.
Sea $\overrightarrow{x} \in A'$. Para $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}$ tenemos

$$\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u_0}) + f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} + f(\overrightarrow{u}).$$

Así, $\overrightarrow{u} \in \ker f$, y por eso $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{u_0} + \ker f$. Por lo tanto, $A' \subseteq \overrightarrow{u_0} + \ker f$.
—
Por otro lado, para todo $\overrightarrow{u} \in \ker f$ tenemos

$$f(\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u_0}) + f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}.$$

Así, $\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u} \in A'$ para todo $\overrightarrow{u} \in \ker f$, por lo que $\overrightarrow{u_0} + \ker f \subseteq A'$.

Ejercicio

Sean V y V' dos espacios vectoriales, $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im} f$, y $A' = f^{-1}(\overrightarrow{v})$. Demuestra que $\mathcal{A}' = (A', \ker f)$ es un subespacio afín de $(V, V, +)$.

Solución

Sea $\overrightarrow{u_0} \in A'$. Como $\ker f$ es un subespacio vectorial de V, solo hay que probar que $A' = \overrightarrow{u_0} + \ker f$.
Sea $\overrightarrow{x} \in A'$. Para $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}$ tenemos

$$\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u_0}) + f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} + f(\overrightarrow{u}).$$

Así, $\overrightarrow{u} \in \ker f$, y por eso $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{u_0} + \ker f$. Por lo tanto, $A' \subseteq \overrightarrow{u_0} + \ker f$.

—

Por otro lado, para todo $\overrightarrow{u} \in \ker f$ tenemos

$$f(\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u_0}) + f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}.$$

Así, $\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u} \in A'$ para todo $\overrightarrow{u} \in \ker f$, por lo que $\overrightarrow{u_0} + \ker f \subseteq A'$.
Finalmente, $A' \subseteq \overrightarrow{u_0} + \ker f$ y $\overrightarrow{u_0} + \ker f \subseteq A'$ implican que $A' = \overrightarrow{u_0} + \ker f$.

Corolario

Si V y V' son espacios vectoriales, $f: V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal y $\overrightarrow{v} \in Imf$, entonces la solución general de la ecuación

$$f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v}$$

está dada por la solución general de la ecuación homogénea $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ más una solución particular $\overrightarrow{x_0}$ de la ecuación no homogénea. Es decir, la solución general está dada por el conjunto de puntos del espacio afín

$$A = \overrightarrow{x_0} + \mathrm{ker} f.$$

Observación

Obviamente, las aplicaciones de estas observaciones van más allá de los sistemas de ecuaciones lineales estudiados en álgebra lineal. Se aplica en diferentes ramas de la matemática. Por poner dos ejemplos, es útil en el estudio de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y en combinatoria, en el estudio de recurrencias lineales.

Ejemplo

El sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz & = d \\ a'x + b'y + c'z & = d' \end{cases}$$

describe un espacio afín si y solo si el sistema es compatible.

- Es una recta si la aplicación lineal

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  tiene rango 2, lo que equivale a $\dim(\ker f) = 1$.
- Es un plano siempre que $\dim(\ker f) = 2$.

Ejemplo

En particular, la siguiente figura muestra, en líneas discontinuas, la parte correspondiente al primer octante de la solución del siguiente sistema.

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ x+y-z &= 0. \end{cases}$$