Exercicis integral de línia

1. Avalueu les integrals de línia:

$$a)\ f(x,y,z) = x\cos(z)\,, \qquad \boldsymbol{c}: t \mapsto t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}, \qquad t \in [0,1]$$
$$b)\ f(x,y,z) = \frac{x+y}{y+z}, \qquad \boldsymbol{c}: t \mapsto \left(t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t\right), \qquad t \in [1,2]$$

Solució

a)

$$\boldsymbol{c}(t) = (t, t^2, 0), \qquad t \in [0,1]$$

$$\boldsymbol{c}'(t) = (1, 2t, 0)$$

$$\|\boldsymbol{c}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$\int_{\boldsymbol{c}} x\cos z\, ds = \int_0^1 t\cos 0\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{8}\int_0^1 8t\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{8}\int_1^5 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

b)

$$\boldsymbol{c}(t) = \left(t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t\right), \qquad t \in [1,2]$$

$$\boldsymbol{c}'(t) = (1, \sqrt{t}, 1)$$

$$\|\boldsymbol{c}'(t)\| = \sqrt{2+t}$$

$$\int_c \frac{x+y}{y+z} ds = \int_1^2 \frac{t + \frac{2}{3}t^{3/2}}{\frac{2}{3}t^{3/2} + t}\sqrt{2+t}\, dt = \int_1^2 \sqrt{2+t}\, dt = \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3})$$

2. Demostrar que la integral de línia de $f(x, y)$ sobre un camí donat per coordenades polars $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, és:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

i calculeu després la longitud del camí:

$$r = 1 + \cos(\theta), \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

Solució

$$\boldsymbol{c}(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \qquad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

$$\boldsymbol{c}'(\theta) = \left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)$$

$$\|\boldsymbol{c}'(\theta)\| = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)^2}$$

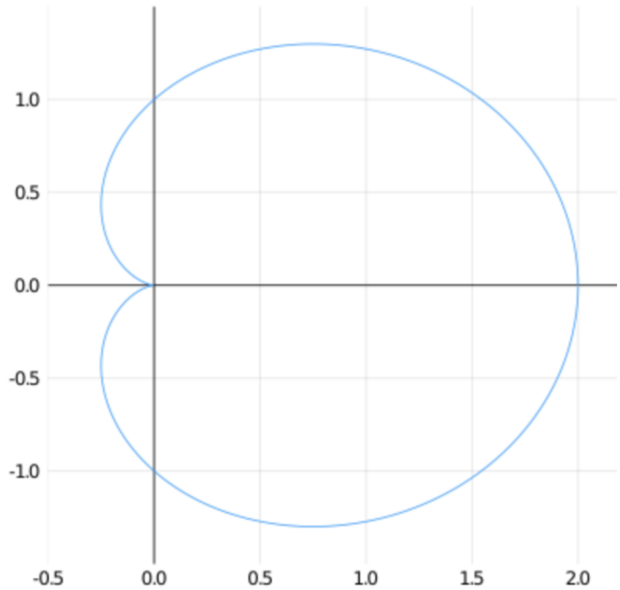
$$= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + r^2\sin^2\theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \sin^2\theta + 2r\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + r^2\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$\int_{\boldsymbol{c}} f(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\|\boldsymbol{c}'(\theta)\|\, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Ara calculem la longitud L del camí

$$r = 1 + \cos(\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$



$$\frac{dr}{d\theta} = -\sin\theta$$

$$L = \int_{\boldsymbol{c}} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta$$

Com

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$L = 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta - 2\int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} - 4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_{\pi}^{2\pi} = 8$$

3. Galileu va contemplar la següent pregunta: Si una perla que cau sota la influència de la gravetat des d'un punt A fins a un punt B al llarg d'una corba, ho fa en el **menor temps possible** si aquesta corba és un arc circular? Per a qualsevol camí donat C, el temps de trànsit T és una integral de línia:

$$T = \int_C \frac{ds}{v}$$

on la velocitat de la perla és

$$v = \sqrt{2g(L-h)}$$

amb g la constant gravitatòria, L l'alçada del punt de sortida A, i h l'alçada respecte el punt B. Suposem que l'objecte surt des de A amb velocitat zero, i ue no hi ha fregament. El 1697, Johann Bernoulli va desafiar el món matemàtic a trobar el camí pel que la perla rodaria d'A a B **en el menor temps**.

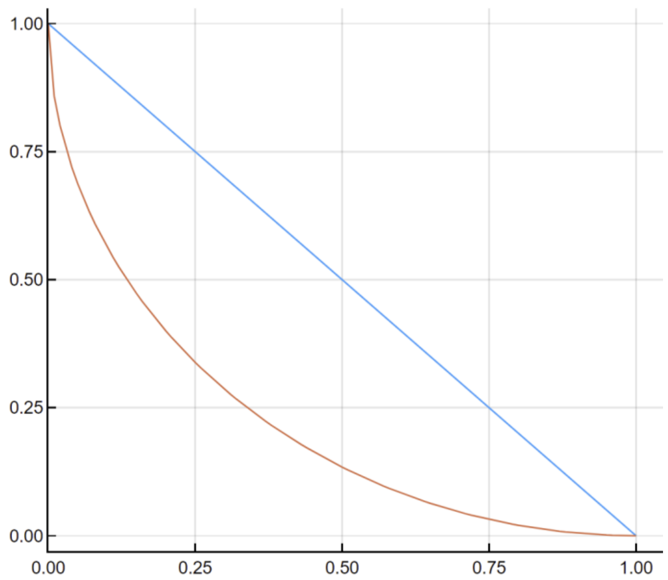
Aquesta solució determinarà si les consideracions de Galileu eren correctes. Els punts de sortida i arribada són $A(0,1)$ i $B(1,0)$ respectivament.

(a) Calculeu T per a la trajectòria recta $y = 1 - x$.
(b) Escriu una fórmula per a T per a la trajectòria circular de Galileu, donada per $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

La solució general d'aquest problema per a camins arbitraris, anomenat problema de la determinació de la corba braquistòcrona, requereix utilitzar Càlcul Variacional, que ja veureu en altres assignatures. La solució són les cicloides.

Solució

$$v = \sqrt{2g(L-h)} = \sqrt{2g(1-y(x))}$$



$$\boldsymbol{c}_1(x) = (x, 1-x), \qquad x \in [0,1]$$
$$\boldsymbol{c}_2(x) = \left(x, 1-\sqrt{1-(x-1)^2}\right), \qquad x \in [0,1]$$

$$\boldsymbol{c}_1'(x) = (1,-1)$$
$$\boldsymbol{c}_2'(x) = \left(1, \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\right)$$

$$\|\boldsymbol{c}_1'(x)\| = \sqrt{2}$$

$$\|\boldsymbol{c}_2'(x)\| = \sqrt{1 + \frac{(x-1)^2}{1-(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$T_1 = \int_{C_1} \frac{ds}{v} = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2g\big(1-(1-x)\big)}} dx = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{g}} \left[\sqrt{x}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{g}}$$

$$T_2 = \int_{C_2} \frac{ds}{v} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2g\left(1-\left(1-\sqrt{1-(x-1)^2}\right)\right)}} \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-(x-1)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 (1-(x-1)^2)^{-\frac{3}{4}} dx$$

Per canvi de variables $x - 1 = -\sin u$, $dx = -\cos u \, du$, $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$, $x = 1 \Rightarrow u = 0$

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u)^{-\frac{3}{4}} \cos u \, du = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos u}} du$$

Es podria haver arribat directament a aquesta integral utilitzant una parametrització de la corba basada en angles des del centre de la circumferència.

Desafortunadament, aquesta integral no es pot expressar amb funcions elementals (requereix funcions el·líptiques). El resultat aproximat és

$$T_2 \approx \frac{1}{\sqrt{2g}} \, 2.62206 = \frac{1.85408}{\sqrt{g}} < T_1$$

4. Avaluar la integral de línia on $\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ i el camí $\boldsymbol{c}$ està definit per $\boldsymbol{c}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}, 0 \leq t \leq 1.$

Solució

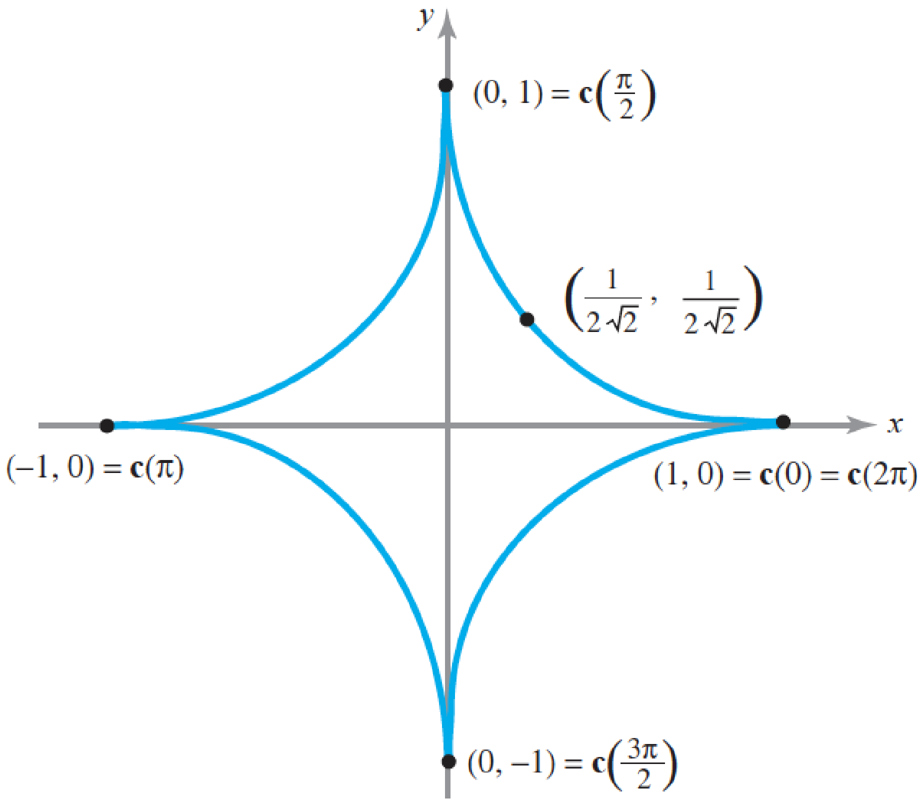
$\boldsymbol{c}(t) = (t, t^2, t^3), \qquad t \in [0,1]$
$\boldsymbol{c}'(t) = (1,2t, 3t^2)$

$\boldsymbol{F}(t) = (y(t),2x(t), y(t)) = (t^2, 2t, t^2)$

$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{c}'(t) = t^2 + 4t^2 + 3t^4 = 5t^2 + 3t^4$

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^1 (5t^2 + 3t^4)\, dt = \left[\frac{5t^3}{3} + \frac{3t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{34}{15}$$

5. La imatge del camí $t \to (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \le t \le 2\pi$ en el pla es mostra a la figura. Avaluar la integral del camp vectorial $\boldsymbol{F}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ al voltant d'aquesta corba.



Solució

$\boldsymbol{c}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \qquad t \in [0, 2\pi]$
$\boldsymbol{c}'(t) = (-3\cos^2 t \sin t\,, 3\sin^2 t \cos t)$

$\boldsymbol{F}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$

$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{c}'(t) = -3\cos^5 t \sin t + 3\sin^5 t \cos t$

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^{2\pi} (-3\cos^5 t \sin t + 3\sin^5 t \cos t)\, dt = 3\left[\frac{\cos^6 t}{6} + \frac{\sin^6 t}{6}\right]_0^{2\pi} = 0$$

De fet, la integral de línia és zero per tots els camins tancats, ja que és un camp conservatiu, és dir, existeix $f(x,y)$ tal que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} f$. En particular, podem prendre $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

6. Sigui $\boldsymbol{F} = (z^3 + 2xy)\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + 3xz^2\boldsymbol{k}$. Demostra que la integral de $\boldsymbol{F}$ al voltant del perímetre del quadrat unitari amb vèrtexs $(\pm 1, \pm 1,0)$ és zero.

Solució

Suposem un recorregut del quadrat en sentit antihorari.

Costat inferior del quadrat: $\boldsymbol{c}_1(t) = (t, -1,0)$, $t \in [-1,1]$
Costat dret del quadrat: $\boldsymbol{c}_2(t) = (1, t, 0)$, $t \in [-1,1]$
Costat superior del quadrat: $\boldsymbol{c}_3(t) = (-t, 1,0)$, $t \in [-1,1]$
Costat esquerra del quadrat: $\boldsymbol{c}_4(t) = (-1, -t, 0)$, $t \in [-1,1]$

$\boldsymbol{c}_1'(t) = (1,0,0) = \boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{c}_2'(t) = (0,1,0) = \boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{c}_3'(t) = (-1,0,0) = -\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{c}_4'(t) = (0, -1,0) = -\boldsymbol{j}$

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{-1}^{1} (-2t)\, dt + \int_{-1}^{1} (1^2)\, dt + \int_{-1}^{1} (2t)\, dt + \int_{-1}^{1} (-(-1)^2)\, dt = 0$$

De fet, la integral de línia és zero per tots els camins tancats, ja que és un camp conservatiu, és dir, existeix $f(x, y, z)$ tal que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} f$. En particular, podem prendre $f(x, y, z) = xz^3 + x^2y$.

7. Considereu el camp de força gravitatòria (amb $G = m = M = 1$) definit [per a punts $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$] per

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

Demostreu que el treball realitzat per la força gravitatòria quan la partícula es mou de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) al llarg de qualsevol camí depèn només dels radis:

$$R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad \mathrm{i} \quad R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

Solució

Ja sabem de física que el camp gravitatori és conservatiu. Concretament, podem definir la funció d'energia potencial $V(x, y, z)$

$$V(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

de manera que $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$. Per tant, la integral de línia del camp gravitatori, que representa el treball, no depèn del camí sinó únicament dels punts inicial i final, que anomenarem P_1 i P_2 . Això ens ho dona el teorema que hem vist a teoria sobre integrals de línia de gradients de funcions escalars:

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{\nabla} V \cdot d\boldsymbol{s} = V(P_1) - V(P_2) = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$