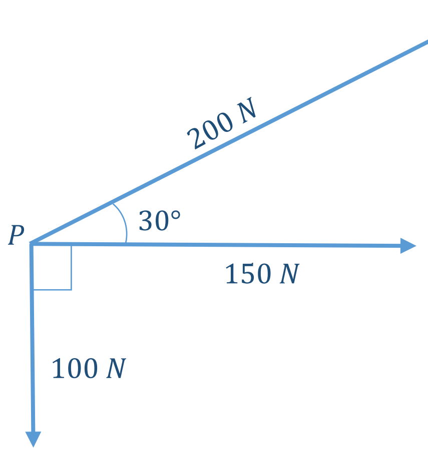
CÀLCUL VECTORIAL

1. Demostreu que si els vectors $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ no tenen la mateixa direcció, la igualtat vectorial $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = 0$ implica que $x = y = 0$.
2. Determineu els angles $\alpha, \beta\ i\ \gamma$ que el vector $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ forma amb els sentits positius dels eixos de coordenades, i demostreu que

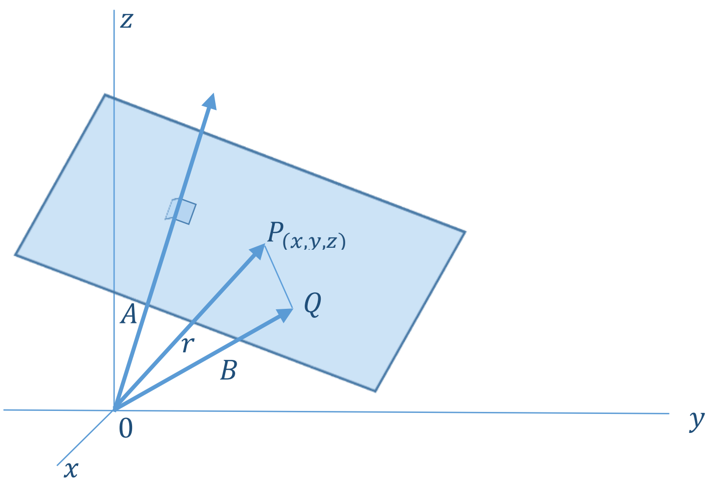
$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

3. Sobre un sòlid puntual en P actuen les tres forces coplanàries que mostra la figura. Trobeu la força que és necessari aplicar en P per a mantenir el sòlid donat en repòs.

Sol. $323\ N$ directament oposada a la de $150\ N$.



4. Demostreu que la recta que uneix dos punts mitjans de dos costats d'un triangle, és paral·lela al tercer costat i igual a la seva meitat (paral·lela mitja).
5. Si $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ i $\boldsymbol{A}\ i\ \boldsymbol{B}$ són diferents a zero, demostreu que $\boldsymbol{A}$ és perpendicular a $\boldsymbol{B}$.
6. Demostreu el teorema del cosinus d'un triangle qualsevol.
7. Trobeu l'equació del pla perpendicular al vector $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ i que passa per l'extrem del vector $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.



8. Demostreu que l'àrea d'un paral·lelogram de costats $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ és $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$.
9. Deduïu el teorema dels sinus en un triangle pla.
10. Trobeu els cosinus directors de la recta que passa pels punts $(3, 2, -4)$ i $(1, -1, 2)$.

   Sol. $2/7, 3/7, -6/7 \ o \ -2/7, -3/7, 6/7$

11. Trobeu la constant a de manera que els vectors $2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ i $3\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ siguin coplanars.

   Sol. $a = -4$

12. Demostreu que les alçades d'un triangle es tallen en un punt (ortocentre).
13. Demostreu que les mediatrius d'un triangle es tallen en un punt (circumcentre).
14. Trobeu $\boldsymbol{\nabla}\emptyset$ essent $(a)\emptyset = 1n|r|, (b)\emptyset = \frac{1}{r}$.
15. Demostreu que $\boldsymbol{\nabla}\emptyset$ és un vector perpendicular a la superfície $\emptyset(x, y, z) = c$, essent c una constant.
16. Demostreu que:
    a. $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\emptyset) = 0$ (rot grad $\emptyset = 0$).
    b. $\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0$ (div rot $\boldsymbol{A} = 0$).