Dualidad proyectiva

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

Dualidad en espacios vectoriales

Forma lineal

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Una forma lineal, también llamada funcional lineal, g de V en $\mathbb{K}$ es una aplicación lineal $g : V \longrightarrow \mathbb{K}$.

Forma lineal

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Una forma lineal, también llamada funcional lineal, g de V en $\mathbb{K}$ es una aplicación lineal $g : V \longrightarrow \mathbb{K}$.

Ejemplo

- $f(x,y,z) = x+y-z$ es una forma lineal del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.
- $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a-b+2d$ es una forma lineal del espacio $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de matrices cuadradas reales de orden dos en $\mathbb{R}$.
- $f\left(ax^2+bx+c\right) = a+b-c$ es una forma lineal del espacio $P_2[x]$ de polinomios reales de grado menor o igual que dos en $\mathbb{R}$.

Forma lineal

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Una forma lineal, también llamada funcional lineal, g de V en $\mathbb{K}$ es una aplicación lineal $g : V \longrightarrow \mathbb{K}$.

Ejemplo

- $f(x,y,z) = x+y-z$ es una forma lineal del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.
- $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a-b+2d$ es una forma lineal del espacio $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de matrices cuadradas reales de orden dos en $\mathbb{R}$.
- $f\left(ax^2+bx+c\right) = a+b-c$ es una forma lineal del espacio $P_2[x]$ de polinomios reales de grado menor o igual que dos en $\mathbb{R}$.

Ejemplo

Nótese que en todos los casos $\ker f$ es un hiperplano.

Proposición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. El subespacio vectorial $\ker(g)$ es un hiperplano de V para toda forma lineal $g : V \longrightarrow \mathbb{K}$ que no sea idénticamente nula.

Proposición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. El subespacio vectorial $\ker(g)$ es un hiperplano de V para toda forma lineal $g : V \longrightarrow \mathbb{K}$ que no sea idénticamente nula.

Demostración

Si g no es idénticamente nula, entonces existe un vector $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $g(\overrightarrow{u}) \neq 0$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. El subespacio vectorial $\ker(g)$ es un hiperplano de V para toda forma lineal $g : V \longrightarrow \mathbb{K}$ que no sea idénticamente nula.

Demostración

Si g no es idénticamente nula, entonces existe un vector $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $g(\overrightarrow{u}) \neq 0$. Por lo tanto, $Im(g) = \mathbb{K}$, y por eso

$$\dim(V) = \dim(\ker(g)) + \dim(Im(g)) = \dim(\ker(g)) + 1.$$

De ahí que $\dim(\ker(g)) = \dim(V) - 1$, es decir, $\ker(g)$ es un hiperplano. $\square$

Estructura del conjunto de formas lineales

Es fácil ver que el conjunto V^* de todas las formas lineales de V en $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial con las operaciones

- $(f+g)(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{u})$ para todo $f, g \in V^*$ y $\overrightarrow{u} \in V$.
- $(\lambda f)(\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u} \in V$.

Estructura del conjunto de formas lineales

Es fácil ver que el conjunto V^* de todas las formas lineales de V en $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial con las operaciones

- $(f+g)(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{u})$ para todo $f, g \in V^*$ y $\overrightarrow{u} \in V$.
- $(\lambda f)(\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\overrightarrow{u} \in V$.

Sea $B = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ una base de V. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea

$$f_i : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

la forma lineal definida por la base B como

$$f_i(\overrightarrow{e_j}) = \delta_{ij} \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, n\},$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.
Es decir, $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$ mientras $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$.

Proposición (Base dual)

El sistema $B^* = (f_1,\ldots,f_n)$ definido antes es una base de V^*.

Proposición (Base dual)

El sistema $B^* = (f_1, \ldots, f_n)$ definido antes es una base de V^*.

Demostración

Para todo $\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{e_j} \in V$ se cumple $f_i(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_i(\overrightarrow{e_j}) = \lambda_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposición (Base dual)

El sistema $B^* = (f_1, \ldots, f_n)$ definido antes es una base de V^*.

Demostración

Para todo $\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{e_j} \in V$ se cumple $f_i(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_i(\overrightarrow{e_j}) = \lambda_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para $g \in V^*$ y $\alpha_i = g(\overrightarrow{e_i})$, $\forall i$, tenemos, $g(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\overrightarrow{u})$.

Proposición (Base dual)

El sistema $B^* = (f_1, \ldots, f_n)$ definido antes es una base de V^*.

Demostración

Para todo $\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{e_j} \in V$ se cumple $f_i(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_i(\overrightarrow{e_j}) = \lambda_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para $g \in V^*$ y $\alpha_i = g(\overrightarrow{e_i})$, $\forall i$, tenemos, $g(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\overrightarrow{u})$.

Por lo tanto, $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, lo que implica que B^* es un generador de V^*.

Proposición (Base dual)

El sistema $B^* = (f_1, \ldots, f_n)$ definido antes es una base de V^*.

Demostración

Para todo $\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{e_j} \in V$ se cumple $f_i(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_i(\overrightarrow{e_j}) = \lambda_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para $g \in V^*$ y $\alpha_i = g(\overrightarrow{e_i})$, $\forall i$, tenemos, $g(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\overrightarrow{u})$.

Por lo tanto, $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, lo que implica que B^* es un generador de V^*.

Supongamos que B^* es linealmente dependiente. Sin perdida de generalidad, sea $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i$.

Proposición (Base dual)

El sistema $B^* = (f_1, \ldots, f_n)$ definido antes es una base de V^*.

Demostración

Para todo $\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{e_j} \in V$ se cumple $f_i(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_i(\overrightarrow{e_j}) = \lambda_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para $g \in V^*$ y $\alpha_i = g(\overrightarrow{e_i})$, $\forall i$, tenemos, $g(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\overrightarrow{u})$.

Por lo tanto, $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, lo que implica que B^* es un generador de V^*.

Supongamos que B^* es linealmente dependiente. Sin perdida de generalidad, sea $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i$. En tal caso, $f_n(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i(\overrightarrow{u})$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$,

Proposición (Base dual)

El sistema $B^* = (f_1,\ldots,f_n)$ definido antes es una base de V^*.

Demostración

Para todo $\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{e_j} \in V$ se cumple $f_i(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_i(\overrightarrow{e_j}) = \lambda_i$ para $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Para $g \in V^*$ y $\alpha_i = g(\overrightarrow{e_i})$, $\forall i$, tenemos, $g(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\overrightarrow{u})$.

Por lo tanto, $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, lo que implica que B^* es un generador de V^*.

Supongamos que B^* es linealmente dependiente. Sin perdida de generalidad, sea $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i$. En tal caso, $f_n(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i(\overrightarrow{u})$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$, lo que es una contradicción ya que para $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_n}$ tenemos $f_n(\overrightarrow{e_n}) = 1 \neq 0 = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i(\overrightarrow{e_n})$.

Proposición (Base dual)

El sistema $B^* = (f_1, \ldots, f_n)$ definido antes es una base de V^*.

Demostración

Para todo $\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{e_j} \in V$ se cumple $f_i(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_i(\overrightarrow{e_j}) = \lambda_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para $g \in V^*$ y $\alpha_i = g(\overrightarrow{e_i})$, $\forall i$, tenemos, $g(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\overrightarrow{u})$.

Por lo tanto, $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, lo que implica que B^* es un generador de V^*.

Supongamos que B^* es linealmente dependiente. Sin perdida de generalidad, sea $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i$. En tal caso, $f_n(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i(\overrightarrow{u})$ para todo $\overrightarrow{u} \in V$, lo que es una contradicción ya que para $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_n}$ tenemos $f_n(\overrightarrow{e_n}) = 1 \neq 0 = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i(\overrightarrow{e_n})$.

Por lo tanto, B^* es linealmente independiente. $\square$

Corolario

$\dim(V^*) = \dim(V)$.

Corolario

$\dim(V^*) = \dim(V)$.

Para todo $\overrightarrow{u} \in V$ definimos la forma lineal

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}^* : V^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ g &\longrightarrow g(\overrightarrow{u}). \end{aligned}$$

Corolario

$\dim(V^*) = \dim(V)$.

Para todo $\overrightarrow{u} \in V$ definimos la forma lineal

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}^* : V^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ g &\longrightarrow g(\overrightarrow{u}). \end{aligned}$$

Observación

$\ker(\overrightarrow{u}^*)$ es un hiperplano de V^* para todo $\overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.

Corolario

$\dim(V^*) = \dim(V)$.

Para todo $\overrightarrow{u} \in V$ definimos la forma lineal

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}^* : V^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ g &\longrightarrow g(\overrightarrow{u}). \end{aligned}$$

Observación

$\ker(\overrightarrow{u}^*)$ es un hiperplano de V^* para todo $\overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} h_V : V &\longrightarrow (V^*)^* \\ \overrightarrow{u} &\longrightarrow \overrightarrow{u}^*. \end{aligned}$$

Proposición

Los espacios vectoriales V y $(V^*)^*$ son isomorfos.

Proposición

Los espacios vectoriales V y $(V^*)^*$ son isomorfos.

Demostración

Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $g \in V^*$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$, tales que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w}^*(g) &= g(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) \\ &= \alpha g(\overrightarrow{u}) + \beta g(\overrightarrow{v}) \\ &= \alpha\overrightarrow{u}^*(g) + \beta\overrightarrow{v}^*(g).\end{aligned}$$

Así, $h_V(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = h_V(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}^* = \alpha\overrightarrow{u}^* + \beta\overrightarrow{v}^* = \alpha h_V(\overrightarrow{u}) + \beta h_V(\overrightarrow{v})$ y por eso h_V es lineal.

Proposición

Los espacios vectoriales V y $(V^*)^*$ son isomorfos.

Demostración

Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $g \in V^*$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$, tales que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w}^*(g) &= g(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) \\ &= \alpha g(\overrightarrow{u}) + \beta g(\overrightarrow{v}) \\ &= \alpha\overrightarrow{u}^*(g) + \beta\overrightarrow{v}^*(g). \end{aligned}$$

Así, $h_V(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = h_V(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}^* = \alpha\overrightarrow{u}^* + \beta\overrightarrow{v}^* = \alpha h_V(\overrightarrow{u}) + \beta h_V(\overrightarrow{v})$ y por eso h_V es lineal.

Para probar que h es un isomorfismo solo hay que ver que h_V es inyectiva, ya que $\dim((V^*)^*) = \dim(V^*) = \dim(V) = n$.

Proposición

Los espacios vectoriales V y $(V^*)^*$ son isomorfos.

Demostración

Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $g \in V^*$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$, tales que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w}^*(g) &= g(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) \\ &= \alpha g(\overrightarrow{u}) + \beta g(\overrightarrow{v}) \\ &= \alpha\overrightarrow{u}^*(g) + \beta\overrightarrow{v}^*(g). \end{aligned}$$

Así, $h_V(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = h_V(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}^* = \alpha\overrightarrow{u}^* + \beta\overrightarrow{v}^* = \alpha h_V(\overrightarrow{u}) + \beta h_V(\overrightarrow{v})$ y por eso h_V es lineal.

Para probar que h es un isomorfismo solo hay que ver que h_V es inyectiva, ya que $\dim((V^*)^*) = \dim(V^*) = \dim(V) = n$.
Un vector $\overrightarrow{v} \in \ker(h_V)$ si y solo si $g(\overrightarrow{v}) = 0$ para toda forma lineal $g \in V^*$.

Proposición

Los espacios vectoriales V y $(V^*)^*$ son isomorfos.

Demostración

Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $g \in V^*$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$, tales que $\overrightarrow{w} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{w}^*(g) &= g(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}) \\
&= \alpha g(\overrightarrow{u}) + \beta g(\overrightarrow{v}) \\
&= \alpha \overrightarrow{u}^*(g) + \beta \overrightarrow{v}^*(g).
\end{aligned}$$

Así, $h_V(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}) = h_V(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}^* = \alpha \overrightarrow{u}^* + \beta \overrightarrow{v}^* = \alpha h_V(\overrightarrow{u}) + \beta h_V(\overrightarrow{v})$ y por eso h_V es lineal.

Para probar que h es un isomorfismo solo hay que ver que h_V es inyectiva, ya que $\dim((V^*)^*) = \dim(V^*) = \dim(V) = n$.
Un vector $\overrightarrow{v} \in \ker(h_V)$ si y solo si $g(\overrightarrow{v}) = 0$ para toda forma lineal $g \in V^*$.
Como el único vector con esta propiedad es el vector nulo, concluimos que $\ker(h_V) = \{\overrightarrow{0}\}$. □

Definición (Espacio dual, base dual)

Sea V un espacio vectorial. Sea $B = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ una base de V. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea

$$f_i : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

la forma lineal definida por la base B como

$$f_i(\overrightarrow{e_j}) = \delta_{ij} \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, n\},$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

Definición (Espacio dual, base dual)

Sea V un espacio vectorial. Sea $B = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ una base de V. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea

$$f_i : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

la forma lineal definida por la base B como

$$f_i(\overrightarrow{e_j}) = \delta_{ij} \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, n\},$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

Sabemos que V^* es un es un espacio vectorial y $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ es una base del espacio V^*.

- El espacio vectorial V^* se conoce como *espacio dual* de V y viceversa.
- La base B^* se conoce como *base dual* de la base B y viceversa.

Proposición

Sea $\mathcal{L}(V) = \{\langle \overrightarrow{u} \rangle : \overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}\}$ el conjunto de rectas vectoriales V. Sea $\mathcal{H}(V^*)$ el conjunto de hiperplanos de V^*. La siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned} d_V : \mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathcal{H}(V^*) \\ \langle \overrightarrow{u} \rangle &\longrightarrow \ker(\overrightarrow{u}^*) \end{aligned}$$

Proposición

Sea $\mathcal{L}(V)=\{\langle\overrightarrow{u}\rangle:\ \overrightarrow{u}\in V\setminus\{\overrightarrow{0}\}\}$ el conjunto de rectas vectoriales V. Sea $\mathcal{H}(V^*)$ el conjunto de hiperplanos de V^*. La siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned} d_V : \mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathcal{H}(V^*) \\ \langle\overrightarrow{u}\rangle &\longrightarrow \ker(\overrightarrow{u}^*) \end{aligned}$$

Demostración (Sobreyectividad)

Sea $H\in\mathcal{H}(V^*)$ y $B^*=\{f_1,\ldots,f_n\}$ una base de V^* tal que $B'=\{f_1,\ldots,f_{n-1}\}$ es base de H. Sea $B=\{\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n}\}$ la base dual de B^*. Veamos que $d_V(\langle\overrightarrow{e_n}\rangle)=H$.

Proposición

Sea $\mathcal{L}(V) = \{\langle \overrightarrow{u} \rangle : \overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}\}$ el conjunto de rectas vectoriales V. Sea $\mathcal{H}(V^*)$ el conjunto de hiperplanos de V^*. La siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned} d_V : \mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathcal{H}(V^*) \\ \langle \overrightarrow{u} \rangle &\longrightarrow \ker(\overrightarrow{u}^*) \end{aligned}$$

Demostración (Sobreyectividad)

Sea $H \in \mathcal{H}(V^*)$ y $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ una base de V^* tal que $B' = \{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ es base de H. Sea $B = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ la base dual de B^*. Veamos que $d_V(\langle \overrightarrow{e_n} \rangle) = H$.

Para todo $g \in H$ con $g = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$ tenemos $\overrightarrow{e_n}^*(g) = g(\overrightarrow{e_n}) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i(\overrightarrow{e_n}) = 0$.

Proposición

Sea $\mathcal{L}(V) = \{\langle \overrightarrow{u} \rangle : \overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}\}$ el conjunto de rectas vectoriales V. Sea $\mathcal{H}(V^*)$ el conjunto de hiperplanos de V^*. La siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned} d_V : \mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathcal{H}(V^*) \\ \langle \overrightarrow{u} \rangle &\longrightarrow \ker(\overrightarrow{u}^*) \end{aligned}$$

Demostración (Sobreyectividad)

Sea $H \in \mathcal{H}(V^*)$ y $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ una base de V^* tal que $B' = \{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ es base de H. Sea $B = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ la base dual de B^*. Veamos que $d_V(\langle \overrightarrow{e_n} \rangle) = H$.

Para todo $g \in H$ con $g = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$ tenemos $\overrightarrow{e_n}^*(g) = g(\overrightarrow{e_n}) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i(\overrightarrow{e_n}) = 0$.

De ahí que $H \subseteq \ker(\overrightarrow{e_n}^*) = \{g \in V^* : g(\overrightarrow{e_n}) = 0\}$,

Proposición

Sea $\mathcal{L}(V) = \{\langle \overrightarrow{u} \rangle : \overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}\}$ el conjunto de rectas vectoriales V. Sea $\mathcal{H}(V^*)$ el conjunto de hiperplanos de V^*. La siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned} d_V : \mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathcal{H}(V^*) \\ \langle \overrightarrow{u} \rangle &\longrightarrow \ker(\overrightarrow{u}^*) \end{aligned}$$

Demostración (Sobreyectividad)

Sea $H \in \mathcal{H}(V^*)$ y $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ una base de V^* tal que $B' = \{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ es base de H. Sea $B = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ la base dual de B^*. Veamos que $d_V(\langle \overrightarrow{e_n} \rangle) = H$.

Para todo $g \in H$ con $g = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$ tenemos $\overrightarrow{e_n}^*(g) = g(\overrightarrow{e_n}) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i(\overrightarrow{e_n}) = 0$.

De ahí que $H \subseteq \ker(\overrightarrow{e_n}^*) = \{g \in V^* : g(\overrightarrow{e_n}) = 0\}$, y como $\ker(\overrightarrow{e_n}^*)$ es un hiperplano de V^*,

$$\dim(H) = \dim(V^*) - 1 = \dim(\ker(\overrightarrow{e_n}^*)).$$

Por lo tanto, $H = \ker(\overrightarrow{e_n}^*) = d_V(\langle \overrightarrow{e_n} \rangle)$, y eso implica que d_V es exhaustiva. $\square$

Proposición

Sea $\mathcal{L}(V) = \{\langle \overrightarrow{u} \rangle : \overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}\}$ el conjunto de rectas vectoriales V. Sea $\mathcal{H}(V^*)$ el conjunto de hiperplanos de V^*. La siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned} d_V : \mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathcal{H}(V^*) \\ \langle \overrightarrow{u} \rangle &\longrightarrow \ker(\overrightarrow{u}^*) \end{aligned}$$

Demostración (Inyectividad)

Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tales que $d_V(\langle \overrightarrow{u} \rangle) = d_V(\langle \overrightarrow{v} \rangle)$. Veamos que $\langle \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{v} \rangle$.

Proposición

Sea $\mathcal{L}(V) = \{\langle \overrightarrow{u} \rangle : \overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}\}$ el conjunto de rectas vectoriales V. Sea $\mathcal{H}(V^*)$ el conjunto de hiperplanos de V^*. La siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned} d_V : \mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathcal{H}(V^*) \\ \langle \overrightarrow{u} \rangle &\longrightarrow \ker(\overrightarrow{u}^*) \end{aligned}$$

Demostración (Inyectividad)

Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tales que $d_V(\langle \overrightarrow{u} \rangle) = d_V(\langle \overrightarrow{v} \rangle)$. Veamos que $\langle \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{v} \rangle$. Sean B y B^* las bases de antes y vamos a asumir que $B' = \{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ es una base de $\ker(\overrightarrow{u}^*) = \ker(\overrightarrow{v}^*)$. Nótese que $f_j(\overrightarrow{u}) = 0$ para $j \neq n$, ya que $f_j \in \ker(\overrightarrow{u}^*)$ para $j < n$.

Proposición

Sea $\mathcal{L}(V) = \{\langle \overrightarrow{u} \rangle : \overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}\}$ el conjunto de rectas vectoriales V. Sea $\mathcal{H}(V^*)$ el conjunto de hiperplanos de V^*. La siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned} d_V : \mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathcal{H}(V^*) \\ \langle \overrightarrow{u} \rangle &\longrightarrow \ker(\overrightarrow{u}^*) \end{aligned}$$

Demostración (Inyectividad)

Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tales que $d_V(\langle \overrightarrow{u} \rangle) = d_V(\langle \overrightarrow{v} \rangle)$. Veamos que $\langle \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{v} \rangle$. Sean B y B^* las bases de antes y vamos a asumir que $B' = \{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ es una base de $\ker(\overrightarrow{u}^*) = \ker(\overrightarrow{v}^*)$. Nótese que $f_j(\overrightarrow{u}) = 0$ para $j \neq n$, ya que $f_j \in \ker(\overrightarrow{u}^*)$ para $j < n$.

Tomando $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e_i}$, obtenemos $0 = f_j(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_j(\overrightarrow{e_i}) = \lambda_j$ para todo $j \neq n$.

Proposición

Sea $\mathcal{L}(V) = \{\langle \overrightarrow{u} \rangle : \overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}\}$ el conjunto de rectas vectoriales V. Sea $\mathcal{H}(V^*)$ el conjunto de hiperplanos de V^*. La siguiente aplicación es biyectiva.

$$\begin{aligned} d_V : \mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathcal{H}(V^*) \\ \langle \overrightarrow{u} \rangle &\longrightarrow \ker(\overrightarrow{u}^*) \end{aligned}$$

Demostración (Inyectividad)

Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tales que $d_V(\langle \overrightarrow{u} \rangle) = d_V(\langle \overrightarrow{v} \rangle)$. Veamos que $\langle \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{v} \rangle$. Sean B y B^* las bases de antes y vamos a asumir que $B' = \{f_1, \dots, f_{n-1}\}$ es una base de $\ker(\overrightarrow{u}^*) = \ker(\overrightarrow{v}^*)$. Nótese que $f_j(\overrightarrow{u}) = 0$ para $j \neq n$, ya que $f_j \in \ker(\overrightarrow{u}^*)$ para $j < n$.

Tomando $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e_i}$, obtenemos $0 = f_j(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_j(\overrightarrow{e_i}) = \lambda_j$ para todo $j \neq n$. Tenemos $\overrightarrow{u} = \lambda_n \overrightarrow{e_n}$ con $\lambda_n \neq 0$ y por analogía $\overrightarrow{v} = \lambda'_n \overrightarrow{e_n}$ con $\lambda'_n \neq 0$. Por lo tanto, $\langle \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{v} \rangle$. $\square$

Dualidad en espacios proyectivos

Espacio proyectivo dual

El espacio proyectivo $P(V^*)$ se conoce como espacio proyectivo dual del espacio proyectivo $P(V)$.

Resumen

De los dos resultados previos podemos afirmar que lo siguiente.

- Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de puntos de $P(V)$ y el conjunto de hiperplanos proyectivos de $P(V^*)$.
- Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de hiperplanos proyectivos de $P(V)$ y el conjunto de puntos de $P(V^*)$.
- En particular, en la geometría proyectiva plana, cada punto corresponde a una recta dual y cada recta corresponde a un punto dual.

Resumen

De los dos resultados previos podemos afirmar que lo siguiente.

- Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de puntos de $P(V)$ y el conjunto de hiperplanos proyectivos de $P(V^*)$.
- Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de hiperplanos proyectivos de $P(V)$ y el conjunto de puntos de $P(V^*)$.
- En particular, en la geometría proyectiva plana, cada punto corresponde a una recta dual y cada recta corresponde a un punto dual.

Principio de dualidad

Para cualquier resultado proyectivo establecido mediante puntos e hiperplanos, se da un resultado simétrico en el que se intercambian los papeles de los hiperplanos y los puntos: los puntos se convierten en hiperplanos y los hiperplanos en puntos. Los puntos x_i, con $i \in I$, de un hiperplano H se convierten en los hiperplanos x_i, con $i \in I$, que pasan por el punto H.

Ejemplo

En el plano proyectivo, dos puntos distintos cualquiera definen una recta y, a su vez, dos rectas distintas definen un punto (el punto de intersección).

Ejemplo

En el plano proyectivo, dos puntos distintos cualquiera definen una recta y, a su vez, dos rectas distintas definen un punto (el punto de intersección).

La dualidad solo es universal en los espacios proyectivos. Por ejemplo, en el plano afín las rectas paralelas no se cortan.

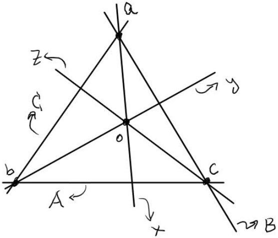
Ejemplo de figura dual

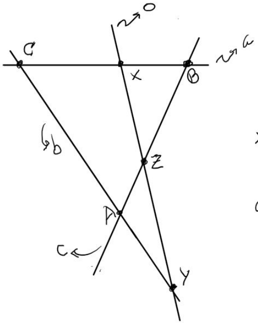
$A = bc$

$B = ac$

$C = ab$

$\{O\} = X \cap Y \cap Z$





$X, Y, Z \in O$

$a = BC$

$b = AC$

$c = AB$

La siguiente tabla muestra las relaciones de incidencia en el plano proyectivo π y el plano dual π^*.

a es un punto en π	a es una recta en π^*
l es una recta en π	l es un punto en π^*
$a \in l$	$l \in a$
Tres puntos colineales a, b, c	Tres rectas concurrentes a, b, c
Recta ab	Punto $a \cap b$

Definición (Haz de rectas concurrentes)

Un *haz de rectas concurrentes* en el plano es el conjunto de todas las rectas que pasan por un punto determinado.

Definición (Haz de rectas concurrentes)

Un *haz de rectas concurrentes* en el plano es el conjunto de todas las rectas que pasan por un punto determinado.

Proposición

En un plano proyectivo, dos puntos diferentes, determinan un único conjunto de puntos colineales.

Definición (Haz de rectas concurrentes)

Un *haz de rectas concurrentes* en el plano es el conjunto de todas las rectas que pasan por un punto determinado.

Proposición

En un plano proyectivo, dos puntos diferentes, determinan un único conjunto de puntos colineales.

Proposición dual

En un plano proyectivo, dos rectas diferentes determinan un único haz de rectas concurrentes.

Proposición

En un plano proyectivo, cada recta contiene al menos tres puntos.

Proposición

En un plano proyectivo, cada recta contiene al menos tres puntos.

Proposición dual

En un plano proyectivo, cada haz de rectas concurrentes tiene al menos tres rectas (en otras palabras, por cada punto pasan al menos tres rectas).

Proposición

Todo plano proyectivo contiene cuatro rectas tales que ningún punto pertenece a más de dos de ellas.

Proposición

Todo plano proyectivo contiene cuatro rectas tales que ningún punto pertenece a más de dos de ellas.

Proposición dual

Todo plano proyectivo contiene cuatro puntos tales que ninguna recta es incidente a más de dos de ellos.

Proposición

Todo plano proyectivo contiene cuatro rectas tales que ningún punto pertenece a más de dos de ellas.

Proposición dual

Todo plano proyectivo contiene cuatro puntos tales que ninguna recta es incidente a más de dos de ellos.

Demostración

Sea P un plano proyectivo, $a \in P$ un punto, y L_1, L_2, L_3 tres rectas del haz determinado por a.

Proposición

Todo plano proyectivo contiene cuatro rectas tales que ningún punto pertenece a más de dos de ellas.

Proposición dual

Todo plano proyectivo contiene cuatro puntos tales que ninguna recta es incidente a más de dos de ellos.

Demostración

Sea P un plano proyectivo, $a \in P$ un punto, y L_1, L_2, L_3 tres rectas del haz determinado por a. Sea $b \in L_1$ y $c \in L_2$ dos puntos diferentes de a.

Proposición

Todo plano proyectivo contiene cuatro rectas tales que ningún punto pertenece a más de dos de ellas.

Proposición dual

Todo plano proyectivo contiene cuatro puntos tales que ninguna recta es incidente a más de dos de ellos.

Demostración

Sea P un plano proyectivo, $a \in P$ un punto, y L_1, L_2, L_3 tres rectas del haz determinado por a. Sea $b \in L_1$ y $c \in L_2$ dos puntos diferentes de a. Como L_3 tiene al menos tres puntos, existe un punto $d \in L_3 \setminus \{a\}$ que no pertenece a la recta L_4 definida por b y c.

Proposición

Todo plano proyectivo contiene cuatro rectas tales que ningún punto pertenece a más de dos de ellas.

Proposición dual

Todo plano proyectivo contiene cuatro puntos tales que ninguna recta es incidente a más de dos de ellos.

Demostración

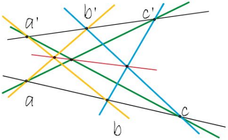
Sea P un plano proyectivo, $a \in P$ un punto, y L_1, L_2, L_3 tres rectas del haz determinado por a. Sea $b \in L_1$ y $c \in L_2$ dos puntos diferentes de a. Como L_3 tiene al menos tres puntos, existe un punto $d \in L_3 \setminus \{a\}$ que no pertenece a la recta L_4 definida por b y c. Por lo tanto,

$$|\{a,b,c,d\} \cap L_i| = 2, \text{ para todo } i \in \{1,\ldots,6\},$$

donde L_5 es la recta determinada por b y d, mientras L_6 es la recta determinada por c y d. Por lo tanto, el resultado se cumple. $\square$.

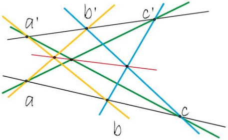
Teorema de Papus en geometría proyectiva

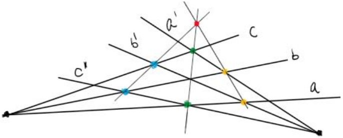
Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas diferentes en un plano proyectivo. Dados 6 puntos $a,b,c \in \mathcal{L}_1$ y $a',b',c' \in \mathcal{L}_2$, los puntos x,y,z de intersección de las rectas $\mathcal{L}_{bc'}$ y $\mathcal{L}_{cb'}$, $\mathcal{L}_{ac'}$ y $\mathcal{L}_{ca'}$, y $\mathcal{L}_{ab'}$ y $\mathcal{L}_{ba'}$, respectivamente, son colineales.



Teorema de Papus en geometría proyectiva

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas diferentes en un plano proyectivo. Dados 6 puntos $a,b,c \in \mathcal{L}_1$ y $a',b',c' \in \mathcal{L}_2$, los puntos x,y,z de intersección de las rectas $\mathcal{L}_{bc'}$ y $\mathcal{L}_{cb'}$, $\mathcal{L}_{ac'}$ y $\mathcal{L}_{ca'}$, y $\mathcal{L}_{ab'}$ y $\mathcal{L}_{ba'}$, respectivamente, son colineales.





Teorema de Papus (dual)

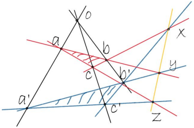
Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos puntos diferentes. Si tres rectas a,b,c son concurrentes en $\mathcal{L}_1$, y tres rectas a',b',c' son concurrentes en $\mathcal{L}_2$, entonces las rectas que unen los puntos $a \cap b'$ y $b \cap a'$, $a \cap c'$ y $c \cap a'$, y $c \cap b'$ y $b \cap c'$, son concurrentes.

Teorema de Desargues en geometría proyectiva

Sean a, b, c y a', b', c' dos triángulos en un plano proyectivo cuyos lados son $\alpha = bc, \beta = ac, \gamma = ab$ y $\alpha' = b'c', \beta' = a'c', \gamma' = a'b'$. Entonces son equivalentes.

(1) Los puntos $x = \alpha \cap \alpha', y = \beta \cap \beta'$ y $z = \gamma \cap \gamma'$ son colineales.

(2) Las rectas $\mathcal{L}_{aa'}$, $\mathcal{L}_{bb'}$ y $\mathcal{L}_{cc'}$ son concurrentes.

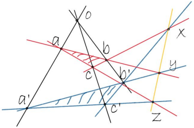


Teorema de Desargues en geometría proyectiva

Sean a,b,c y a',b',c' dos triángulos en un plano proyectivo cuyos lados son $\alpha = bc, \beta = ac, \gamma = ab$ y $\alpha' = b'c', \beta' = a'c', \gamma' = a'b'$. Entonces son equivalentes.

(1) Los puntos $x = \alpha \cap \alpha', y = \beta \cap \beta'$ y $z = \gamma \cap \gamma'$ son colineales.

(2) Las rectas $\mathcal{L}_{aa'}$, $\mathcal{L}_{bb'}$ y $\mathcal{L}_{cc'}$ son concurrentes.



Teorema de Desargues (dual)

Sean α,β,γ y α',β',γ' dos triángulos de un plano proyectivo cuyos lados son $a = \beta\gamma$, $b = \alpha\gamma$, $c = \alpha\beta$, y $a' = \beta'\gamma'$, $b' = \alpha'\gamma'$, $c' = \alpha'\beta'$. Entonces son equivalentes.

(1') Las rectas $x = \mathcal{L}_{\alpha\alpha'}$, $y = \mathcal{L}_{\gamma\gamma'}$ y $z = \mathcal{L}_{\beta\beta'}$ son concurrentes.

(2') Los puntos $a \cap a'$, $b \cap b'$ y $c \cap c'$ son colineales.

Proposición

Si existe una recta en un plano proyectivo con exactamente $n+1$ puntos, entonces cada recta tiene exactamente $n+1$ puntos y por cada punto pasan exactamente $n+1$ rectas.

Proposición

Si existe una recta en un plano proyectivo con exactamente $n+1$ puntos, entonces cada recta tiene exactamente $n+1$ puntos y por cada punto pasan exactamente $n+1$ rectas.

Demostración

Sea $\mathbb{L}$ una recta de un plano proyectivo, sea $x \notin \mathbb{L}$ un punto, y $a_0, \ldots, a_n$ los puntos de $\mathbb{L}$. Como todas las rectas se cortan, toda recta que pase por x corta $\mathbb{L}$.

Proposición

Si existe una recta en un plano proyectivo con exactamente $n+1$ puntos, entonces cada recta tiene exactamente $n+1$ puntos y por cada punto pasan exactamente $n+1$ rectas.

Demostración

Sea $\mathbb{L}$ una recta de un plano proyectivo, sea $x \notin \mathbb{L}$ un punto, y $a_0, \ldots, a_n$ los puntos de $\mathbb{L}$. Como todas las rectas se cortan, toda recta que pase por x corta $\mathbb{L}$.

- Cada recta $\mathbb{L}_{xa_i}$ es diferente de $\mathbb{L}$. Así, por x pasan exactamente $n+1$ rectas.

Proposición

Si existe una recta en un plano proyectivo con exactamente $n+1$ puntos, entonces cada recta tiene exactamente $n+1$ puntos y por cada punto pasan exactamente $n+1$ rectas.

Demostración

Sea $\mathbb{L}$ una recta de un plano proyectivo, sea $x \notin \mathbb{L}$ un punto, y $a_0, \ldots, a_n$ los puntos de $\mathbb{L}$. Como todas las rectas se cortan, toda recta que pase por x corta $\mathbb{L}$.

- Cada recta $\mathbb{L}_{xa_i}$ es diferente de $\mathbb{L}$. Así, por x pasan exactamente $n+1$ rectas.
- Veamos que por cada a_i también pasan $n+1$ rectas, con $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Proposición

Si existe una recta en un plano proyectivo con exactamente $n+1$ puntos, entonces cada recta tiene exactamente $n+1$ puntos y por cada punto pasan exactamente $n+1$ rectas.

Demostración

Sea $\mathbb{L}$ una recta de un plano proyectivo, sea $x \notin \mathbb{L}$ un punto, y $a_0, \ldots, a_n$ los puntos de $\mathbb{L}$. Como todas las rectas se cortan, toda recta que pase por x corta $\mathbb{L}$.

- Cada recta $\mathbb{L}_{xa_i}$ es diferente de $\mathbb{L}$. Así, por x pasan exactamente $n+1$ rectas.
- Veamos que por cada a_i también pasan $n+1$ rectas, con $i \in \{0, \ldots, n\}$.
- Como cada recta tiene al menos 3 puntos, existe un punto $y \in \mathbb{L}_{xa_i} \setminus \{x, a_i\}$.

Proposición

Si existe una recta en un plano proyectivo con exactamente $n+1$ puntos, entonces cada recta tiene exactamente $n+1$ puntos y por cada punto pasan exactamente $n+1$ rectas.

Demostración

Sea $\mathbb{L}$ una recta de un plano proyectivo, sea $x \notin \mathbb{L}$ un punto, y $a_0, \ldots, a_n$ los puntos de $\mathbb{L}$. Como todas las rectas se cortan, toda recta que pase por x corta $\mathbb{L}$.

- Cada recta $\mathbb{L}_{xa_i}$ es diferente de $\mathbb{L}$. Así, por x pasan exactamente $n+1$ rectas.
- Veamos que por cada a_i también pasan $n+1$ rectas, con $i \in \{0, \ldots, n\}$.
- Como cada recta tiene al menos 3 puntos, existe un punto $y \in \mathbb{L}_{xa_i} \setminus \{x, a_i\}$.
- Sea $j \neq i$. Como $\mathbb{L}_{ya_j}$ no pertenece al haz de rectas de x, esta corta las $n+1$ rectas del haz, lo que implica que $\mathbb{L}_{ya_j}$ contiene exactamente $n+1$ puntos, ya que un punto más en $\mathbb{L}_{ya_j}$ significaría una recta más en el haz de x. Así, los $n+1$ puntos de $\mathbb{L}_{ya_j}$ determinan las $n+1$ rectas que pasan por a_i.

Proposición

Si existe una recta en un plano proyectivo con exactamente $n+1$ puntos, entonces cada recta tiene exactamente $n+1$ puntos y por cada punto pasan exactamente $n+1$ rectas.

Demostración

Sea $\mathbb{L}$ una recta de un plano proyectivo, sea $x \notin \mathbb{L}$ un punto, y $a_0, \ldots, a_n$ los puntos de $\mathbb{L}$. Como todas las rectas se cortan, toda recta que pase por x corta $\mathbb{L}$.

- Cada recta $\mathbb{L}_{xa_i}$ es diferente de $\mathbb{L}$. Así, por x pasan exactamente $n+1$ rectas.
- Veamos que por cada a_i también pasan $n+1$ rectas, con $i \in \{0, \ldots, n\}$.
- Como cada recta tiene al menos 3 puntos, existe un punto $y \in \mathbb{L}_{xa_i} \setminus \{x, a_i\}$.
- Sea $j \neq i$. Como $\mathbb{L}_{ya_j}$ no pertenece al haz de rectas de x, esta corta las $n+1$ rectas del haz, lo que implica que $\mathbb{L}_{ya_j}$ contiene exactamente $n+1$ puntos, ya que un punto más en $\mathbb{L}_{ya_j}$ significaría una recta más en el haz de x. Así, los $n+1$ puntos de $\mathbb{L}_{ya_j}$ determinan las $n+1$ rectas que pasan por a_i.
- Resumiendo, por cada punto pasan $n+1$ rectas y, por dualidad, cada recta contiene $n+1$ puntos. □

Definición

Un plano proyectivo tiene *orden* n si cada recta tiene $n+1$ puntos.

Definición

Un plano proyectivo tiene *orden* n si cada recta tiene $n+1$ puntos.

Proposición

Todo plano proyectivo de orden n tiene n^2+n+1 puntos y n^2+n+1 rectas.

Definición

Un plano proyectivo tiene *orden* n si cada recta tiene $n+1$ puntos.

Proposición

Todo plano proyectivo de orden n tiene n^2+n+1 puntos y n^2+n+1 rectas.

Demostración

Consideremos una recta $\mathbb{L}$ y los puntos $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{L}$.

Definición

Un plano proyectivo tiene *orden* n si cada recta tiene $n+1$ puntos.

Proposición

Todo plano proyectivo de orden n tiene n^2+n+1 puntos y n^2+n+1 rectas.

Demostración

Consideremos una recta $\mathbb{L}$ y los puntos $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{L}$.

- A través de cada punto a_i pasan n rectas distintas de $\mathbb{L}$.

Definición

Un plano proyectivo tiene *orden* n si cada recta tiene $n+1$ puntos.

Proposición

Todo plano proyectivo de orden n tiene n^2+n+1 puntos y n^2+n+1 rectas.

Demostración

Consideremos una recta $\mathbb{L}$ y los puntos $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{L}$.

- A través de cada punto a_i pasan n rectas distintas de $\mathbb{L}$.
- Si $\mathbb{L}_i$ es una recta que pasa por a_i y $\mathbb{L}_j$ es una que pasa por a_j, entonces $\mathbb{L}_i \neq \mathbb{L}_j$, ya que la única recta que pasa por a_i y a_j es $\mathbb{L}$.

Definición

Un plano proyectivo tiene *orden* n si cada recta tiene $n+1$ puntos.

Proposición

Todo plano proyectivo de orden n tiene n^2+n+1 puntos y n^2+n+1 rectas.

Demostración

Consideremos una recta $\mathbb{L}$ y los puntos $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{L}$.

- A través de cada punto a_i pasan n rectas distintas de $\mathbb{L}$.
- Si $\mathbb{L}_i$ es una recta que pasa por a_i y $\mathbb{L}_j$ es una que pasa por a_j, entonces $\mathbb{L}_i \neq \mathbb{L}_j$, ya que la única recta que pasa por a_i y a_j es $\mathbb{L}$.
- Como cualquier recta del plano corta a $\mathbb{L}$, hay $n(n+1)$ rectas distintas de $\mathbb{L}$.

Definición

Un plano proyectivo tiene *orden* n si cada recta tiene $n+1$ puntos.

Proposición

Todo plano proyectivo de orden n tiene n^2+n+1 puntos y n^2+n+1 rectas.

Demostración

Consideremos una recta $\mathbb{L}$ y los puntos $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{L}$.

- A través de cada punto a_i pasan n rectas distintas de $\mathbb{L}$.
- Si $\mathbb{L}_i$ es una recta que pasa por a_i y $\mathbb{L}_j$ es una que pasa por a_j, entonces $\mathbb{L}_i \neq \mathbb{L}_j$, ya que la única recta que pasa por a_i y a_j es $\mathbb{L}$.
- Como cualquier recta del plano corta a $\mathbb{L}$, hay $n(n+1)$ rectas distintas de $\mathbb{L}$.
- En total hay $n(n+1)+1 = n^2+n+1$ rectas en el plano.

Definición

Un plano proyectivo tiene *orden* n si cada recta tiene $n+1$ puntos.

Proposición

Todo plano proyectivo de orden n tiene n^2+n+1 puntos y n^2+n+1 rectas.

Demostración

Consideremos una recta $\mathbb{L}$ y los puntos $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{L}$.

- A través de cada punto a_i pasan n rectas distintas de $\mathbb{L}$.
- Si $\mathbb{L}_i$ es una recta que pasa por a_i y $\mathbb{L}_j$ es una que pasa por a_j, entonces $\mathbb{L}_i \neq \mathbb{L}_j$, ya que la única recta que pasa por a_i y a_j es $\mathbb{L}$.
- Como cualquier recta del plano corta a $\mathbb{L}$, hay $n(n+1)$ rectas distintas de $\mathbb{L}$.
- En total hay $n(n+1)+1 = n^2+n+1$ rectas en el plano.

Por dualidad tenemos que hay n^2+n+1 puntos. $\square$

Corolario

Si $\mathcal{P}$ es un plano afín donde una recta tiene n puntos, entonces $\mathcal{P}$ tiene n^2+n rectas y n^2 puntos.

Corolario

Si $\mathcal{P}$ es un plano afín donde una recta tiene n puntos, entonces $\mathcal{P}$ tiene n^2+n rectas y n^2 puntos.

Demostración

- La extensión de $\mathcal{P}$ como plano proyectivo puede verse como $\mathbb{P} = \mathcal{P} \cup P(\mathcal{P})$, donde la recta proyectiva $P(\mathcal{P})$ juega el papel de la recta del infinito.

Corolario

Si $\mathcal{P}$ es un plano afín donde una recta tiene n puntos, entonces $\mathcal{P}$ tiene n^2+n rectas y n^2 puntos.

Demostración

- La extensión de $\mathcal{P}$ como plano proyectivo puede verse como $\mathbb{P} = \mathcal{P} \cup P(\mathcal{P})$, donde la recta proyectiva $P(\mathcal{P})$ juega el papel de la recta del infinito.
- Análogamente, la extensión de una recta afín $\mathcal{L}$ como recta proyectiva puede verse como $\mathbb{L} = \mathcal{L} \cup P(\mathcal{L})$, donde $P(\mathcal{L})$ juega el papel de punto del infinito.

Corolario

Si $\mathcal{P}$ es un plano afín donde una recta tiene n puntos, entonces $\mathcal{P}$ tiene n^2+n rectas y n^2 puntos.

Demostración

- La extensión de $\mathcal{P}$ como plano proyectivo puede verse como $\mathbb{P} = \mathcal{P} \cup P(\mathcal{P})$, donde la recta proyectiva $P(\mathcal{P})$ juega el papel de la recta del infinito.
- Análogamente, la extensión de una recta afín $\mathcal{L}$ como recta proyectiva puede verse como $\mathbb{L} = \mathcal{L} \cup P(\mathcal{L})$, donde $P(\mathcal{L})$ juega el papel de punto del infinito.
- Ahora bien, si $\mathcal{L}$ contiene n puntos, entonces $\mathbb{L}$ contiene $n+1$ puntos.

Corolario

Si $\mathcal{P}$ es un plano afín donde una recta tiene n puntos, entonces $\mathcal{P}$ tiene n^2+n rectas y n^2 puntos.

Demostración

- La extensión de $\mathcal{P}$ como plano proyectivo puede verse como $\mathbb{P}=\mathcal{P}\cup P(\mathcal{P})$, donde la recta proyectiva $P(\mathcal{P})$ juega el papel de la recta del infinito.
- Análogamente, la extensión de una recta afín $\mathcal{L}$ como recta proyectiva puede verse como $\mathbb{L}=\mathcal{L}\cup P(\mathcal{L})$, donde $P(\mathcal{L})$ juega el papel de punto del infinito.
- Ahora bien, si $\mathcal{L}$ contiene n puntos, entonces $\mathbb{L}$ contiene $n+1$ puntos.
- Así, toda recta en $\mathbb{P}$ contiene $n+1$ puntos, de ahí que $\mathbb{P}$ tiene orden n.

Corolario

Si $\mathcal{P}$ es un plano afín donde una recta tiene n puntos, entonces $\mathcal{P}$ tiene n^2+n rectas y n^2 puntos.

Demostración

- La extensión de $\mathcal{P}$ como plano proyectivo puede verse como $\mathbb{P}=\mathcal{P}\cup P(\mathcal{P})$, donde la recta proyectiva $P(\mathcal{P})$ juega el papel de la recta del infinito.
- Análogamente, la extensión de una recta afín $\mathcal{L}$ como recta proyectiva puede verse como $\mathbb{L}=\mathcal{L}\cup P(\mathcal{L})$, donde $P(\mathcal{L})$ juega el papel de punto del infinito.
- Ahora bien, si $\mathcal{L}$ contiene n puntos, entonces $\mathbb{L}$ contiene $n+1$ puntos.
- Así, toda recta en $\mathbb{P}$ contiene $n+1$ puntos, de ahí que $\mathbb{P}$ tiene orden n.
- Por lo tanto, $\mathbb{P}$ tiene n^2+n+1 rectas, mientras $\mathcal{P}$ tiene n^2+n.

Corolario

Si $\mathcal{P}$ es un plano afín donde una recta tiene n puntos, entonces $\mathcal{P}$ tiene n^2+n rectas y n^2 puntos.

Demostración

- La extensión de $\mathcal{P}$ como plano proyectivo puede verse como $\mathbb{P} = \mathcal{P} \cup P(\mathcal{P})$, donde la recta proyectiva $P(\mathcal{P})$ juega el papel de la recta del infinito.
- Análogamente, la extensión de una recta afín $\mathcal{L}$ como recta proyectiva puede verse como $\mathbb{L} = \mathcal{L} \cup P(\mathcal{L})$, donde $P(\mathcal{L})$ juega el papel de punto del infinito.
- Ahora bien, si $\mathcal{L}$ contiene n puntos, entonces $\mathbb{L}$ contiene $n+1$ puntos.
- Así, toda recta en $\mathbb{P}$ contiene $n+1$ puntos, de ahí que $\mathbb{P}$ tiene orden n.
- Por lo tanto, $\mathbb{P}$ tiene n^2+n+1 rectas, mientras $\mathcal{P}$ tiene n^2+n.
- Así mismo, $\mathbb{P}$ tiene n^2+n+1 puntos, mientras $\mathcal{P}$ tiene $(n^2+n+1)-(n+1) = n^2$. $\square$