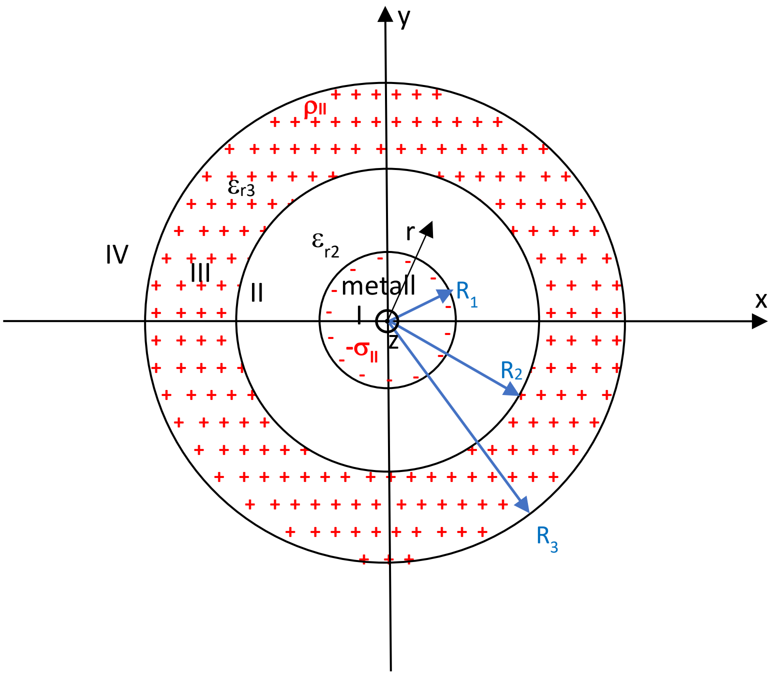
Problema de distribució amb simetria esfèrica amb dielèctrics.



Considerem un sistema amb simetria esfèrica, el qual el veiem en secció diametral a la figura de l'esquerra (és a dir, la mateixa distribució la trobarem en totes les direccions de l'espai a partir del punt del centre (0).

La primera capa ($0 \le r \le R_1$) o regió I, està formada per un material conductor en forma de metall i te una densitat de càrrega superficial negativa $-\sigma_{ll}$ sota de la seva superfície.

La segona capa ($R_1 \le r \le R_2$) o regió II, està formada per un material dielèctric de permitivitat relativa ε_{r2} sense càrrega lliure volúmica.

La tercera capa ($R_2 \le r \le R_3$) o regió III, està formada per un material dielèctric de permitivitat relativa ε_{r3}. Està ple de càrrega lliure volúmica positiva homogèniament distribuïda per tot el volum: ρ_{ll}

La resta externa ($R_3 \le r < \infty$) o regió IV, està formada per buit o aire.

L'objectiu és calcular el camp a qualsevol punt $\vec{r} = (x, y, z)$ al voltant del centre de simetria.

Resoldrem aquest problema usant 2 grans mètodes:

Mètode 2. Usant **el teorema de gauss** en **versió integral.**

Aquest mètode ja sabem que és més fàcil (no maneja equacions diferencials) per tant el posarem primer.

Usant **el teorema de gauss** en **versió integral**:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{int,\ total} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q_{int,\ P} + Q_{int,\ ll}\right)$$

Que per a $\vec{D}$ s'escriu, només amb la càrrega lliure i sense la ε_0:

$$\phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{int,\ ll}$$

Llavors fent el mateix que en els problemes de teorema de Gauss del full 2, és a dir plantejant superfícies de gauss tancades en forma de superfícies esfèriques concèntriques, de radi r que van passant per totes les regions. Calculant llavors el flux, ϕ, a través d'aquestes superfícies amb la fórmula vàlida per a simetria esfèrica:

$$\phi_{esf} = 4\pi r^2 \cdot D(r)$$

I igualant-lo llavors a la càrrega total lliure interna, $Q_{int,ll}$, de cada sup. esfèrica obtindrem les expressions del mòdul de D a les diferents regions. Fem-ho!

- Regió I:

$$4\pi r^2 \cdot D^I(r) = 0$$

Ja que la càrrega interna d'una superfície esfèrica situada completament dins d'un conductor és zero. Per tant:

$$D^I(r) = 0$$

- Regió II:

$$4\pi r^2 \cdot D^{II}(r) = -\sigma_{ll} 4\pi {R_1}^2$$

Ja que una esfera dins de la regió II conté a dins només la càrrega total lliure de la superfície del conductor de la regió I, que és igual a la densitat superficial, $-\sigma_{ll}$, multiplicat per la superfície del conductor: $4\pi {R_1}^2$. Per tant aïllant el camp:

$$D^{II}(r) = -\sigma_{ll} \frac{{R_1}^2}{r^2}$$

Com es pot veure per a r=R_1 ambdues expressions no donen el mateix:

$$D^I(R_1^-) = 0 \quad mentre\ que\ D^{II}(R_1^+) = -\sigma_{ll} \frac{{R_1}^2}{{R_1}^2} = -\sigma_{ll}$$

per tant D és discontínua a aquesta interfície, això és lògic ja que hi ha $-\sigma_{ll}$

discontinuïtat que està d'acord també amb l'expressió a la interfície: $\hat{n} \cdot \left(\vec{D}^+ - \vec{D}^-\right) = -\sigma_{ll}$

- Regió III:

$$4\pi r^2 \cdot D^{III}(r) = Q_{int} = -\sigma_{ll} 4\pi {R_1}^2 + \rho_{ll} \frac{4}{3}\pi(r^3 - {R_2}^3)$$

Ja que una esfera dins de la regió III conté a dins només la càrrega total lliure de la superfície del conductor de la regió I (com abans) + la part de càrrega lliure de densitat volúmica ρ_{ll} de la corona esfèrica situada entre r i R_2 , que és igual a la ρ_{ll}, multiplicat pel volum d'aquesta corona: $\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - {R_2}^3\right)$. Per tant aïllant el camp:

$$D^{III}(r) = \frac{-\sigma_{ll}{R_1}^2}{r^2} + \frac{\rho_{ll}}{3}\frac{\left(r^3 - {R_2}^3\right)}{r^2} = \frac{-\sigma_{ll}{R_1}^2}{r^2} + \frac{\rho_{ll}}{3}\frac{r^3}{r^2} - \frac{\rho_{ll}}{3}\frac{{R_2}^3}{r^2} = \left(-\sigma_{ll}{R_1}^2 - \frac{\rho_{ll}{R_2}^3}{3}\right)\frac{1}{r^2} + \frac{\rho_{ll}}{3} r$$

Estudiem la continuïtat a r=R_2:

$$D^{II}({R_2}^-) = -\sigma_{ll} \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2}$$

$$D^{III}(R_2^{\ +}) = \left(-\sigma_{ll}R_1^{\ 2} - \frac{\rho_{ll}R_2^{\ 3}}{3}\right)\frac{1}{R_2^{\ 2}} + \rho_{ll}\frac{1}{3}R_2 = -\sigma_{ll}\frac{R_1^{\ 2}}{R_2^{\ 2}}$$

Com les dues donen el mateix és continu en aquesta superfície: completament d'acord amb el fet que no hi ha cap densitat superficial lliure a la interfície, o bé d'acord també amb: $\hat{\mathrm{n}} \cdot (\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}) = 0$

• Regió IV:

$$4\pi r^2 \cdot D^{IV}(r) = Q_{int} = \rho_{ll}\frac{4}{3}\pi(R_2^{\ 3} - R_1^{\ 3}) - \sigma_{ll}4\pi R_1^{\ 2}$$

Ja que una esfera dins de la regió IV conté a dins la càrrega total lliure de la superfície del conductor I (com abans) + la part de càrrega lliure de densitat volúmica ρ_{ll} de la corona esfèrica sencera situada entre R_3 i R_2 , que és igual a la ρ_{ll}, multiplicat pel volum d'aquesta corona: $\frac{4}{3}\pi(R_3^{\ 3} - R_2^{\ 3})$. Per tant aïllant el camp:

Per tant:

$$D^{IV}(r) = \left(\frac{\rho_{ll}}{3}(R_3^{\ 3} - R_2^{\ 3}) - \sigma_{ll}R_1^{\ 2}\right)\frac{1}{r^2}$$

Estudiem la continuïtat a $r=R_3$:

$$D^{III}(R_3^{\ -}) = \left(-\sigma_{ll}R_1^{\ 2} - \frac{\rho_{ll}R_2^{\ 3}}{3}\right)\frac{1}{R_3^{\ 2}} + \frac{\rho_{ll}}{3}R_3$$

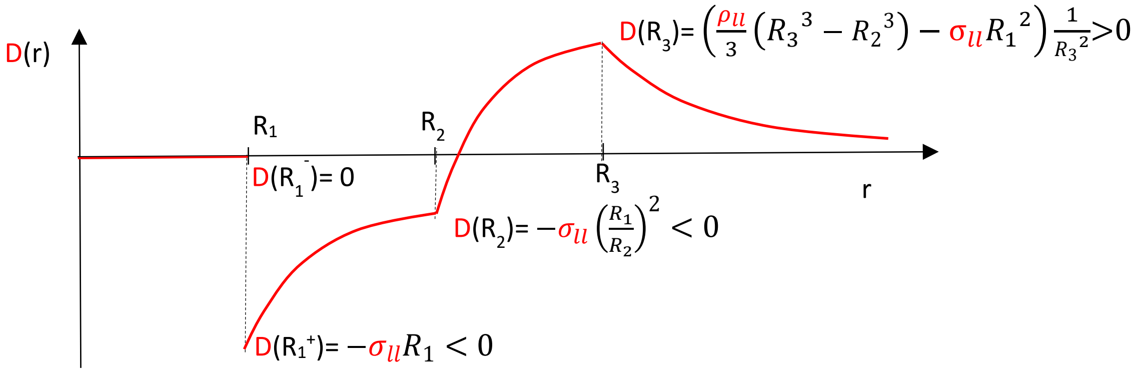
$$D^{IV}(R_3^{\ +}) = \left(\frac{\rho_{ll}}{3}(R_3^{\ 3} - R_2^{\ 3}) - \sigma_{ll}R_1^{\ 2}\right)\frac{1}{R_3^{\ 2}}$$

Com es pot veure terme a terme, les dues donen el mateix, per tant és continu en aquesta superfície: completament d'acord amb el fet que no hi ha cap densitat superficial lliure a la interfície, o bé d'acord també amb: $\hat{\mathrm{n}} \cdot (\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}) = 0$

En resum:

$$\mathrm{D(r)} = \begin{cases} 0 & ,regió\ I \\ -\sigma_{ll}\dfrac{R_1^{\ 2}}{r^2} & ,regió\ II \\ \left(-\sigma_{ll}R_1^{\ 2} - \dfrac{\rho_{ll}R_2^{\ 3}}{3}\right)\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{\rho_{ll}}{3}r & ,regió\ III \\ \left(\dfrac{\rho_{ll}}{3}(R_3^{\ 3} - R_2^{\ 3}) - \sigma_{ll}R_1^{\ 2}\right)\dfrac{1}{r^2} & ,regió\ IV \end{cases}$$

Gràfica suposant que $\left(\frac{\rho_{ll}}{3}\left({R_3}^3 - {R_2}^3\right) - \sigma_{ll}{R_1}^2\right) > 0$:



Els altres camps:

Pel que fa al camp $\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})$ hem de tenir en compte que s'obté a partir del $\vec{\mathrm{D}}$ per mitjà de la relació amb les permitivitats dels dielèctrics: $\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}) = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}})$. Així:

$$\mathrm{E}(\mathrm{r}) = \begin{cases} 0 & ,regió\ I \\ -\dfrac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\sigma_{ll}\dfrac{{R_1}^2}{r^2} & ,regió\ II \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r3}}\left[\left(-\sigma_{ll}{R_1}^2 - \dfrac{\rho_{ll}{R_2}^3}{3}\right)\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{\rho_{ll}}{3}r\right] & ,regió\ III \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{\rho_{ll}}{3}\left({R_3}^3 - {R_2}^3\right) - \sigma_{ll}{R_1}^2\right)\dfrac{1}{r^2} & ,regió\ IV \end{cases}$$

Pel que fa al camp $\vec{\mathrm{P}}$ hem de tenir en compte que s'obté a partir del $\vec{\mathrm{E}}$ per mitjà de la relació amb la susceptibilitat dels dielèctrics: $\vec{\mathrm{P}}(\vec{\mathrm{r}}) = \varepsilon_0\chi\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}) = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}})$. Així:

$$
\mathrm{P}(\mathrm{r}) = \begin{cases} 0 & ,regió\ I \\ -\dfrac{\varepsilon_{r2}-1}{\varepsilon_{r2}}\sigma_{ll}\dfrac{{R_1}^2}{r^2} & ,regió\ II \\ \dfrac{\varepsilon_{r3}-1}{\varepsilon_{r3}}\left[\left(-\sigma_{ll}{R_1}^2-\dfrac{\rho_{ll}{R_2}^3}{3}\right)\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{\rho_{ll}}{3}r\right] & ,regió\ III \\ (1-1)\left(\dfrac{\rho_{ll}}{3}\left({R_3}^3-{R_2}^3\right)-\sigma_{ll}{R_1}^2\right)\dfrac{1}{r^2}=0 & ,regió\ IV \end{cases}
$$

Com és obvi a les regions I i IV és nul, ja que no hi pot haver polarització a les regions on no hi ha dielèctric.

NOTA 1: a causa de la diferència de permitivitats relatives entre dos regions adjacents, tant els camps $\vec{\mathrm{E}}$ i $\vec{\mathrm{P}}$ són discontinus fins i tot a les interfícies a les que $\vec{\mathrm{D}}$ era continu.

NOTA 2: La regió III és la única que te densitat volúmica de polarització, ja que $-\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{P}}(\vec{\mathrm{r}})$ hi és no nul. En efecte:

$$
\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{P}}(\vec{\mathrm{r}}) = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{r3}-1}{\varepsilon_{r3}}\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}})\right) = -\frac{\varepsilon_{r3}-1}{\varepsilon_{r3}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}}) = -\frac{\varepsilon_{r3}-1}{\varepsilon_{r3}}\rho_{ll}
$$

així ρ_P és proporcional, de signe contrari i de valor absolut menor a la ρ_{ll}

la polarització sempre introdueix càrregues noves que apantallen part de la càrrega lliure !!

Mètode 1. (opcional)

Es fa usant per a $\vec{\mathrm{D}}$ les equacions en **versió diferencial)**

1.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{D}} = \rho_{ll}$: Teorema de Gauss en versió diferencial en termes de $\vec{\mathrm{D}}$ i ρ_{ll}

1.b) $\hat{\mathrm{n}}\cdot\left(\vec{D}^{+}-\vec{D}^{-}\right) = \sigma_{ll}$: Discontinuïtat de la component normal de $\vec{D}$ igual a la σ_{ll}

Així aplicant 1.a) a les diferents regions del nostre problema, les equacions vàlides són:

$\vec{\mathrm{D}} = 0$ a la regió I ; $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{D}} = 0$ a la regió II ; $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{D}} = \rho_{ll}$ a la regió III ; $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{D}} = 0$ a la regió IV

Per altra banda sabem que per simetria esfèrica que les úniques solucions de $\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}})$ han de ser radials i el seu mòdul només pot dependre del radi r, és a dir:

$$
\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}}) = \mathrm{D}(\mathrm{r})\,\hat{\mathrm{r}} = \mathrm{D}(\mathrm{r})\,\frac{\vec{r}}{r}
$$

Essent $\vec{r} = (x, y, z)$ el vector en direcció cap enfora en cada punt, $\hat{\mathrm{r}} = \frac{\vec{r}}{r}$ el seu vector unitari i $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ el seu mòdul.

Calculem la divergència de $\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}})$ amb una $\vec{\mathrm{D}}$ d'aquesta forma

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}}) = \vec{\nabla}\cdot\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\ \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\ \frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\ \frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\ \frac{z}{r}\right)$$

Calculem primer:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\ \frac{x}{r}\right) = \frac{\partial\mathrm{D}(\mathrm{r})}{\partial x}\frac{x}{r} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{r}} + \mathrm{D}(\mathrm{r})x\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial x}\frac{x}{r} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\frac{1}{r} + \mathrm{D}(\mathrm{r})x\left(-\frac{1}{\mathrm{r}^2}\right)\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial x}$$

$$= \left|\begin{matrix} \textit{Però} \\ \dfrac{\partial \mathrm{r}}{\partial x} = \dfrac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{r} = \dfrac{x}{r}\end{matrix}\right| = \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr}\frac{x}{r}\frac{x}{r} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\frac{1}{r} - \mathrm{D}(\mathrm{r})\frac{x}{\mathrm{r}^2}\frac{x}{r}$$

$$= \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr}\frac{x^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{\mathrm{r}^3}\right)$$

Anàlogament:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\ \frac{y}{r}\right) = \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr}\frac{y^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{\mathrm{r}^3}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\ \frac{z}{r}\right) = \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr}\frac{y^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{\mathrm{r}^3}\right)$$

Sumant els tres obtenim la divergència:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{D}}(\vec{\mathrm{r}}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\ \frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\ \frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{D}(\mathrm{r})\ \frac{z}{r}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr}\frac{x^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{\mathrm{r}^3}\right) + \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr}\frac{y^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{\mathrm{r}^3}\right) + \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr}\frac{z^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{\mathrm{r}^3}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr}\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{\mathrm{r}^3}\right) = \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr}\frac{r^2}{r^2} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{3}{r} - \frac{r^2}{\mathrm{r}^3}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr} + \mathrm{D}(\mathrm{r})\left(\frac{3}{r} - \frac{1}{\mathrm{r}}\right) = \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr} + 2\frac{\mathrm{D}(\mathrm{r})}{r}$$

- En el cas de la regió II:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{dD}(\mathrm{r})}{dr} + 2\frac{\mathrm{D}(\mathrm{r})}{r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{D}} = -\frac{dr}{r} \quad \textit{integrant ambdós membres entre } R_1 \textit{ i } r \quad \int_{D(R_1^+)}^{D(r)}\frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{D}} = -2\int_{R_1}^{r}\frac{dr'}{r'}$$

On $D(R_1^+)$ és el valor de D a un punt immediatament per sobre de R_1 (ja dins la regió II); r està situat entre R_1 i R_2 (regió II). Fent les integrals que es resolen amb el logaritme neperià:

$$ln\frac{D(r)}{D(R_1^+)} = -2\cdot ln\frac{r}{R_1} = \ ln\left(\frac{R_1}{r}\right)^2$$

i traient els logaritmes (o sigui, fent l'exponencial e$^{(\ )}$ a banda i banda)

$$\frac{D(r)}{D(R_1^+)} = \frac{{R_1}^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad D^{II}(r) = \frac{{R_1}^2 \cdot D(R_1^+)}{r^2} = \frac{\boldsymbol{A}}{r^2}$$

essent $\boldsymbol{A} = {R_1}^2 \cdot D(R_1^+)$ una constant arbitrària que caldrà ajustar més endavant.

• En el cas de la regió III:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{dD(r)}}{dr} + 2\frac{\mathrm{D(r)}}{r} = \rho_{ll}$$

Ara és una equació inhomogènia, per tant la solució de l'equació diferencial es fa fent la suma de l'equació general de l'homogènia $\frac{\mathrm{d}\mathrm{D}_h(\mathrm{r})}{dr} + 2\frac{\mathrm{D}_h(\mathrm{r})}{r} = 0$ + una solució particular de $\frac{\mathrm{d}\mathrm{D}_p(\mathrm{r})}{dr} + 2\frac{\mathrm{D}_p(\mathrm{r})}{r} = \rho_{ll}$ qualsevol

La solució general de l'homogènia és com la de la regió II: $D_h(r) = \frac{\boldsymbol{B}}{r^2}$ i una solució particular qualsevol podria ser: $D_p(r) = \frac{\rho_{ll}}{3} r$ com es pot veure per simple substitució.

Així, la solució general de l'equació diferencial a la regió III és:

$$D^{III}(r) = \frac{\boldsymbol{B}}{r^2} + \frac{\rho_{ll}}{3} r$$

Essent ***B*** una altra constant arbitrària

• En el cas de la regió IV:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{dD(r)}}{dr} + 2\frac{\mathrm{D(r)}}{r} = 0 \quad \Rightarrow$$

Torna a ser l'equació homogènia com a II, per tant la solució és del mateix tipus:

$$D^{IV}(r) = \frac{\boldsymbol{C}}{r^2}$$

Essent ***C*** una altra constant arbitrària

Resum:

$$
D(\mathrm{r}) = \begin{cases} 0 & ,\textit{regió I} \\ \dfrac{\boldsymbol{A}}{r^2} & ,\textit{regió II} \\ \dfrac{\boldsymbol{B}}{r^2} + \dfrac{\rho_{ll}}{3} r & ,\textit{regió III} \\ \dfrac{\boldsymbol{C}}{r^2} & ,\textit{regió IV} \end{cases}
$$

Per a trobar les tres constants arbitràries cal aplicar les condicions de continuïtat o discontinuïtat a les interfícies:

- $r=R_1$:

$$\hat{\mathrm{n}} \cdot \left(\vec{D}(R_1^+) - \vec{D}(R_1^-)\right) = -\sigma_{ll}$$

$$D(R_1^+) - D(R_1^-) = -\sigma_{ll}$$

$$\frac{\boldsymbol{A}}{{R_1}^2} - 0 = -\sigma_{ll}$$

$$\boldsymbol{A} = -\sigma_{ll}{R_1}^2$$

- $r=R_2$:

$$\hat{\mathrm{n}} \cdot \left(\vec{D}(R_2^+) - \vec{D}(R_2^-)\right) = 0$$

$$D(R_2^+) - D(R_2^-) = 0$$

$$\frac{\boldsymbol{B}}{{R_2}^2} + \frac{\rho_{ll}}{3} R_2 - \frac{\boldsymbol{A}}{{R_2}^2} = 0$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \frac{\rho_{ll}}{3}{R_2}^3 = -\sigma_{ll}{R_1}^2 - \frac{\rho_{ll}}{3}{R_2}^3$$

- $r=R_3$:

$$\hat{\mathrm{n}} \cdot \left(\vec{D}(R_3^+) - \vec{D}(R_3^-)\right) = 0$$

$$D(R_3^+) - D(R_3^-) = 0$$

$$\frac{\boldsymbol{C}}{{R_3}^2} - \frac{\boldsymbol{B}}{{R_3}^2} - \frac{\rho_{ll}}{3} R_3 = 0$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} + \frac{\rho_{ll}}{3}{R_3}^3 = -\sigma_{ll}{R_1}^2 - \frac{\rho_{ll}}{3}{R_2}^3 + \frac{\rho_{ll}}{3}{R_2}^3$$

Els resultats que surten coincideixen amb els del mètode 2 anterior. Per tant els dos mètodes són equivalents.