Exercicis

1. Calculeu, usant integral triple, el volum de l'el·lipsoide sòlid de semieixos a, b, c positius, que té per equació:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$$

2. Sigui una forma cilíndrica de formatge de base circular amb radi r > 0 i altura h > 0. Es talla un tros S, fent dos talls verticals des del centre de la forma cap a la vora, que formen angle α entre si. Calculeu el volum de S.

3. Al problema anterior, suposant que el radi r = 10 cm., l'alçada h = 8 cm., l'angle α = π/3 radians, i la densitat del formatge al punt (x, y, z) és;

$$[\delta(x,y,z)]_{\frac{kg}{cm^3}} = [0{,}9]_{\left[\frac{kg}{dm^3}\right]}\frac{1}{[180]_{cm^3}}\left[\sqrt{x^2+y^2}+(z^2-hz+h)\right]_{cm^3}$$

Calcular el pes de S.

4. Converteix a coordenades cilíndriques i avalua les següents integrals

a)

$$\iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dV$$

on S és el sòlid del primer octant limitat pel pla de coordenades $z = 0$, el plànol $z = 4$ i el cilindre $x^2 + y^2 = 25$

b)

$$\iiint_S (x^2+y^2)^{3/2}\,dV$$

on S és el sòlid limitat a dalt per $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, per sota pel pla XY, i lateralment pel cilindre $x^2 + y^2 = 4$

ESPECIAL:

5. Suposem que cauen meteorits uniformement distribuïts sobre tota la superfície de la Terra, sumant una mitjana anual de $2{,}2 \times 10^8$ kg, que els meteorits tenen la mateixa densitat que la Terra i que cauen en forma radial (formant un angle de 90 graus amb la superfície de la Terra). Calculeu:

   a) L'augment al radi de la Terra.
   b) El nou període de rotació que tindria la Terra després de 5 anys.
   c) El nou període de translació de la Terra després de 3 anys.

   Nota: Sabem que la densitat de la Terra, ρ, és 5520 kg/m3, el radi de la Terra, R_{Terra}, és, aproximadament, 6371 Km.

   Pista:

   La Terra està en creixement constant, a causa de la caiguda de meteorits, per la qual cosa el seu període de rotació varia. Per la manera com aquests meteorits arriben no existeix un canvi en el moment angular de la Terra, per la qual cosa es poden igualar el seu moment angular inicial i final (llei de conservació del moment angular), on el moment angular es relaciona amb el moment d'inèrcia i velocitat angular.

   Per calcular el moment d'inèrcia de la Terra usem l'equació del moment d'inèrcia en forma integral, on dm és igual a l'equació de densitat; després se substitueix i es genera una integral de volum. Per facilitar els càlculs, la Terra és considerada una esfera a la qual s'efectua un canvi de coordenades per tenir una integral triple.

   Substituïm el resultat del moment d'inèrcia en l'equació de la llei de conservació del moment angular, amb la qual cosa s'obté una equació de la qual es pot extreure el període de rotació final. Al final, es substitueixen els valors i es considera l'increment de radi de la Terra com a negligible.

Solutions

1.

El volumen de E es

$$\text{Vol.}(E) = \iiint_E dxdydz$$

Haciendo el cambio de variables:

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw$$

se obtiene:

$$(x, y, z) \in E \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

Por lo tanto (u, v, w) varían en la esfera $\tilde{E}$ de centro en el origen del sistema de coordenadas en el espacio (u, v, w) y radio 1.

El Jacobiano del cambio de variables es

$$J(u, v, w) = det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc > 0$$

Usando el teorema de cambio de variables:

$$\text{Vol.}(E) = \iiint_E dxdydz = \iiint_{\tilde{E}} |J(u, v, w)| \, dudvdw = abc \iiint_{\tilde{E}} |J(u, v, w)| \, dudvdw \quad (5)$$

Observamos que la integral de la derecha en (5) es el volumen del sólido $\tilde{E}$ en el espacio de coordenadas u, v, w. Pero este sólido $\tilde{E}$, vimos que es una esfera de radio 1. Entonces, por lo calculado en el ejemplo anterior, el volumen de $\tilde{E}$ es $4/3\pi$.

Se concluye:

$$\text{Vol.}(E) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot abc \quad \square$$

2.

$$\text{Vol. } S = \iiint_S dxdydz$$

Tomemos coordenadas cartesianas x, y, z con origen en el centro del círculo de radio r del plano de abajo del queso.

Pasando a coordenadas cilíndricas $x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad z = z$, se obtiene:

$$(x, y, z) \in S \quad \Leftrightarrow \quad (\rho, \varphi, z) \in E : \; 0 \leq \rho \leq r, \; 0 \leq \varphi \leq \alpha, \; 0 \leq z \leq h$$

Luego:

$$\text{Vol. } S = \iiint_S dxdydz = \iiint_E |J(\rho, \varphi, z)| \, d\rho d\varphi dz = \iiint_E \rho \, d\rho d\varphi dz =$$

$$\text{Vol. } S = \int_0^r d\rho \int_0^\alpha d\varphi \int_0^h \rho \, dz = \int_0^r d\rho \int_0^\alpha \rho h \, d\varphi = \int_0^r d\rho \int_0^\alpha h\alpha\rho \, d\rho = \frac{h\alpha r^2}{2}$$

3.

Si medimos x, y, z, r, h en centímetros, el volumen quedará en cm^3. Siendo $1dm^3 = 10^3 cm^3$, resulta que la densidad $f(x,y,z)$ es:

$$[f(x,y,z)]_{kg./cm^3.} = \left[\frac{0,9}{10^3}\right]_{kg/cm^3} \cdot \frac{1}{[180]_{cm^3}} \cdot [\sqrt{x^2+y^2} \cdot (z^2 - hz + h^2)]_{cm^3}$$

Y el peso de S, por la fórmula del párrafo 4.5.1, será (siempre que x, y, z, h, r se midan en cm.):

$$[\text{Peso}(S)]_{kg.} = \iiint_S \frac{5}{10^6} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot (z^2 - hz + h)\, dxdydz$$

Pasando a coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\varphi, \quad z = z$$

resulta:

$$(x,y,z) \in S \quad \Leftrightarrow \quad (\rho, \varphi, z) \in E: \; 0 \le \rho \le r, \;\; 0 \le \varphi \le \alpha, \;\; 0 \le z \le h$$

Por lo tanto:

$$[\text{Peso}(S)]_{kg.} = \iiint_S \frac{5}{10^6} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot (z^2 - hz + h^2)\, dxdydz =$$

$$= \iiint_E \frac{5}{10^6} \cdot \sqrt{\rho^2} \cdot (z^2 - hz + h^2)\; |J(\rho,\varphi,z)|\, d\rho d\varphi dz = \int_0^r d\rho \int_0^\alpha d\varphi \int_0^h \frac{5}{10^6} \cdot \sqrt{\rho^2} \cdot (z^2 - hz + h^2) \cdot \rho\, dz$$

Calculando la integral anterior empezando por la extrema derecha, se obtiene:

$$[\text{Peso}(S)]_{kg.} = \frac{5}{10^6} \int_0^r d\rho \int_0^\alpha \rho^2 \cdot \left(\frac{z^3}{3} - h\frac{z^2}{2} + h^2 z \right)\Bigg|_{z=0}^{z=h} d\varphi =$$

$$= \frac{5}{10^6} \int_0^r \rho^2 \cdot d\rho \int_0^\alpha \left(\frac{h^3}{3} - h\frac{h^2}{2} + h^3 \right) d\varphi = \frac{5}{10^6} \cdot \frac{5h^3}{6} \int_0^r \rho^2 \cdot d\rho \int_0^\alpha d\varphi =$$

$$[\text{Peso}(S)]_{kg.} = \frac{5}{10^6} \cdot \frac{5h^3}{6} \cdot \frac{r^3}{3} \cdot \alpha$$

Sustituyendo $\alpha = \pi/3$, $r = 10\, cm.$, $h = 8\, cm.$ se obtiene:

$$[\text{Peso}(S)]_{kg.} = \frac{5}{10^6} \cdot \frac{5 \times 8^3}{6} \cdot \frac{10^3}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = 0,746\; kg.$$

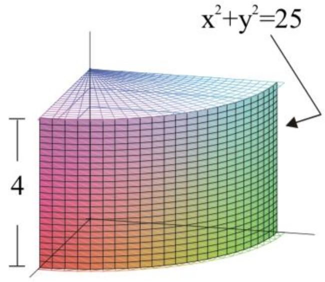
4.

(a)

$$\iiint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dV$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^5\int_0^4 r\cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\boxed{\frac{4}{3}(5)^3\,2\pi}$$



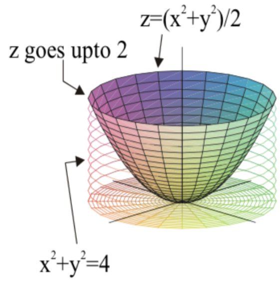
(b)

$$\iiint\limits_S \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}dV$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2/2} r^3\cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{r^6}{2}\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} \left.\frac{r^7}{14}\right]_0^2 d\theta = \boxed{\left(\frac{2^6}{7}\right)(2\pi)}$$



ESPECIAL:

Respuestas **a)** Se parte de la densidad volumétrica, $\rho = m/V$, pero como la masa y el volumen varia con el tiempo, debido al bombardeo de los meteoritos, por lo tanto tendremos:

$$\begin{aligned} \rho &= dm/dV \\ \rho dV &= dm \end{aligned}$$

Se integra ambos lados de la ecuación, además se considera a ρ como constante.

$$\begin{aligned} \int dm &= \int \rho dV \\ \int dm &= \rho \int dV \end{aligned}$$

Calcularemos la integral de volumen en **coordenas esféricas**.

$$\begin{aligned} \int_{M_{Tierra}}^{M_{Tierra}+m_{agregada}} dm &= \rho \int_{R_{Tierra}}^{R_{Tierra}+r_{inc}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr \\ (m)_{M_{Tierra}}^{M_{Tierra}+m_{agregada}} &= \rho \left(\int_{R_{Tierra}}^{R_{Tierra}+r_{inc}} r^2 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right) \\ M_{Tierra} + m_{agregada} - M_{Tierra} &= \rho \left(\frac{r^3}{3} \right)_{R_{Tierra}}^{R_{Tierra}+r_{inc}} (\phi)_0^{2\pi} (-\cos\theta)_0^{\pi} \\ m_{agregada} &= \frac{\rho}{3} \left((R_{Tierra}+r_{inc})^3 - (R_{Tierra})^3 \right) (2\pi - 0)(-\cos\pi + \cos 0) \\ m_{agregada} &= \frac{\rho}{3} \left((R_{Tierra}+r_{inc})^3 - (R_{Tierra})^3 \right) (2\pi)(2) \\ m_{agregada} &= \frac{4\rho}{3} \left((R_{Tierra}+r_{inc})^3 - (R_{Tierra})^3 \right) \end{aligned}$$

Se despeja r_{inc} que es el incremento que tuvo la Tierra después de ser bombardiada por un año.

$$\begin{aligned} \frac{3m_{agregada}}{4\rho} &= (R_{Tierra}+r_{inc})^3 - (R_{Tierra})^3 \\ (R_{Tierra}+r_{inc})^3 &= \frac{3m_{agregada}}{4\rho} + (R_{Tierra})^3 \\ R_{Tierra}+r_{inc} &= \sqrt[3]{\frac{3m_{agregada}}{4\rho} + (R_{Tierra})^3} \\ r_{inc} &= \sqrt[3]{\frac{3m_{agregada}}{4\rho} + (R_{Tierra})^3} - R_{Tierra} \end{aligned}$$

Sabemos que la densidad de la Tierra, ρ, es 5520 kg/m^3, el radio de la Tierra, R_{Tierra}, es, aproximadamente, 6371 Km y el promedio anual de meteoritos, $m_{agregada}$, es de 2,2 $\times$ 10^8 kg

. Sustituyendo valores

$$
\begin{aligned}
r_{inc} &= \sqrt[3]{\frac{3(2{,}2 \ \times \ 10^8)}{4(5520)} + 6371^3} - 6371 \\
r_{inc} &= 2{,}46 \ \times \ 10^{-4} \ km \\
r_{inc} &= 0{,}246 \ m
\end{aligned}
$$

b) Como los meteoritos han caído en forma radial sobre la superficie de la Tierra, entonces no producen un cambio neto en el momento angular de la Tierra. Por conservación del momento angular tenermos que

$$L_i \quad = \quad L_f \tag{4.25}$$

El momento angular, L, se define como el producto del momento de inercia, I, y la velocidad angular, ω. El momento angular inicial, L_i, corresponde al momento de incercia y a la velocidad angular iniciales mientras que el momento angular final, L_f, al momento de inercia y a la velocidad angular finales,

$$L_i \quad = \quad I_i\omega_i \quad = \quad I_f\omega_f \quad = \quad L_f \tag{4.26}$$

Para calcular el momento de inercia de la Tierra, que es un cuerpo sólido con densidad constante, ρ, usamos la expresión general para el momento de inercia:

$$I \quad = \quad \int r^2 dm, \tag{4.27}$$

donde dm es un diferencial de masa. Considerando que ρ es constante y como $\rho = \frac{m}{V}$, entonces

$$dm \quad = \quad \rho dV. \tag{4.28}$$

El elemento de volumen dV está a una distancia $r \sin\theta$ del eje de rotación. Entonces, sustituyendo la ecuación (4.28) en la ecuación (4.27) tenemos que

$$I = \int r^2 \rho dV \tag{4.29}$$

donde dV es la variable sobre la que se va a integrar. Entonces, podemos resolver dicha **integral en coordenadas esféricas**, sustituyendo dV por $(rsen\theta)^2 \ r^2 \ sen\theta \ d\phi$, vamos a tener una **integral triple**.

$$I \quad = \quad \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho \left(r \sin\theta\right)^2 r^2 \sin\theta,$$

el argumento que está dentro de la integral se puede separar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R dr \int_\pi^0 d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\phi \rho r^4 (1 - \cos\theta) \\ I &= \rho 2\pi \frac{R^5}{5}\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)_\pi^0 \\ I &= \frac{2\pi\rho R^5}{5}\frac{4}{3} \end{aligned}$$

entonces, el momento de inercia es

$$I = \frac{2}{5}MR^2, \tag{4.30}$$

con $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$. Sustituyendo la ecuación (4.30) en la ecuación (4.26) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}M_i R_i^2 \omega_i &= \frac{2}{5}M_f R_f^2 \omega_f \\ M_i R_i^2 \omega_i &= M_f R_f^2 \omega_f \\ \text{sí} \quad \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

donde T es el periodo de rotación de la Tierra, sustituyendo resulta

$$\begin{aligned} M_i R_i^2 \frac{2\pi}{T_i} &= M_f R_f^2 \frac{2\pi}{T_f} \\ \frac{M_i R_i^2}{T_i} &= \frac{M_f R_f^2}{T_f} \end{aligned}$$

por lo que el periodo de rotación cuando se tiene una masa final M_f es

$$T_f = \frac{M_f\ R_f^2\ T_i}{M_i\ R_i^2} \tag{4.31}$$

donde M_f es la cantidad de masa depositada por los meteoritos después de un tiempo dado. Por otro lado, a partir de los datos dados en el enunciado, tenemos que la masa de meteoritos que cae durante 5 años es $M_f = 5 \times 2{,}2 \times 10^8\ kg = 11 \times 10^8\ kg$. La masa de la Tierra es $M = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$ y $T_i = 24\ hrs$. Así que, de la ecuación (4.31), resulta que el nuevo período orbital debe ser

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{(11 \times 10^8\ kg)\ (24\ hrs)\ R_f^2}{(5{,}97 \times 10^{24}\ kg)\ R_i^2} \\ T_f &= 4{,}4221 \times 10^{-15}\frac{R_f^2}{R_i^2} \quad hrs \end{aligned}$$

Como el radio final es casi igual al inicial, entonces

$$T_f \approx 4{,}4221 \times 10^{-15} \quad hrs$$

Es decir, el período final es mayor al inicial en una cantidad despreciable.

c) Debido a que no hay fuerzas externas que afecten el movimiento, tenemos que, por conservación de momento angular, ecuación (4.26), $L = I\omega =$ constante. En este caso podemos tomar al sistema Tierra-Sol como dos cuerpos puntuales donde la Tierra, cuya masa es M, está a una distancia r del Sol. La masa final de la Tierra es M_f, así que

$$T_f = \frac{M_f \ R_f^2 \ T_i}{M_i \ R_i^2}$$

donde T_i es el viejo período traslacional, M_f es el incremento de masa después de 3 años ($M_f = 3 \times 2{,}2 \times 10^8 \ kg = 6{,}6 \times 10^8 \ kg$) y $M = 5{,}97 \times 10^{24} \ kg$, es la masa de la Tierra. Entonces, el nuevo período de traslación, T_f, es

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{(6{,}6 \times 10^8 \ kg) \ (24 \ hrs) \ R_f^2}{(5{,}97 \times 10^{24} \ kg) \ R_i^2} \\ T_f &= 2{,}6533 \times 10^{-15} \frac{R_f^2}{R_i^2} \quad hrs \end{aligned}$$

De manera aproximada tenemos que

$$T_f \approx 2{,}6533 \times 10^{-15} \quad hrs$$

Es decir, el incremento en el período de traslación también es despreciable.