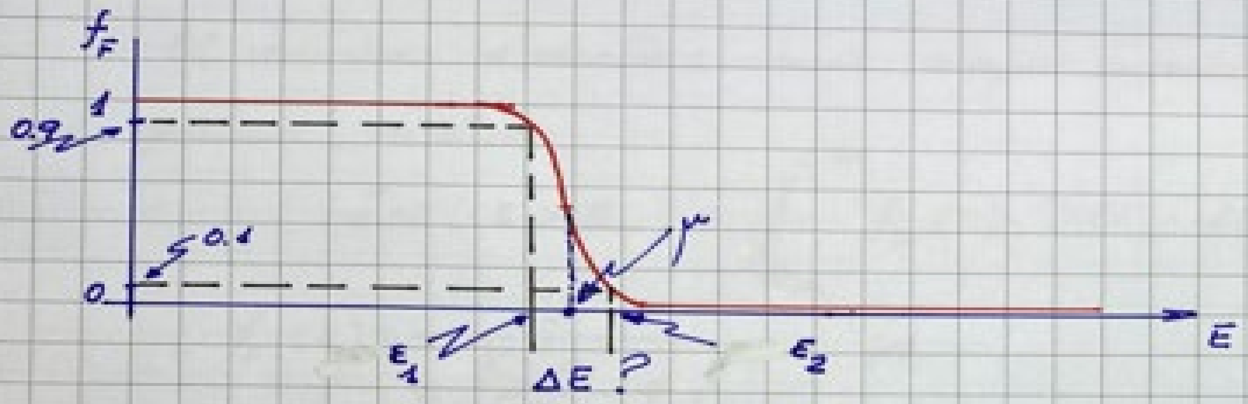
Exercicis de electrons lliures. Gas de Fermi

1. Determineu l'amplada de la franja energètica en la que la funció de distribució de Fermi-Dirac transita de 1 a 0, a una temperatura T. Criteri ($0.9>f_F>0.1$).

Resolució:



$$f_F(E_2) = 0.1 \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{E_2-\mu}{k_BT}}+1} = 0.1 \Rightarrow e^{\frac{E_2-\mu}{k_BT}} = 10-1=9$$

$$f_F(E_1) = 0.9 \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{E_1-\mu}{k_BT}}+1} = 0.9 \Rightarrow e^{\frac{E_1-\mu}{k_BT}} = 0.9^{-1}-1 = \frac{1}{9}$$

I ara dividint membre a membre les dues equacions

$$e^{\frac{E_2-\mu}{k_BT}} \cdot e^{-\frac{(E_1-\mu)}{k_BT}} = \frac{9}{1/9}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\frac{E_2-E_1}{k_BT}} = 81 \Rightarrow e^{\Delta E/k_BT} = 81$$

i aplicant logaritmes neperians:

$$\frac{\Delta E}{k_BT} = \ln 81 \Rightarrow \Delta E = k_BT \cdot 4.39$$

Aquest valor a $T \simeq 300K \Rightarrow \Delta E \simeq 10^{-1}eV$ que es molt més petit que el valor de $\mu \simeq E_F \simeq 10eV$.

2. Suposeu que per un metall està circulant un corrent de carrega electrònica sota l'efecte d'un camp elèctric. A t=0 "desconnectem" el camp elèctric. Determineu el temps que triga el mar d'electrons en assolir el seu estat d'equilibri.

Resolució:

Tal i com hem raonat a la teoria

(*) $m\frac{dv}{dt} = -eE - b'v \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{b'}{m}v = -\frac{eE}{m}$

$v(t) = v_{homog}(t) + v_{particular}$

$\Downarrow$

$\frac{dv}{dt} + \frac{b'}{m}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} + \frac{b'}{m}dt = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{b'}{m}dt$

integrant $\ln v = -\frac{b'}{m}t + C \Rightarrow \ln v = -\frac{b'}{m}t + \ln v_0 \Rightarrow$

$v_{hom.} = v_0 e^{-\frac{b'}{m}t} \Leftarrow$ solució de la homogènia

$v_{part} = -\frac{eE}{b'}$

Per tant la solució general de l'equació (*)

$$\boxed{v = v_0 e^{-\frac{b'}{m}t} - \frac{eE}{b'}}$$

Aquesta funció de velocitat dels electrons es una funció d'establiment d'una intensitat.

I la desaparició d'una intensitat ja establerta, per efecte de les interaccions amb els fonons de la xarxa (atraccions amb els ions reticular i els "scatterings" amb els defectes reals de la xarxa.

$$v(t=0) = -\frac{eE}{b'} \Rightarrow v''(t) = \left|-\frac{eE}{m}\right| e^{-\frac{b''}{m}t} = v_0'' e^{-\frac{t}{m/b''}}$$

$m/b'' = \tau$. I que significa τ? el temps que triga el col·lectiu electrònic en perdre un 63 % de la seva velocitat inicial.

3. Per a un metall amb electrons lliures, estima la fracció d'electrons excitats (amb energies més grans que la de Fermi) a una temperatura determinada.

Resolució:

El nombre d'electrons amb energia superior al valor de Fermi el podem avaluar

$$\delta N (E > E_F) = \int_{E_F}^{\infty} f_F(E) \cdot D(E) \cdot dE$$

$$f_F(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1} \qquad (1)$$

$$D(E) = \frac{3}{2} \frac{N}{E_F} \sqrt{\frac{E}{E_F}}$$

La integral no es avaluable per via analítica.

Alternativament el que podem fer és un desenvolupament de la funció de Fermi-Dirac al voltant d'E_F

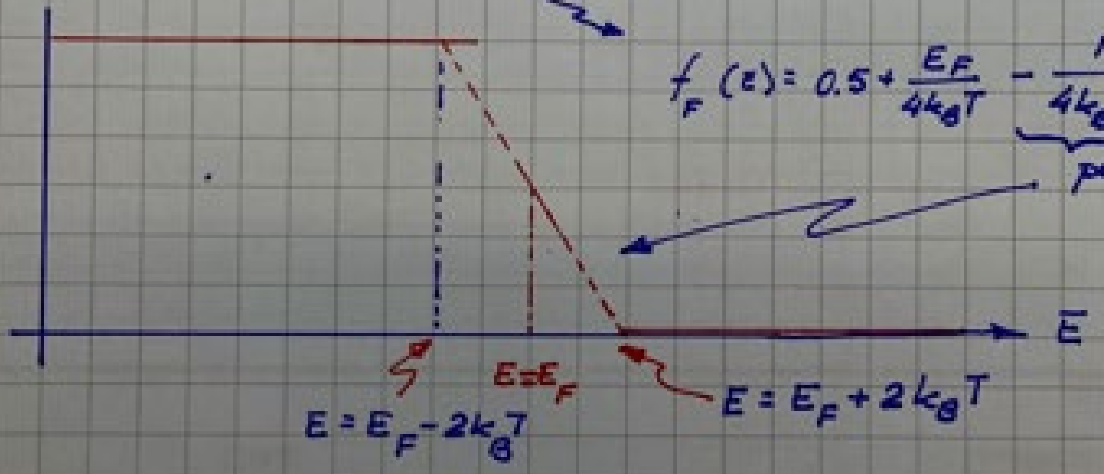
$$f_F(E) \simeq f_F(E_F) + \left.\frac{\partial f_F}{\partial E}\right)_{E_F} (E-E_F) + \cdots \quad \Rightarrow$$

$$\mu \simeq E_F \Rightarrow f_F(E) \simeq 0.5 + \underbrace{(-1)\left(e^{\frac{E-E_F}{k_BT}}+1\right)^{-2}_{E=E_F} \cdot (k_BT)^{-1}}_{\left.\frac{\partial f_F}{\partial E}\right)_{E=E_F} = (4k_BT)^{-1}} \cdot (E-E_F$$

Per tant

$$f_F(E) \simeq 0.5 - \frac{E-E_F}{4k_BT}$$, i aquesta representació seria

$$f_F(E) = 0.5 + \frac{E_F}{4k_BT} - \underbrace{\frac{1}{4k_BT}}_{\text{pendent}} \cdot E$$



I ara podem continuar

$$\delta N\,(E > E_F) = \int_{E_F}^{E_F + 2k_B T} \left(0.5 - \frac{E - E_F}{k_B T}\right) \cdot \frac{3N}{2E_F} \cdot \underbrace{\sqrt{E/E_F}}_{1}\, dE$$

la densitat l'aproximem fent $E \simeq E_F$

$$\delta N\,(E > E_F) = \frac{3N k_B T}{4 E_F} \Rightarrow \frac{\delta N}{N}\,(E > E_F) \simeq \frac{3}{4}\,\frac{T}{T_F}$$

Recordem que $10^4 K < T_F < 10^5 K$

Llavors per valors de $T \simeq 10^3$ (fusió de metalls)

$$\frac{\delta N}{N}\,(E > E_F) \simeq 10^{-2}$$

els que representa solament un 1% del total d'estats

MOLT BAIX !!

4. Explicar el sentit físic de la temperatura de Fermi, T_F, del gas d'electrons lliures. Aplicat a metalls, quines conseqüències físiques (observables) té el que T_F sigui tant alt com a 5×10^4 K?.

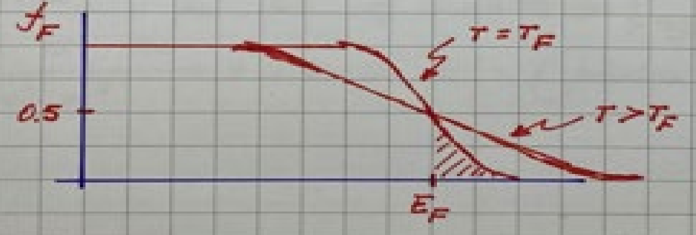
Resolució:

Recordem que la seva definició es:

$$T_F = \frac{E_F}{k_B}$$

per tant és la temperatura que ens permet comparar l'energia de Fermi amb l'energia que la termodinàmica clàssica associa a cada grau de llibertat ($k_B T$).

Per $T < T_F$ el nombre, solament un petita fracció d'electrons promocionen a energies $E > E_F$



6. Per un metall de secció transversal 1 mm^2 circula un corrent elèctric de 2 A, sota un camp elèctric aplicat de 0.5 V/m. Estimar el temps de relaxació electrònic.

Resolució:

Sabem que l'intensitat que es desenvolupa en el cable és de 2 A $\Rightarrow$ $I = \frac{dq}{dt}$ $\frac{C}{m^2}$ $\Rightarrow$ $|J| = \frac{I}{dS} = \frac{dq}{dS \cdot dt} = \frac{2\ A}{1\ mm^2} \frac{10^6\ mm^2}{1 \cdot m^2}$

$J = 2 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}$ $\Rightarrow$ $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ $\Rightarrow$ $\vec{J}_i = \sigma_{ij} \vec{E}_j$

σ_{ij} $\Rightarrow$ $\sigma = \frac{N' e^2 \tau}{m}$

$\uparrow$ Per fer una estimació basta amb suposar un valor escalar de la conductivitat

$$\sigma = \frac{|J|}{|E|} = \frac{2 \cdot 10^6\ A/m^2}{0.5\ V/m} = 4 \cdot 10^6\ \Omega \cdot m^{-1}$$

$N' \simeq 10^{28}\ m^{-3}$ $\Leftarrow$ per tots els metalls $\Leftarrow$ sempre el podem agafar com una dada!

$\tau = \frac{\sigma \cdot m}{N' \cdot e^2} = 1.4 \cdot 10^{-14}$ s (pròxim al femtosegon)