Grau Enginyeria Matemàtica i Física

FÍSICA DE FLUIDS

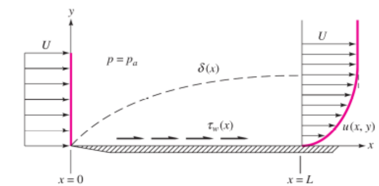
Tema 8: Flux de capa límit

Clara Salueña

Objectius

- Comprendre el concepte de capa límit
- Obtenir les equacions de capa límit
- Obtenir la solució de Blasius de la capa límit laminar del flux sobre una placa plana
- Descriure els efectes del gradient de pressió i les condicions de separació de la capa límit
- Estudiar el balanç integral de quantitat de moviment i el gruix de la capa límit
- Resoldre numèricament amb ANSYS Fluent el flux sobre una placa plana i comparar-lo amb la solució de Blasius

Capa límit



Aproximació de capa límit
$v_y \ll v_x$
$\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_{inv} \frac{dv_{inv}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$v_x(x = 0, y) = v_{inv}(x = 0, y)$$

$$v_x(x > 0, y = 0) = 0, \qquad v_y(x > 0, y = 0)$$

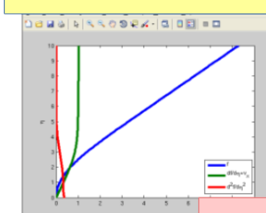
$$v_x(x, y \to \infty) = v_{inv}(x, y = 0)$$

equacions

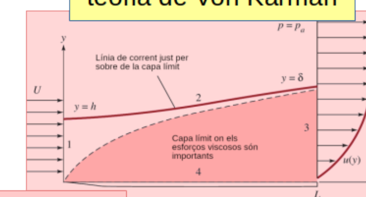
+

condicions de contorn

Solució de Blasius



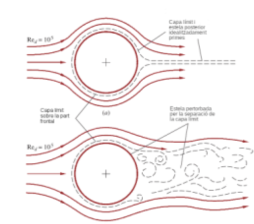
Balanços integrals: teoria de Von Kármán



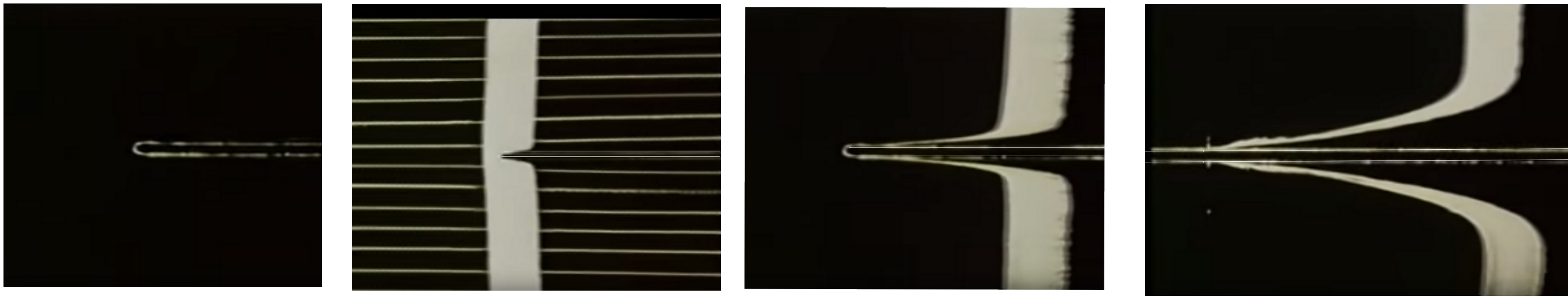
Gruix δ_{99} de capa límit
δ^* de desplaçament
Θ: de moment

dp/dx advers

Separació

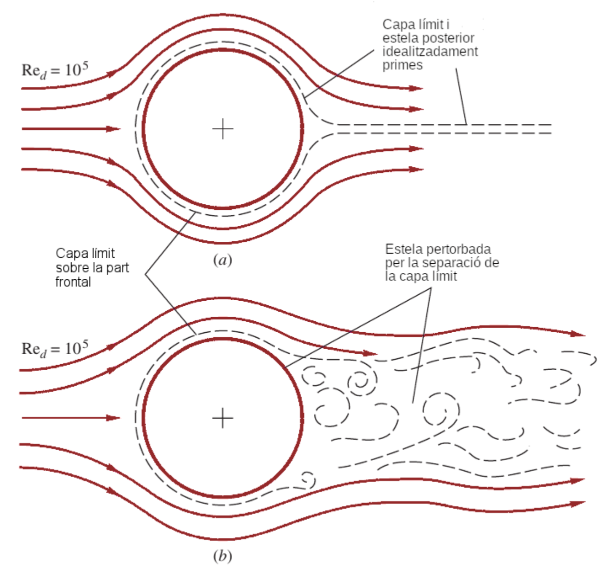


Flux de capa límit

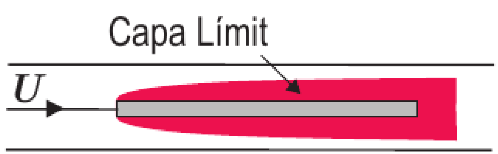


https://www.youtube.com/watch?v=H1LPHKmxeHI

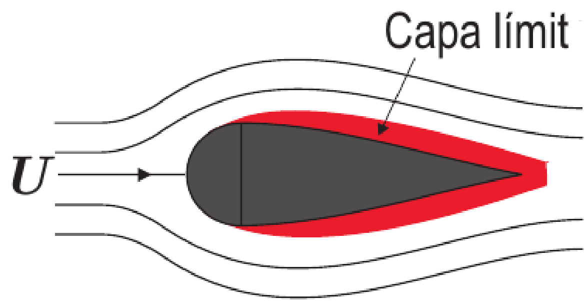
- La capa límit és un concepte que serveix per resoldre analíticament les equacions del flux viscós
- Es deu a **Ludwig Prandtl (1904)**
- No "existeix" materialment, és un constructe matemàtic
- Dins de la capa límit, els efectes viscosos són importants, (Re no es "gran")
- Lluny d'ella, el flux es pot considerar com invíscid



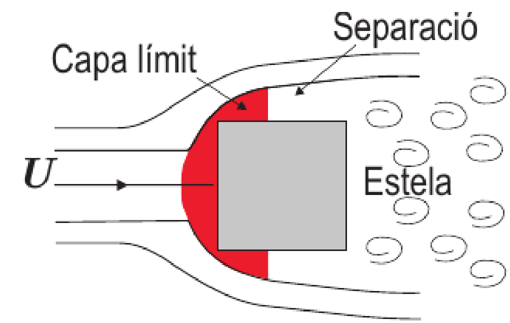
Exemples



Placa plana



Objecte aerodinàmic (*streamlined body*)

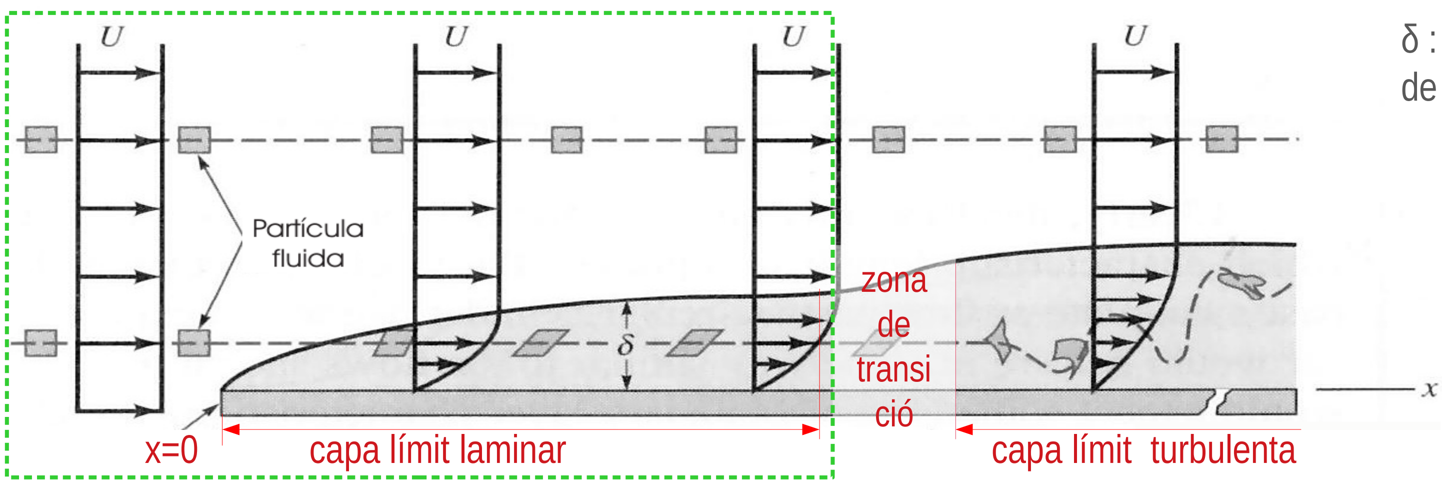


Obstacle (*bluff body*)

- Per a la placa plana prima paral·lela al flux, les línies de corrent tendeixen a ser paral·leles a la placa.
- Al voltant d'un objecte aerodinàmic, les línies de corrent es tanquen darrera del cos.
- Al voltant d'un obstacle en canvi, les línies de corrent no es poden tancar per darrere i es genera el que coneixem com estela

Desenvolupament de la capa límit sobre una placa plana

- La capa límit és la regió on els esforços de tall no són menyspreables
- En primer lloc es desenvolupa la capa límit laminar, on el flux és laminar i no hi ha barreja entre les diferents capes de fluid
- L'espessor de la capa límit δ augmenta amb x.
- Es defineix $\mathrm{Re} = \frac{\rho U x}{\mu}$, on x és el punt d'observació, comptat des de l'inici de la placa
- Re es funció de la posició x sobre la placa, i augmenta també amb x

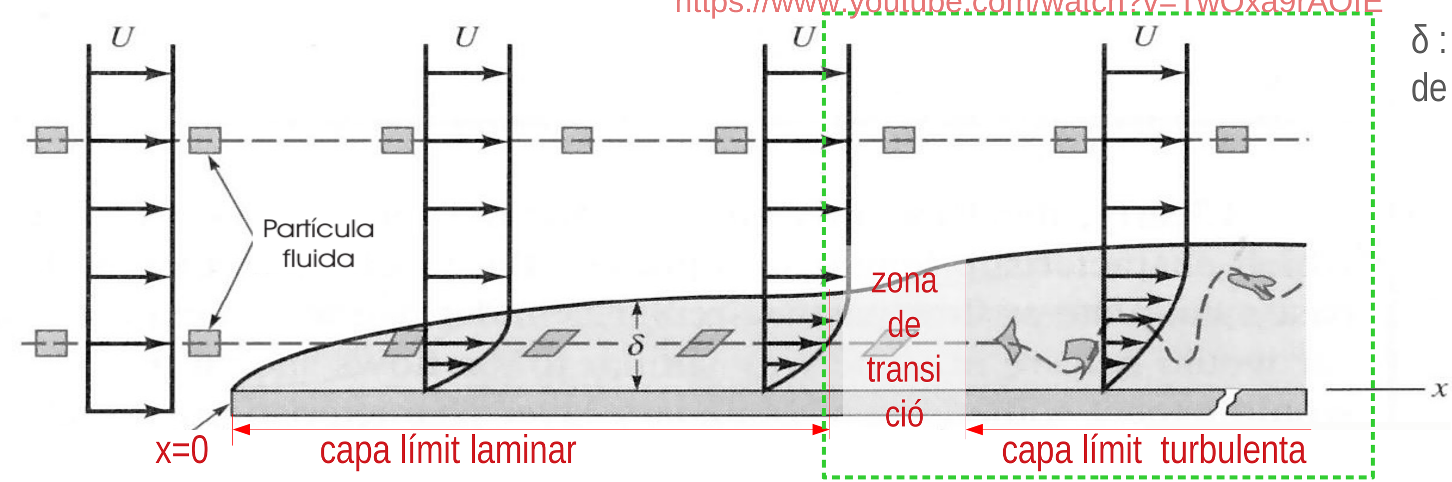


δ : espesor característico de la capa límite

Desenvolupament de la capa límit sobre una placa plana

- Per a una placa plana prou llarga, per a qualsevol velocitat U, sempre existeix un punt on el règim es torna turbulent
- A la zona de transició cap al règim turbulent, hi ha un notori increment de l'espessor de la capa límit
- A la capa límit turbulenta les partícules estan sotmeses a deformacions en qualsevol direcció, i hi ha mescla o difusió entre les diferents capes del fluid
- I encara, a la zona propera a la placa les velocitats relatives entre el flux i la placa són petites, i es genera una zona on el flux és laminar: és la sub-capa laminar dintre de la capa límit turbulenta

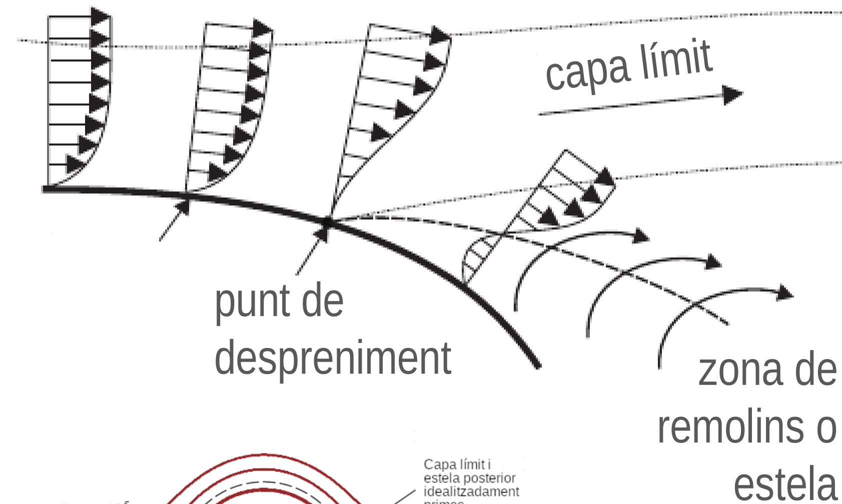
https://www.youtube.com/watch?v=TwOxa9rAOfE

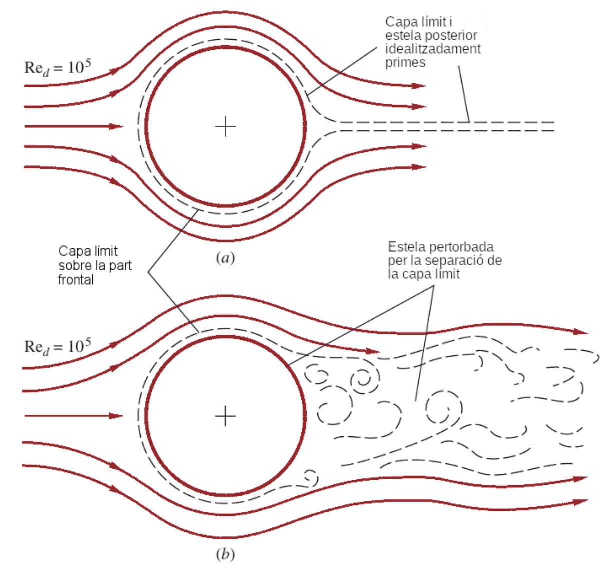


δ : espessor característic de la capa límit

Desenvolupament de la capa límit al voltant d'objectes corbats

- En cossos corbats les partícules fluides acceleren a la part anterior del cos, on les línies de corrent s'aproximen, fins el punto on la secció és màxima
- Passat aquest punt, el flux desaccelera, les línies de corrent s'han de tancar de nou darrera de l'objecte, i s'ha de recuperar la pressió
- Si la curvatura del cos es prou gran, i en funció de les condicions del flux, es pot generar un flux invers, en el fenomen que s'anomena despreniment de la capa límit
- Aleshores, darrera de l'objecte es genera una zona anomenada estela.





Aproximació de capa límit

- Equacions de Navier-Stokes per a flux incompressible ***estacionari***

$$\nabla\cdot\vec{v}=0$$

viscositat cinemática, μ/ρ

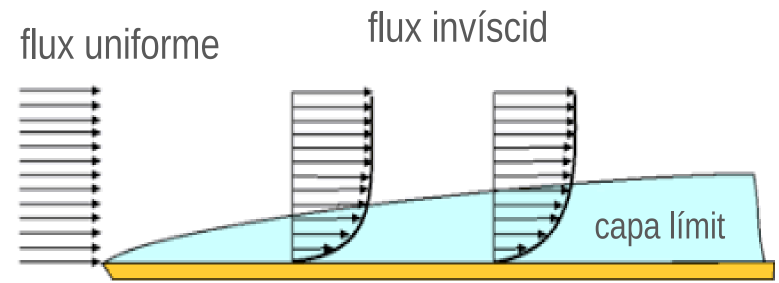
$$\vec{v}\cdot\nabla\,\vec{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\nu\nabla^2\vec{v}$$

- Prescindim de la gravetat
- Amb les condicions de contorn:

$\vec{v}=U\,\vec{i}$, per a qualsevol x, quan y $\to\infty$

$\vec{v}=0$, per a qualsevol x, si y = 0

$\vec{v}=U\,\vec{i}$, per a qualsevol y, si x = 0



Problema de Blasius

En coordenades cartesianes...

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

Introduïm a les equacions

- L'escala de v_x: U
- L'escala de la pressió: ρU^2
- L'escala de longitud: L
- L'escala de la velocitat vertical v_y: α
- L'espessor característic de la capa límit, δ

adimensionalizant les variables

$$x^*=\frac{x}{L} \qquad y^*=\frac{y}{\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*}=L\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y^*}=\delta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$v_x^*=\frac{v_x}{U} \qquad v_y^*=\frac{v_y}{\alpha}$$

$$p^*=\frac{p}{\rho U^2}$$

No hi ha cap longitud característica al problema. L denota la distància a la qual se situa el punt d'observació

...obtenim

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{L}\frac{\partial v_x{}^*}{\partial x^*}+\frac{\alpha}{\delta}\frac{\partial v_y{}^*}{\partial y^*}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{L}\sim\frac{\alpha}{\delta}$$

- $\alpha\sim\frac{\delta}{L}U$ l'escala de la velocitat en la direcció perpendicular a la placa, α, es molt menor que *U*, si l'espessor de la capa límit δ es molt menor que la distància *L* d'observació, tot i que...
- encara no sabem quánt val δ!

Farem el mateix amb les altres dues equacions

Comencem amb l'equació per a v_y

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} = L\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y^*} = \delta \frac{\partial}{\partial y}$$

$$v_x^* = \frac{v_x}{U} \qquad v_y^* = \frac{v_y}{\alpha} = \frac{v_y}{U\frac{\delta}{L}}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

Comencem amb l'equació per a v_y

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} = L\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y^*} = \delta \frac{\partial}{\partial y}$$

$$v_x^* = \frac{v_x}{U} \qquad v_y^* = \frac{v_y}{\alpha} = \frac{v_y}{U\frac{\delta}{L}}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

$$O\left(U\frac{U\delta}{L}\frac{1}{L}\right) + O\left(\frac{\delta U}{L}\ \frac{\delta U}{L}\frac{1}{\delta}\right) = -\frac{1}{\rho} O\left(\frac{\rho U^2}{\delta}\right) + \nu O\left(\frac{U\delta}{L}\frac{1}{L^2}\right) + \nu O\left(\frac{U\delta}{L}\ \frac{1}{\delta^2}\right)$$

Comencem amb l'equació per a v_y

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} = L\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y^*} = \delta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$v_x^* = \frac{v_x}{U} \qquad v_y^* = \frac{v_y}{\alpha} = \frac{v_y}{U\frac{\delta}{L}}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

$$O\left(U\frac{U\delta}{L}\frac{1}{L}\right) + O\left(\frac{\delta U}{L}\frac{\delta U}{L}\frac{1}{\delta}\right) = -\frac{1}{\rho}O\left(\frac{\rho U^2}{\delta}\right) + \nu O\left(\frac{U\delta}{L}\frac{1}{L^2}\right) + \nu O\left(\frac{U\delta}{L}\frac{1}{\delta^2}\right)$$

$$O\left(\frac{U^2\delta}{L^2}\right) + O\left(\frac{\delta U^2}{L^2}\right) = -O\left(\frac{U^2}{\delta}\right) + O\left(\frac{\nu}{UL}\frac{\delta U^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\nu}{UL}\frac{U^2}{\delta}\right)$$

Comencem amb l'equació per a v_y

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} = L \frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y^*} = \delta \frac{\partial}{\partial y}$$

$$v_x^* = \frac{v_x}{U} \qquad v_y^* = \frac{v_y}{\alpha} = \frac{v_y}{U \frac{\delta}{L}}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

$$O\left(U \frac{U\delta}{L}\frac{1}{L}\right) + O\left(\frac{\delta U}{L}\,\frac{\delta U}{L}\frac{1}{\delta}\right) = -\frac{1}{\rho} O\left(\frac{\rho U^2}{\delta}\right) + \nu O\left(\frac{U\delta}{L}\frac{1}{L^2}\right) + \nu O\left(\frac{U\delta}{L}\frac{1}{\delta^2}\right)$$

$$\left\{ O\left(\frac{U^2\delta}{L^2}\right) + O\left(\frac{\delta U^2}{L^2}\right) = -O\left(\frac{U^2}{\delta}\right) + O\left(\frac{\nu}{UL}\frac{\delta U^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\nu}{UL}\frac{U^2}{\delta}\right) \right\} \times \frac{\delta}{U^2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}$$

multipliquem per δ i dividim per U²...

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) = O(1) + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

$$O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) = O(1) + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)$$

Els diferents termes contribueixen a ordres diferents a l'equació. S'aplica una tècnica anomenada balanç dominant

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

$$O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) = O(1) + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)$$

Els diferents termes contribueixen a ordres diferents a l'equació. S'aplica una tècnica anomenada balanç dominant

- Quins són els termes amb major importància relativa?
- Podem escriure una equació diferencial conservant només els termes més rellevants i resoldre-la a l'ordre més baix, de forma consistent amb tots els supòsits?
- Un cop resolt l'odre més baix, podrem utilitzar la solució que donen aquests termes per generar una equació per al terme de l'ordre següent (si interessa)
- i així successivament, per obtenir una expansió en el paràmetre de capa límit (aquí, 1/Re)

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

$$\cancel{O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right)} + \cancel{O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right)} = O(1) + \cancel{O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{L^2}\right)} + \cancel{O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)}$$

a "ordre 0 en 1/Re", $\quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$ $\Rightarrow$ la pressió no depèn de y

Això implica que

- A la pressió, no hi ha cap influència de la placa (a ordre zero en 1/Re)
- La pressió és doncs, aproximadament la del camp llunyà
- Com a molt (en funció del camp llunyà), pot dependre de x

... i quant val?

Ja que $p_{inv} + \frac{1}{2}\rho U^2 = \mathrm{Ctn}$ és la solució invíscida, $\Rightarrow$ si U depèn de x, p també ho fará

Ara amb l'equació per a v_x

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$O\left(\frac{U^2}{L}\right) + O\left(\frac{\delta U}{L}\ \frac{U}{\delta}\right) = -\frac{1}{\rho} O\left(\frac{\rho U^2}{L}\right) + O\left(\nu \frac{U}{L^2}\right) + O\left(\nu \frac{U}{\delta^2}\right)$$

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} = L \frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y^*} = \delta \frac{\partial}{\partial y}$$

$$v_x^* = \frac{v_x}{U} \qquad v_y^* = \frac{v_y}{\alpha} = \frac{v_y}{U \frac{\delta}{L}}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

Ara amb l'equació per a v_x

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} = L\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y^*} = \delta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$v_x^* = \frac{v_x}{U} \qquad v_y^* = \frac{v_y}{\alpha} = \frac{v_y}{U\frac{\delta}{L}}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

$$O\left(\frac{U^2}{L}\right) + O\left(\frac{\delta U}{L}\ \frac{U}{\delta}\right) = -\frac{1}{\rho} O\left(\frac{\rho U^2}{L}\right) + O\left(\nu\frac{U}{L^2}\right) + O\left(\nu\frac{U}{\delta^2}\right)$$

$$\left\{ O\left(\frac{U^2}{L}\right) + O\left(\frac{U^2}{L}\right) = -O\left(\frac{U^2}{L}\right) + O\left(\underbrace{\frac{\nu}{UL}}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}}\frac{U^2}{L}\right) + O\left(\frac{\nu}{UL}\frac{U^2 L}{\delta^2}\right) \right\} \times \frac{\delta^2}{LU^2}$$

ens queda aleshores...

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) = O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)$$

I ara apliquem la tècnica del balanç dominant

Ens preguntem:

- Quins termes són importants a l'ordre més baix d'aproximació?
- Si eliminem el terme 1/Re en front dels termes δ^2/L^2, ens queda una equació
- I si fem al contrari, ens queda una equació completament diferent

- **Eliminar uns termes davant d'uns altres, en problemes de capa límit, dona llloc a una casuística que cal discutir**

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) = O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)$$

- $\delta^2/L^2 \gg 1/\mathrm{Re}$

- $\delta^2/L^2 \ll 1/\mathrm{Re}$

- $\delta^2/L^2 \sim 1/\mathrm{Re}$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$O(\frac{\delta^2}{L^2}) + O(\frac{\delta^2}{L^2}) = O(\frac{\delta^2}{L^2}) + O(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{L^2}) + O(\frac{1}{\mathrm{Re}})$$

- $\delta^2/L^2 >> 1/\mathrm{Re}$ els termes "importants" donen la mateixa equació que la del flux invíscid!

$$\boxed{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

☹

- $\delta^2/L^2 << 1/\mathrm{Re}$

- $\delta^2/L^2 \sim 1/\mathrm{Re}$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) = O\left(\frac{\delta^2}{L^2}\right) + \cancel{O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{L^2}\right)} + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)$$

- $\delta^2/L^2 >> 1/\mathrm{Re}$ els termes "importants" donen la mateixa equació que la del flux invíscid!

$$\boxed{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

- $\delta^2/L^2 << 1/\mathrm{Re}$ l'equació que queda és la que dona un perfil lineal, $v_x = ax + b$

$$\cancel{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}} + \cancel{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}} = \cancel{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \boxed{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} \Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

- $\delta^2/L^2 \sim 1/\mathrm{Re}$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$O(\frac{\delta^2}{L^2}) + O(\frac{\delta^2}{L^2}) = O(\frac{\delta^2}{L^2}) + \cancel{O(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{L^2})} + O(\frac{1}{\mathrm{Re}})$$

- $\delta^2/L^2 >> 1/\mathrm{Re}$ els termes "importants" donen la mateixa equació que la del flux invíscid!

$$\boxed{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

- $\delta^2/L^2 << 1/\mathrm{Re}$ l'equació que queda és la que dona un perfil lineal, $v_x = ax + b$

$$\cancel{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}} + \cancel{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}} = \cancel{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \boxed{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} \Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

- $\delta^2/L^2 \sim 1/\mathrm{Re}$ havent descartat les altres opcions, és l'únic supòsit possible

Espessor δ i equacions de Prandtl de la capa límit

$$\boxed{\delta^2/L^2 \sim 1/\mathrm{Re} \quad \Rightarrow \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}}$$

- Si bé hem acabat per concloure que tots els termes excepte el d'ordre $\delta^2/(L^2\mathrm{Re})$ contribueixen igualment a l'equació per a v_x (i encara no hem resolt res) hem obtingut:
- l'espessor de la capa límit en funció de Re
- Les equacions de la capa límit per a una placa plana

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

0 si U = cte

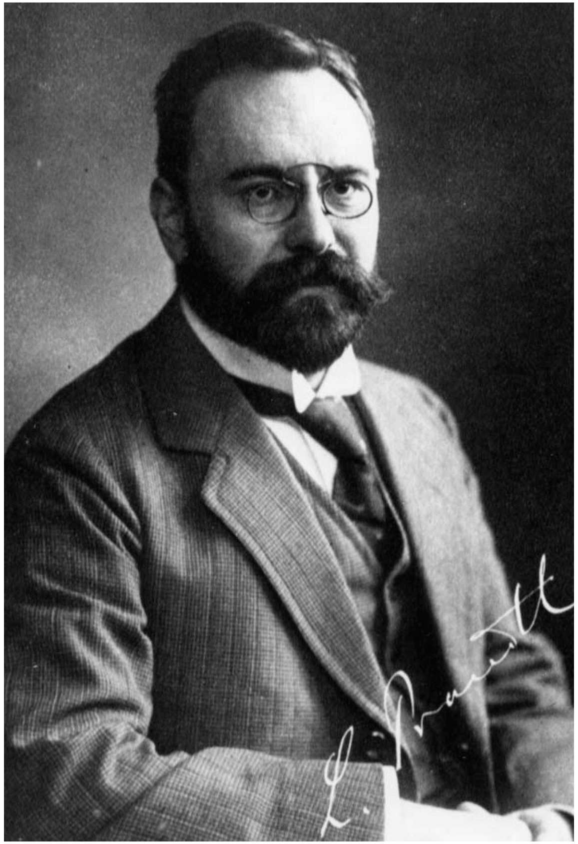
$$v_x(x=0,y)=U$$
$$v_x(x,y\rightarrow\infty)=U$$
$$v_x(x,y=0)=0$$
$$v_y(x,y=0)=0$$

on $p \sim p_{inv}$, que satisfà

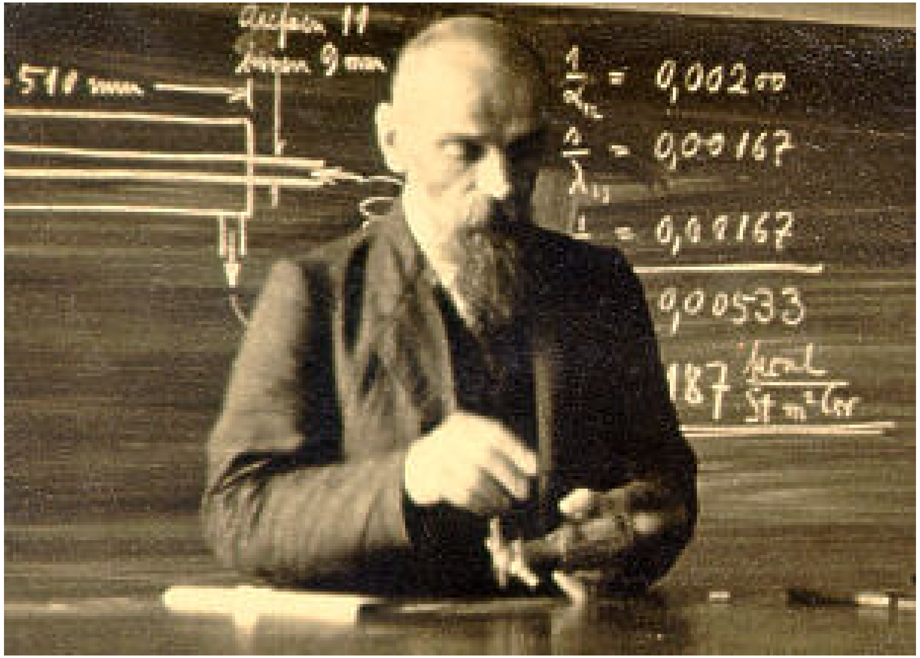
$$p_{inv}+\frac{1}{2}\rho U^2=\mathrm{Cte}$$

és a dir, si U és constant

$$\frac{\partial p_{inv}}{\partial x}=0$$



Ludwig Prandtl



Heinrich Blasius

Solució de Blasius

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$v_x(x=0,y)=U$$
$$v_x(x,y\to\infty)=U$$
$$v_x(x,y=0)=0$$
$$v_y(x,y=0)=0$$

funció de corrent f :

$$v_x=\frac{\partial f}{\partial y} \qquad v_y=-\frac{\partial f}{\partial x}$$

- Observem que és un problema pla estacionari, i podem per tant treballar amb la funció de corrent, ψ (que per raons històriques anomenarem f.
- Mitjançant un canvi de variable enginyós, **Blasius (1908)** va convertir el sistema d'EDPs en un problema d'una sola EDO per a f
- Aquesta via passa per trobar una variable de similaritat, $\eta=\frac{y}{\sqrt{x\nu/U}}$ (veure les notes)
- En aquesta variable, l'equació que satisfà f és: $f''' + \tfrac{1}{2} f'' f = 0$
- Amb les condicions de contorn: $f'(\eta\to\infty)=1 \quad f'(\eta=0)=0 \quad f(\eta=0)=0$

$$f''' + \frac{1}{2} f'' f = 0 \qquad \left. \begin{array}{l} f'(\eta \to \infty) = 1 \\ f'(\eta = 0) = 0 \\ f(\eta = 0) = 0 \end{array} \right\}$$

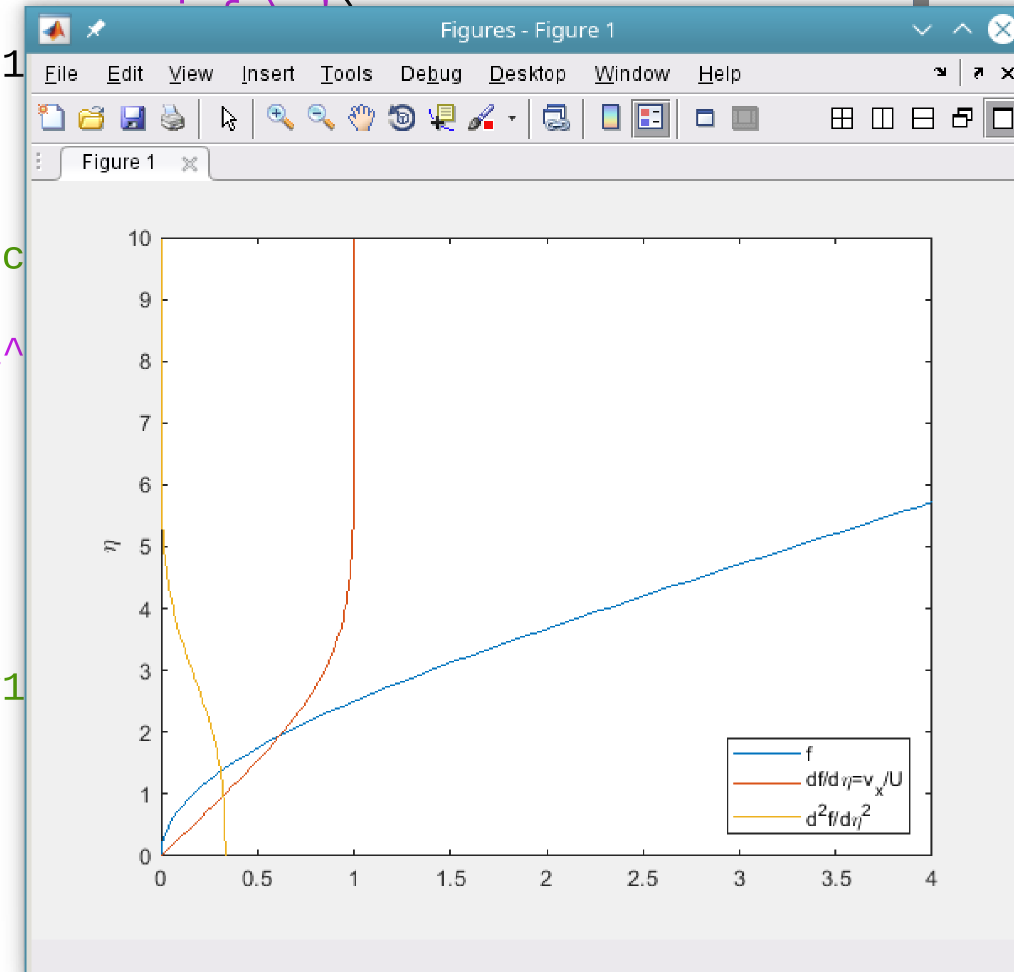
- L'equació de Blasius es una EDO no lineal que no té solució analítica tancada
- Però es pot resoldre numèricament, i obtenir els resultats més rellevants
- A l'escript de MATLAB de la pàgina següent, utilitzem l'integrador de MATLAB `bvp4c` per a EDOs amb condicions de contorn, i representem 1) la funció de corrent *f*, 2) la derivada primera, *f '* (v_x/U) i 3) la derivada segona, *f ''* (que es relaciona amb l'esforç de tall, $\partial v_x/\partial y$
- Obenim el perfil de velocitats numèric i podem calcular a més a més: 1) l'esforç sobre la paret, 2) el *drag* (C_D) , i 3) definir δ_{99} , un espessor per a la capa límit

```
xinf=input('Introdueix un valor operatiu per a inf:\n');
solinit = bvpinit(linspace(0,xinf,10),[1 0 0]);
sol = bvp4c(@fun,@bcres,solinit);
x=linspace(0,xinf);
y = deval(sol,x);
vx=y(2,:);  %la 2a component de la solució és f' (=vx/U)
plot(y,x), ylabel('\eta')
legend('f','df/d\eta=v_x/U','d^2f/d\eta^2','Location','SouthEast')
x99=interp1(vx,x, 0.99);
fprintf('monitor x99=%f\n',x99)

function deriv = fun(x,y)
deriv = [y(2);                  % y1'=y2
         y(3);                  % y2'=y3
        -0.5*y(3)*y(1)];        % y3'=-y3*y1/2
end
function residuals = bcres(ya,yb)
residuals = [ ya(1) ;
              ya(2) ;
              yb(2)-1];
end
```

```
xinf=input('Introduix un valor operatiu
solinit = bvpinit(linspace(0,xinf,10),[1
sol = bvp4c(@fun,@bcres,solinit);
x=linspace(0,xinf);
y = deval(sol,x);
vx=y(2,:);  %la 2a component de la soluc
plot(y,x), ylabel('\eta')
legend('f','df/d\eta=v_x/U','d^2f/d\eta^
x99=interp1(vx,x, 0.99);
fprintf('monitor x99=%f\n',x99)

function deriv = fun(x,y)
deriv = [y(2);                  % y1'=y2
         y(3);                  % y2'=y3
        -0.5*y(3)*y(1)];        % y3'=-y3*y1
end
function residuals = bcres(ya,yb)
residuals = [ ya(1) ;
              ya(2) ;
              yb(2)-1];
end
```



Definim C_D, δ_{99}

- δ_{99} és el valor de y per al qual la velocitat és el 99% de la del camp llunyà
- Es correspon amb el valor $\eta_{99} \approx 5$ de la variable de similaritat, al gràfic de *f '*

$$5 = \frac{\delta_{99}}{\sqrt{x\nu/U}}$$

- si definim $\mathrm{Re}_x \equiv xU/\nu$, $\rightarrow$

$$\boxed{\frac{\delta_{99}}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$

sabíem que: $\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$

Però ara a més a més tenim una mesura operativa de l'espessor δ de la capa límit!

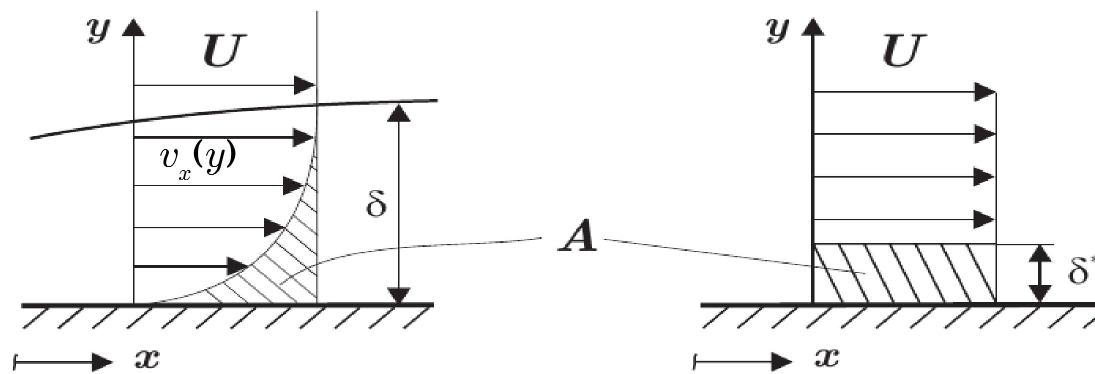
- A partir de *f ''*(0), Blasius també va calcular el coeficient d'arrossegament, C_D

$$\boxed{C_D = \frac{\frac{1}{L}\int_0^L \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} dx}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}}}}$$

Re es refereix ara a la longitud total de la placa, L

Teoria de Von Kármán de la capa límit (1921)

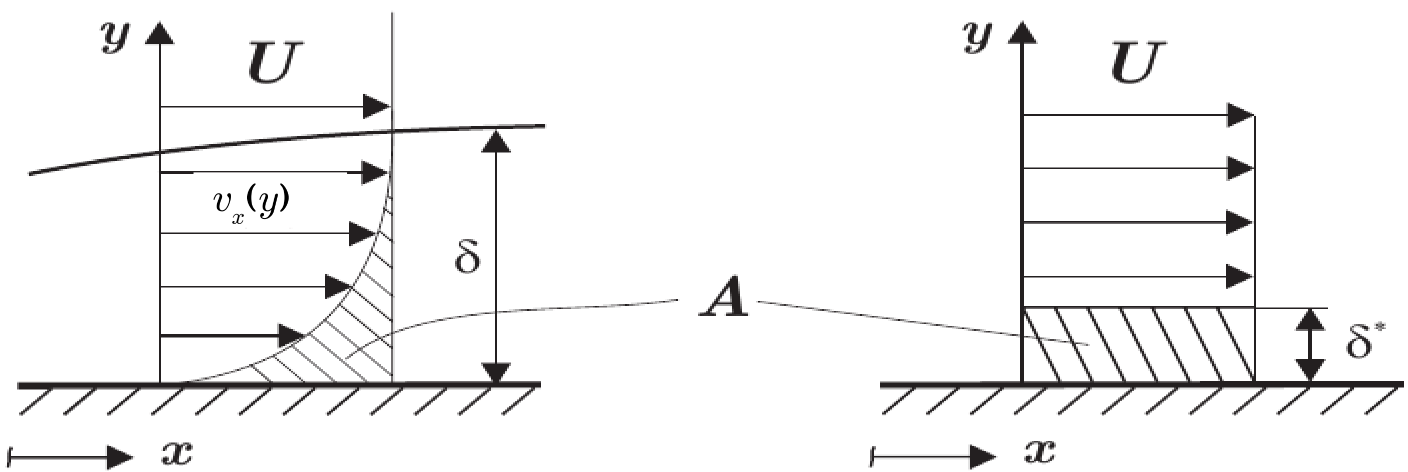
- Von Kármán va fer estimacions molt útils sense ni tan sols integrar les equacions de la capa límit laminar, només amb els balanços integrals de matèria i moment
- Per definir la capa límit, va considerar que un gradient de velocitats en la regió propera a l'objecte té com a conseqüència una reducció tant del cabal màssic com de la quantitat de moviment –respecte del flux invíscid
- Es poden definir:
  i. espessor de desplaçament
  ii. espessor de moment



i) Espessor de desplaçament δ*

$$U\,\delta^* = \int_0^\delta (U - v_x)\,dy \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy}$$

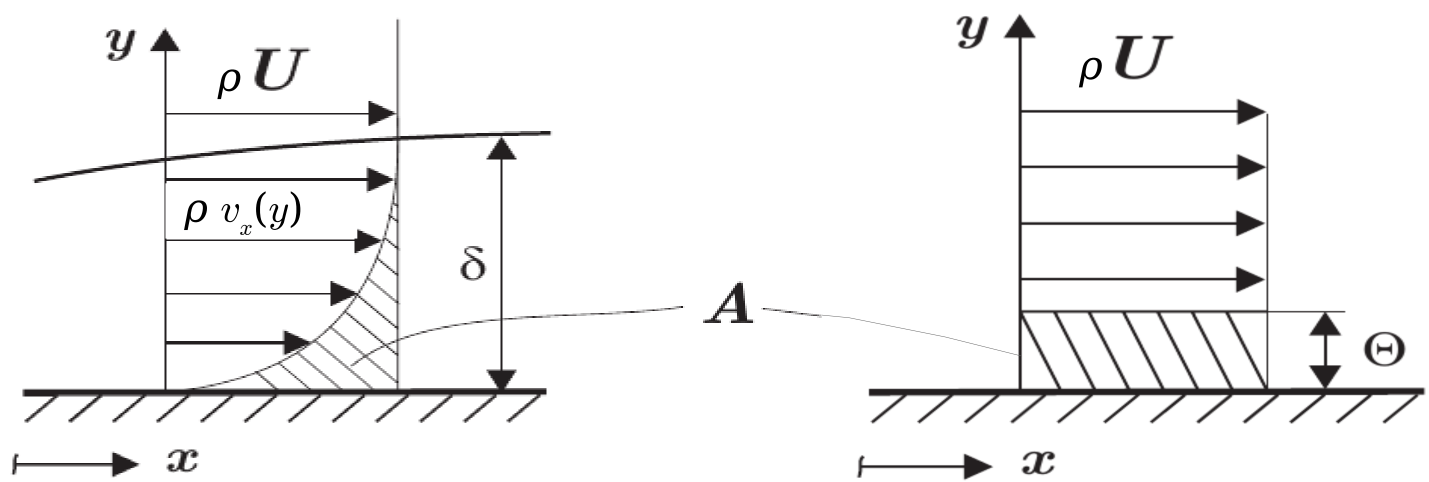
δ*: «distància a la que hauríem de desplaçar la placa en un flux invíscid que donés el mateix cabal que dona el flux viscós»



ii) Espessor de quantitat de moviment

$$\rho U^2 \Theta = \int_0^\delta v_x \rho (U - v_x)\, dy \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Theta^* = \int_0^\delta \frac{v_x}{U}\left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy}$$

Θ^* : «distància a la que hauríem de desplaçar la placa en un flux invíscid que donés el mateix flux de moment que el flux viscós»



Resultats i comparació: Von Kármán (1921) vs Blasius (1908)

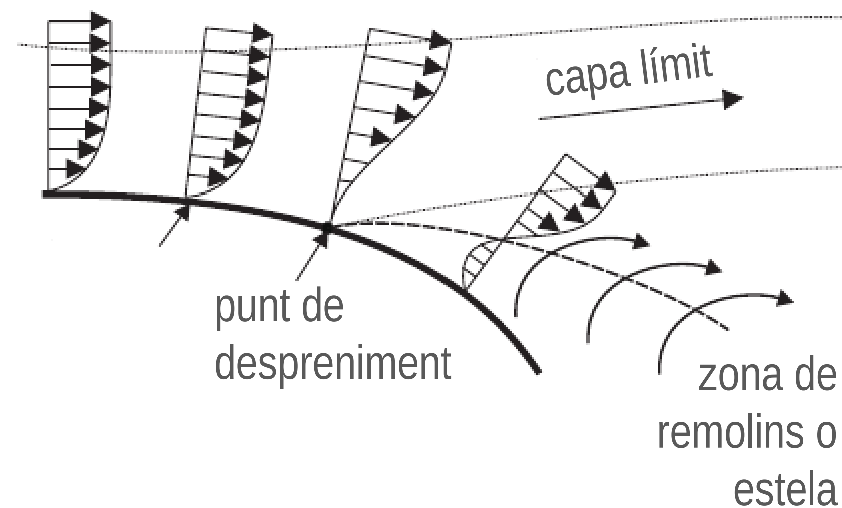
- Sense integrar les equacions de la capa límit, Von Kármán no podia fer ús del perfil v_x ni de l'espessor δ_{99}.
- Va fer una estimació de v_x basada en un perfil parabòlic, $v_x(y) = U\left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)$
- I va calcular $\delta^* \approx \frac{\delta}{3}$ $\Theta \approx \frac{2\delta}{15}$ $\frac{\delta}{x} \approx \frac{5.5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$
- mentres que amb la solució de Blasius s'obtenen

$$\delta^* = 0.344\,\delta \qquad \frac{\delta_{99}}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

- El sorprenent acord que mostra la teoria de Von Kármán amb la de Blasius només significa que v_x no està massa lluny d'un perfil parabòlic...

Separació de la capa límit

- Es produeix quan hi ha un gradient de pressió advers (positiu) aigües avall, per exemple sobre les parets en una expansió, o en travessar un obstacle
- No es produeix en zones on el gradient és negatiu o nul
- **Per què?**



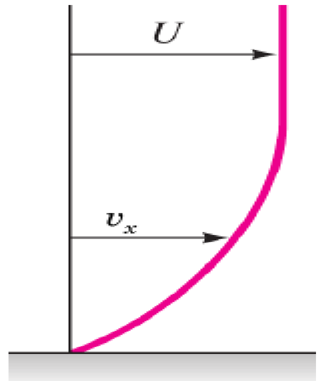
$$\underbrace{\cancel{v_x}}_{=0}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\underbrace{\cancel{v_y}}_{=0}\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{\text{paret}}+\nu\left.\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right|_{\text{paret}}$$

sobre la paret

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\quad \text{sobre la paret}}$$

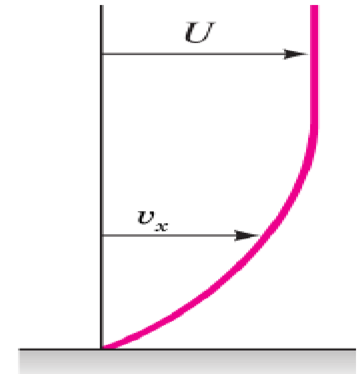
$$\frac{\partial p}{\partial x}<0 \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}<0$$

gradient de pressió favorable



$$\frac{\partial p}{\partial x}=0 \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=0$$

gradient de pressió nul (camp U uniforme)

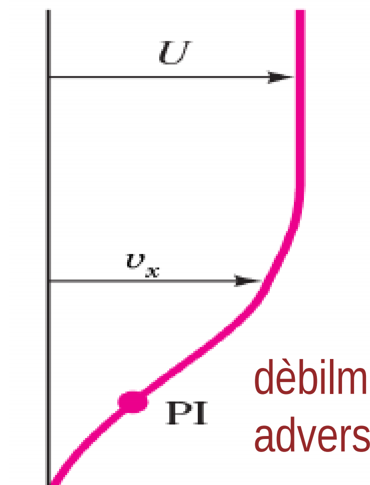


$$\frac{\partial p}{\partial x}>0 \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}>0$$

gradient de pressió advers

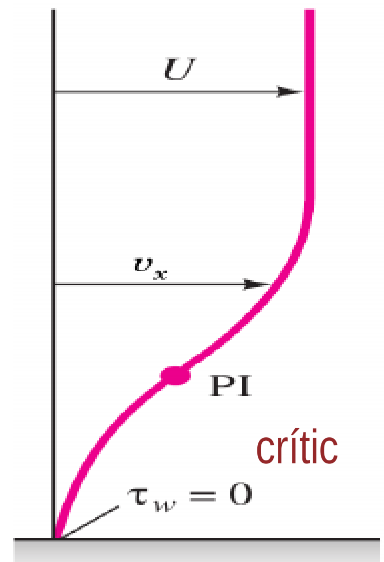
$$\mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{pared}=\tau_W$$

PI: punt d'inflexió



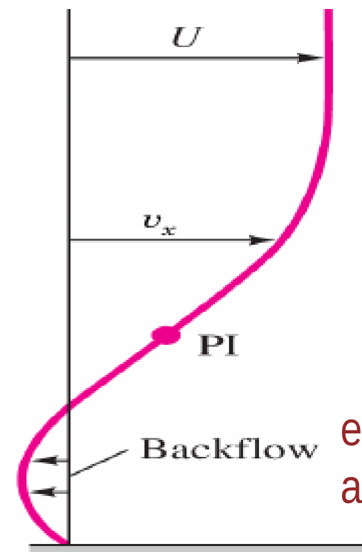
dèbilment advers

$\tau_W>0$



crític

separació



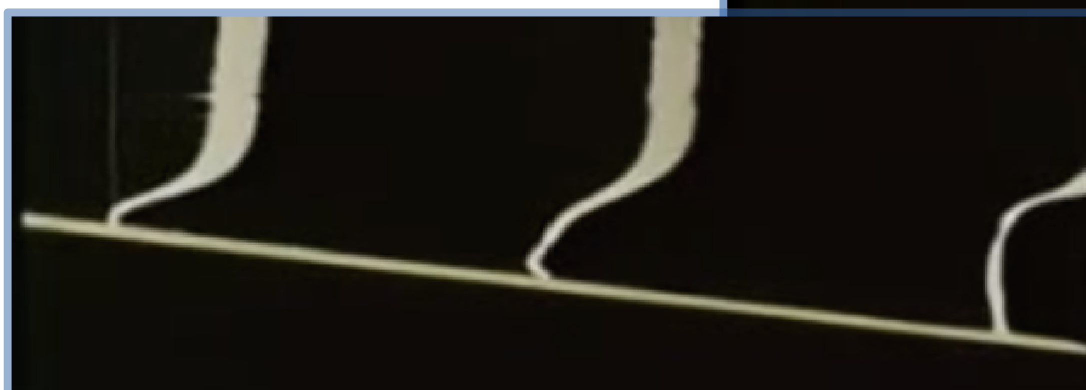
excessivament advers

$\tau_W<0$

flux invers

Exemple

- En aquesta expansió, el gradient de pressió és prou advers i es produeix la separació de la capa límit



- El fluid que hi havia en contacte amb la paret aigües amunt, queda separat d’ella per una zona de flux invers o recirculació

Fi de la presentació