Geometría: Introducción

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

- Contenido
- Materiales
- Evaluación
- Consultas

Contenido

Contenido

- Requisitos: Conocimientos de álgebra lineal

Contenido

- Requisitos: Conocimientos de álgebra lineal
- Bloque 1: Geometría afín

Contenido

- Requisitos: Conocimientos de álgebra lineal
- Bloque 1: Geometría afín
- Bloque 2: Geometría euclidiana

Contenido

- Requisitos: Conocimientos de álgebra lineal
- Bloque 1: Geometría afín
- Bloque 2: Geometría euclidiana
- Bloque 3: Geometría proyectiva

Materiales

- Presentación
- Apuntes
- Bibliografía recomendada en la guía docente.

Evaluación

Evaluación

- Examen parcial 1: día 11 de abril de 10 a 14h, 40 %

  Todo el temario hasta ese día.

Evaluación

- Examen parcial 1: día 11 de abril de 10 a 14h, 40 %
  Todo el temario hasta ese día.
- Examen parcial 2: día 29 de mayo de 10 a 14h, 40 %
  Todo el temario a partir del parcial 1.

Evaluación

- Examen parcial 1: día 11 de abril de 10 a 14h, 40 %

  Todo el temario hasta ese día.

- Examen parcial 2: día 29 de mayo de 10 a 14h, 40 %

  Todo el temario a partir del parcial 1.

- Trabajo en clase 20 %.

  Durante el curso se avaluará la participación activa en clase mediante la resolución de ejercicios en pizarra y preguntes orales o escritas.

Evaluación

- Examen parcial 1: día 11 de abril de 10 a 14h, 40 %

  Todo el temario hasta ese día.

- Examen parcial 2: día 29 de mayo de 10 a 14h, 40 %

  Todo el temario a partir del parcial 1.

- Trabajo en clase 20 %.

  Durante el curso se avaluará la participación activa en clase mediante la resolución de ejercicios en pizarra y preguntes orales o escritas.

- Segunda convocatoria: día 12 de junio de 10 a 14h. 100 %

  Examen global.

Usuari: JUAN ALBERTO RODRÍGUEZ VELÁZQUEZ

Ets a: **Curs** > **Llistat assignatures** > Llistat alumnes

ASSIGNATURA: GEOMETRIA (17274008)
GRUP: Grp CLASSE MAGISTRAL (17274008)

N	COGNOMS, NOM
1	ALBERO LUELMO, YERAY
2	CALVO MATIELI, VÍCTOR
3	CUARTERO PRIM, CRISTINA
4	DE MIGUEL CID, POL
5	DENIS , FILIP EMIL
6	DIAZ SERRA, MARCEL
7	DIESTRE RUBIO, DAVID
8	ESTEVE TOMÀS, ÈDGAR
9	GARCÍA MONTULL, CANDELA
10	GARROTE MARTÍNEZ, JUDIT
11	GENESTAR LÁZARO, MAX
12	GINÉ PEDROCCHI, NIL
13	KHADRAOUI KHADRAOUI, AISSAM
14	LOZANO BEL, ELENA
15	MARTIL VIÑOLAS, ORIOL
16	MBAYE , GORA
17	MOYA NAVARRO, DANIEL
18	MUÑOZ CURADO, ÀLEX
19	ORTEGA PINTO, PAU
20	PASCUAL RICO, ALBA
21	PEDREIRA POLO, SERGIO
22	RIVAS AZPIAZU, ANE
23	ROSET MORENO, JUAN
24	SEGÚ TORNÉ, IVET
25	TAGLIALATELA AVILÉS, ADRIÁN

Consultas

- Presenciales
- Despacho 133
- Miércoles de 16 a 18h

Preliminares

¿En álgebra, qué es un grupo?

¿En álgebra, qué es un grupo?

Definición

Un par $(G, \circ)$ es un grupo si G es un conjunto no vacío y $\circ$ es una operación que cumplen las siguientes propiedades.

¿En álgebra, qué es un grupo?

Definición

Un par $(G, \circ)$ es un grupo si G es un conjunto no vacío y $\circ$ es una operación que cumplen las siguientes propiedades.

- La operación $\circ$ es una ley de composición interna:
  $a \circ b \in G$ para todo $a, b \in G$.

¿En álgebra, qué es un grupo?

Definición

Un par $(G,\circ)$ es un grupo si G es un conjunto no vacío y $\circ$ es una operación que cumplen las siguientes propiedades.

- La operación $\circ$ es una ley de composición interna:
  $a\circ b\in G$ para todo $a,b\in G$.
- Asociativa:
  $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$ para todo $a,b,c\in G$.

¿En álgebra, qué es un grupo?

Definición

Un par $(G,\circ)$ es un grupo si G es un conjunto no vacío y $\circ$ es una operación que cumplen las siguientes propiedades.

- La operación $\circ$ es una ley de composición interna:
  $a \circ b \in G$ para todo $a,b \in G$.
- Asociativa:
  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ para todo $a,b,c \in G$.
- Elemento neutro:
  Existe $e \in G$ tal que $a \circ e = e \circ a = a$ para todo $a \in G$.

¿En álgebra, qué es un grupo?

Definición

Un par $(G,\circ)$ es un grupo si G es un conjunto no vacío y $\circ$ es una operación que cumplen las siguientes propiedades.

- La operación $\circ$ es una ley de composición interna:
  $a\circ b\in G$ para todo $a,b\in G$.
- Asociativa:
  $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$ para todo $a,b,c\in G$.
- Elemento neutro:
  Existe $e\in G$ tal que $a\circ e=e\circ a=a$ para todo $a\in G$.
- Simétrico:
  Para todo $a\in G$ existe $a'\in G$ tal que $a\circ a'=a'\circ a=e$.

Ejercicio

Sea $(G, \circ)$ un grupo.

- Prueba que el elemento neutro de G es único.
- Prueba que para cada $a \in G$ existe un único simétrico.

Ejercicio

Sea $(G, \circ)$ un grupo.

- Prueba que el elemento neutro de G es único.
- Prueba que para cada $a \in G$ existe un único simétrico.

Solución:

- Si e y e' son neutros, entonce $e' \circ e = e \circ e' = e'$ y $e \circ e' = e' \circ e = e$, lo que implica que $e = e'$. $\square$

Ejercicio

Sea $(G, \circ)$ un grupo.

- Prueba que el elemento neutro de G es único.
- Prueba que para cada $a \in G$ existe un único simétrico.

Solución:

- Si e y e' son neutros, entonce $e' \circ e = e \circ e' = e'$ y $e \circ e' = e' \circ e = e$, lo que implica que $e = e'$. $\square$
- Si $a \circ a' = e$ y $a \circ a'' = e$, entonces

Ejercicio

Sea $(G,\circ)$ un grupo.

- Prueba que el elemento neutro de G es único.
- Prueba que para cada $a \in G$ existe un único simétrico.

Solución:

- Si e y e' son neutros, entonce $e' \circ e = e \circ e' = e'$ y $e \circ e' = e' \circ e = e$, lo que implica que $e = e'$. $\square$
- Si $a \circ a' = e$ y $a \circ a'' = e$, entonces

$$\begin{aligned} a \circ a'' &= e \\ a' \circ (a \circ a'') &= a' \circ e \\ (a' \circ a) \circ a'' &= a' \\ e \circ a'' &= a' \\ a'' &= a'. \end{aligned}$$

$\square$

Terminología

- Un grupo $(G, \circ)$ es conmutativo si $a \circ b = b \circ a$ para todo $a, b \in G$.

Terminología

- Un grupo $(G,\circ)$ es conmutativo si $a\circ b = b\circ a$ para todo $a,b\in G$.
- Todo grupo de la forma $(G,+)$ se dice que es aditivo.

Terminología

- Un grupo $(G,\circ)$ es conmutativo si $a\circ b = b\circ a$ para todo $a,b\in G$.
- Todo grupo de la forma $(G,+)$ se dice que es aditivo.

  En este caso el neutro se suele llamar el elemento nulo, se denota por $e=0$, y el simétrico de a se suele llamar opuesto de a y se denota por $-a$.

Terminología

- Un grupo $(G,\circ)$ es conmutativo si $a\circ b = b\circ a$ para todo $a,b\in G$.
- Todo grupo de la forma $(G,+)$ se dice que es aditivo.

  En este caso el neutro se suele llamar el elemento nulo, se denota por $e=0$, y el simétrico de a se suele llamar opuesto de a y se denota por $-a$.
- Todo grupo de la forma $(G,\cdot)$ se dice que es multiplicativo.

Terminología

- Un grupo $(G,\circ)$ es conmutativo si $a\circ b=b\circ a$ para todo $a,b\in G$.
- Todo grupo de la forma $(G,+)$ se dice que es aditivo.

  En este caso el neutro se suele llamar el elemento nulo, se denota por $e=0$, y el simétrico de a se suele llamar opuesto de a y se denota por $-a$.
- Todo grupo de la forma $(G,\cdot)$ se dice que es multiplicativo.

  En este caso el neutro se suele llamar elemento unidad, se denota por $e=1$, y el simétrico de a se suele llamar inverso de a y se denota por a^{-1}.

Ejercicio

Prueba la estructura de grupo en los siguientes casos.

- $(\mathbb{R}^n, +)$, donde $+$ denota la adición usual en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio

Prueba la estructura de grupo en los siguientes casos.

- $(\mathbb{R}^n, +)$, donde $+$ denota la adición usual en $\mathbb{R}^n$.
- $(\mathbb{C}, +)$, donde $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos y $+$ la adición usual.

Ejercicio

Prueba la estructura de grupo en los siguientes casos.

- $(\mathbb{R}^n, +)$, donde $+$ denota la adición usual en $\mathbb{R}^n$.
- $(\mathbb{C}, +)$, donde $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos y $+$ la adición usual.
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, donde $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos y $\cdot$ la multiplicación usual.

Ejercicio

Prueba la estructura de grupo en los siguientes casos.

- $(\mathbb{R}^n, +)$, donde $+$ denota la adición usual en $\mathbb{R}^n$.
- $(\mathbb{C}, +)$, donde $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos y $+$ la adición usual.
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, donde $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos y $\cdot$ la multiplicación usual.
- $(O(2^+), \cdot)$ donde $O(2^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \quad a^2 + b^2 = 1 \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$, con la multiplicación usual de matrices.

Ejercicio

Prueba la estructura de grupo en los siguientes casos.

- $(\mathbb{R}^n, +)$, donde $+$ denota la adición usual en $\mathbb{R}^n$.
- $(\mathbb{C}, +)$, donde $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos y $+$ la adición usual.
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, donde $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos y $\cdot$ la multiplicación usual.
- $(O(2^+), \cdot)$ donde $O(2^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \quad a^2 + b^2 = 1 \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$, con la multiplicación usual de matrices.
- $(U, \cdot)$ donde $U = \left\{ e^{ix} : \ x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{C}$ con la multiplicación usual.

Ejercicio

Prueba la estructura de grupo en los siguientes casos.

- $(\mathbb{R}^n, +)$, donde $+$ denota la adición usual en $\mathbb{R}^n$.
- $(\mathbb{C}, +)$, donde $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos y $+$ la adición usual.
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, donde $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos y $\cdot$ la multiplicación usual.
- $(O(2^+), \cdot)$ donde $O(2^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \quad a^2 + b^2 = 1 \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$, con la multiplicación usual de matrices.
- $(U, \cdot)$ donde $U = \left\{ e^{ix} : \; x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{C}$ con la multiplicación usual.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ donde $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ con la adición de enteros módulo n.

Ejercicio

Prueba la estructura de grupo en los siguientes casos.

- $(\mathbb{R}^n, +)$, donde $+$ denota la adición usual en $\mathbb{R}^n$.
- $(\mathbb{C}, +)$, donde $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos y $+$ la adición usual.
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, donde $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos y $\cdot$ la multiplicación usual.
- $(O(2^+), \cdot)$ donde $O(2^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \quad a^2 + b^2 = 1 \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$, con la multiplicación usual de matrices.
- $(U, \cdot)$ donde $U = \left\{ e^{ix} : \ x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{C}$ con la multiplicación usual.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ donde $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ con la adición de enteros módulo n.
- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ donde p es primo y $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{1, \ldots, p-1\}$ con la multiplicación de enteros módulo p.

Ejercicio

Pon dos ejemplos de grupos no conmutativos.

Ejercicio

Pon dos ejemplos de grupos no conmutativos.

Solución

- El grupo $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ de todas las matrices reales de orden 2 con determinante diferente de cero con la multiplicación usual de matrices.

Ejercicio

Pon dos ejemplos de grupos no conmutativos.

Solución

- El grupo $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ de todas las matrices reales de orden 2 con determinante diferente de cero con la multiplicación usual de matrices.
- El grupo $(CI[a,b], \circ)$ de todas las funciones continuas e inyectivas en el intervalo $[a,b]$ con la composición de funciones.

¿Qué relación hay entre cuerpos y grupos?

¿Qué relación hay entre cuerpos y grupos?

En este curso nos interesa el caso conmutativo!

¿Qué relación hay entre cuerpos y grupos?

En este curso nos interesa el caso conmutativo!

Cuerpo conmutativo

$(\mathbb{K},+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo si se cumplen las siguientes propiedades.

- $(\mathbb{K},+)$ es un grupo conmutativo.
- $(\mathbb{K}\setminus\{0\},\cdot)$ es un grupo conmutativo, donde 0 es el neutro de $(\mathbb{K},+)$.
- $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ para todo $a,b,c\in\mathbb{K}$.

Ejercicio

Pon tres ejemplos de cuerpo conmutativo.

Ejercicio

Pon tres ejemplos de cuerpo conmutativo.

Solución

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Ejercicio

Pon tres ejemplos de cuerpo conmutativo.

Solución

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Ejercicio

Pon tres ejemplos de cuerpo conmutativo.

Solución

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Ejercicio

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo

- Demuestra que $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{K}$
- Demuestra que $\mathbb{K}$ no tiene divisores de cero.

Ejercicio

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo

- Demuestra que $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{K}$
- Demuestra que $\mathbb{K}$ no tiene divisores de cero.

Solución

- $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$.

  Esto implica que $a \cdot 0 = 0$, por la unicidad del elemento neutro. $\square$

Ejercicio

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo

- Demuestra que $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{K}$
- Demuestra que $\mathbb{K}$ no tiene divisores de cero.

Solución

- $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$

  Esto implica que $a \cdot 0 = 0$, por la unicidad del elemento neutro. $\square$
- Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tales que $a \cdot b = 0$.

Ejercicio

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo

- Demuestra que $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{K}$
- Demuestra que $\mathbb{K}$ no tiene divisores de cero.

Solución

- $a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$.

  Esto implica que $a \cdot 0 = 0$, por la unicidad del elemento neutro. $\square$

- Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tales que $a \cdot b = 0$.

  En tal caso,

  $$a = a \cdot 1 = a \cdot (b \cdot b^{-1}) = (a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1} = 0,$$

  lo que es una contradicción.

  Por lo tanto, $a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$. $\square$

Geometría

¿Qué es una geometría?

Geometría

¿Qué es una geometría?

- Informalmente, una **geometría** es un par (E,G) formado por un conjunto E y un grupo G que actúa sobre los elementos de E.

Geometría

¿Qué es una geometría?

- Informalmente, una **geometría** es un par (E, G) formado por un conjunto E y un grupo G que actúa sobre los elementos de E.
- El objeto de una geometría (E, G) consiste en el estudio de las propiedades de E que se mantienen invariantes cuando los elementos de E se someten a la acción de los elementos de G.

Geometría

¿Qué es una geometría?

- Informalmente, una **geometría** es un par (E, G) formado por un conjunto E y un grupo G que actúa sobre los elementos de E.
- El objeto de una geometría (E, G) consiste en el estudio de las propiedades de E que se mantienen invariantes cuando los elementos de E se someten a la acción de los elementos de G.
- El conjunto E definido a través de ciertas propiedades, es denominado **espacio** con un determinado apellido heredado de su propia definición. El grupo G se conoce como **grupo de transformaciones**.

Geometría

¿Qué es una geometría?

- Informalmente, una **geometría** es un par (E,G) formado por un conjunto E y un grupo G que actúa sobre los elementos de E.
- El objeto de una geometría (E,G) consiste en el estudio de las propiedades de E que se mantienen invariantes cuando los elementos de E se someten a la acción de los elementos de G.
- El conjunto E definido a través de ciertas propiedades, es denominado **espacio** con un determinado apellido heredado de su propia definición. El grupo G se conoce como **grupo de transformaciones**.
- En particular nos interesa la **geometría afín**, que consiste en el espacio afín y las transformaciones afines; la **geometría euclidiana**, que es el caso particular de geometría afín donde el espacio es euclidiano; y la **geometría proyectiva** donde estudiamos el espacio proyectivo y las transformaciones proyectivas.

Próximo día: Espacio Afín