Geometría euclidiana en el plano: Introducción

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

¿Qué estructura tiene $O^+(2)$?

Una matriz $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ pertenece a $O(2)$ si y solo si $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ y $ac + bd = 0$.

¿Qué estructura tiene $O^+(2)$?

Una matriz $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ pertenece a $O(2)$ si y solo si $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ y $ac+bd=0$.

De ahí resulta,

$$A = \begin{pmatrix} a & -\xi b \\ b & \xi a \end{pmatrix} \text{ con } \xi \in \{-1,1\} \text{ y } a^2+b^2=1.$$

¿Qué estructura tiene $O^+(2)$?

Una matriz $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ pertenece a $O(2)$ si y solo si $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ y $ac+bd=0$.

De ahí resulta,

$$A = \begin{pmatrix} a & -\xi b \\ b & \xi a \end{pmatrix} \text{ con } \xi \in \{-1,1\} \text{ y } a^2+b^2=1.$$

Tenemos que $A \in O^+(2)$ si y solo si $\det(A) = \xi = 1$. Resumiendo, los elementos de $O^+(2)$ son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ where } a^2+b^2=1.$$

Proposition

El grupo ortogonal $(O^+(2), \cdot)$ es isomorfo al grupo multiplicativo U de números complejos con módulo uno.

Proposition

El grupo ortogonal $(O^+(2),\cdot)$ es isomorfo al grupo multiplicativo U de números complejos con módulo uno.

Demostración

Vamos a considerar la aplicación

$$\begin{aligned} h : O^+(2) &\longrightarrow \quad U \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &\longrightarrow \quad a+ib. \end{aligned}$$

Obviamente, h es biyectiva.

Proposition

El grupo ortogonal $(O^+(2),\cdot)$ es isomorfo al grupo multiplicativo U de números complejos con módulo uno.

Demostración

Vamos a considerar la aplicación

$$\begin{aligned} h: O^+(2) &\longrightarrow \quad U \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &\longrightarrow \quad a+ib. \end{aligned}$$

Obviamente, h es biyectiva. Además, h es un homomorfismo ya que

$$\begin{aligned} h(AA') &= h\begin{pmatrix} aa'-bb' & -(ba'+ab') \\ ba'+ab' & aa'-bb' \end{pmatrix} \\ &= aa'-bb'+i(ba'+ab') \\ &= (a+ib)(a'+ib') \\ &= h(A)h(A'). \end{aligned}$$

□

Corolario

El grupo $(O^+(2),\cdot)$ es conmutativo y, como resultado, en el plano euclidiano P para cualquier isometría positiva $f,g \in O^+(P)$,

$$f \circ g \circ f^{-1} = g.$$

Corolario

El grupo $(O^+(2), \cdot)$ es conmutativo y, como resultado, en el plano euclidiano P para cualquier isometría positiva $f, g \in O^+(P)$,

$$f \circ g \circ f^{-1} = g.$$

Esto implica que si seleccionamos una orientación del plano, es decir, si consideramos una clase de bases ordenadas tal que para cualquier par de bases ordenadas de la clase el determinante de la matriz de cambio de base es siempre positivo, entonces la matriz de una isometría positiva no depende de la base ortonormal utilizada para obtenerla, ya que en ese caso la matriz de cabio de bases corresponde a una isometría positiva.

Proposición

Dados dos vectores unitarios $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u'}$ de un plano euclidiano P, existe una única isometría $f \in O^+(P)$ que transforma $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{u'}$.

Proposición

Dados dos vectores unitarios $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u'}$ de un plano euclidiano P, existe una única isometría $f \in O^+(P)$ que transforma $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{u'}$.

Demostración

- Sea $B = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ una base ortonormal del plano.

Proposición

Dados dos vectores unitarios $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u'}$ de un plano euclidiano P, existe una única isometría $f \in O^+(P)$ que transforma $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{u'}$.

Demostración

- Sea $B = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ una base ortonormal del plano.
- Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\overrightarrow{u'} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, donde $a^2 + b^2 = 1$, ya que $\overrightarrow{u'}$ es unitario.

Proposición

Dados dos vectores unitarios $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u'}$ de un plano euclidiano P, existe una única isometría $f \in O^+(P)$ que transforma $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{u'}$.

Demostración

- Sea $B = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ una base ortonormal del plano.
- Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\overrightarrow{u'} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, donde $a^2 + b^2 = 1$, ya que $\overrightarrow{u'}$ es unitario.
- Sea f la isometría con matriz asociada $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ en la base B.

Proposición

Dados dos vectores unitarios $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u'}$ de un plano euclidiano P, existe una única isometría $f \in O^+(P)$ que transforma $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{u'}$.

Demostración

- Sea $B = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ una base ortonormal del plano.
- Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\overrightarrow{u'} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, donde $a^2 + b^2 = 1$, ya que $\overrightarrow{u'}$ es unitario.
- Sea f la isometría con matriz asociada $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ en la base B.
- La aplicación f transforma $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{u'}$, ya que $\overrightarrow{u}_B = (1,0)$, $\overrightarrow{u'}_B = (a,b)$ y $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Proposición

Dados dos vectores unitarios $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u'}$ de un plano euclidiano P, existe una única isometría $f \in O^+(P)$ que transforma $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{u'}$.

Demostración

- Sea $B = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ una base ortonormal del plano.
- Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\overrightarrow{u'} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, donde $a^2 + b^2 = 1$, ya que $\overrightarrow{u'}$ es unitario.
- Sea f la isometría con matriz asociada $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ en la base B.
- La aplicación f transforma $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{u'}$, ya que $\overrightarrow{u}_B = (1,0)$, $\overrightarrow{u'}_B = (a,b)$ y $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- La isometría f está únicamente determinada por a y b. $\square$

Rotaciones

En concordancia con el resultado anterior, las isometrías lineales positivas de un plano euclidiano se llaman *rotaciones*.

Rotaciones

En concordancia con el resultado anterior, las isometrías lineales positivas de un plano euclidiano se llaman *rotaciones*.

Estamos en condiciones de definir ángulo orientado y ángulo no orientado.

Definición

Sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia sobre el conjunto de pares ordenados de vectores unitarios del plano euclidiano definida por,

- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\mathcal{R}(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ si y solo si existe una rotación f tal que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ and $f(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$.

La clase de equivalencia $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ se denomina *ángulo orientado*.

Definición

Sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia sobre el conjunto de pares ordenados de vectores unitarios del plano euclidiano definida por,

- $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\mathcal{R}(\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'})$ si y solo si existe una rotación f tal que $f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{v}$ and $f(\overrightarrow{u'})=\overrightarrow{v'}$.

La clase de equivalencia $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ se denomina *ángulo orientado*.

También se usa esta terminología para los pares de la forma $(\lambda\overrightarrow{u},\lambda'\overrightarrow{v})$, con $\lambda,\lambda'>0$, aunque la relación de equivalencia se establece para vectores unitarios.

- Si f y g son rotaciones de un plano y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son vectores unitarios $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ and $g(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$, entonces $g \circ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{w}$.

- Si f y g son rotaciones de un plano y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son vectores unitarios $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ and $g(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$, entonces $g \circ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{w}$.
- Por lo tanto, podemos definir

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}).$$

- Si f y g son rotaciones de un plano y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son vectores unitarios $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ and $g(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$, entonces $g \circ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{w}$.
- Por lo tanto, podemos definir

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}).$$

- Nótese que los ángulos orientados son clases de equivalencias. Por lo tanto,

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}) = (\overrightarrow{u''}, \overrightarrow{v''}),$$

siempre que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$, $g(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$ and $g \circ f(\overrightarrow{u''}) = \overrightarrow{v''}$.

- Si f y g son rotaciones de un plano y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son vectores unitarios $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ and $g(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$, entonces $g \circ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{w}$.
- Por lo tanto, podemos definir

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}).$$

- Nótese que los ángulos orientados son clases de equivalencias. Por lo tanto,

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}) = (\overrightarrow{u''}, \overrightarrow{v''}),$$

  siempre que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$, $g(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$ and $g \circ f(\overrightarrow{u''}) = \overrightarrow{v''}$.
- Esta operación da al conjunto de ángulos orientados de vectores la estructura de grupo conmutativo, que se hereda de la estructura de grupo conmutativo de $(O^+(P), \circ)$.

Amplitud de un ángulo

- Sea U el conjunto de números complejos de módulo uno. Sea R la aplicación definida por

$$\begin{aligned} R: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow U \longrightarrow O^{+}(2) \\ & \alpha \longrightarrow e^{i\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Amplitud de un ángulo

- Sea U el conjunto de números complejos de módulo uno. Sea R la aplicación definida por

$$\begin{aligned} R: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow U \longrightarrow O^{+}(2) \\ & \alpha \longrightarrow e^{i\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- R es sobreyectiva y periódica de periodo 2π. Además, esta aplicación define un isomorfismo de grupos $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow O^{+}(2)$.

Amplitud de un ángulo

- Sea U el conjunto de números complejos de módulo uno. Sea R la aplicación definida por

$$\begin{aligned} R:\quad & \mathbb{R} \longrightarrow U \longrightarrow O^+(2) \\ & \alpha \longrightarrow e^{i\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- R es sobreyectiva y periódica de periodo 2π. Además, esta aplicación define un isomorfismo de grupos $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow O^+(2)$.
- Si una rotación f_α está dada por la matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, entonces decimos que α es la *amplitud del ángulo orientado* asociado a f_α.

Amplitud de un ángulo

- Sea U el conjunto de números complejos de módulo uno. Sea R la aplicación definida por
$$\begin{aligned} R: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow U \longrightarrow O^+(2) \\ & \alpha \longrightarrow e^{i\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
- R es sobreyectiva y periódica de periodo 2π. Además, esta aplicación define un isomorfismo de grupos $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow O^+(2)$.
- Si una rotación f_α está dada por la matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, entonces decimos que α es la *amplitud del ángulo orientado* asociado a f_α.
- Por lo tanto, todas las amplitudes $\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, son equivalentes.

Amplitud de un ángulo

- Sea U el conjunto de números complejos de módulo uno. Sea R la aplicación definida por

$$\begin{aligned} R: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow U \longrightarrow O^{+}(2) \\ & \alpha \longrightarrow e^{i\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- R es sobreyectiva y periódica de periodo 2π. Además, esta aplicación define un isomorfismo de grupos $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow O^{+}(2)$.
- Si una rotación f_α está dada por la matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, entonces decimos que α es la *amplitud del ángulo orientado* asociado a f_α.
- Por lo tanto, todas las amplitudes $\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, son equivalentes.
- Usualmente se toma un representante para la amplitud de un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Ejemplos

- Para todo vector unitario $\overrightarrow{u}$, el ángulo $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u})$, llamado *ángulo llano*, tiene amplitud $\pi + 2k\pi$, ya que está asociado a la rotación $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejemplos

- Para todo vector unitario $\overrightarrow{u}$, el ángulo $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u})$, llamado *ángulo llano*, tiene amplitud $\pi + 2k\pi$, ya que está asociado a la rotación $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Para todo par de vectores unitarios $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, con $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, el ángulo $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, llamado *ángulo recto*, tiene amplitud $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ya que está asociad a la rotación $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposición

Las reflexiones invierten los ángulos orientados.

Proposición

Las reflexiones invierten los ángulos orientados.

Demostración

- Sea S_D una reflexión. Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores unitarios y f una rotación tal que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$.

Proposición

Las reflexiones invierten los ángulos orientados.

Demostración

- Sea S_D una reflexión. Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores unitarios y f una rotación tal que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$.
- Sea D' el subespacio vectorial generado por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Proposición

Las reflexiones invierten los ángulos orientados.

Demostración

- Sea S_D una reflexión. Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores unitarios y f una rotación tal que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$.
- Sea D' el subespacio vectorial generado por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
- Como $S_D \circ S_{D'}$ es una isometría positiva, $f \circ (S_D \circ S_{D'}) = (S_D \circ S_{D'}) \circ f$, y por eso

$$f(S_D \circ S_{D'}(\overrightarrow{v})) = S_D \circ S_{D'}(f(\overrightarrow{v})) = S_D \circ S_{D'}(\overrightarrow{u}).$$

Proposición

Las reflexiones invierten los ángulos orientados.

Demostración

- Sea S_D una reflexión. Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores unitarios y f una rotación tal que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$.
- Sea D' el subespacio vectorial generado por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
- Como $S_D \circ S_{D'}$ es una isometría positiva, $f \circ (S_D \circ S_{D'}) = (S_D \circ S_{D'}) \circ f$, y por eso
$$f(S_D \circ S_{D'}(\overrightarrow{v})) = S_D \circ S_{D'}(f(\overrightarrow{v})) = S_D \circ S_{D'}(\overrightarrow{u}).$$
- Por lo tanto,
$$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = (S_D \circ S_{D'}(\overrightarrow{v}), S_D \circ S_{D'}(\overrightarrow{u})) = (S_D(\overrightarrow{u}), S_D(\overrightarrow{v})).$$

$\square$

Ángulos geométricos

1. Podemos definir *ángulo geométrico* de dos vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ac}$ como la envoltura convexa de la unión de las dos semirrectas generadas por los vectores $\overrightarrow{u}$ and $\overrightarrow{v}$. En este caso, a es el *vértice del ángulo*.

Ángulos geométricos

1. Podemos definir *ángulo geométrico* de dos vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ac}$ como la envoltura convexa de la unión de las dos semirrectas generadas por los vectores $\overrightarrow{u}$ and $\overrightarrow{v}$. En este caso, a es el *vértice del ángulo*.

2. Un ángulo geométrico definido por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tiene dos ángulos *suplementarios*, uno es el ángulo geométrico definidos por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $-\overrightarrow{v}$ y el otro está definido por $-\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Ángulos geométricos

1. Podemos definir *ángulo geométrico* de dos vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ac}$ como la envoltura convexa de la unión de las dos semirrectas generadas por los vectores $\overrightarrow{u}$ and $\overrightarrow{v}$. En este caso, a es el *vértice del ángulo*.
2. Un ángulo geométrico definido por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tiene dos ángulos *suplementarios*, uno es el ángulo geométrico definidos por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $-\overrightarrow{v}$ y el otro está definido por $-\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.
3. La *amplitud de un ángulo geométrico* es el único número real $\alpha \in [0,\pi]$ tal que α es la amplitud de uno de los ángulos orientados $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})$.

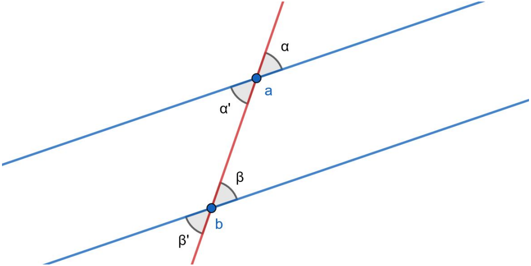
Ángulos geométricos

1. Podemos definir *ángulo geométrico* de dos vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ac}$ como la envoltura convexa de la unión de las dos semirrectas generadas por los vectores $\overrightarrow{u}$ and $\overrightarrow{v}$. En este caso, a es el *vértice del ángulo*.
2. Un ángulo geométrico definido por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tiene dos ángulos *suplementarios*, uno es el ángulo geométrico definidos por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $-\overrightarrow{v}$ y el otro está definido por $-\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.
3. La *amplitud de un ángulo geométrico* es el único número real $\alpha \in [0,\pi]$ tal que α es la amplitud de uno de los ángulos orientados $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.
4. Definiremos *ángulo entre dos rectas* como el ángulo geométrico de menor amplitud, entre los ángulos geométricos definidos por sus vectores directores.

Ángulos geométricos

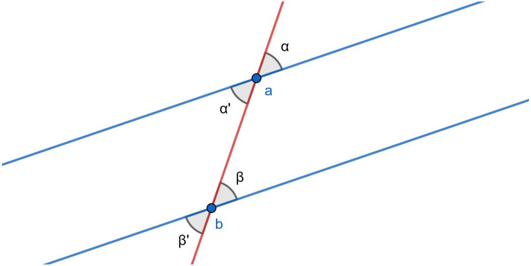
1. Podemos definir *ángulo geométrico* de dos vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ac}$ como la envoltura convexa de la unión de las dos semirrectas generadas por los vectores $\overrightarrow{u}$ and $\overrightarrow{v}$. En este caso, a es el *vértice del ángulo*.
2. Un ángulo geométrico definido por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tiene dos ángulos *suplementarios*, uno es el ángulo geométrico definidos por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $-\overrightarrow{v}$ y el otro está definido por $-\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.
3. La *amplitud de un ángulo geométrico* es el único número real $\alpha \in [0,\pi]$ tal que α es la amplitud de uno de los ángulos orientados $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.
4. Definiremos *ángulo entre dos rectas* como el ángulo geométrico de menor amplitud, entre los ángulos geométricos definidos por sus vectores directores.
5. Las isometrías preservan la amplitud de los ángulos geométricos.

Consideramos el siguiente ejemplo, donde las rectas en azul son paralelas.



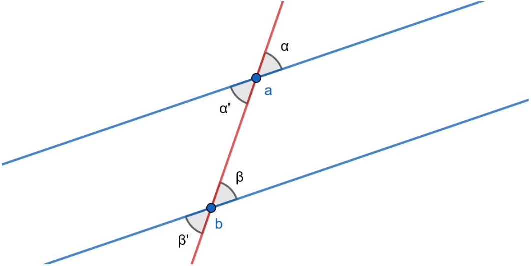
Consideramos el siguiente ejemplo, donde las rectas en azul son paralelas.

- Los ángulos α y α' se llaman *opuestos por el vértice*



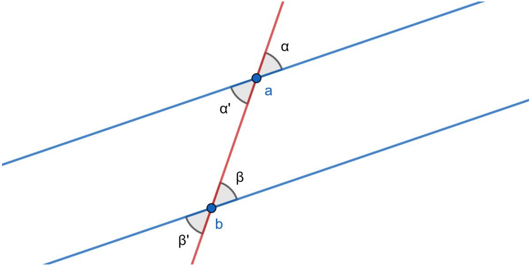
Consideramos el siguiente ejemplo, donde las rectas en azul son paralelas.

- Los ángulos α y α' se llaman *opuestos por el vértice*
- Los ángulos α y β' se llaman *alternos externos entre paralelas*



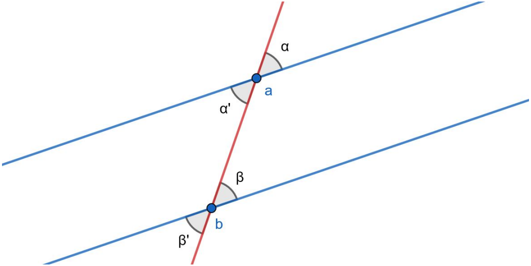
Consideramos el siguiente ejemplo, donde las rectas en azul son paralelas.

- Los ángulos α y α' se llaman *opuestos por el vértice*
- Los ángulos α y β' se llaman *alternos externos entre paralelas*
- Los ángulos α' y β se llaman *alternos internos entre paralelas*.



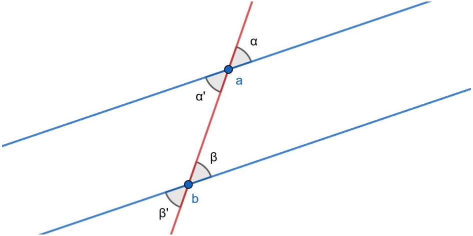
Consideramos el siguiente ejemplo, donde las rectas en azul son paralelas.

- Los ángulos α y α' se llaman *opuestos por el vértice*
- Los ángulos α y β' se llaman *alternos externos entre paralelas*
- Los ángulos α' y β se llaman *alternos internos entre paralelas*.
- Los ángulos α y β se llaman *correspondientes entre paralelas*.



Ejemplo

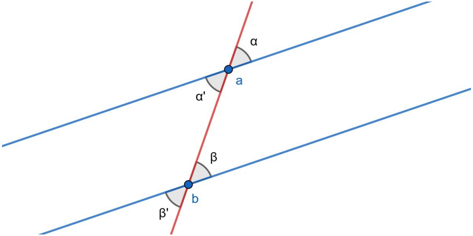
Si no hay lugar a confusión, los ángulos y sus amplitudes se denotarán de la misma manera. Consideremos la siguiente figura en el plano euclidiano, donde las rectas en azul son paralelas.



Ejemplo

Si no hay lugar a confusión, los ángulos y sus amplitudes se denotarán de la misma manera. Consideremos la siguiente figura en el plano euclidiano, donde las rectas en azul son paralelas.

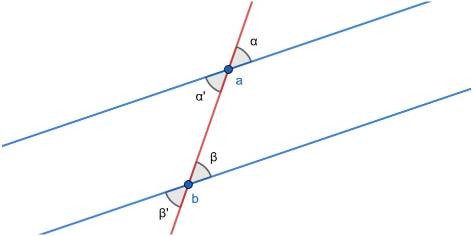
- Como α' se obtiene de α por una simetría central de centro a (o rotación de ángulo π), tenemos que $\alpha = \alpha'$. Análogamente, $\beta = \beta'$



Ejemplo

Si no hay lugar a confusión, los ángulos y sus amplitudes se denotarán de la misma manera. Consideremos la siguiente figura en el plano euclidiano, donde las rectas en azul son paralelas.

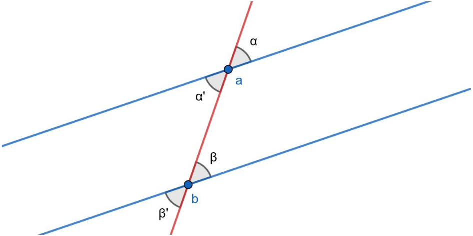
- Como α' se obtiene de α por una simetría central de centro a (o rotación de ángulo π), tenemos que $\alpha = \alpha'$. Análogamente, $\beta = \beta'$
- Para ver que $\alpha = \beta$ sólo tenemos que considerar una traslación del vector $\overrightarrow{ba}$.



Ejemplo

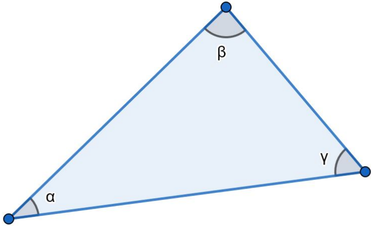
Si no hay lugar a confusión, los ángulos y sus amplitudes se denotarán de la misma manera. Consideremos la siguiente figura en el plano euclidiano, donde las rectas en azul son paralelas.

- Como α' se obtiene de α por una simetría central de centro a (o rotación de ángulo π), tenemos que $\alpha = \alpha'$. Análogamente, $\beta = \beta'$
- Para ver que $\alpha = \beta$ sólo tenemos que considerar una traslación del vector $\overrightarrow{ba}$.
- Por lo tanto, $\alpha = \alpha' = \beta = \beta'$.



Ejercicio

Considera la siguiente figura en el plano euclidiano y demuestra que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.



Solución

La idea se muestra en la siguiente figura donde trazamos una paralela a un lado pasando por el vértice opuesto. Como $\delta+\beta+\theta=\pi$, el resultado se deduce teniendo en cuenta que $\delta=\alpha$ y $\theta=\gamma$, ya que son alternos internos entre paralelas. $\square$