Aplicacions de la derivada a l’anàlisi de funcions

Àlex Arenas, Sergio Gómez

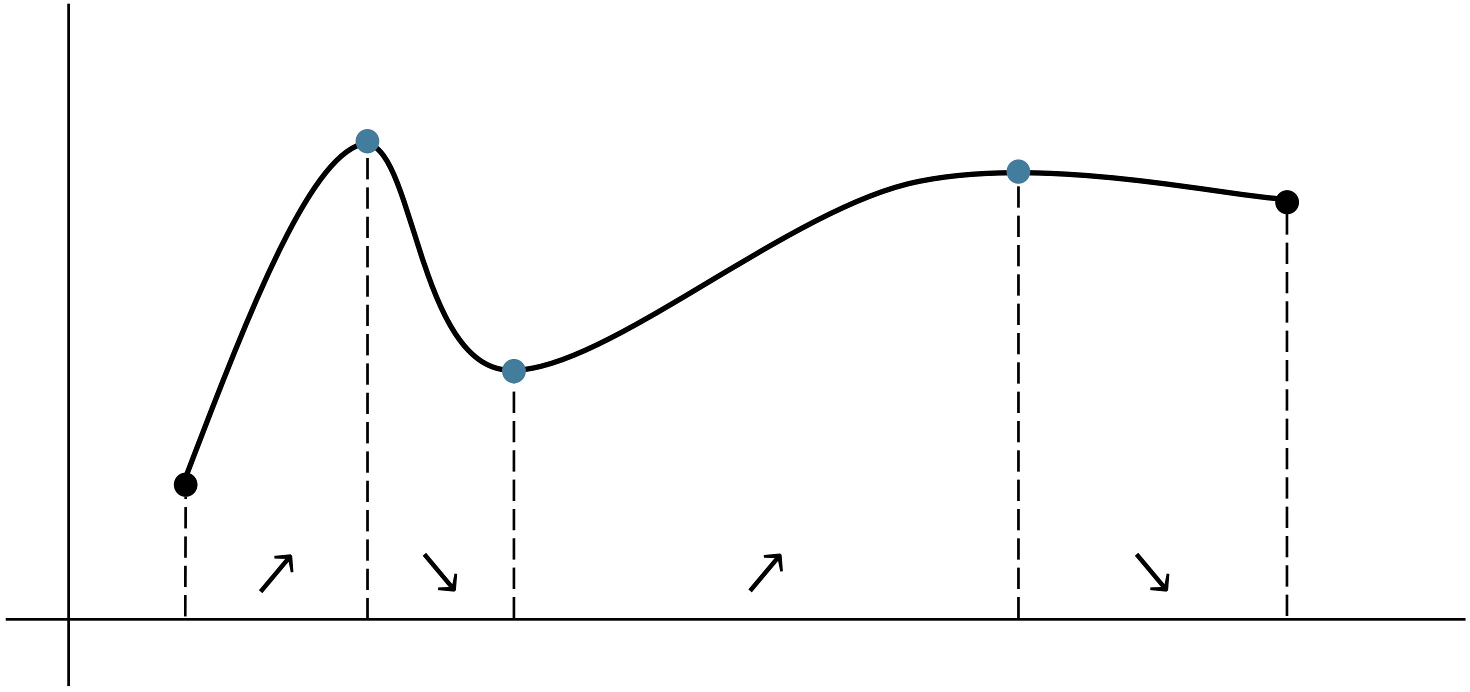
Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

Aplicacions a l’anàlisi de funcions

- Creixement
  - Creixement, decreixement, extrems locals i globals, punts singulars
- Concavitat
  - Concavitat, convexitat, punts d’inflexió
- Representació gràfica de funcions

- Definicions
  - Creixement i decreixement
    - Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real definida en un interval I
    - f és creixent en I si
      $$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$$
    - f és decreixent en I si
      $$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$$
    - f és constant en I si
      $$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) = f(x_2)$$
    - f és estrictament creixent en I si
      $$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$
    - f és estrictament decreixent en I si
      $$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$$

- Definicions
  - Creixement i decreixement
    - creixent = ↗
    - decreixent = ↘



- Definicions
  - Extrems
    - Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real definida en un interval I

    - $x \in I$ és un màxim local si

      $\exists \delta > 0 : f(x)$ és màxim de $f(J)$ per $J = (x - \delta, x + \delta)$
    - $x \in I$ és un mínim local si

      $\exists \delta > 0 : f(x)$ és mínim de $f(J)$ per $J = (x - \delta, x + \delta)$
    - $x \in I$ és un extrem local o un extrem relatiu sii és un màxim o un mínim local

    - $x \in I$ és un màxim global si $f(x)$ és un màxim de $f(I)$
    - $x \in I$ és un mínim global si $f(x)$ és un mínim de $f(I)$
    - $x \in I$ és un extrem global si és un màxim o un mínim global

Definicions

Concavitat i convexitat

- Sigui $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real definida en un interval I

- f és convexa si $\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall x \in (x_1, x_2)$ es compleix

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

- f és còncava si $\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall x \in (x_1, x_2)$ es compleix

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

- Convexa = Còncava cap amunt = ∪
- Còncava = Còncava cap avall = ∩

Definicions

Concavitat i convexitat

- Sigui $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real definida en un interval I

- f és convexa si $\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall x \in (x_1, x_2)$ es compleix
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

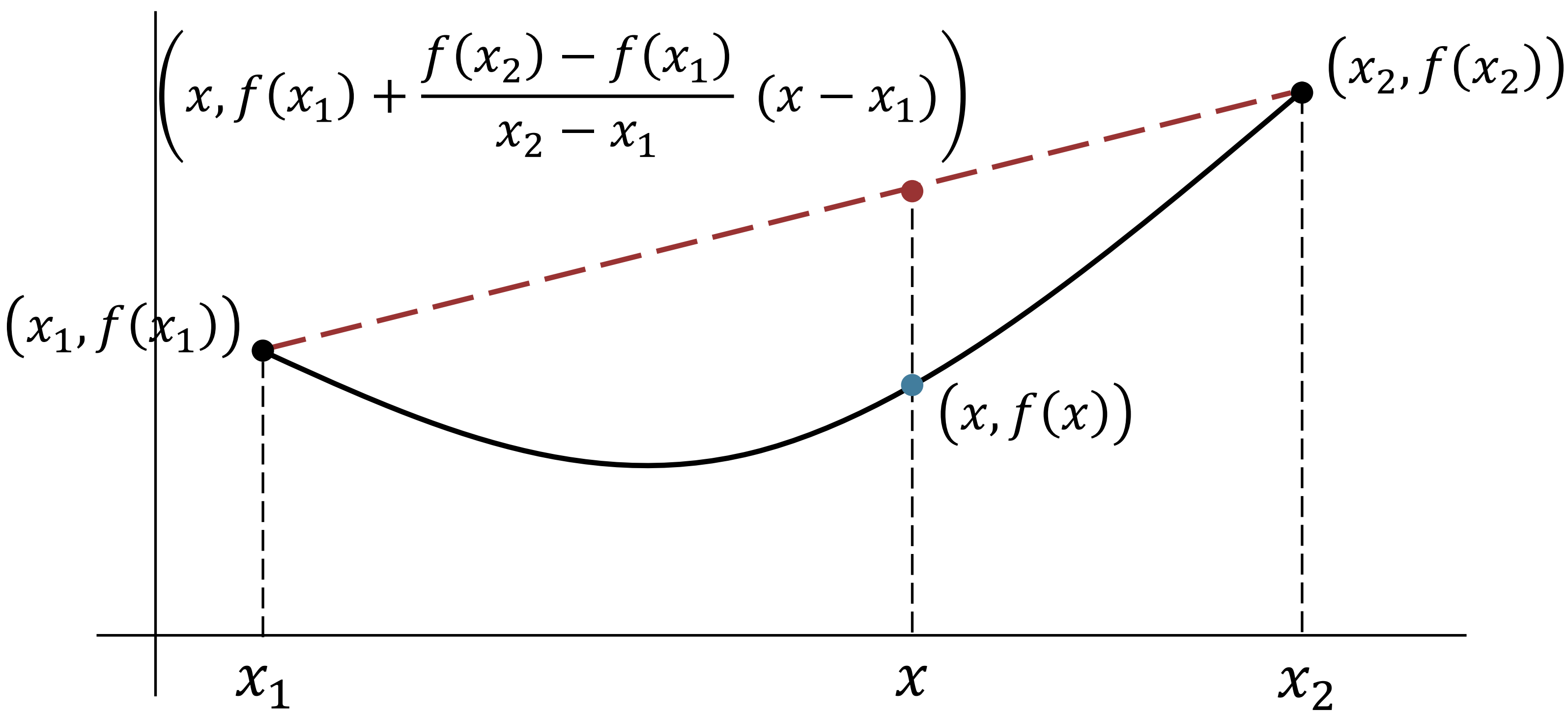
- f és còncava si $\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall x \in (x_1, x_2)$ es compleix
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Convexa = Còncava cap amunt = ∪
- Còncava = Còncava cap avall = ∩

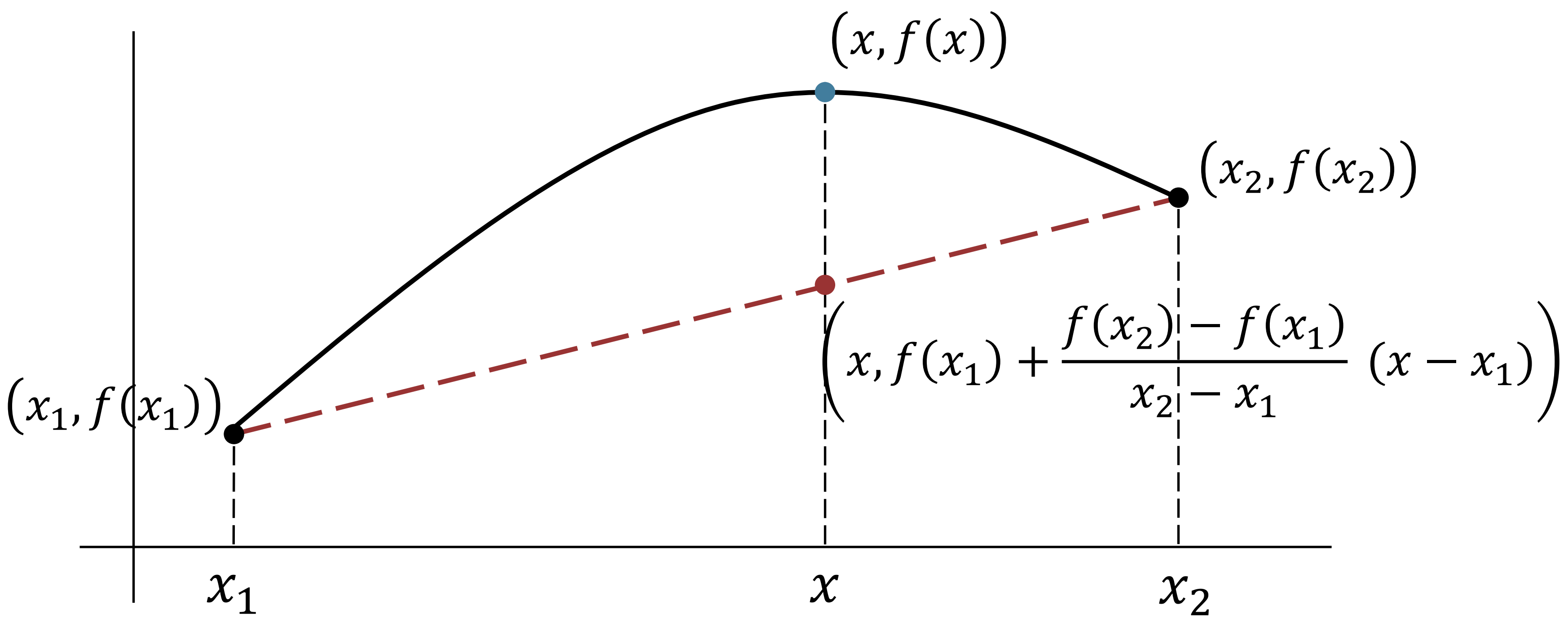
Definicions

Concavitat i convexitat

- f convexa si $f(x)$ per $x \in [x_1, x_2]$ està per sota de la corda que uneix els punts $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$



- Definicions
  - Concavitat i convexitat
    - f còncava si $f(x)$ per $x \in [x_1, x_2]$ està per sobre de la corda que uneix els punts $\left(x_1, f(x_1)\right)$ i $\left(x_2, f(x_2)\right)$



Definicions

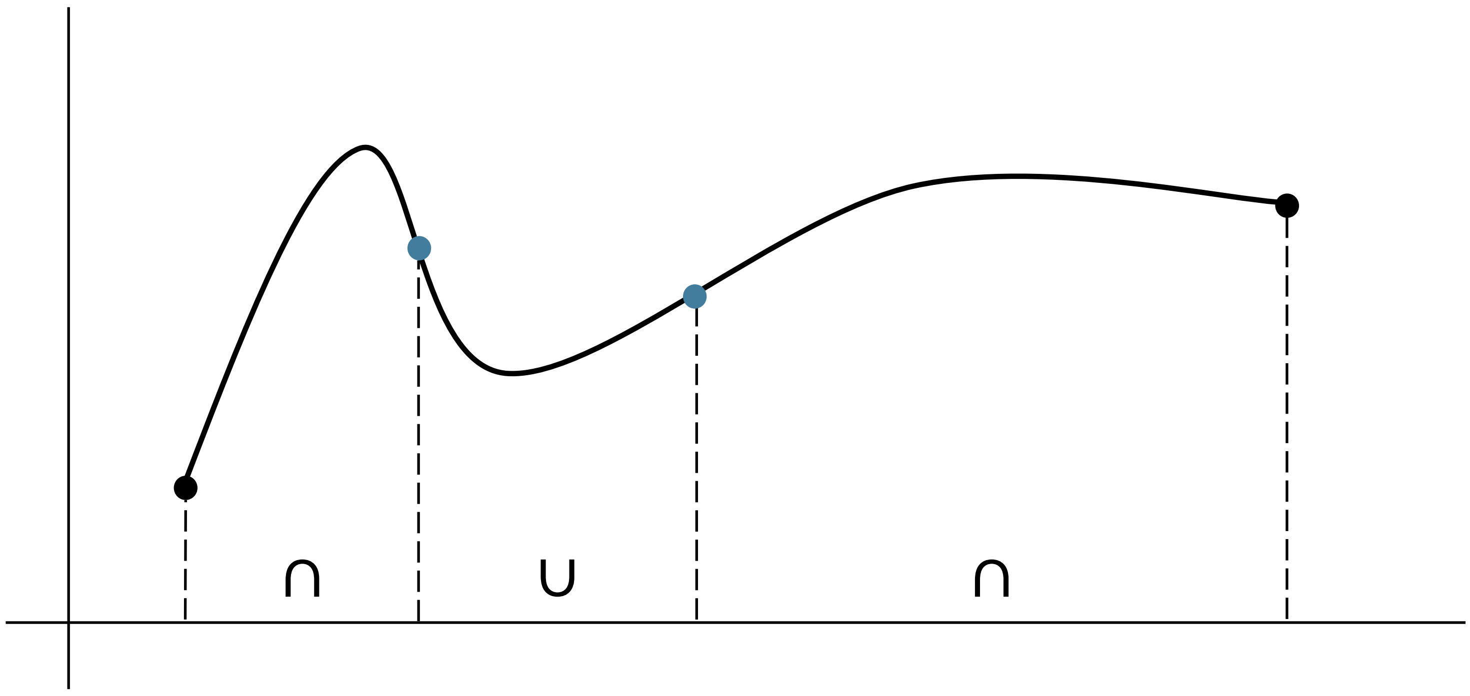
Punts d'inflexió

- Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval obert I

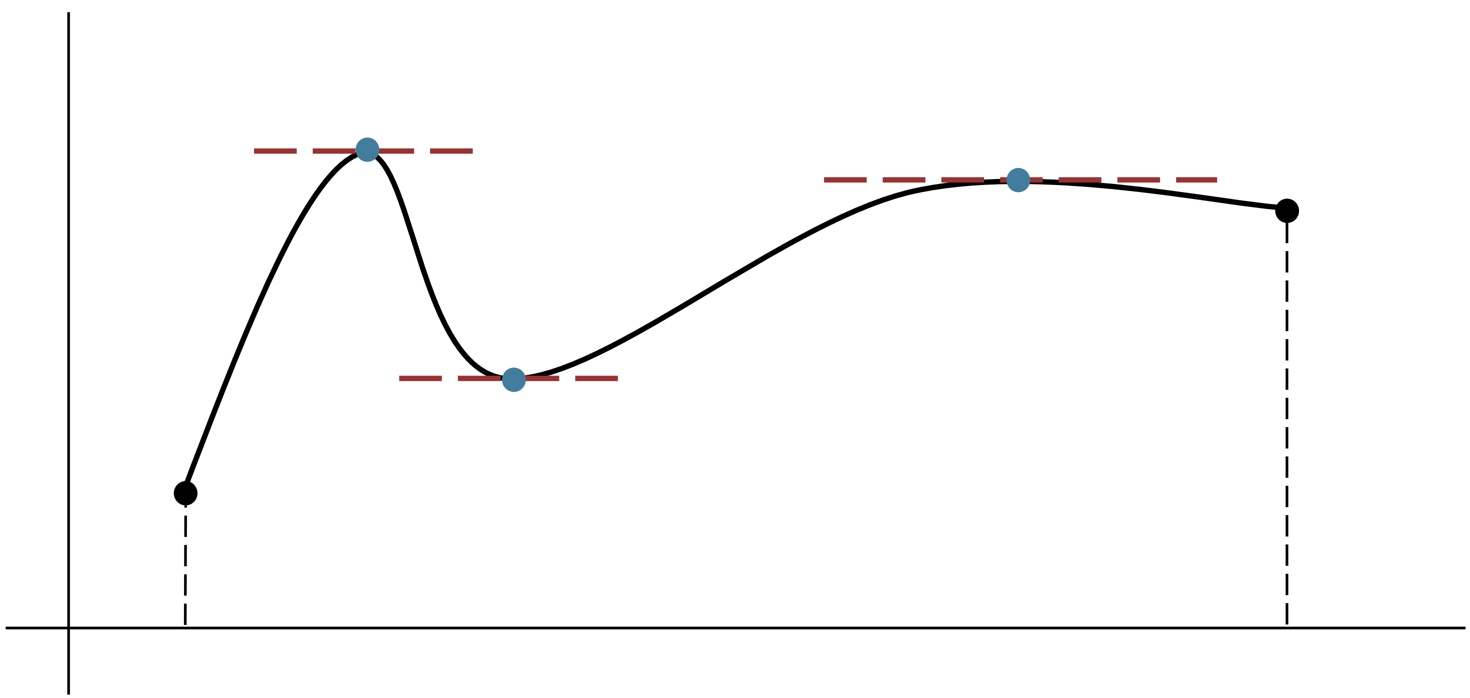
- $x \in I$ és un punt d'inflexió si $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tals que es compleix una d'aquestes dues opcions:
  - f és convexa a $(x - \delta_1, x)$ i còncava a $(x, x + \delta_2)$
  - f és còncava a $(x - \delta_1, x)$ i convexa a $(x, x + \delta_2)$

- En altres paraules, $x \in I$ és un punt d'inflexió si és un punt on canvia la concavitat de còncava a convexa, o viceversa

- Definicions
  - Punts d'inflexió
    - Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval obert I
    - $x \in I$ és un punt d'inflexió si és un punt on canvia la concavitat de còncava a convexa o viceversa



- Definicions
  - Punts crítics
    - Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable definida en un interval obert $I = (a, b)$
    - $x \in I$ és un punt crític o punt singular si $f'(x) = 0$, és dir, la recta tangent és horitzontal



Teoremes

Creixement i decreixement

- Sigui $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en un interval obert $I = (a, b)$

- Aleshores:
  - $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f$ és creixent
  - $f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f$ és decreixent
  - $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f$ és constant

  - $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in I \quad \Longrightarrow \quad f$ és estrictament creixent
  - $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in I \quad \Longrightarrow \quad f$ és estrictament decreixent

- Teoremes
  - Creixement i decreixement
    - Demostració necessitat ($\Longrightarrow$)
      - Siguin $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ dos punts arbitraris de I
      - Pel teorema del valor mig de Lagrange
        $\exists \alpha \in I: f(x_2) - f(x_1) = f'(\alpha)(x_2 - x_1)$
      - Si $f'(\alpha) \geq 0$ queda $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, i per tant és creixent
      - Si $f'(\alpha) \leq 0$ queda $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, i per tant és decreixent
      - Si $f'(\alpha) = 0$ queda $f(x_2) - f(x_1) = 0$, i per tant és constant

      - Si $f'(\alpha) > 0$ queda $f(x_2) - f(x_1) > 0$, i per tant és estrictament creixent
      - Si $f'(\alpha) < 0$ queda $f(x_2) - f(x_1) < 0$, i per tant és estrictament decreixent

- Teoremes
  - Creixement i decreixement
    - Demostració suficiència ($\Longleftarrow$)
      - Sigui $x \in I$. Com I és obert, $\exists\delta > 0$: $(x, x+\delta) \subset I$
      - Pel teorema del valor mig
        $\exists\alpha \in (x, x+\delta)$: $f(x+\delta) - f(x) = f'(\alpha)(x+\delta-x) = f'(\alpha)\,\delta$
        $$\Longrightarrow \quad f'(\alpha) = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$
      - Si f creixent, $f(x+\delta) - f(x) \geq 0$, i per tant $f'(\alpha) \geq 0$
      - Si f decreixent, $f(x+\delta) - f(x) \leq 0$, i per tant $f'(\alpha) \leq 0$
      - Si f constant, $f(x+\delta) - f(x) = 0$, i per tant $f'(\alpha) = 0$
      - Com $\alpha \in (x, x+\delta)$, α tendeix a x quan δ tendeix a 0, i per tant $f'(\alpha)$ tendeix a $f'(x)$, mantenint el signe de la desigualtat

      - Observació: una funció pot ser estrictament creixent i tenir $f'(x) = 0$ en algun punt, per exemple, $f(x) = x^3$ és estrictament creixent en $\mathbb{R}$ però $f'(0) = 0$

- Teoremes
  - Extrems locals
    - Si c és un extrem local de $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en un interval obert $I = (a, b)$ i f és derivable en c aleshores c és un punt crític, és dir, $f'(c) = 0$
    - Demostració
      - Feta anteriorment (teorema dels extrems relatius)
    - Observació
      - El contrari no és cert, un punt crític pot no ser un extrem local, per exemple, $f(x) = x^3$ en el punt $c = 0$

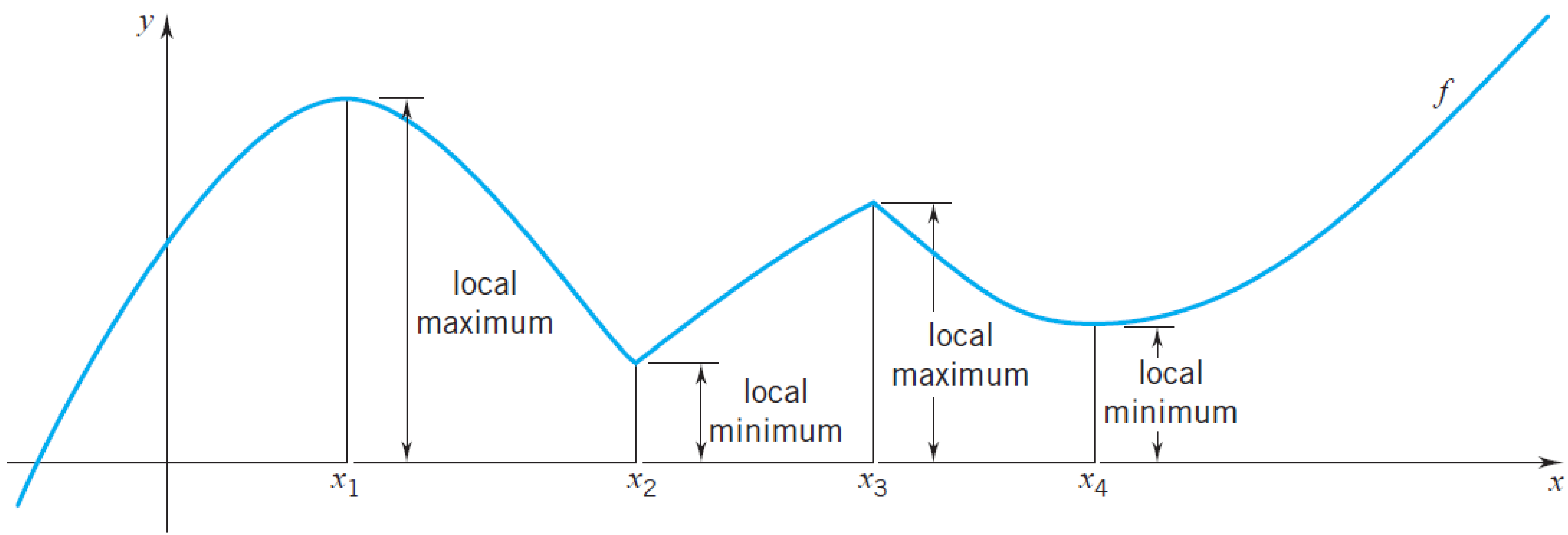
- Teoremes
  - Extrems locals
    - Sigui $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval obert $I = (a, b)$ i sigui $c \in I$
    - Si $\exists \delta > 0$ tal que
      - $f'(x) > 0$ per tot $x \in (c - \delta, c)$ i $f'(x) < 0$ per tot $x \in (c, c + \delta)$ aleshores c és un màxim local
      - $f'(x) < 0$ per tot $x \in (c - \delta, c)$ i $f'(x) > 0$ per tot $x \in (c, c + \delta)$ aleshores c és un mínim local
      - $f'(x)$ té el mateix signe per tot $x \in (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)$ aleshores c no és un extrem local

Teoremes

Extrems locals

Observació

- No cal que f sigui derivable en c, només cal que sigui contínua en I i derivable en un entorn de c (excloent a c)



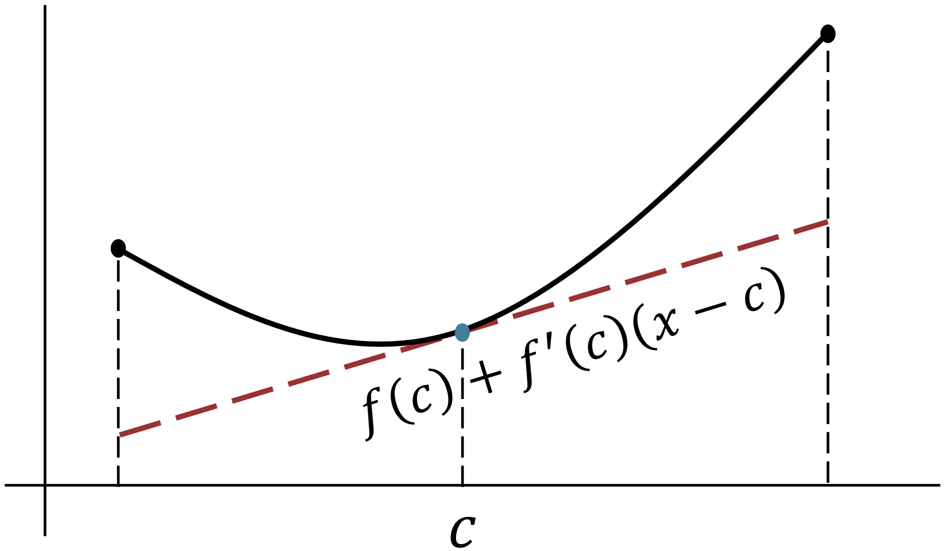
- Teoremes
  - Extrems locals
    - Demostració del cas en què és màxim local
      - Sigui $x \in (c-\delta, c)$, volem veure que $f(x) < f(c)$
      - Suposem $f(x) \geq f(c)$
      - Com f diferenciable en (x, c), pel teorema del valor mig de Lagrange, $\exists \alpha \in (x, c)$: $f(c) - f(x) = f'(\alpha)(c - x)$
      - Com $f'(x) > 0$ per $x \in (c-\delta, c)$, aleshores $f'(\alpha) > 0$, i per tant $f(c) - f(x) > 0$, en contradicció amb la hipòtesi $f(x) \geq f(c)$, de manera que ha de ser $f(x) < f(c)$
      - Idem es demostra que si $x \in (c, c+\delta)$, aleshores $f(x) < f(c)$
      - La conclusió és que $\forall x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$, $f(x) < f(c)$, quedant així demostrat que c és un màxim local

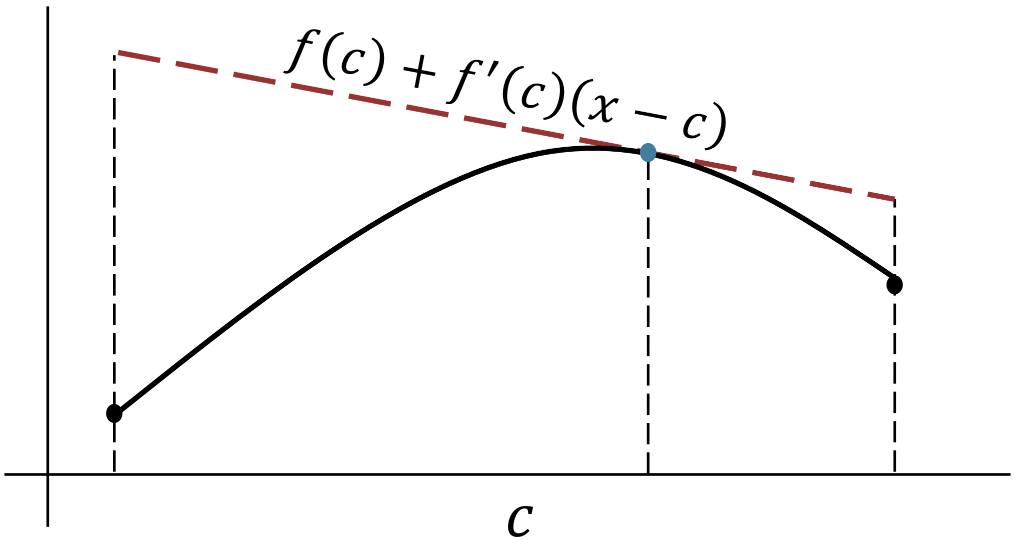
- Teoremes
  - Extrems locals
    - Sigui $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua en un interval obert $I = (a, b)$ i derivable dues vegades en $c \in I$
    - Aleshores
      - $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0 \implies c$ és un màxim local
      - $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0 \implies c$ és un mínim local

- Teoremes
  - Extrems locals
    - Demostració
      - $f''(c) > 0 \implies f'(x)$ estrictament creixent en un entorn de c, és dir, per tot $x \in (c-\delta, c+\delta)$ per un cert $\delta > 0$
      - Siguin $x_1 \in (c-\delta, c)$ i $x_2 \in (c, c+\delta)$
      - Aleshores, $f'(x_1) < f'(c) < f'(x_2)$
      - Com $f'(c) = 0$, queda $f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$ per tots els punts x_1 i x_2 dels seus respectius intervals
      - Pel teorema anterior, c és un mínim local
      - Anàlogament, si $f''(c) < 0$ s'arriba a $f'(x_1) > 0 > f'(x_2)$, i per tant c és un màxim local

- Teoremes
  - Concavitat i convexitat
    - Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció en l'interval obert $I = (a, b)$ i derivable en $c \in I$
    - Aleshores
      - f convexa en $I \implies \forall x \in I \setminus \{c\},\ f(c) + f'(c)(x - c) < f(x)$
      - f còncava en $I \implies \forall x \in I \setminus \{c\},\ f(c) + f'(c)(x - c) > f(x)$

- Teoremes
  - Concavitat i convexitat
    - Interpretació
      - Si f convexa, els punts $f(x)$ estan per sobre de la recta tangent a f en el punt c
      - Si f còncava, els punts $f(x)$ estan per sota de la recta tangent a f en el punt c





- Teoremes
  - Concavitat i convexitat
    - Demostració del cas amb f convexa
      - Selecciono punts $c < x < b$
      - Per definició de f convexa en I, es compleix
        $$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$
      - En particular, per $h_1 < h_2$ amb $c < c+h_1 < c+h_2 < x$ queda
        $$\frac{f(c+h_1)-f(c)}{h_1} < \frac{f(c+h_2)-f(c)}{h_2} < \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$
      - Per tant, $f'(c)$ és l’ínfim per h tendint a 0, i podem escriure
        $$f'(c) < \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$
      - Operant, queda el que es volia demostrar
        $$f(c)+f'(c)(x-c) < f(x)$$
      - Si $x < c$ es procedeix de forma equivalent

- Teoremes
  - Concavitat i convexitat
    - Sigui $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable en l’interval obert $I = (a, b)$
    - Aleshores
      - f convexa en $I \iff f'$ és estrictament creixent en I
      - f còncava en $I \iff f'$ és estrictament decreixent en I

- Teoremes
  - Concavitat i convexitat
    - Demostració necessitat ($\Longrightarrow$) pel cas f convexa
      - Siguin $x_1 < x_2$ dos punts arbitraris de l'interval
      - Pel teorema anterior, $f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) < f(x_2)$, és a dir
        $$f'(x_1) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
      - Equivalentment, $f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) < f(x_1)$, és dir
        $$f'(x_2) > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$
        on la desigualtat a canviat de signe ja que $x_1 < x_2$
      - Per tant
        $$f'(x_1) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_2)$$
        i queda així demostrat que f' és estrictament creixent

Teoremes

Concavitat i convexitat

- Demostració suficiència ($\Longleftarrow$) pel cas f convexa
  - Requereix demostrar primer un lema
- Lema
  - Sigui f derivable en un interval obert I i f' estrictament creixent. Siguin $x_1, x_2 \in I$ tals que $x_1 < x_2$ i $f(x_1) = f(x_2)$. Aleshores, $f(x) < f(x_1) = f(x_2)$ per tot $x \in (x_1, x_2)$
- Demostració del lema
  - Suposem $f(x) \geq f(x_1) = f(x_2)$ per un cert $x \in (x_1, x_2)$
  - Pel teorema de Weierstrass, $\exists \alpha \in [x_1, x_2]$ que assoleix el valor màxim de f. Evidentment, ha de ser $f(\alpha) \geq f(x_1)$ i $f'(\alpha) = 0$
  - Pel teorema del valor mig de Lagrange, $\exists \beta \in (x_1, \alpha)$ tal que

$$f'(\beta) = \frac{f(\alpha) - f(x_1)}{\alpha - x_1} \geq 0 = f'(\alpha)$$

en contradicció amb que f' és estrictament creixent

Teoremes

Concavitat i convexitat

- Demostració suficiència ($\Longleftarrow$) pel cas f convexa
  - Donats $x_1, x_2 \in I$ tals que $x_1 < x_2$, definim la funció
$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
  - La funció g' és estrictament creixent gràcies a que f' ho és, i a més, $g(x_1) = g(x_2) = f(x_1)$, per tant el lema anterior ens assegura que $g(x) < g(x_1)$
$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) < g(x_1) = f(x_1)$$
  - Per tant
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
quedant demostrat que f és convexa

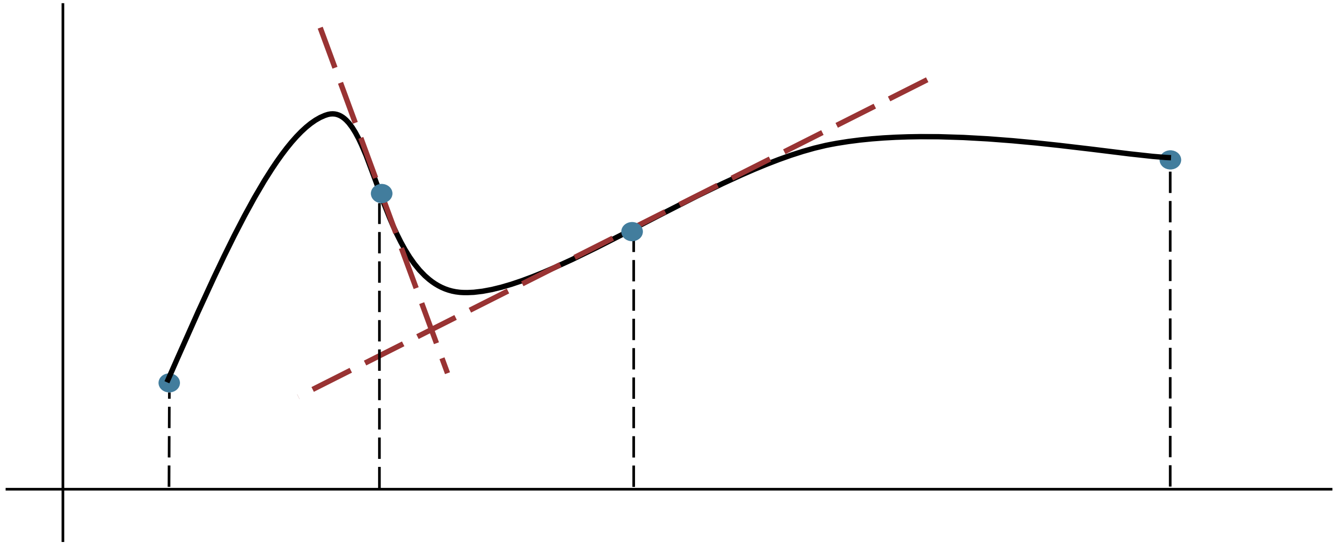
- Teoremes
  - Concavitat i convexitat
    - Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció doblement diferenciable en l'interval obert $I = (a, b)$
    - Aleshores
      - $f''(x) > 0 \ \ \forall x \in I \implies f$ és convexa
      - $f''(x) < 0 \ \ \forall x \in I \implies f$ és còncava
    - Demostració
      - Si $f''(x) > 0 \ \ \forall x \in I$ aleshores f' és estrictament creixent, i pel teorema anterior, f és convexa
      - Si $f''(x) < 0 \ \ \forall x \in I$ aleshores f' és estrictament decreixent, i pel teorema anterior, f és còncava

Teoremes

Punts d'inflexió

- Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció doblement diferenciable en un punt $c \in I$ de l'interval obert $I = (a, b)$

- Aleshores
  - c punt d'inflexió $\Longrightarrow$ $f''(c) = 0$
  - c punt d'inflexió $\Longrightarrow$ la recta tangent a f en c talla la corba
  - $f''(c) = 0$ i f'' canvia de signe a c $\Longrightarrow$ c és punt d'inflexió



Teoremes

Punts d'inflexió

- Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció doblement diferenciable en un punt $c \in I$ de l'interval obert $I = (a, b)$

- Aleshores
  - c punt d'inflexió $\Longrightarrow$ $f''(c) = 0$
  - c punt d'inflexió $\Longrightarrow$ la recta tangent a f en c talla la corba
  - $f''(c) = 0$ i f'' canvia de signe a c $\Longrightarrow$ c és punt d'inflexió

- Observació
  - $f''(c) = 0$ no implica directament que sigui punt d'inflexió, per exemple, $f(x) = x^4$ en el punt $c = 0$

- Teoremes
  - Punts d’inflexió
    - Demostracions
      - Si $f''(c) \neq 0$ aleshores, pels teoremes anteriors, f seria convexa o còncava en un entorn de c. Com c és punt d’inflexió, només pot ser $f''(c) = 0$
      - Si la recta tangent estiguis tota per sobre o tota per sota de la corba aleshores, pels teoremes anteriors, seria convexa o còncava respectivament. Com c és punt d’inflexió, només pot ser que la recta tangent a f talli la corba en c
      - Com canvia de signe, pels teoremes anteriors, és còncava a l’esquerra i convexa a la dreta, o viceversa; això és la definició de punt d’inflexió. $f''(c) = 0$ serveix per a indicar que f'' és contínua en c, i que pren l'únic valor possible

Representació gràfica de funcions

Definicions

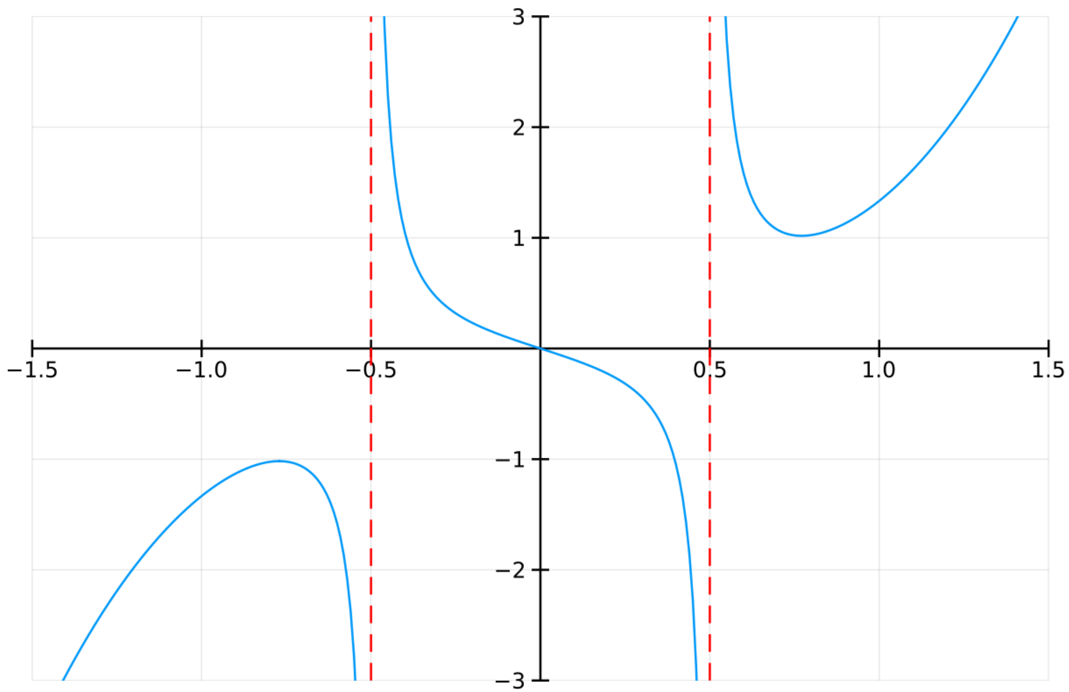
Asímptotes

- Es diu que una funció f té una asímptota vertical a $x = a$ si es compleix que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

i/o

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

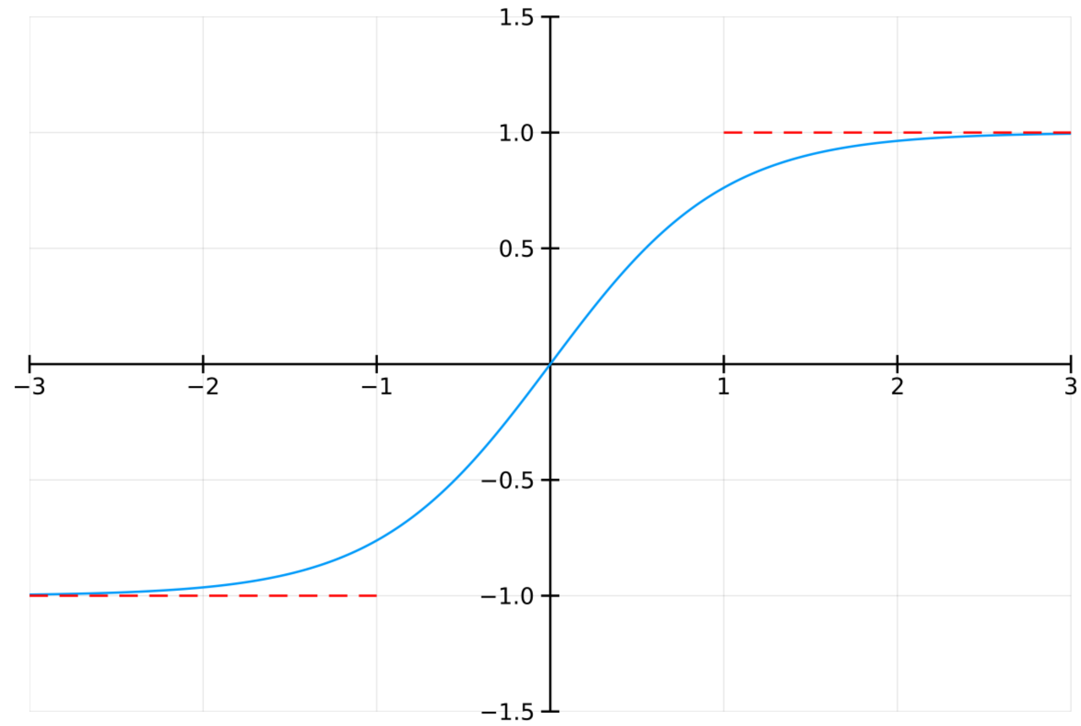


Representació gràfica de funcions

Definicions

Asímptotes

- Es diu que una funció f té una asímptota horitzontal a $y = b$ si es compleix que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$
i/o
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$



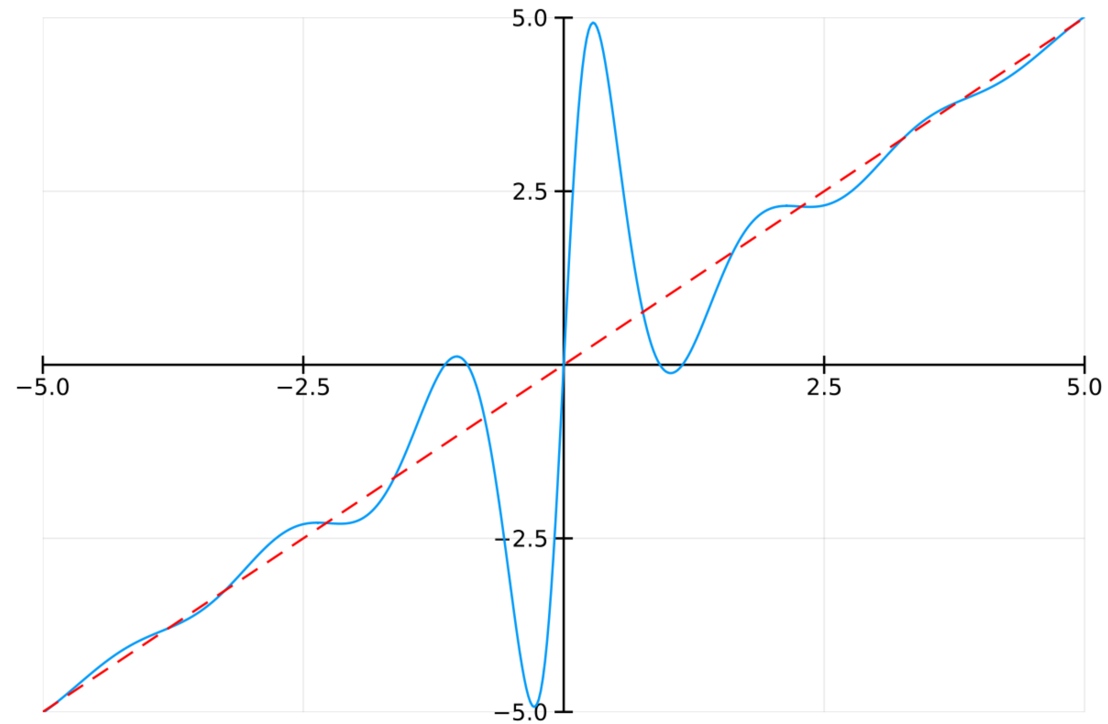
Representació gràfica de funcions

Definicions

Asímptotes

- Es diu que una funció f té una asímptota obliqua a $y = mx + b$ si es compleix que

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (m\,x + b)) = 0 \quad \vee \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (m\,x + b)) = 0$$



- Representació gràfica de funcions
  - Definicions
    - Asímptotes
      - Es diu que una funció f té una asímptota obliqua a $y = mx + b$ si es compleix que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (m\,x + b)) = 0 \quad \vee \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m\,x + b)) = 0$$

      - Els valors de m i b es calculen

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - m\,x)$$

o

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - m\,x)$$

segons el cas

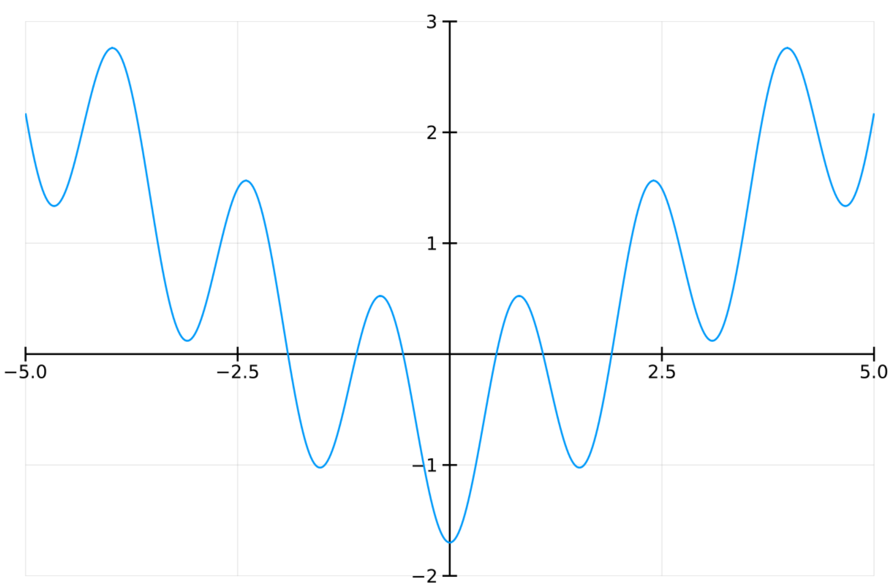
Representació gràfica de funcions

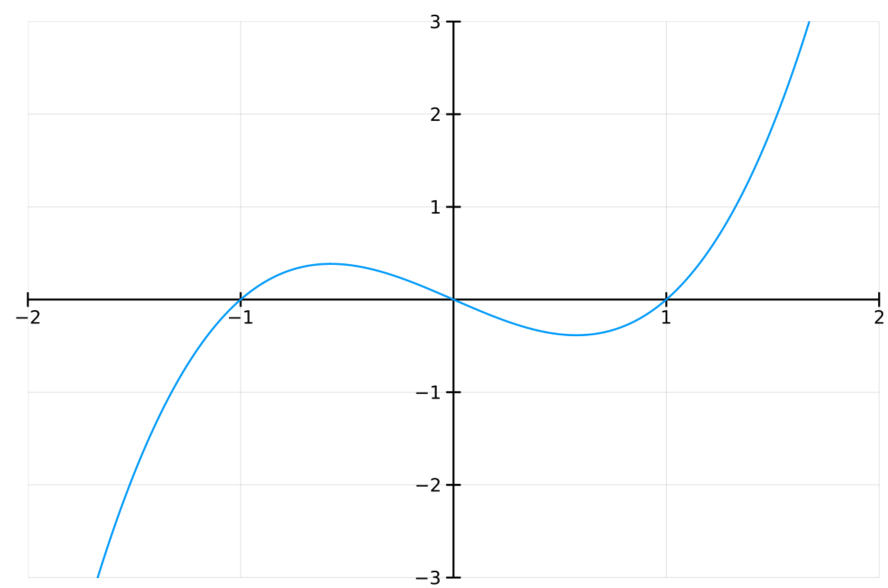
Definicions

Simetria

- Es diu que una funció $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és parella si
  $f(-x) = f(x) \;\; \forall x \in I$

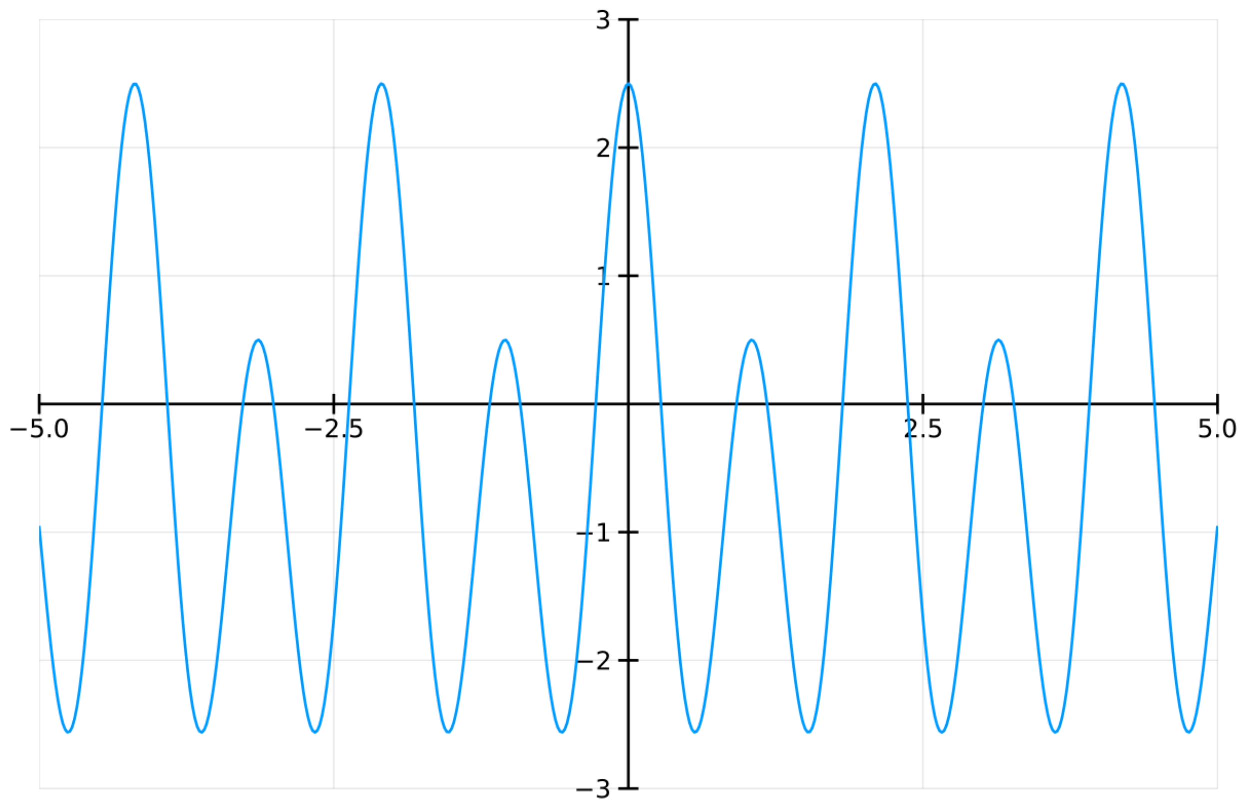
- Es diu que una funció $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és senar si
  $f(-x) = -f(x) \;\; \forall x \in I$





- Representació gràfica de funcions
  - Definicions
    - Simetria
      - Es diu que una funció $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és parella si
        $$f(-x) = f(x) \ \ \forall x \in I$$
      - Es diu que una funció $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és senar si
        $$f(-x) = -f(x) \ \ \forall x \in I$$
      - La simetria implica que l'interval ha de ser també simètric, és dir
        $$I = \mathbb{R}$$
        o
        $$I = (-a, a)$$
        o
        $$I = [-a, a]$$

- Representació gràfica de funcions
  - Definicions
    - Periodicitat
      - Es diu que una funció $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és periòdica, de període T, si
        $$f(x+T) = f(x) \;\; \forall x \in I$$



- Representació gràfica de funcions
  - Procediment
    1. Domini
    2. Simetria, periodicitat
    3. Punts de talls amb els eixos
    4. Asímptotes
    5. Continuïtat, discontinuïtat
    6. Primera derivada
       - Creixement, decreixement, punts crítics
    7. Segona derivada
       - Concavitat, convexitat, punts d'inflexió
    8. Integració de tota la informació per a fer l'esbós de la gràfica de la funció