Índice general

Tema 6

Transformaciones lineales y matrices

6.1. Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Comenzamos el tema estudiando un caso de transformaciones lineales particularmente sencillas: las que van del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Vamos a describir algunas propiedades básicas que en secciones posteriores generalizaremos a transformaciones en otros espacios vectoriales. Recordemos que los vectores $v \in \mathbb{R}^n$ son de la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t = v_1(1,0,\ldots,0)^t + v_2(0,1,\ldots,0)^t + \cdots + v_n(0,0,\ldots,1)^t \\ &= v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n\,, \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{e}_i$ son los vectores de la base canónica. De manera natural se deduce el siguiente resultado.

Teorema

Si A es una matriz $m \times n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está definida mediante $T(\boldsymbol{v}) = A\,\boldsymbol{v}$ para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces T es una aplicación lineal.

Demostración. Puesto que A tiene dimensión $m \times n$, para cualquier vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ tenemos que el producto $A\,\boldsymbol{v}$ existe y es un vector m-dimensional, es decir, $T(\boldsymbol{v}) = A\,\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$.

Sean $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ y λ un escalar. Como

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) &= A(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = A\,\boldsymbol{v}_1 + A\,\boldsymbol{v}_2 \Rightarrow \boxed{T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2)\,,} \\ T(\lambda\,\boldsymbol{v}_1) &= A(\lambda\,\boldsymbol{v}_1) = \lambda\,A\boldsymbol{v}_1 \Rightarrow \boxed{T(\lambda\,\boldsymbol{v}_1) = \lambda\,T(\boldsymbol{v}_1)\,,} \end{aligned}$$

entonces T es lineal. □

Vamos a denotar como T_A la transformación lineal T basada en la matriz A, definida mediante $T(\boldsymbol{v}) = A\,\boldsymbol{v}$. Adicionalmente, podemos probar el resultado inverso: para cada transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, existe una matriz A tal que $T(\boldsymbol{v}) = A\,\boldsymbol{v}$.

Teorema

Supongamos que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal. Sea $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ la base canónica (ordenada) de $\mathbb{R}^n$ y sea

$$A = (T(\boldsymbol{e}_1), \dots, T(\boldsymbol{e}_n))$$

la matriz $m \times n$ cuyas columnas son los vectores $T(\boldsymbol{e}_1), \dots, T(\boldsymbol{e}_n)$ de $\mathbb{R}^m$. Entonces, para cada $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$:

$$T(\boldsymbol{u}) = A\,\boldsymbol{u}\,.$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Se tiene que

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + u_n\boldsymbol{e}_n\,.$$

Por las propiedades de linealidad de T resulta que

$$T(\boldsymbol{u}) = u_1 T(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + u_n T(\boldsymbol{e}_n)\,,$$

que es una combinación lineal de las columnas de A, lo que podemos expresar de la forma

$$T(\boldsymbol{u}) = A\,\boldsymbol{u}\,,$$

como queríamos demostrar. □

Así, **fijadas las bases canónicas** $B_{0,n}$ y $B_{0,m}$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, a cada transformación lineal T le corresponde una única matriz, que denotamos por A_T y a cada matriz A le corresponde una única transformación lineal T_A.

En ciertas ocasiones, aún trabajando con aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, nos interesará usar bases distintas de las canónicas. Supongamos, por ejemplo, que necesitamos usar las bases $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ y $B' = (\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_m)$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, repectivamente. En ese caso, si el vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tiene coordenadas $[\mathbf{u}]_B = (u_1, \ldots, u_n)^t$ respecto de la base $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$, se cumple que

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{b}_1 + \cdots + u_n\mathbf{b}_n = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)\,[\mathbf{u}]_B \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{u}) = (T(\mathbf{b}_1), \ldots, T(\mathbf{b}_n))\,[\mathbf{u}]_B\,.$$

De esta manera, si expandimos los vectores $T(\mathbf{b}_i) \in \mathbb{R}^m$ en la base B' se tiene que

$$T(\mathbf{b}_i) = t_{1i}\mathbf{b}'_1 + t_{2i}\mathbf{b}'_2 + \cdots + t_{mi}\mathbf{b}'_m = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \ldots, \mathbf{b}'_m)\begin{pmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ \vdots \\ t_{mi} \end{pmatrix}$$

y, por tanto,

$$T(\mathbf{u}) = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \ldots, \mathbf{b}'_m)\begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & \ldots & t_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

La ecuación anterior implica que las coordenadas de $T(\mathbf{u})$ en la base B' se obtienen sin más que multiplicar las coordendas de $\mathbf{u}$ en la base B por la matriz

$$A_{T,B'B} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & \ldots & t_{mn} \end{pmatrix}.$$

El razonamiento anterior nos garantiza que, **fijadas las bases** B y B' de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, a cada transformación lineal le corresponde una única matriz $A_{T,B'B}$. Además, según la demostración anterior, para determinar la matriz $A_{T,B'B}$ que representa la transformación T, $\boxed{\text{es suficiente con conocer la imagen de los vectores de } B \text{ en la base } B',}$ sean cuales sean dichas bases, pues con ello podremos determinar la imagen de cualquier vector. Nótese también que bases distintas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ producirán **distintas** matrices que REPRESENTAN una misma transformación T. Cuando sea claro y no sea necesario especificar con respecto a qué bases estamos calculando la matriz, denotaremos ésta simplemente como A_T.

Ejemplo

Si $O_{m\times n}$ es la matriz cero de dimensión $m \times n$ entonces $T_{O_{m\times n}}$ es la transformación lineal *nula* 0 que asigna a cada $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ el vector cero de $\mathbb{R}^m$ (ver Tema 5).

Ejemplo

Si $n = m$ e I_n es la matriz identidad de dimensión $n \times n$, entonces T_{I_n} es la transformación lineal *identidad* $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que le asigna a cada vector él mismo (ver Tema 5).

Ejemplo

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y la transformación lineal asociada $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_1 - 2u_3 \\ 4u_1 + u_2 - u_3 \end{pmatrix}.$$

El núcleo de T_A viene dado por

$$\ker(T_A) = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^t \in \mathbb{R}^3 \colon A\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \right\} .$$

Este conjunto incluye todos los vectores que satisfacen $2u_1 - 2u_3 = 0$ y $4u_1 + u_2 - u_3 = 0$. Al resolver este sistema (compatible indeterminado) resulta que el núcleo es

$$\ker(T_A) = \left\{ \alpha(1, -3, 1)^t \colon \alpha \in \mathbb{R} \right\} ,$$

que, obviamente, es un espacio vectorial de dimension 1, generado por el vector $(1, -3, 1)^t$.

La imagen de T_A es

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \mathbf{v} = (v_1, v_2)^t \in \mathbb{R}^2 \colon v_1 = 2u_1 - 2u_3,\ v_2 = 4u_1 + u_2 - u_3,\ u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

y su dimensión se calcula fácilmente como

$$\mathrm{rg}(T_A) = n - \mathrm{nul}(T_A) = 3 - 1 = 2 .$$

Como $\mathrm{Im}(T_A) \subset \mathbb{R}^2$ y tiene la misma dimensión que éste, se tiene que

$$\mathrm{Im}(T_A) = \mathbb{R}^2 .$$

Finalmente, obsérvese que el rango de la matriz A es también 2.

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$T((u_1, u_2, u_3)^t) = (u_1 + u_2 + u_3, u_1 - u_3, u_1 + 2u_2 - 3u_3)^t .$$

Puesto que

$$T(\mathbf{e}_1) = (1, 1, 1)^t ; \quad T(\mathbf{e}_2) = (1, -1, 2)^t ; \quad T(\mathbf{e}_3) = (1, 0, -3)^t$$

respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que las componentes de la matriz A_T, por columnas, son los coeficientes de u_1, u_2, u_3 en la definición de T.

El ejemplo anterior ilustra el siguiente resultado:

Teorema

Si $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la transformación lineal asociada a la matriz A de dimensión $m \times n$, entonces:

1. $ker(T_A) = N(A)$.
2. $Im(T_A) = \mathcal{C}(A)$.
3. $rg(T_A) = rg(A)$.
4. El máximo valor posible para $rg(T_A)$ es igual al $\text{mín}(m, n)$.

Teorema

Si A es una matriz $n \times n$ y $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la correspondiente transformación lineal, las siguientes propiedades son equivalentes:

1. A es no-singular (tiene inversa).
2. La imagen de T_A es $\mathbb{R}^n$.
3. T_A es inyectiva.

4. La transformación lineal T_A^{-1} existe y su matriz es A^{-1}.

Obsérvese que toda transformación lineal inyectiva corresponde exactamente a una matriz no-singular.

A continuación, generalizamos lo que hemos visto a espacios vectoriales arbitrarios; con ello se hará evidente que, para trabajar con transformaciones lineales, será suficiente con realizar cálculos con las matrices que las representan *respecto a las bases escogidas*.

6.2. Representación matricial de una transformación lineal arbitraria

Sean los espacios vectoriales U y V sobre $\mathbb{R}$, de dimensiones respectivas n y m, y bases (ordenadas) respectivas $B_U = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ y $B_V = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$. Sabemos que todo vector de U puede ser representado de manera única mediante un vector columna de $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son las coordenadas de dicho vector con respecto a la base B_U. Análogamente, los vectores de V tienen representación única en la base B_V como un vector de $\mathbb{R}^m$.

Consideremos la aplicación lineal $T : U \to V$. Para cada vector $\boldsymbol{u}_i$ de la base B_U, su imagen con respecto a T será un vector $T(\boldsymbol{u}_i) \in V$, que puede ser representado con respecto a la base B_V mediante

$$T(\boldsymbol{u}_i) = t_{1i}\boldsymbol{v}_1 + t_{2i}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_{mi}\boldsymbol{v}_m = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \begin{pmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ \vdots \\ t_{mi} \end{pmatrix}$$

o como el vector de coordenadas con respecto a B_V dado por $[T(\mathbf{u}_i)]_{B_V} = (t_{1i}, t_{2i}, \cdots, t_{mi})^t$. De esta manera, la transformación lineal T tiene una REPRESENTACIÓN MATRICIAL relativa a las bases B_U y B_V dada por la siguiente matriz $n \times m$:

$$A_{T,B_V B_U} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & \dots & t_{mn} \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que igual que sucedía en el caso de los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, la i-ésima columna de la matriz $A_{T,B_V B_U}$ viene dada por las coordenadas respecto a B_V de la imagen por T de $\mathbf{u}_i$.

Si $U = V$ y usamos la misma base B para ambos espacios vectoriales, entonces podemos aligerar la notación definiendo $A_{T,B} = A_{T,BB}$.

Con esto en mente, el siguiente resultado es inmediato:

Proposición

Sean $T : U \to V$ una transformación lineal y $A_{T,B_V B_U}$ su representación matricial relativa a las bases B_U y B_V. Si representamos los vectores de U y V como vectores columna respecto a dichas bases se tiene que

$$\overbrace{[T(\mathbf{u})]_{B_V}}^{\text{rep. coordenadas}} = \underbrace{A_{T,B_V B_U}}_{\text{rep. matricial}} \overbrace{[\mathbf{u}]_{B_U}}^{\text{rep. coordenadas}}, \quad \forall \mathbf{u} \in U.$$

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ dada por $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + a_2 x$. Consideremos las bases $B_1 = (1, x, x^2)$ y $B_1' = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ de $\mathbb{P}_2$ y $B_2 = (1, x)$ y $B_2' = (1-x, 1+x)$ de $\mathbb{P}_1$. La representación matricial de T respecto a las bases (canónicas) B_1 y B_2 es

$$A_{T,B_2B_1} = \left([T(1)]_{B_2}\,, [T(x)]_{B_2}\,, [T(x^2)]_{B_2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, podemos escribir las imágenes de los vectores de la base B_1' respecto a la base B_2' como sigue:

$$\begin{aligned} T(1) &= \underbrace{0}_{\in\mathbb{P}_1} = \underbrace{0}_{\text{escalar}}(1-x) + \underbrace{0}_{\text{escalar}}(1+x)\,, \\ T(1+x) &= \underbrace{1}_{\in\mathbb{P}_1} = \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x)\,, \\ T(1+x+x^2) &= \underbrace{1+x}_{\in\mathbb{P}_1} = \underbrace{0}_{\text{escalar}}(1-x) + \underbrace{1}_{\text{escalar}}(1+x)\,. \end{aligned}$$

Es decir:

$$[T(1)]_{B_2'} = (0,0)^t\,, \quad [T(1+x)]_{B_2'} = \frac{1}{2}\,(1,1)^t\,, \quad [T(1+x+x^2)]_{B_2'} = (0,1)^t$$

y, en consecuencia, la representación matricial de T respecto a las bases B_1' y B_2', está dada por

$$A_{T,B_2'B_1'} = \left(\,[T(1)]_{B_2'}, [T(1+x)]_{B_2'}, [T(1+x+x^2)]_{B_2'}\,\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como adelantamos al final de la sección anterior, enunciamos las siguientes propiedades, que nos permitirán realizar ciertas operaciones con las transformaciones lineales utilizando simplemente operaciones equivalentes entre las matrices que las representan.

Proposición

- Si T_1 y T_2 son transformaciones lineales representadas (respecto a las mismas bases) por las matrices A_{T_1} y A_{T_2} respectivamente, entonces la transformación lineal $T_1 + T_2$ está representada por $A_{T_1} + A_{T_2}$.
- Si T es una transformación lineal representada por la matriz A_T y $\alpha \in \mathbb{K}$ es un escalar, entonces la transformación lineal αT está representada por αA_T.
- Si $T_1 : U \to V$ y $T_2 : V \to W$ son transformaciones lineales representadas por A_{T_1} y A_{T_2}, entonces $T_2 \circ T_1$ está representada por el producto $A_{T_2} A_{T_1}$.
- Una transformación lineal T es invertible si y sólo si la matriz asociada A_T es invertible (independientemente de las bases escogidas para representar T). En tal caso, la matriz asociada a T^{-1} en las mismas bases es A_T^{-1}.

Ejemplo

Consideremos las transformaciones lineales $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\begin{aligned} T_1\left((v_1, v_2)^t\right) &= (v_1 + v_2, v_1 - v_2)^t\,, \\ T_2\left((v_1, v_2)^t\right) &= (2v_1 - v_2, 3v_1 + v_2)^t\,. \end{aligned}$$

La aplicación suma $S = T_1 + T_2$ verifica

$$\begin{aligned} S\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (T_1 + T_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= T_1\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + T_2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 \\ 3v_1 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 \\ 4v_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Las matrices asociadas a cada una de estas transformaciones respecto a la base canónica son

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ ; \quad A_{T_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \ ; \quad A_S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

y obviamente $A_{T_1} + A_{T_2} = A_S$.

Además:

Dos matrices son equivalentes si y sólo si representan a la misma transformación lineal con respecto a dos bases distintas.

Ejemplo

Consideremos de nuevo la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ dada por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x$ y las bases $B_1 = (1, x, x^2)$ y $B_1' = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ de $\mathbb{P}_2$ y $B_2 = (1, x)$ y $B_2' = (1-x, 1+x)$ de $\mathbb{P}_1$. Sabemos que las matrices

$$A_{T,B_2B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad A_{T,B_2'B_1'} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

representan a T con respecto a las bases indicadas. Según el resultado anterior, ambas matrices son equivalentes, es decir $A_{T,B_2B_1} = P\, A_{T,B_2'B_1'}\, Q^{-1}$ con P y Q invertibles. Para verlo, basta con construir una matriz P usando transformaciones de Gauss y elegir Q como la identidad. Hacemos las siguientes operaciones:

i) En la matriz $A_{T,B_2'B_1'}$ multiplicamos la primera fila por 2; es decir, multiplicamos por la izquierda por la matriz

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

ii) En la matriz que resulta, sustituimos la segunda fila por la resta de la segunda fila menos la primera fila multiplicada por 1/2; es decir, multiplicamos por la izquierda por la matriz

$$P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Uniendo ambas operaciones resulta la matriz

$$P = P_2\,P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así con las matrices invertibles P y $Q = I_3$ resulta que

$$A_{T,B_2B_1} = P\,A_{T,B_2'B_1'}\,Q^{-1},$$

por lo que efectivamente son equivalentes.

Dos matrices (cuadradas) son semejantes si y sólo si representan a la misma transformación lineal con respecto a dos bases distintas.

Ejemplo

Consideremos las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

verifica que

$$A_1 = P\,A_2\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo que A_1 y A_2 son semejantes.

Si consideramos A_1 como la matriz que representa a una cierta transformación lineal $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ respecto a la base canónica $B_0 = (1, x)$, se tiene que

$$[T(a_0 + a_1 x)]_{B_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{A_{T,B_0}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_0 + a_1 \\ 4a_0 - 3a_1 \end{pmatrix},$$

es decir

$$T(a_0 + a_1 x) = 2a_0 + a_1 + (4a_0 - 3a_1)x\,.$$

Vamos a comprobar que, según indica el resultado anterior, A_2 representa la misma transformación T respecto a una base diferente. Consideremos la base alternativa $B = (1 + x, 1 - x)$; es claro que

$$a_0 + a_1 x = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)(1 + x) + \frac{1}{2}(a_0 - a_1)(1 - x)\,,$$

por lo que las coordenadas del polinomio $a_0 + a_1 x$ en dicha base son:

$$[a_0 + a_1 x]_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 - a_1 \end{pmatrix}.$$

La imagen de $a_0 + a_1 x$ también puede escribirse en función de esta base de la forma:

$$T(a_0 + a_1 x) = 2a_0 + a_1 + (4a_0 - 3a_1)x = (3a_0 - a_1)(1 + x) + (-a_0 + 2a_1)(1 - x)\,,$$

es decir

$$[T(a_0 + a_1 x)]_B = \begin{pmatrix} 3a_0 - a_1 \\ -a_0 + 2a_1 \end{pmatrix}.$$

Si multiplicamos la matriz A_2 por $[a_0 + a_1 x]_B$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 - a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_0 - a_1 \\ -a_0 + 2a_1 \end{pmatrix},$$

que coincide con las coordenadas de $T(a_0 + a_1 x)$ respecto a la base B, por lo que efectivamente $A_2 = A_{T,B}$.

NOTA: en el ejemplo anterior la matriz P y la base B han sido dadas, sin entrar en detalles de por qué son las que necesitamos utilizar para ilustrar el resultado sobre matrices semejantes.