Problemes d'Anàlisi Complexa

GRAU EN ENGINYERIA MATEMÀTICA I FÍSICA

CURS 2024-25

1. El pla complex

1. Calculeu el mòdul i l'argument de c^5 on $c = 1 + i\sqrt{3}$.

2. Expressa en forma polar els següents números complexos $-1+i$, $\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}$, $\frac{1}{-1+i\sqrt{3}}$.

3. Trobeu les solucions de $z^2 + 2iz + 2 - 4i = 0$.

4. Trobeu el mínim valor de $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ tal que

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$$

5. Troba els números complexos z tals que $w = \frac{2z-i}{2+iz}$ verifiqui

(a) $Im(w) = 0$.

(b) $Re(w) = 0$.

6. Sigui $\theta \in (-\pi, \pi]$ un angle qualsevol. Calculeu $\cos(3\theta)$ i $\sin(3\theta)$ en funció de $\cos(\theta)$ i $\sin(\theta)$.

7. Sigui $\theta \in (-\pi, \pi]$ un angle qualsevol. Calculeu la part real i imaginaria de $1/(1+e^{i\theta})$.
$\frac{1}{2} - i\,\frac{\sin(\theta)}{2+2cos(\theta)}$

8. Calculeu $\displaystyle\sum_{k=0}^{2024} i^k$.

9. $\star$ Fent servir la següent definició de la funció exponencial $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Comproveu les següents propietats:

(a) $e^{z+w} = e^z e^w$

(b) $\frac{de^z}{dz} = e^z$

(c) $e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ on $z = x + iy$.

(d) $e^{i\pi} + 1 = 0$ (fòrmula d'Euler).

10. $\star$ Sigui $\theta \in (-\pi, \pi]$ un angle qualsevol i $z \neq 1$. Proveu

(a) $1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, on $z \neq 1$.

(b) $1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \ldots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{2\sin(\theta/2)}$, on $\theta \neq 0$.

(c) $\sin(\theta) + \sin(2\theta) + \ldots + \sin(n\theta) = \frac{\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)} - \frac{\cos\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{2\sin(\theta/2)}$, on $\theta \neq 0$, *Indicació:* $e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2} = 2i\sin(\theta/2)$

11. Calculeu la part real i imaginaria dels següents números complexos

(a) $(3+2i)/(1+i)$.

(b) $(1+i)/(3-i)$.

(c) $(z+2)/(z+1)$ on $z = x+iy$.

12. Demostra la igualtat del paral-lelogram

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

i explica el significat geomètric.

13. $\star$ Sigui $\varphi : S_2 \setminus N \mapsto \mathbb{C}$ la projecció estereogràfica definida per

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x+iy}{1-z}, \quad \varphi(N) = \infty$$

on $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \; x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$ i $N = (0,0,1)$. Trobeu l'expressió inversa de l'aplicació φ^{-1}. Sigui C una circunferència de S_2 llavors

(a) Si $N \notin C$ proveu que $\varphi(C)$ és una circunferència de $\mathbb{C}$.

(b) Si $N \in C$ proveu que $\varphi(C \setminus N)$ és una recta de $\mathbb{C}$.

S'han de fer les proves

14. Identifiqueu i dibuixeu en el pla complex els punts que verifiquen:

(a) $|z-1-i| = 1$.

(b) $1 < |2z-6| < 2$.

(c) $|z-1|^2 + |z+1|^2 \le 8$.

(d) $\star$ $|z-1| + |z+1| \le 2$.

(e) $|z-1| < |z|$.

(f) $0 < |Im(z)\,| < \pi$.

(g) $-\pi < Re(z) < \pi$.

(h) $|Re(z)| < |z|$.

(i) $Re(iz+2) > 2$.

(j) $|z-i|^2 + |z+i|^2 < 2$.

S'ha de fer el dibuix concret de cada regió

15. $\star$ Siguin a i b dos números complexos arbitraris i sigui r un número real positiu $r \neq 1$. Proveu que el conjunt

$$\left\{ z \in \mathbb{C}\,;\, \left| \frac{z-a}{z-b} \right| = r \right\}$$

representa una circumferència en el pla complex. Calcula el centre i el radi.

16. Sigui $a = re^{i\theta}$ un número complex qualsevol i $\bar{a}$ el seu conjugat. Definim la funció

$$B_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

(a) Calcula el mòdul i l'argument de $\bar{a}$ i de $1/\bar{a}$.

(b) Si $|a| < 1$ comprova que $|B_a(z)| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$.

(c) Si $|a| > 1$ comprova que $|B_a(z)| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$.

(d) Si $|a| < 1$ per quins valors de z es verifica $|B_a(z)| = 1$.

17. Dibuixeu en el pla els següents conjunts així com la seva imatge per la funció exponencial $\exp(z)$.

(a) la franja vertical $0 < Re(z) < 1$.

(b) la franja horitzontal $5\pi/3 < Im(z) < 8\pi/3$.

(c) el rectangle $0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi/4$.

(d) el semipla $Re(z) \leq 0$.

18. Sigui $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, i sigui $\alpha \in \mathbb{C}$. Definim $z^\alpha = \{e^{\alpha \log z}\}$. Quans elements té z^α si

(a) $\alpha \in \mathbb{Z}$.

(b) $\alpha \in \mathbb{Q}$.

(c) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

Calculeu $(1+i)^4$, $(1+i)^{2/5}$, $(1+i)^i$.

(a) 1, (b) Si $\alpha = p/q$ aleshores el número d'element és q, (b) una quantitat numerable de valors. $(1+i)^4 = -4$, $(1+i)^{2/5} = \{\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi/2+2k\pi}{5}} \quad k = 0, \dots, 4\}$, $(1+i)^i = \{e^{-(\pi/4+2k\pi)}e^{i\ln\sqrt{2}}\}$

19. Determineu totes les solucions de $z^4 - 2 = 0$ i representeu-les en el pla complex. Feu el mateix amb $z^5 - 1/2 = 0$.

20. Determineu les arrels cúbiques de $-2 + 2i$ i representeu-les en el pla complex.

21. Sigui n un número enter qualsevol. Resoleu $\bar{z} = z^{n-1}$ i representeu les solucions en el pla complex.

22. Considereu els següents conjunts com a oberts del pla complex.

(a) Quines d'aquestes lletres són un conjunt connex?

(b) Quines són simplement connexes?

(c) Quines són convexes?

(a) totes, (b) totes menys la A, (c) I, O.

23. Considereu els següents conjunts com a oberts del pla complex.

(a) Quantes components connexes té cada una d'aquestes lletres?

(b) Quines lletres tenen totes les seves components connexes simplement connexes?

(c) Quines lletres tenen totes les seves components connexes multiplement connexes?

(d) Quines lletres tenen exactament una component connexa simplement connexa?

(e) Quines lletres tenen exactament una component connexa convexa?

(f) Quines lletres tenen exactament dos components connexes convexes?

(g) Quines lletres amb dos components connexes tenen una component convexa i una multiplement connexa?

(h) Quines lletres amb dos components connexes cap d'elles és convexa?

a ȧ ä e
œ i o
ö u ø
è ô

2. Funcions holomorfes

24. Verifiqueu les equacions de Cauchy-Riemann per la funció $1/z$ per $z \neq 0$.

25. Donada la funció $f(x, y) = (\sin(x)\sinh(y), \cos(x)\cosh(y))$. Verifiqueu que compleix les equacions de Cauchy-Riemann.

26. Proveu que $(\log)'(z) = \frac{1}{z}$.

27. Trobeu les equacions de Cauchy-Riemann en coordenades polars

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

28. Proveu que el Jacobià d'una funció f de classe $\mathcal{C}^1$ bé donat per l'expressió

$$J_f = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2$$

29. Sigui $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funció holomorfa. Proveu que ∇u i ∇v són ortogonals. Donades les següents funcions

(a) $f(z) = z^2$
(b) $f(z) = z^3$
(c) $f(z) = z^4$
(d) $f(z) = \exp(z)$
(e) $f(z) = \cos(z)$
(f) $f(z) = 1/z$

Calculeu la part real $u(x, y)$ i imaginaria $v(x, y)$ d'aquestes funcions. Dibuixeu les corbes de nivell $u(x, y) = C_1$ i $v(x, y) = C_2$ fent servir qualsevol aplicació gràfica (per exemple, geogebra o desmos) i veieu que són ortogonals.
(a) $Re(z^2) = x^2 - y^2$, $Im(z^2) = 2xy$. (b) $Re(z^3) = x^3 - 3xy^2$, $Im(z^3) = 3x^2y - y^3$. (c) $Re(z^4) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $Im(z^4) = 4x^3y - 4xy^3$. (d) $Re(e^z) = e^x\cos(y)$, $Im(e^z) = e^x\sin(y)$. (e) $Re(1/z) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $Im(1/z) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

30. Sigui $u(x, y) = 2e^x\cos(y)$. Existeix alguna funció holomorfa $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ amb $f(0) = 2$?

31. Són holomorfes les següents funcions?

(a) $f(z) = (Im(z))^2$
(b) $f(z) = z\bar{z}$
(c) $f(x + iy) = (x^2 + 2y^3 - 4xy + 3) + (2xy + 4y^3x^2 - 4x^2)i$

32. Estudia la convergència de les següents sèries de potències:

$$(a)\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2} \qquad (c)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

$$(d)\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \qquad (e)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{6}z^n \qquad (f)\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$$

$$(g)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^n+5^n}z^n \qquad (h)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

33. Trobeu el radi de convergència de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

(a) $a_n = n^\alpha$ amb $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) a_n és igual al nombre de divisors de n.

(c) $a_n = \cos(in)$.

(a) $R = 1$, (b) $R = 1$, (c) $R = 1/e$

34. Proveu per inducció, per tot $z \neq 1$,

$$1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1} = \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}.$$

A partir d'això deduïu, per $|z| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

35. Funcions trigonomètriques complexes. Definim les següents funcions complexes

- $\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$, $\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$.
- $\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$, $\sinh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$.

Proveu les següents propietats d'aquestes funcions.

(a) $(\sin)'(z) = \cos(z)$, $(\cos)'(z) = -\sin(z)$, $(\cosh)'(z) = \sinh(z)$, $(\sinh)'(z) = \cosh(z)$.

(b) $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, $e^z = \cos(z) + \sin(z)$.

(c) $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$, $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

(d) Es verifica $|\sin(z)| \leq 1$ i $|\cos(z)| \leq 1$?

(e) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$, $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.

(f) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$, $\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$.

(g) Calculeu el desenvolupament en sèrie de potències de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ d'aquestes quatre funcions i calculeu el radi de cconvergència.

36. $\star$ Sigui f i g dues funcions holomorfes definides per

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

amb radis de convergència R_1 i R_2, respectivament. Definim $h(z)=f(z)g(z)$ definida per $|z|<\min\{R_1,R_2\}$. Fent servir la fòrmula de Leibnitz per la derivada d'un producte trobeu el desenvolupament de Taylor

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

(a) La funció $\tan(z)$ és holomorfa en el disc $D(0,\pi/2)$ té un desenvolupament de sèrie de Taylor de la forma

$$\tan(z)=a_1 z+a_3 z^3+a_5 z^5+\dots$$

Feu servir $\sin(z)=\tan(z)\cos(z)$ per demostrar que es verifica

$$\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=a_{2n+1}-\frac{a_{2n-1}}{2!}+\frac{a_{2n-3}}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{a_1}{(2n)!} \quad \text{per} \quad n\geq 0$$

(b) La funció $\tanh(z)$ és holomorfa en el disc $D(0,\pi/2)$ té un desenvolupament de sèrie de Taylor de la forma

$$\tanh(z)=b_1 z+b_3 z^3+b_5 z^5+\dots$$

proveu que es verifica que $b_{2n+1}=(-1)^n a_{2n+1}$.

S'han de fer les proves

3. Camins i integració. Teoremes de Cauchy. Conseqüències.

37. Sigui $n \in \mathbb{Z}$. Calculeu $\displaystyle\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z}$ on $\gamma_n(t) = \cos(nt) + i\sin(nt)$ amb $t \in [-\pi, \pi)$.

38. $\star$ La cardioide be definida per l'expressió $\gamma(t) = 2e^{it} - e^{2it}$ amb $t \in [0, 2\pi)$. Dibuixeu γ^* i trobeu la seva longitud.

39. La cicloide és la corba definida per un punt d'una circunferència de radi 1 que gira sense lliscar per la recta $y = -1$. La cicloide es pot expressar com $\gamma(t) = t - ie^{-it}$ amb $0 \le t \le 2\pi$. Dibuixeu γ^* i calculeu la seva longitud.

40. Calculeu $\displaystyle\int_{-i}^{i} |z|\, dz$, al llarg dels següents camins

(a) una linea recta.
(b) la part esquerra del cercle $|z| = 1$.
(c) la part dreta del cercle $|z| = 1$.

41. Sigui γ un camí circular tancat al voltant de l'origen, de radi 2 i orientat positivament. Verificar les següents expressions fent servir algun dels teoremes de Cauchy.

$$(a) \int_\gamma \frac{e^z}{z}\, dz = 2\pi i \qquad (b) \int_\gamma \frac{e^z}{z^3}\, dz = \pi i$$

$$(c) \int_\gamma \frac{e^z}{z^4}\, dz = \frac{\pi i}{3} \qquad (d) \int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\, dz = 2\pi i e$$

$$(e) \int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)}\, dz = 2\pi i(e-1) \quad (f) \int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)}\, dz = 2\pi i(e-3)$$

42. Calculeu les següents integrals fent servir el teorema de Cauchy

$$(a) \int_{\partial D(0,2)} \frac{z^n}{z}\, dz, \quad \text{on } n \in \mathbb{N} \quad (b) \int_{\partial D(0,1)} \frac{e^z}{z^m}\, dz, \quad \text{on } m \in \mathbb{Z}$$

$$(c) \int_{\partial D(0,1)} \frac{\sin(z)}{z}\, dz \qquad (d) \int_{\partial D(0,1)} \frac{\cosh(z)}{z^3}\, dz$$

43. $\star$ Proveu la fòrmula d'integració per parts sobre camins. Siguin f i g dues funcions holomorfes definides en un domini Ω i γ una corba $\mathcal{C}^1$ a trossos continguda a Ω desde el punt a al punt b. Llavors es verifica

$$\int_\gamma f g' dz = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_\gamma f' g dz$$

44. Calculeu $\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\, dz$ en el següents casos

(a) $\gamma = \partial D(2,1)$.
(b) $\gamma = \partial D(2,3)$.

(c) $\gamma = \partial D(5, 2)$.

(d) $\gamma = \partial D(2, 5)$.

45. Sigui f una funció holomorfa en el disc $D(0, 2)$ i $a \in \mathbb{C}$ amb $|a| < 1$. Proveu que

$$(1 - |a|^2) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \frac{1 - z\bar{a}}{z - a}\, dz$$

on γ és el cercle unitat orientat positivament.

46. Calculeu $\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\, dz$ on γ és cada un dels tres camins descrits a la Figura 1.

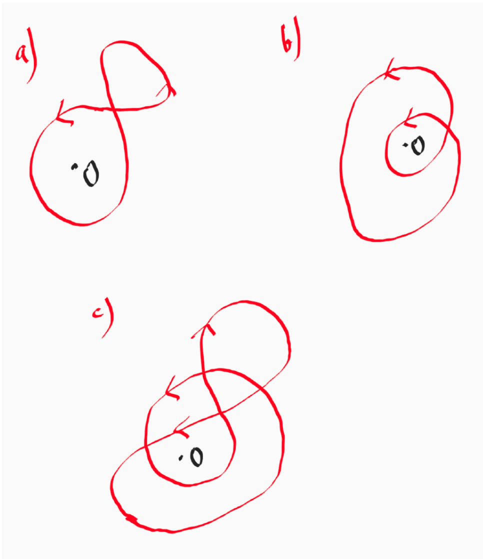

Figura 1: Tres camins diferents.

47. Definim $f(z)$ en el disc $D(0, 1)$ fent servir l'expressió $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Calculeu el desenvolupament de Taylor de f al voltant del punt $a = 1/2$ i també al voltant del punt $a = -1/2$. Determineu el radi de convergència.

48. $\star$ Calculeu el valor de les integrals

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(n\theta - \sin\theta)\, d\theta$.

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta} \cos(r\sin\theta + \theta)\, d\theta$.

Indicació: Relacioneu aquestes integrals amb una integral sobre una circumferència.

49. Sigui a un nombre complex amb $|a| \neq 1$. Calculeu

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos(\theta) + a^2}$$

integrant la funció $(z - a)^{-1}(z - 1/a)^{-1}$ al cercle unitat.

50. Calculeu $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z}\right) dz$ on $a \in \mathbb{C}$ verifica $|a| < 1$.

51. El nucli de Poisson es defineix com $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}$. Proveu les igualtats

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) \qquad \text{per a } 0 \le r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

i feu-la servir per calcular

$$\int_\gamma \frac{|z|}{|1-z|^2} dz \qquad 0 \le r < 1.$$

on γ és la circumferència de centre 0 i radi $r > 0$ orientada positivament.

52. $\star$ Sigui $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ la suma d'una sèrie de potències de radi de convergència $R > 0$. Proveu per tot $0 < r < R$:

(a) $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$

(b) $\displaystyle\frac{1}{\pi} \int\int_{D(0,r)} |f'(a+z)|^2 \, dx \, dy = \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 r^{2n}$

on $z = x + iy$. Si, a més, f és injectiva, llavors l'expressió anterior és l' àrea de $f(D(a,r))$.

53. Proveu el *Lema de Schwartz*. Sigui f una funció holomorfa en el disc unitat $D(0,1)$. Suposem que $f(0) = 0$ i $|f(z)| \le 1$ amb $|z| < 1$. Llavors, es verifica que

$$|f'(0)| \le 1 \quad \text{i} \quad |f(z)| \le |z| \quad \text{si} \quad |z| < 1.$$

Si $|f'(0)| = 1$, llavors $f(z) = e^{i\alpha} z$ on $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indiciació: Apliqueu el principi del mòdul màxim a la funció $g(z) = f(z)/z$.

s'ha de fer la prova

54. Considerem la funció

$$f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad |z| < 1.$$

(a) Proveu que l'aplicació $\frac{1+z}{1-z}$ envia el disc unitat $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$ en el semipla $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$

(b) Trobeu els zeros de f, és a dir, les solucions de $f(z) = 0$ per $z \in \mathbb{D}$.

(c) En quin punt s'acumulen els zeros de f?

55. Proveu que es verifica

$$\left| \int_\gamma \frac{e^z}{z+3} \, dz \right| \le 2\pi e^2$$

on γ és la frontera del cercle $|z-1| = 1$.

56. Calculeu

$$\int_\gamma \frac{\sin^2(z)\,dz}{(z-\pi/6)^2(z+\pi/6)}$$

on γ és la circumferència de radi 4 centrada a l'origen.

57. Troba

$$\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$$

on $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ i n és un enter positiu.

58. Existeix alguna funció holomorfa en $D(0,\epsilon)$ amb $\epsilon > 0$ tal que

(a) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$

(b) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$.

59. Sigui D un obert connex i acotat del pla complex. Siguin $f, g : \overline{D} \mapsto \mathbb{C}$ dues funciones continues i holomorfes a D. Si $f(z)g(z) \neq 0$ per tot $z \in \overline{D}$ i verificant $|f(z)| = |g(z)|$ per a $z \in \partial D$. Proveu que $f = \lambda g$ amb $|\lambda| = 1$.

60. Siguin f i g dues funcions holomorfes en el disc $D(z_0, \epsilon)$ per $\epsilon > 0$. Proveu el Teorema de L'Hôpital, és a dir, si és verifica que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, aleshores

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

61. Sigui f una funció entera i suposem que $\exists R, M > 0, n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z)| \le M|z|^n$, per $|z| \ge R$. Proveu que f és un polinomi de grau $\le n$.

62. Sigui $p(z)$ un polinomi de grau n amb coeficients reals, és a dir,

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad \text{on } a_i \in \mathbb{R} \text{ per } 0 \le i \le n.$$

Sigui $\alpha = \rho e^{i\theta}$ una arrel complexa (no real) de p. Proveu que $\overline{\gamma}$ és també una arrel de p i que $z^2 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2$ divideix p. Finalment, demostreu que $p(z)$ factoritza en factors lineals i quadràtics obtenint

$$p(z) = a_n \prod_{\ell=1}^{k} (z - \alpha_\ell) \prod_{\ell=1}^{m} (z^2 - 2\rho_\ell \cos(\theta_\ell) + \rho_\ell^2)$$

amb $n = k + 2m$. A partir d'aquesta expressió proveu que si el polinomi té grau senar llavors llavors sempre té almenys una arrel real.

63. Proveu

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

per $|z| < 1$.

64. $\star$ Proveu que les sèries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$ tenen el mateix radi de convergència.

4. Singularitats i desenvolupament de Laurent

65. Les següents funcions tenen una singularitat aïllada a $z = 0$. Estudieu quin tipus de singularitat tenen en aquest punt.

$(a) f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$	$(b) f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$	$(c) f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$
$(d) f(z) = \exp(z^{-1} - 1)$	$(e) f(z) = \frac{\log(1+z)}{z^2}$	$(f) f(z) = \frac{\cos(z^{-1})}{z^{-1}}$
$(g) f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)}$	$(h) f(z) = (1 + \exp(z)\ )^{-1}$	$(i) f(z) = z^n \sin\left(\frac{1}{z}\right)$

Nota: Si és una singularitat evitable definiu $f(0)$ per tal que la funció sigui holomorfa. Si es tracta d'un pol escriviu la part singular. Si és una singularitat essencial calculeu $f(D(0, \varepsilon))$ per $\varepsilon > 0$.

66. Sigui $r(z) = \frac{z^2+1}{(z^2+z+1)(z-1)^2}$. Escriviu

$$r(z) = \sum_{j=1}^{N} S_j(z) + P(z)$$

on N és el número de pols de $r(z)$, $S_j(z)$ és la part singular en cada un dels pols de la funció i $P(z)$ és un polinomi.

67. Sigui $r_1 < r_2$. Denotem per $A(z_0; r_1, r_2)$ l'anell obert centrat en el punt z_0 i radi interior r_1 i radi exterior r_2. En altres paraules

$$A(z_0; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}\, ;\, r_1 < |z - z_0| < r_2\ \}.$$

Considerem la funció $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$. Trobeu el desenvolupament de Laurent en els següents anells

(a) $A(0; 0, 1)$
(b) $A(0; 1, 2)$
(c) $A(0; 2, \infty)$.

68. Trobeu desenvolupaments de la funció

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2} + \frac{1}{3 - z}$$

de la forma $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Per cada desenvolupament que trobeu, en quina regió és vàlid? Trobeu explícitament els coeficients a_n.

69. Trobeu les singularitats (classifiqueu-les) de la $f(z) = \tan(z)$

70. Per estudiar el comportament d'un funció $f(z)$ a l'infinit el que farem serà estudiar el comportament de la funció $F(z) = f(1/z)$ a l'origen. D'aquesta forma firem que f presenta una singularitat evitable, un pol o una singularitat essencial a l'infinit si F presenta una singularitat evitable, un pol o una singularitat essencial a l'origen. Quin és el comportament de les següents funcions a l'infinit?

(a) $f(z)$ és un polinomi de grau $n \geq 1$.

(b) $f(z)$ és una funció racional, és a dir, $f(z) = p(z)/q(z)$ on p i q són dos polinomis sense factors en comú. El grau de p és $n \geq 1$ i el grau de q és $m \geq 1$.

(c) $f(z) = \cosh(z)$.

71. Sigui f una funció holomorfa amb una singularitat aillada a l'infinit, és a dir, suposem que existeix $R_0 > 0$ tal que f és holomorfa a $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| > R_0\}$. Definim

$$Res(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(w)\, dw \quad \text{amb}\, \rho > R_0$$

on γ_ρ és un cercle de radi ρ orientat positivament. Definim $F(z) = f(1/z)$ proveu que es verifica la següent igualtat

$$Res(f(z), \infty) = -Res(\frac{1}{z^2} F(z), 0).$$

72. Proveu que les uniques funcions enteres amb una singularitat evitable a l'infinit són les funcions constants.

73. Proveu que el coeficient de z^{-1} del desenvolupament de Laurent de la funció $e^{1/z} e^{2z}$ és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!(n+1)!}$$

74. Calculeu $res(f, 0)$ per les funcions

(a) $f(z) = \frac{1}{z^4 \sin(z)}$.

(b) $f(z) = \frac{1}{z^3 (1 - \cos(z))}$.

75. Sigui $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ definida per $z \neq 0$. Proveu que f presenta una quantitat numerable de pols i trobeu el residu en cada un dels pols.

5. Teoria dels residus

76. Calculeu els següents residus

$$(a) Res\left(\tfrac{1}{z^2+4}, 2i\right) \quad (b) Res\left(\tfrac{\sin(z)}{z^2}, 0\right)$$

$$(c) Res\left(\tfrac{1}{z^2+4}, -2i\right) \quad (d) Res\left(\tfrac{\cos(z)}{z^2}, 0\right)$$

$$(e) Res\left(\tfrac{1}{z^5-1}, 1\right) \quad (f) Res\left(\tfrac{z^n+1}{z^n-1}, e^{2\pi k i/n}\right)$$

77. Calculeu el valor de les següents integrals fent servir la fòrmula dels residus

$$(a) \int_{\partial D(0,1)} \frac{\sin(z)}{z^2}\, dz \quad (b) \int_{\partial D(0,2)} \frac{z}{\cos(z)}\, dz$$

$$(c) \int_{\partial D(1,1)} \frac{1}{z^8-1}\, dz \quad (d) \int_{\partial D(0,2)} \frac{e^z}{z^2-1}\, dz$$

$$(e) \int_{\partial D(1,1)} \frac{z^4}{\sin(z)}\, dz \quad (f) \int_{\partial D(\frac{1}{2},\frac{3}{2})} \frac{\tan(z)}{z}\, dz$$

78. Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a > b > 0$. Calculeu $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos(\theta)}$

79. Calculeu el valor de les següents integrals fent servir el mètode dels residus

$$(a) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\sin^2(x)}\, dx, \quad \text{amb } a \text{ real } a > 1 \qquad (b) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\, dx$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\, dx \qquad (d) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\, dx \quad , a \text{ real}$$

$$(e) \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\, dx \qquad (f) \int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x^2-2x+2}\, dx$$

$$(e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} \qquad (f) \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

80. Calculeu

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos(\theta) + a^2}$$

per $|a| < 1$ i per $|a| > 1$.

81. Proveu la igualtat

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \qquad \text{per } n = 1, 2, \ldots,$$

Indicació: Feu servir integració sobre el triangle de vèrtexs 0, R i $Re^{2\pi i/n}$.

82. Calculeu les integrals

(a) $\displaystyle\int_{\partial D(0,2)} \frac{\sin(\pi z)\, dz}{(2z+1)^3}$.

(b) $\displaystyle\int_{\partial D(0,\pi/4)} \frac{dz}{z^2 \tan(z)}$.

83. Considerem la funció $f(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}$

(a) Trobeu tots els pols de f i el residu a cada pol.

(b) Sigui Q_n el quadrat amb vèrtexs en els punts $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Calculeu $\displaystyle\int_{\partial Q_n} f(z) dz$.

(c) Proveu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Indicació: Proveu l'acotació $\left|\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right| \leq A$ *quan* $z \in \partial Q_n$.

84. $\star$ Considerem la integral

$$I(R) = \int_{\partial D_R} \frac{e^{\pi i (z-1/2)^2}}{1 - e^{-2\pi i z}}\, dz$$

on D_R és el paral.lelogram amb vèrtexs en els punts $\pm\frac{1}{2} \pm (1+i)R$.

(a) Proveu que $I(R) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(b) Parametritzant els costats del paral.lelogram trobeu que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} I(R) = (1+i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t^2}\, dt$.

(c) Calculeu $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, ds$.