

Anàlisi Matemàtica 1 (AM1) GEMiF

E4.1 Exercicis: Sèries i criteris de convergència

1. Digues quines de les següents sèries són convergents i quines divergents:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2}.$

(ii) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$

(iii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \dots$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}.$

(v) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 - 1}}$

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}.$

(viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}.$

(ix) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}.$

(xi) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}.$

(xii) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\log n)^n}.$

(xiii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}.$

(xiv) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}.$

$$(xvii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(\log n)}.$$

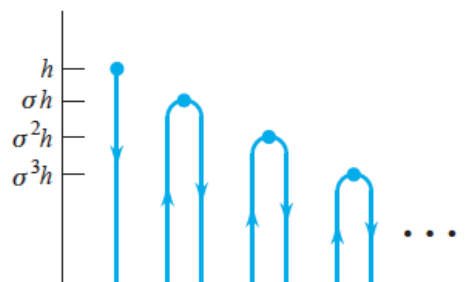
$$(xviii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

$$(xix) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

$$(xx) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Pista: utilitza el criteri de comparació per a (i), (v), (vi), (viii), (ix), (x), (xiii), (xiv), (xvii); utilitza el criteri del quocient de d'Alembert per a (vii), (xviii), (xix), (xx); utilitza el criteri de l'arrel de Cauchy per a (xi).

- Una pilota caiguda des d'una alçada h toca el terra i rebota a una alçada proporcional a h , és a dir, a una alçada σh amb $\sigma < 1$. Aleshores torna a caure des de l'alçada σh , colpeja el terra i rebota fins a l'alçada $\sigma(\sigma h) = \sigma^2 h$, i així successivament. Troba la longitud total del camí de la pilota. Quina és aquesta longitud si al deixar-la caure des d'una alçada de 6 metres el segon rebot és de 3 metres?



- Comenceu amb un quadrat que tingui costats 4 unitats de longitud. Uneix al punts mitjans dels costats del quadrat per formar un segon quadrat dins el primer. A continuació, uneix els punts mitjans dels costats del segon quadrat per formar un tercer quadrat, i així successivament infinites vegades (veure figura). Troba la suma de les àrees dels quadrats.

