Grupo afín

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$, $\mathcal{B} = (B, V')$ y $\mathcal{C} = (C, V'')$ tres espacios afines, y sean $\psi : A \longrightarrow B$ y $\psi' : B \longrightarrow C$ dos aplicaciones afines. La composición $\psi' \circ \psi : A \longrightarrow C$ es una aplicación afín y la aplicación lineal asociada es $\overrightarrow{\psi' \circ \psi} = \overrightarrow{\psi'} \circ \overrightarrow{\psi}$.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A,V)$, $\mathcal{B} = (B,V')$ y $\mathcal{C} = (C,V'')$ tres espacios afines, y sean $\psi : A \longrightarrow B$ y $\psi' : B \longrightarrow C$ dos aplicaciones afines. La composición $\psi' \circ \psi : A \longrightarrow C$ es una aplicación afín y la aplicación lineal asociada es $\overrightarrow{\psi' \circ \psi} = \overrightarrow{\psi'} \circ \overrightarrow{\psi}$.

Demostración

Para todo $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\psi'} \circ \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\psi'}\left(\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{xy})\right) \\
= \overrightarrow{\psi'}\left(\overrightarrow{\psi(x)\psi(y)}\right) \\
= \overrightarrow{\psi'(\psi(x))\psi'(\psi(y))} \\
= \overrightarrow{\psi' \circ \psi(x)\psi' \circ \psi(y)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi' \circ \psi$ es afín y la aplicación lineal asociada es $\overrightarrow{\psi'} \circ \overrightarrow{\psi}$.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Entonces ψ es biyectiva si y solo si $\overrightarrow{\psi}$ es biyectiva.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Entonces ψ es biyectiva si y solo si $\overrightarrow{\psi}$ es biyectiva.

Demostración (Inyectividad)

Como $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\psi(x)\psi(y)}$ para todo $x, y \in A$, tenemos que $\overrightarrow{xy} \in \ker \overrightarrow{\psi}$ si y solo si $\psi(x) = \psi(y)$. Por lo tanto:

- $(\Rightarrow)$ Sea ψ inyectiva.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Entonces ψ es biyectiva si y solo si $\overrightarrow{\psi}$ es biyectiva.

Demostración (Inyectividad)

Como $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\psi(x)\psi(y)}$ para todo $x, y \in A$, tenemos que $\overrightarrow{xy} \in \ker \overrightarrow{\psi}$ si y solo si $\psi(x) = \psi(y)$. Por lo tanto:

- $(\Rightarrow)$ Sea ψ inyectiva. Para todo $\overrightarrow{xy} \in \ker \overrightarrow{\psi}$ tenemos que $\psi(x) = \psi(y)$, y eso implica que $x = y$, por a inyectividad de ψ. De ahí que $\ker \overrightarrow{\psi} = \{\overrightarrow{0}\}$, lo que implica que $\overrightarrow{\psi}$ es inyectiva.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Entonces ψ es biyectiva si y solo si $\overrightarrow{\psi}$ es biyectiva.

Demostración (Inyectividad)

Como $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\psi(x)\psi(y)}$ para todo $x, y \in A$, tenemos que $\overrightarrow{xy} \in \ker \overrightarrow{\psi}$ si y solo si $\psi(x) = \psi(y)$. Por lo tanto:

- $(\Rightarrow)$ Sea ψ inyectiva. Para todo $\overrightarrow{xy} \in \ker \overrightarrow{\psi}$ tenemos que $\psi(x) = \psi(y)$, y eso implica que $x = y$, por a inyectividad de ψ. De ahí que $\ker \overrightarrow{\psi} = \{\overrightarrow{0}\}$, lo que implica que $\overrightarrow{\psi}$ es inyectiva.
- $(\Leftarrow)$ Sea $\overrightarrow{\psi}$ inyectiva.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Entonces ψ es biyectiva si y solo si $\overrightarrow{\psi}$ es biyectiva.

Demostración (Inyectividad)

Como $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\psi(x)\psi(y)}$ para todo $x, y \in A$, tenemos que $\overrightarrow{xy} \in \ker \overrightarrow{\psi}$ si y solo si $\psi(x) = \psi(y)$. Por lo tanto:

- $(\Rightarrow)$ Sea ψ inyectiva. Para todo $\overrightarrow{xy} \in \ker \overrightarrow{\psi}$ tenemos que $\psi(x) = \psi(y)$, y eso implica que $x = y$, por a inyectividad de ψ. De ahí que $\ker \overrightarrow{\psi} = \{\overrightarrow{0}\}$, lo que implica que $\overrightarrow{\psi}$ es inyectiva.
- $(\Leftarrow)$ Sea $\overrightarrow{\psi}$ inyectiva. Si $\psi(x) = \psi(y)$, entonces $\overrightarrow{xy} \in \ker \overrightarrow{\psi} = \{\overrightarrow{0}\}$. De ahí que $x = y$, lo que implica que ψ es inyectiva. $\square$

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Entonces ψ es biyectiva si y solo si $\overrightarrow{\psi}$ es biyectiva.

Demostración (Sobreyectividad=exhaustividad)

Sean $o \in A$ y $o' \in B$ tales que $\psi(o) = o'$.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Entonces ψ es biyectiva si y solo si $\overrightarrow{\psi}$ es biyectiva.

Demostración (Sobreyectividad=exhaustividad)

Sean $o \in A$ y $o' \in B$ tales que $\psi(o) = o'$.

$(\Rightarrow)$ Como $\mathcal{B}$ es afín, para todo $\overrightarrow{v} \in V'$, existe $b \in B$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{o'b}$. Si ψ es sobreyectiva, entonces existe $a \in A$ tal que $\psi(a) = b$. En ese caso, $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} = \overrightarrow{o'b} = \overrightarrow{v}$ y como $\overrightarrow{oa} \in V$ tenemos que $\overrightarrow{\psi}$ es sobreyectiva.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Entonces ψ es biyectiva si y solo si $\overrightarrow{\psi}$ es biyectiva.

Demostración (Sobreyectividad=exhaustividad)

Sean $o \in A$ y $o' \in B$ tales que $\psi(o) = o'$.

($\Rightarrow$) Como $\mathcal{B}$ es afín, para todo $\overrightarrow{v} \in V'$, existe $b \in B$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{o'b}$. Si ψ es sobreyectiva, entonces existe $a \in A$ tal que $\psi(a) = b$. En ese caso, $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} = \overrightarrow{o'b} = \overrightarrow{v}$ y como $\overrightarrow{oa} \in V$ tenemos que $\overrightarrow{\psi}$ es sobreyectiva.

($\Leftarrow$) Como $\mathcal{B}$ es afín, para todo $b \in B$ se cumple $\overrightarrow{o'b} \in V'$. Si $\overrightarrow{\psi}$ es sobreyectiva, existe $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{o'b}$. Como $\mathcal{A}$ es afín, existe $a \in A$ tal que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{oa}$, y así $\overrightarrow{o'b} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} = \overrightarrow{o'\psi(a)}$, lo que implica que $\psi(a) = b$, y por eso ψ es sobreyectiva. $\square$

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Si ψ es inyectiva, entonces la aplicación inversa $\psi^{-1} : Im\psi \longrightarrow A$ es afín y su aplicación lineal asociada es la inversa de $\overrightarrow{\psi}$.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Si ψ es inyectiva, entonces la aplicación inversa $\psi^{-1} : Im\psi \longrightarrow A$ es afín y su aplicación lineal asociada es la inversa de $\overrightarrow{\psi}$.

Demostración

Sea ψ inyectiva, y sea $B_1 = Im\psi$ y $V_1' = Im\overrightarrow{\psi}$. Tomamos un punto $o \in A$ y otro $o' \in B$ tales que $\psi(o) = o'$.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Si ψ es inyectiva, entonces la aplicación inversa $\psi^{-1} : Im\psi \longrightarrow A$ es afín y su aplicación lineal asociada es la inversa de $\overrightarrow{\psi}$.

Demostración

Sea ψ inyectiva, y sea $B_1 = Im\psi$ y $V_1' = Im\overrightarrow{\psi}$. Tomamos un punto $o \in A$ y otro $o' \in B$ tales que $\psi(o) = o'$.

Como $\psi : A \longrightarrow B_1$ es biyectiva, la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi} : V \longrightarrow V_1'$ es biyectiva.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A,V)$ y $\mathcal{B} = (B,V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Si ψ es inyectiva, entonces la aplicación inversa $\psi^{-1} : Im\psi \longrightarrow A$ es afín y su aplicación lineal asociada es la inversa de $\overrightarrow{\psi}$.

Demostración

Sea ψ inyectiva, y sea $B_1 = Im\psi$ y $V_1' = Im\overrightarrow{\psi}$. Tomamos un punto $o \in A$ y otro $o' \in B$ tales que $\psi(o) = o'$.

Como $\psi : A \longrightarrow B_1$ es biyectiva, la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi} : V \longrightarrow V_1'$ es biyectiva.

Ahora bien, para todo $b \in B_1$ existe $a \in A$ tal que $\psi(a) = b$ y $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{o'b}$.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines, y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Si ψ es inyectiva, entonces la aplicación inversa $\psi^{-1} : Im\psi \longrightarrow A$ es afín y su aplicación lineal asociada es la inversa de $\overrightarrow{\psi}$.

Demostración

Sea ψ inyectiva, y sea $B_1 = Im\psi$ y $V_1' = Im\overrightarrow{\psi}$. Tomamos un punto $o \in A$ y otro $o' \in B$ tales que $\psi(o) = o'$.

Como $\psi : A \longrightarrow B_1$ es biyectiva, la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi} : V \longrightarrow V_1'$ es biyectiva.

Ahora bien, para todo $b \in B_1$ existe $a \in A$ tal que $\psi(a) = b$ y $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{o'b}$.

Por lo tanto, $(\overrightarrow{\psi})^{-1}(\overrightarrow{o'b}) = \overrightarrow{oa} = \overrightarrow{\psi^{-1}(o')\psi^{-1}(b)}$, lo que implica que ψ^{-1} es afín y su aplicación lineal asociada es la inversa de $\overrightarrow{\psi}$ $\square$

De las tres proposiciones anteriores se infiere el siguiente resultado.

De las tres proposiciones anteriores se infiere el siguiente resultado.

Proposición

Si $\mathcal{A}$ es un espacio afín y $GA(\mathcal{A})$ es el conjunto de aplicaciones afines biyectivas de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, entonces $(GA(\mathcal{A}), \circ)$ es un grupo.

De las tres proposiciones anteriores se infiere el siguiente resultado.

Proposición

Si $\mathcal{A}$ es un espacio afín y $GA(\mathcal{A})$ es el conjunto de aplicaciones afines biyectivas de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, entonces $(GA(\mathcal{A}), \circ)$ es un grupo.

Definición

- $(GA(\mathcal{A}), \circ)$ recibe el nombre de el grupo afín de $\mathcal{A}$.
- Los elementos del grupo afín se denominan *transformaciones afines* o *afinidades*.

Homomorfismo de grupos

Dados dos grupos $(G, \circ)$ y $(H, *)$, un homomorfismo de grupos es una aplicación $f : G \longrightarrow H$ que preserva las operaciones de grupo. Es decir

$$f(g \circ g') = f(g) * f(g') \text{ para todo } g, g' \in G.$$

Homomorfismo de grupos

Dados dos grupos $(G, \circ)$ y $(H, *)$, un homomorfismo de grupos es una aplicación $f : G \longrightarrow H$ que preserva las operaciones de grupo. Es decir

$$f(g \circ g') = f(g) * f(g') \text{ para todo } g, g' \in G.$$

Todo homorfismo de grupo transforma el neutro de G en el neutro de H, i.e., $f(e_G) = e_H$.

Homomorfismo de grupos

Dados dos grupos $(G, \circ)$ y $(H, *)$, un homomorfismo de grupos es una aplicación $f : G \longrightarrow H$ que preserva las operaciones de grupo. Es decir

$$f(g \circ g') = f(g) * f(g') \text{ para todo } g, g' \in G.$$

Todo homorfismo de grupo transforma el neutro de G en el neutro de H, i.e., $f(e_G) = e_H$.

Nótese que todo homomorfismo de grupos preserva el simétrico:

$$f(g) * f(g^{-1}) = f(g \circ g^{-1}) = f(e_G) = e_H,$$

y por esos $(f(g))^{-1} = f(g^{-1})$.

Ejemplo

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y sea $GT(\mathcal{A})$ el conjunto de todas las traslaciones de $\mathcal{A}$. Sabemos que, $(GT(\mathcal{A}), \circ)$ y $(V, +)$ son grupos. La aplicación

$$\begin{aligned} f : GT(\mathcal{A}) &\longrightarrow V \\ t_{\overrightarrow{u}} &\longrightarrow \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

Ejemplo

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y sea $GT(\mathcal{A})$ el conjunto de todas las traslaciones de $\mathcal{A}$. Sabemos que, $(GT(\mathcal{A}), \circ)$ y $(V, +)$ son grupos. La aplicación

$$\begin{aligned} f : GT(\mathcal{A}) &\longrightarrow V \\ t_{\overrightarrow{u}} &\longrightarrow \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

Esto es,

$$f(t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}) = f(t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = f(t_{\overrightarrow{u}}) + f(t_{\overrightarrow{v}}).$$

Ejemplo

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $GH_c(\mathcal{A})$ el conjunto de las homotecias de $\mathcal{A}$ de centro en $c \in A$ y razón diferente de cero. Sabemos que, $(GH_c(\mathcal{A}), \circ)$ y $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ son grupos. La aplicación

$$\begin{aligned} f : GH_c(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\} \\ h_{(c,\lambda)} &\longrightarrow \lambda \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

Ejemplo

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $GH_c(\mathcal{A})$ el conjunto de las homotecias de $\mathcal{A}$ de centro en $c \in A$ y razón diferente de cero. Sabemos que, $(GH_c(\mathcal{A}), \circ)$ y $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ son grupos. La aplicación

$$\begin{aligned} f : GH_c(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\} \\ h_{(c,\lambda)} &\longrightarrow \lambda \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

Esto es,

$$f(h_{(c,\lambda)} \circ h_{(c,\lambda')}) = f(h_{(c,\lambda\lambda')}) = \lambda\lambda' = f(h_{(c,\lambda)}) f(h_{(c,\lambda')}).$$

Grupo lineal

Dado un espacio vectorial V, el grupo lineal de V, denotado por $GL(V)$, es el grupo de todas las aplicaciones lineales biyectivas de V en V.

Grupo lineal

Dado un espacio vectorial V, el grupo lineal de V, denotado por $GL(V)$, es el grupo de todas las aplicaciones lineales biyectivas de V en V.

Proposición

Dado un espacio afín $\mathcal{A} = (A, V)$, la aplicación de $GA(\mathcal{A})$ en $GL(V)$,

$$\sigma : GA(\mathcal{A}) \longrightarrow GL(V)$$
$$\psi \longrightarrow \overrightarrow{\psi}$$

que transforma una aplicación afín en su aplicación lineal asociada es un homomorfismo de grupos sobreyectivo cuyo núcleo es el grupo de traslaciones de $\mathcal{A}$.

Ejercicio

Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines. Prueba que para cada $o \in A$ y $o' \in B$, existe una única aplicación afín $\psi : A \longrightarrow B$ que transforma o en o' y cuya aplicación lineal asociada es f.

Ejercicio

Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, V')$ dos espacios afines. Prueba que para cada $o \in A$ y $o' \in B$, existe una única aplicación afín $\psi : A \longrightarrow B$ que transforma o en o' y cuya aplicación lineal asociada es f.

Solución

Como f es una aplicación lineal, la aplicación $\psi : A \longrightarrow B$ definida por $\psi(x) = o' + f(\overrightarrow{ox})$ transforma o en o', es afín, y $\overrightarrow{\psi} = f$. Ahora bien, si existe otra aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow B$ con $\psi'(o) = o'$ y $\overrightarrow{\psi'} = f$, entonces para todo $x \in A$ tenemos

$$\psi(x) = o' + f(\overrightarrow{ox}) = \psi'(o) + \overrightarrow{\psi'}(\overrightarrow{ox}) = \psi'(x),$$

lo que implica que $\psi = \psi'$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín. Prueba que para todo $o \in A$ y $\overrightarrow{u} \in V$ tales que $\psi(o) = o + \overrightarrow{u}$, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ que fija el punto o y cumple

$$\psi = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'.$$

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín. Prueba que para todo $o \in A$ y $\overrightarrow{u} \in V$ tales que $\psi(o) = o + \overrightarrow{u}$, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ que fija el punto o y cumple

$$\psi = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'.$$

Solución

Como $t_{-\overrightarrow{u}} : A \longrightarrow A$ es afín y $\psi : A \longrightarrow A$ es afín, la aplicación $\psi' = t_{-\overrightarrow{u}} \circ \psi$ es afín. Además, $\overrightarrow{\psi'} = \overrightarrow{\psi}$, ya que la aplicación lineal asociada a las traslaciones es la identidad.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín. Prueba que para todo $o \in A$ y $\overrightarrow{u} \in V$ tales que $\psi(o) = o + \overrightarrow{u}$, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ que fija el punto o y cumple

$$\psi = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'.$$

Solución

Como $t_{-\overrightarrow{u}} : A \longrightarrow A$ es afín y $\psi : A \longrightarrow A$ es afín, la aplicación $\psi' = t_{-\overrightarrow{u}} \circ \psi$ es afín. Además, $\overrightarrow{\psi'} = \overrightarrow{\psi}$, ya que la aplicación lineal asociada a las traslaciones es la identidad.

Por otro lado, $\psi'(o) = \psi(o) + (-\overrightarrow{u}) = (o + \overrightarrow{u}) + (-\overrightarrow{u}) = o$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín. Prueba que para todo $o \in A$ y $\overrightarrow{u} \in V$ tales que $\psi(o) = o + \overrightarrow{u}$, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ que fija el punto o y cumple

$$\psi = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'.$$

Solución

Como $t_{-\overrightarrow{u}} : A \longrightarrow A$ es afín y $\psi : A \longrightarrow A$ es afín, la aplicación $\psi' = t_{-\overrightarrow{u}} \circ \psi$ es afín. Además, $\overrightarrow{\psi'} = \overrightarrow{\psi}$, ya que la aplicación lineal asociada a las traslaciones es la identidad.

Por otro lado, $\psi'(o) = \psi(o) + (-\overrightarrow{u}) = (o + \overrightarrow{u}) + (-\overrightarrow{u}) = o$.

Por lo tanto, ψ' es la única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ que fija el punto o y cumple $\psi = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'$ ya que, como vimos antes, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ tal que $\psi'(o) = o$ y $\overrightarrow{\psi'} = \overrightarrow{\psi}$. $\square$

Ejercicio (Demuestra el ejercicio de antes por otra vía)

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín. Prueba que para todo $o \in A$ y $\overrightarrow{u} \in V$ tales que $\psi(o) = o + \overrightarrow{u}$, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ que fija el punto o y cumple

$$\psi = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'.$$

Ejercicio (Demuestra el ejercicio de antes por otra vía)

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín. Prueba que para todo $o \in A$ y $\overrightarrow{u} \in V$ tales que $\psi(o) = o + \overrightarrow{u}$, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ que fija el punto o y cumple

$$\psi = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'.$$

Solución

Como vimos antes, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ tal que $\psi'(o) = o$ y $\overrightarrow{\psi'} = \overrightarrow{\psi}$. Así, para todo $a \in A$, tenemos $\overrightarrow{o\psi'(a)} =$???

Ejercicio (Demuestra el ejercicio de antes por otra vía)

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín. Prueba que para todo $o \in A$ y $\overrightarrow{u} \in V$ tales que $\psi(o) = o + \overrightarrow{u}$, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ que fija el punto o y cumple

$$\psi = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'.$$

Solución

Como vimos antes, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ tal que $\psi'(o) = o$ y $\overrightarrow{\psi'} = \overrightarrow{\psi}$. Así, para todo $a \in A$, tenemos $\overrightarrow{o\psi'(a)} =$???

$$\overrightarrow{o\psi'(a)} = \overrightarrow{\psi'(o)\psi'(a)} = \overrightarrow{\psi'}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)}.$$

Ejercicio (Demuestra el ejercicio de antes por otra vía)

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín. Prueba que para todo $o \in A$ y $\overrightarrow{u} \in V$ tales que $\psi(o) = o + \overrightarrow{u}$, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ que fija el punto o y cumple

$$\psi = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'.$$

Solución

Como vimos antes, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ tal que $\psi'(o) = o$ y $\overrightarrow{\psi'} = \overrightarrow{\psi}$. Así, para todo $a \in A$, tenemos $\overrightarrow{o\psi'(a)} =$???

$$\overrightarrow{o\psi'(a)} = \overrightarrow{\psi'(o)\psi'(a)} = \overrightarrow{\psi'}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)}.$$

Por la regla del paralelogramo,

Ejercicio (Demuestra el ejercicio de antes por otra vía)

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y $\psi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín. Prueba que para todo $o \in A$ y $\overrightarrow{u} \in V$ tales que $\psi(o) = o + \overrightarrow{u}$, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ que fija el punto o y cumple

$$\psi = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'.$$

Solución

Como vimos antes, existe una única aplicación afín $\psi' : A \longrightarrow A$ tal que $\psi'(o) = o$ y $\overrightarrow{\psi'} = \overrightarrow{\psi}$. Así, para todo $a \in A$, tenemos $\overrightarrow{o\psi'(a)} =$???

$$\overrightarrow{o\psi'(a)} = \overrightarrow{\psi'(o)\psi'(a)} = \overrightarrow{\psi'}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)}.$$

Por la regla del paralelogramo, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{o\psi(o)} = \overrightarrow{\psi'(a)\psi(a)}$, lo que implica $\psi(a) = \psi'(a) + \overrightarrow{u} = t_{\overrightarrow{u}}(\psi'(a)) = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'(a)$. Por lo tanto, $\psi = t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi'$.

Definición

Dos transformaciones afines $\psi', \psi'' \in GA(\mathcal{A})$ son *conjugadas* si existe una transformación afín $\psi \in GA(\mathcal{A})$ tal que

$$\psi'' = \psi \circ \psi' \circ \psi^{-1}.$$

Definición

Dos transformaciones afines $\psi', \psi'' \in GA(\mathcal{A})$ son *conjugadas* si existe una transformación afín $\psi \in GA(\mathcal{A})$ tal que

$$\psi'' = \psi \circ \psi' \circ \psi^{-1}.$$

Informalmente, existe un principio en geometría, llamado "principio de conjugación", que establece que dos transformaciones geométricas conjugadas tienen la misma naturaleza geométrica.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Prueba que para toda transformación $\psi \in GA(\mathcal{A})$, y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ tales que $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$,

$$t_{\overrightarrow{v}} = \psi \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi^{-1}.$$

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Prueba que para toda transformación $\psi \in GA(\mathcal{A})$, y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ tales que $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$,

$$t_{\overrightarrow{v}} = \psi \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi^{-1}.$$

Solución

Sea $a \in A$. Si $b = a + \overrightarrow{u}$,

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Prueba que para toda transformación $\psi \in GA(\mathcal{A})$, y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ tales que $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$,

$$t_{\overrightarrow{v}} = \psi \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi^{-1}.$$

Solución

Sea $a \in A$. Si $b = a + \overrightarrow{u}$, entonces $\psi(b) = \psi(t_{\overrightarrow{u}}(a)) = \psi \circ t_{\overrightarrow{u}}(a)$. Ahora bien, de

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\psi}(u) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{\psi(a)\psi(b)}$$

se deduce que $\psi(b) = t_{\overrightarrow{v}}(\psi(a))$, y por eso

$$\psi \circ t_{\overrightarrow{u}}(a) = \psi(t_{\overrightarrow{u}}(a)) = \psi(b) = t_{\overrightarrow{v}}(\psi(a)) = t_{\overrightarrow{v}} \circ \psi(a).$$

Por lo tanto, $t_{\overrightarrow{v}} = \psi \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ \psi^{-1}$. □

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y λ un escalar. Prueba que para toda transformación $\psi \in GA(\mathcal{A})$, y $o, o' \in A$ tales que $\psi(o) = o'$,

$$h_{(o',\lambda)} = \psi \circ h_{(o,\lambda)} \circ \psi^{-1}.$$

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y λ un escalar. Prueba que para toda transformación $\psi \in GA(\mathcal{A})$, y $o, o' \in A$ tales que $\psi(o) = o'$,

$$h_{(o',\lambda)} = \psi \circ h_{(o,\lambda)} \circ \psi^{-1}.$$

Solución

Para todo $a \in A$ y todo escalar λ, existe $b \in A$ tal que $b = o + \lambda \overrightarrow{oa}$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y λ un escalar. Prueba que para toda transformación $\psi \in GA(\mathcal{A})$, y $o, o' \in A$ tales que $\psi(o) = o'$,

$$h_{(o',\lambda)} = \psi \circ h_{(o,\lambda)} \circ \psi^{-1}.$$

Solución

Para todo $a \in A$ y todo escalar λ, existe $b \in A$ tal que $b = o + \lambda\overrightarrow{oa}$.

- Nótese que $\psi(b) = \psi \circ h_{(o,\lambda)}(a)$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y λ un escalar. Prueba que para toda transformación $\psi \in GA(\mathcal{A})$, y $o, o' \in A$ tales que $\psi(o) = o'$,

$$h_{(o',\lambda)} = \psi \circ h_{(o,\lambda)} \circ \psi^{-1}.$$

Solución

Para todo $a \in A$ y todo escalar λ, existe $b \in A$ tal que $b = o + \lambda\overrightarrow{oa}$.

- Nótese que $\psi(b) = \psi \circ h_{(o,\lambda)}(a)$.
- Además, $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ob}) = \lambda\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \lambda\overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} = \lambda\overrightarrow{o'\psi(a)}$ y $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ob}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(b)} = \overrightarrow{o'\psi(b)}$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y λ un escalar. Prueba que para toda transformación $\psi \in GA(\mathcal{A})$, y $o, o' \in A$ tales que $\psi(o) = o'$,

$$h_{(o',\lambda)} = \psi \circ h_{(o,\lambda)} \circ \psi^{-1}.$$

Solución

Para todo $a \in A$ y todo escalar λ, existe $b \in A$ tal que $b = o + \lambda\overrightarrow{oa}$.

- Nótese que $\psi(b) = \psi \circ h_{(o,\lambda)}(a)$.
- Además, $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ob}) = \lambda\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \lambda\overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} = \lambda\overrightarrow{o'\psi(a)}$ y $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ob}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(b)} = \overrightarrow{o'\psi(b)}$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y λ un escalar. Prueba que para toda transformación $\psi \in GA(\mathcal{A})$, y $o, o' \in A$ tales que $\psi(o) = o'$,

$$h_{(o',\lambda)} = \psi \circ h_{(o,\lambda)} \circ \psi^{-1}.$$

Solución

Para todo $a \in A$ y todo escalar λ, existe $b \in A$ tal que $b = o + \lambda\overrightarrow{oa}$.

- Nótese que $\psi(b) = \psi \circ h_{(o,\lambda)}(a)$.
- Además, $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ob}) = \lambda\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \lambda\overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} = \lambda\overrightarrow{o'\psi(a)}$ y $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ob}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(b)} = \overrightarrow{o'\psi(b)}$.
- De ahí que $\psi(b) = h_{(o',\lambda)} \circ \psi(a)$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín y λ un escalar. Prueba que para toda transformación $\psi \in GA(\mathcal{A})$, y $o, o' \in A$ tales que $\psi(o) = o'$,

$$h_{(o',\lambda)} = \psi \circ h_{(o,\lambda)} \circ \psi^{-1}.$$

Solución

Para todo $a \in A$ y todo escalar λ, existe $b \in A$ tal que $b = o + \lambda\overrightarrow{oa}$.

- Nótese que $\psi(b) = \psi \circ h_{(o,\lambda)}(a)$.
- Además, $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ob}) = \lambda\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \lambda\overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} = \lambda\overrightarrow{o'\psi(a)}$ y $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ob}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(b)} = \overrightarrow{o'\psi(b)}$.
- De ahí que $\psi(b) = h_{(o',\lambda)} \circ \psi(a)$.
- En resumen, $\psi \circ h_{(o,\lambda)} = h_{(o',\lambda)} \circ \psi$. $\square$