Suma de subespacios afines

Definición

Sean $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ dos subespacios afines de $\mathcal{A} = (A, V)$. La suma afín, denotada por $\mathcal{A}' + \mathcal{A}''$, es el subespacio afín de $\mathcal{A}$ cuyo conjunto de puntos se obtiene por la intersección de los conjuntos de puntos de todos los subespacios afines de $\mathcal{A}$ que contienen todos los puntos del conjunto $A' \cup A''$.

Definición

Sean $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ dos subespacios afines de $\mathcal{A} = (A, V)$. La suma afín, denotada por $\mathcal{A}' + \mathcal{A}''$, es el subespacio afín de $\mathcal{A}$ cuyo conjunto de puntos se obtiene por la intersección de los conjuntos de puntos de todos los subespacios afines de $\mathcal{A}$ que contienen todos los puntos del conjunto $A' \cup A''$.

¿Cómo determinar los puntos y la dirección de $\mathcal{A}' + \mathcal{A}''$?

Observaciones y notación, donde $a' \in A'$ y $a'' \in A''$

Observaciones y notación, donde $a' \in A'$ y $a'' \in A''$

1. $F = \langle \overrightarrow{a'a''} \rangle + F' + F''$ es un subespacio vectorial de V.

Observaciones y notación, donde $a' \in A'$ y $a'' \in A''$

1. $F = \langle \overrightarrow{a'a''} \rangle + F' + F''$ es un subespacio vectorial de V.
2. $(a' + F, F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$.

Observaciones y notación, donde $a' \in A'$ y $a'' \in A''$

1. $F = \langle \overrightarrow{a'a''} \rangle + F' + F''$ es un subespacio vectorial de V.
2. $(a' + F, F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$.
3. $A' \cup A'' \subseteq a' + F = a'' + F$.

Observaciones y notación, donde $a' \in A'$ y $a'' \in A''$

1. $F = \langle \overrightarrow{a'a''} \rangle + F' + F''$ es un subespacio vectorial de V.
2. $(a' + F, F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$.
3. $A' \cup A'' \subseteq a' + F = a'' + F$.
4. Si $\mathcal{A}' + \mathcal{A}'' = (B, E)$, entonces F es un subespacio vectorial de E, por AF1.

Observaciones y notación, donde $a' \in A'$ y $a'' \in A''$

1. $F = \langle \overrightarrow{a'a''} \rangle + F' + F''$ es un subespacio vectorial de V.
2. $(a' + F, F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$.
3. $A' \cup A'' \subseteq a' + F = a'' + F$.
4. Si $\mathcal{A}' + \mathcal{A}'' = (B, E)$, entonces F es un subespacio vectorial de E, por AF1.
5. Por lo tanto, $a' + F \subseteq a' + E = B$.

Observaciones y notación, donde $a' \in A'$ y $a'' \in A''$

1. $F = \langle \overrightarrow{a'a''} \rangle + F' + F''$ es un subespacio vectorial de V.
2. $(a' + F, F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$.
3. $A' \cup A'' \subseteq a' + F = a'' + F$.
4. Si $\mathcal{A}' + \mathcal{A}'' = (B, E)$, entonces F es un subespacio vectorial de E, por AF1.
5. Por lo tanto, $a' + F \subseteq a' + E = B$.
6. En resumen, $\mathcal{A}' + \mathcal{A}'' = (a' + F, F)$.

Proposición

Sean $\mathcal{A}' = (A', F')$ y $\mathcal{A}'' = (A'', F'')$ dos subespacios afines de $\mathcal{A} = (A, V)$. Las siguientes afirmaciones se cumplen.

- Si $A' \cap A'' \neq \emptyset$, entonces

$$\dim(\mathcal{A}' + \mathcal{A}'') = \dim(\mathcal{A}') + \dim(\mathcal{A}'') - \dim(\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'').$$

- Si $A' \cap A'' = \emptyset$, entonces

$$\dim(\mathcal{A}' + \mathcal{A}'') = \dim(\mathcal{A}') + \dim(\mathcal{A}'') - \dim(F' \cap F'') + 1.$$

Demostración

- Sea $L = \langle \overrightarrow{a'a''} \rangle$ con $a' \in A'$ y $a'' \in A''$.

Demostración

- Sea $L = \langle \overrightarrow{a'a''} \rangle$ con $a' \in A'$ y $a'' \in A''$.
- Nótese que, $\dim(\mathcal{A}' + \mathcal{A}'') = \dim(F' + F'' + L)$.

Demostración

- Sea $L = \langle \overrightarrow{a'a''} \rangle$ con $a' \in A'$ y $a'' \in A''$.
- Nótese que, $\dim(\mathcal{A}' + \mathcal{A}'') = \dim(F' + F'' + L)$.
- Por un lado, si $A' \cap A'' \neq \varnothing$, entonces $\overrightarrow{a'a''} \in F' + F''$, de ahí que $\dim(F' + F'' + L) = \dim(F' + F'')$.

Demostración

- Sea $L = \langle \overrightarrow{a'a''} \rangle$ con $a' \in A'$ y $a'' \in A''$.
- Nótese que, $\dim(\mathcal{A}' + \mathcal{A}'') = \dim(F' + F'' + L)$.
- Por un lado, si $A' \cap A'' \neq \varnothing$, entonces $\overrightarrow{a'a''} \in F' + F''$, de ahí que $\dim(F' + F'' + L) = \dim(F' + F'')$.
- Por otro lado, si $A' \cap A'' = \varnothing$, tenemos $\overrightarrow{a'a''} \notin F' + F''$, y entonces $\dim(F' + F'' + L) = \dim(F' + F'') + 1$.

Demostración

- Sea $L = \langle \overrightarrow{a'a''} \rangle$ con $a' \in A'$ y $a'' \in A''$.
- Nótese que, $\dim(\mathcal{A}' + \mathcal{A}'') = \dim(F' + F'' + L)$.
- Por un lado, si $A' \cap A'' \neq \varnothing$, entonces $\overrightarrow{a'a''} \in F' + F''$, de ahí que $\dim(F' + F'' + L) = \dim(F' + F'')$.
- Por otro lado, si $A' \cap A'' = \varnothing$, tenemos $\overrightarrow{a'a''} \notin F' + F''$, y entonces $\dim(F' + F'' + L) = \dim(F' + F'') + 1$.
- Finalmente, como

$$\dim(F' + F'') = \dim(F') + \dim(F'') - \dim(F' \cap F''),$$

el resultado se deduce. □

Corolario

- Dos rectas paralelas no idénticas determinan un plano.
- Dos rectas que comparten un único punto determinan un plano.