Transformaciones proyectivas. Homografías

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

Observación

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Queremos construir una aplicación $\widetilde{f} : P(X) \longrightarrow P(Y)$ a partir de una aplicación lineal $f : X \longrightarrow Y$. Con este fin, conviene observar lo siguiente.

Observación

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Queremos construir una aplicación $\widetilde{f} : P(X) \longrightarrow P(Y)$ a partir de una aplicación lineal $f : X \longrightarrow Y$. Con este fin, conviene observar lo siguiente.

- Si $\overrightarrow{x} \in \ker(f)$, entonces $f(\overrightarrow{x})$ no define un punto en $P(Y)$.

Observación

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Queremos construir una aplicación $\widetilde{f} : P(X) \longrightarrow P(Y)$ a partir de una aplicación lineal $f : X \longrightarrow Y$. Con este fin, conviene observar lo siguiente.

- Si $\overrightarrow{x} \in \ker(f)$, entonces $f(\overrightarrow{x})$ no define un punto en $P(Y)$.
- Por lo tanto, $\widetilde{f}$ no puede estar definida para puntos de $P(\ker(f))$.

Observación

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Queremos construir una aplicación $\widetilde{f} : P(X) \longrightarrow P(Y)$ a partir de una aplicación lineal $f : X \longrightarrow Y$. Con este fin, conviene observar lo siguiente.

- Si $\overrightarrow{x} \in \ker(f)$, entonces $f(\overrightarrow{x})$ no define un punto en $P(Y)$.
- Por lo tanto, $\widetilde{f}$ no puede estar definida para puntos de $P(\ker(f))$.
- Sea $x \in P(X) \setminus P(\ker(f))$. Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in X$ y $x = p(\overrightarrow{u}) = p(\overrightarrow{v})$, entonces esos vectores no son nulos y existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$, lo que implica que $f(\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.

Observación

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Queremos construir una aplicación $\widetilde{f}: P(X) \longrightarrow P(Y)$ a partir de una aplicación lineal $f: X \longrightarrow Y$. Con este fin, conviene observar lo siguiente.

- Si $\overrightarrow{x} \in \ker(f)$, entonces $f(\overrightarrow{x})$ no define un punto en $P(Y)$.
- Por lo tanto, $\widetilde{f}$ no puede estar definida para puntos de $P(\ker(f))$.
- Sea $x \in P(X) \setminus P(\ker(f))$. Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in X$ y $x = p(\overrightarrow{u}) = p(\overrightarrow{v})$, entonces esos vectores no son nulos y existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$, lo que implica que $f(\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.
- Por lo tanto, si $x = p(\overrightarrow{u}) = p(\overrightarrow{v})$, entonces $f(\overrightarrow{u})$ y $f(\overrightarrow{v})$ definen el mismo punto $y \in P(Y)$, y por eso la definición de $y = \widetilde{f}(x)$ a partir de x no depende de la elección del vector representante de x, i.e., $y = p(f(\overrightarrow{u}))$ y además $y = p(f(\overrightarrow{v}))$.

Definición (Aplicación proyectiva)

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$ y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Una función $\widetilde{f} : P(X) \setminus P(\ker(f)) \longrightarrow P(Y)$ es una aplicación proyectiva siempre que el siguiente diagrama sea conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} X \setminus \ker(f) & \xrightarrow{f} & Y \setminus \{\overrightarrow{0}\} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ P(X) \setminus P(\ker(f)) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & P(Y) \end{array}$$

Definición (Aplicación proyectiva)

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$ y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Una función $\widetilde{f} : P(X) \setminus P(\ker(f)) \longrightarrow P(Y)$ es una aplicación proyectiva siempre que el siguiente diagrama sea conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} X \setminus \ker(f) & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \setminus \{\overrightarrow{0}\} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ P(X) \setminus P(\ker(f)) & \xrightarrow{\quad \widetilde{f} \quad} & P(Y) \end{array}$$

Es decir $\widetilde{f}(p(\overrightarrow{x})) = p(f(\overrightarrow{x})), \quad$ para todo $\overrightarrow{x} \in X \setminus \ker(f)$.

Proposición

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal, que no es idénticamente nula, entonces

$$Im(\widetilde{f}) = P(Im(f)).$$

Proposición

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal, que no es idénticamente nula, entonces

$$Im(\widetilde{f}) = P(Im(f)).$$

Demostración

Si $y \in Im(\widetilde{f})$, entonces existe $x \in P(X) \setminus P(\ker(f))$ tal que $\widetilde{f}(x) = y$. De ahí que existe $\overrightarrow{x} \in X \setminus \ker(f)$ tal que $x = p(\overrightarrow{x})$, lo que implica que $y = \widetilde{f}(p(\overrightarrow{x})) = p(f(\overrightarrow{x}))$. Por lo tanto, $y \in P(Im(f))$, y por eso $Im(\widetilde{f}) \subseteq P(Im(f))$.

Proposición

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal, que no es idénticamente nula, entonces

$$Im(\widetilde{f}) = P(Im(f)).$$

Demostración

Si $y \in Im(\widetilde{f})$, entonces existe $x \in P(X) \setminus P(\ker(f))$ tal que $\widetilde{f}(x) = y$. De ahí que existe $\overrightarrow{x} \in X \setminus \ker(f)$ tal que $x = p(\overrightarrow{x})$, lo que implica que $y = \widetilde{f}(p(\overrightarrow{x})) = p(f(\overrightarrow{x}))$. Por lo tanto, $y \in P(Im(f))$, y por eso $Im(\widetilde{f}) \subseteq P(Im(f))$.

Por otro lado, si $y \in P(Im(f))$, entonces existe $\overrightarrow{x} \in X \setminus \ker(f)$ tal que $y = p(f(\overrightarrow{x})) = \widetilde{f}(p(\overrightarrow{x}))$. Por lo tanto, $y \in Im(\widetilde{f})$, y por eso $P(Im(f)) \subseteq Im(\widetilde{f})$. $\square$

Definición (Homografía)

Diremos que una aplicación proyectiva $\widetilde{f}$ es una homografía siempre que la palicación lineal f sea biyectiva.

Definición (Homografía)

Diremos que una aplicación proyectiva $\widetilde{f}$ es una homografía siempre que la palicación lineal f sea biyectiva.

En otras palabras $\widetilde{f} : P(X) \longrightarrow P(Y)$ es una homografía si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $f : X \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} X \setminus \{\overrightarrow{0}\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \setminus \{\overrightarrow{0}\} \arrow[d, "p"] \\ P(X) \arrow[r, "\widetilde{f}"] & P(Y) \end{tikzcd}$$

Proposición

Si X es un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo, entonces las siguientes afirmaciones son válidas.

(I) Si $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son hografías sobre $P(X)$, entonces $\widetilde{f} \circ \widetilde{g}$ es una homografía.

(II) Si I es la aplicación identidad sobre X, entonces $\widetilde{I}$ es la aplicación identidad sobre $P(X)$.

(III) Si $\widetilde{f}$ es una homografía de $P(X)$, entonces $\widetilde{f^{-1}}$ es la homografía inversa de $\widetilde{f}$.

Proposición

Si X es un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo, entonces las siguientes afirmaciones son válidas.

(I) Si $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son hografías sobre $P(X)$, entonces $\widetilde{f} \circ \widetilde{g}$ es una homografía.

(II) Si I es la aplicación identidad sobre X, entonces $\widetilde{I}$ es la aplicación identidad sobre $P(X)$.

(III) Si $\widetilde{f}$ es una homografía de $P(X)$, entonces $\widetilde{f^{-1}}$ es la homografía inversa de $\widetilde{f}$.

Demostración

Ver apuntes.

Proposición

Si X es un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo, entonces las siguientes afirmaciones son válidas.

(I) Si $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son hografías sobre $P(X)$, entonces $\widetilde{f} \circ \widetilde{g}$ es una homografía.

(II) Si I es la aplicación identidad sobre X, entonces $\widetilde{I}$ es la aplicación identidad sobre $P(X)$.

(III) Si $\widetilde{f}$ es una homografía de $P(X)$, entonces $\widetilde{f^{-1}}$ es la homografía inversa de $\widetilde{f}$.

Demostración

Ver apuntes.

Corolario

El conjunto de homografías de un espacio proyectivo, con la composición de aplicaciones, es un grupo.

Proposición

Sean $P(X)$ y $P(Y)$ dos espacios proyectivos. Toda homografía $\widetilde{f} : P(X) \longrightarrow P(Y)$ transforma las referencias proyectivas de $P(X)$ en referencias proyectivas de $P(Y)$.

Proposición

Sean $P(X)$ y $P(Y)$ dos espacios proyectivos. Toda homografía $\widetilde{f}: P(X) \longrightarrow P(Y)$ transforma las referencias proyectivas de $P(X)$ en referencias proyectivas de $P(Y)$.

Demostración

Ver apuntes.

Proposición

Sean $P(X)$ y $P(Y)$ dos espacios proyectivos. Toda homografía $\widetilde{f}: P(X) \longrightarrow P(Y)$ transforma las referencias proyectivas de $P(X)$ en referencias proyectivas de $P(Y)$.

Demostración

Ver apuntes.

Proposición

Sean $P(X)$ y $P(Y)$ dos espacios proyectivos. Si $(x_0, \ldots, x_n; x)$ es una referencia proyectiva de $P(X)$ y $(y_0, \ldots, y_n; y)$ es una referencia proyectiva de $P(Y)$, entonces existe una única homografía $\widetilde{f}$ tal que $y_i = \widetilde{f}(x_i)$ para todo i.

Proposición

Sean $P(X)$ y $P(Y)$ dos espacios proyectivos. Toda homografía $\widetilde{f} : P(X) \longrightarrow P(Y)$ transforma las referencias proyectivas de $P(X)$ en referencias proyectivas de $P(Y)$.

Demostración

Ver apuntes.

Proposición

Sean $P(X)$ y $P(Y)$ dos espacios proyectivos. Si $(x_0, \ldots, x_n; x)$ es una referencia proyectiva de $P(X)$ y $(y_0, \ldots, y_n; y)$ es una referencia proyectiva de $P(Y)$, entonces existe una única homografía $\widetilde{f}$ tal que $y_i = \widetilde{f}(x_i)$ para todo i.

Demostración

Ver apuntes.

Homografías sobre rectas proyectivas

Coordenadas absolutas

Sea $\mathbb{L} = P(V)$ una recta proyectiva, donde el espacio vectorial V está definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Coordenadas absolutas

Sea $\mathbb{L} = P(V)$ una recta proyectiva, donde el espacio vectorial V está definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Para toda referencia proyectiva $\mathcal{R} = (e_0, e_1; e)$ de $\mathbb{L}$ podemos establecer una biyección entre $\mathbb{L}$ y $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ de modo que a todo punto $a \in \mathbb{L}$ de coordenadas $a_{\mathcal{R}} = (\alpha_0 : \alpha_1)$ le corresponde el punto $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \in \mathbb{K}$, siempre que $a \neq e_0$, mientras al punto $a = e_0$ de coordenadas $(e_0)_{\mathcal{R}} = (1:0)$ le corresponde el punto ∞.

Coordenadas absolutas

Sea $\mathbb{L} = P(V)$ una recta proyectiva, donde el espacio vectorial V está definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Para toda referencia proyectiva $\mathcal{R} = (e_0, e_1; e)$ de $\mathbb{L}$ podemos establecer una biyección entre $\mathbb{L}$ y $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ de modo que a todo punto $a \in \mathbb{L}$ de coordenadas $a_{\mathcal{R}} = (\alpha_0 : \alpha_1)$ le corresponde el punto $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \in \mathbb{K}$, siempre que $a \neq e_0$, mientras al punto $a = e_0$ de coordenadas $(e_0)_{\mathcal{R}} = (1 : 0)$ le corresponde el punto ∞.

Así, podemos definir las *coordenadas absolutas* de $a \in \mathbb{L}$ como sigue.

- Si $a_{\mathcal{R}} = (\alpha_0 : \alpha_1)$ y $\alpha_1 \neq 0$, entonces $a = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$.
- Si $a_{\mathcal{R}} = (1 : 0)$, entonces $a = \infty$.

Coordenadas absolutas

Sea $\mathbb{L} = P(V)$ una recta proyectiva, donde el espacio vectorial V está definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Para toda referencia proyectiva $\mathcal{R} = (e_0, e_1; e)$ de $\mathbb{L}$ podemos establecer una biyección entre $\mathbb{L}$ y $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ de modo que a todo punto $a \in \mathbb{L}$ de coordenadas $a_{\mathcal{R}} = (\alpha_0 : \alpha_1)$ le corresponde el punto $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \in \mathbb{K}$, siempre que $a \neq e_0$, mientras al punto $a = e_0$ de coordenadas $(e_0)_{\mathcal{R}} = (1:0)$ le corresponde el punto ∞.

Así, podemos definir las *coordenadas absolutas* de $a \in \mathbb{L}$ como sigue.

- Si $a_{\mathcal{R}} = (\alpha_0 : \alpha_1)$ y $\alpha_1 \neq 0$, entonces $a = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$.
- Si $a_{\mathcal{R}} = (1:0)$, entonces $a = \infty$.

Estamos en condiciones de establecer una fórmula para las homografías entre rectas proyectivas.

Para toda aplicación lineal $f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, con $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$,

- $\widetilde{f}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ para $z \neq \infty$ y $\gamma z + \delta \neq 0$.
- $\widetilde{f}(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.
- $\widetilde{f}(-\frac{\delta}{\gamma}) = \infty$ para $\gamma \neq 0$.

Para toda aplicación lineal $f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, con $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$,

- $\widetilde{f}(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ para $z \neq \infty$ y $\gamma z + \delta \neq 0$.
- $\widetilde{f}(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$.
- $\widetilde{f}(-\frac{\delta}{\gamma}) = \infty$ para $\gamma \neq 0$.

Ejercicio

Sea $f(x,y) = (3x - y, -x + 3y)$. Determina una fórmula para $\widetilde{f}$.

Para toda aplicación lineal $f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, con $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$,

- $\widetilde{f}(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ para $z \neq \infty$ y $\gamma z + \delta \neq 0$.
- $\widetilde{f}(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.
- $\widetilde{f}(-\frac{\delta}{\gamma}) = \infty$ para $\gamma \neq 0$.

Ejercicio

Sea $f(x,y) = (3x - y, -x + 3y)$. Determina una fórmula para $\widetilde{f}$.

Solución

Tenemos $\widetilde{f}(z) = \frac{3z-1}{3-z}$ para todo $z \neq 3$ y $z \neq \infty$, mientras $\widetilde{f}(\infty) = -3$ y $\widetilde{f}(3) = \infty$. □

Ejercicio

Considera la función real definida como $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Determina la homografía $\widetilde{f} : P(\mathbb{R}^2) \longrightarrow P(\mathbb{R}^2)$ tal que su restricción al conjunto $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ coincide con g. Determina una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ asociada a $\widetilde{f}$.

Ejercicio

Considera la función real definida como $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Determina la homografía $\widetilde{f} : P(\mathbb{R}^2) \longrightarrow P(\mathbb{R}^2)$ tal que su restricción al conjunto $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ coincide con g. Determina una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ asociada a $\widetilde{f}$.

Solución

La homografía $\widetilde{f}$ se define como

- $\widetilde{f}(z) = \frac{z+1}{z-1}$ para $z \neq \infty$ y $z \neq 1$.
- $\widetilde{f}(\infty) = 1$.
- $\widetilde{f}(1) = \infty$.

El cambio de variable $z = \frac{x}{y}$ nos da la aplicación lineal, ya que $\widetilde{f}(\frac{x}{y}) = \frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1} = \frac{x+y}{x-y}$ nos conduce a $f(x,y) = \lambda(x+y, x-y)$ para cualquier $\lambda \neq 0$. □

Ejercicio

Considera la función real definida como $g(x) = 2x+3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Determina la homografía $\widetilde{f} : P(\mathbb{R}^2) \longrightarrow P(\mathbb{R}^2)$ tal que su restricción al conjunto $\mathbb{R}$ coincide con g. Determina una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ asociada a $\widetilde{f}$.

Ejercicio

Considera la función real definida como $g(x) = 2x + 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Determina la homografía $\widetilde{f} : P(\mathbb{R}^2) \longrightarrow P(\mathbb{R}^2)$ tal que su restricción al conjunto $\mathbb{R}$ coincide con g. Determina una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ asociada a $\widetilde{f}$.

Solución

La homografía $\widetilde{f}$ se define como

- $\widetilde{f}(z) = 2z + 3 \quad$ para $z \neq \infty$.
- $\widetilde{f}(\infty) = \infty$.

El cambio de variable $z = \frac{x}{y}$ nos da la aplicación lineal, ya que $\widetilde{f}(\frac{x}{y}) = 2\frac{x}{y} + 3 = \frac{2x+3y}{y}$ nos conduce a $f(x,y) = \lambda(2x+3y, y)$ para cualquier $\lambda \neq 0$. □

Razón doble

Observación

Como la recta proyectiva $\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ constituye una extensión del cuerpo $\mathbb{K}$, necesitaremos extender la aritmética de $\mathbb{K}$ asumiendo que el papel de ∞ es similar al del inverso de 0. En este sentido, asumiremos las siguientes reglas para cada $a \in \mathbb{K}$ y $b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

$$\infty = 0^{-1}, \quad 0 = \infty^{-1}, \quad \frac{\infty}{\infty} = 1, \quad b \cdot \infty = \infty, \quad \text{y} \quad a \pm \infty = \infty.$$

Los casos $\infty - \infty$ y $0 \cdot \infty$ quedan indeterminados.

Observación

Como tres puntos diferentes a, b y c de una recta proyectiva $\mathbb{L}$ determinan una referencia proyectiva $\mathcal{R} = (a, b; c)$, existe una única homografía

$$\widetilde{f}_{\mathcal{R}} : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

tal que $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(a) = \infty$, $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(b) = 0$ y $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(c) = 1$.

Observación

Como tres puntos diferentes a, b y c de una recta proyectiva $\mathbb{L}$ determinan una referencia proyectiva $\mathcal{R} = (a, b; c)$, existe una única homografía

$$\widetilde{f}_{\mathcal{R}} : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

tal que $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(a) = \infty$, $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(b) = 0$ y $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(c) = 1$.

Nótese que $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(z) = \frac{(z-b)(c-a)}{(z-a)(c-b)}$ para $z \neq \infty$ y $z \neq a$, mientras $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(\infty) = \frac{c-a}{c-b}$ y $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(a) = \infty$.

Observación

Como tres puntos diferentes a, b y c de una recta proyectiva $\mathbb{L}$ determinan una referencia proyectiva $\mathcal{R} = (a, b; c)$, existe una única homografía

$$\widetilde{f}_{\mathcal{R}} : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

tal que $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(a) = \infty$, $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(b) = 0$ y $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(c) = 1$.

Nótese que $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(z) = \frac{(z-b)(c-a)}{(z-a)(c-b)}$ para $z \neq \infty$ y $z \neq a$, mientras $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(\infty) = \frac{c-a}{c-b}$ y $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(a) = \infty$.

Definición (Razón doble)

Sean a, b, c y d cuatro puntos de una recta proyectiva $\mathbb{L}$ tales que los tres primeros son diferentes. La razón doble (cross ratio) del sistema de puntos (a, b, c, d), denotada por $cr(a, b, c, d)$, se define como $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(d)$, donde $\mathcal{R} = (a, b; c)$.

Observación

- $cr(a,b,c,d) = \infty$ if and only if $d = a$.
- $cr(a,b,c,d) = 0$ if and only if $d = b$.
- $cr(a,b,c,d) = 1$ if and only if $d = c$.

Proposición

Si a, b, c y d son puntos de una recta euclidiana, donde los tres primeros son diferente, entonces las siguientes afirmaciones son válidas para $d \neq a$.

(I) $cr(a,b,c,d) = \frac{\frac{c-a}{c-b}}{\frac{d-a}{d-b}}$.

(II) $cr(\infty,b,c,d) = \frac{d-b}{c-b}$.

(III) $cr(a,\infty,c,d) = \frac{c-a}{d-a}$.

(IV) $cr(a,b,\infty,d) = \frac{d-b}{d-a}$.

(V) $cr(a,b,c,\infty) = \frac{c-a}{c-b}$.

Proposición

Si a, b, c y d son puntos de una recta euclidiana, donde los tres primeros son diferente, entonces las siguientes afirmaciones son válidas para $d \neq a$.

(I) $cr(a,b,c,d) = \frac{\frac{c-a}{c-b}}{\frac{d-a}{d-b}}$.

(II) $cr(\infty,b,c,d) = \frac{d-b}{c-b}$.

(III) $cr(a,\infty,c,d) = \frac{c-a}{d-a}$.

(IV) $cr(a,b,\infty,d) = \frac{d-b}{d-a}$.

(V) $cr(a,b,c,\infty) = \frac{c-a}{c-b}$.

Demostración

El resultado se obtine de la definición de razón doble, ya que $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(z) = \frac{(z-b)(c-a)}{(z-a)(c-b)}$ para $z \neq \infty$ y $z \neq a$, mientras $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(\infty) = \frac{c-a}{c-b}$ y $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(a) = \infty$. □

Corolario

Si a, b, c y d son puntos diferentes de una recta euclidiana, entonces las siguientes afirmaciones son válidas.

(I) $cr(\infty, b, c, d) = -1$ si y solo si b es el punto medio de $\overline{cd}$.

(II) $cr(a, \infty, c, d) = -1$ si y solo si a es el punto medio de $\overline{cd}$.

(III) $cr(a, b, \infty, d) = -1$ si y solo si d es el punto medio de $\overline{ab}$.

(IV) $cr(a, b, c, \infty) = -1$ si y solo si c es el punto medio de $\overline{ab}$.

Observación

Si $cr(a,b,c,d) = k$, entonces las siguientes afirmaciones son válidas.

- $cr(a,b,c,d) = cr(b,a,d,c) = cr(c,d,a,b) = cr(d,c,b,a) = k$.
- $cr(b,a,c,d) = cr(a,b,d,c) = cr(c,d,b,a) = cr(d,c,a,b) = \frac{1}{k}$.
- $cr(a,c,b,d) = cr(b,d,a,c) = cr(c,a,d,b) = cr(d,b,c,a) = 1-k$.
- $cr(c,a,b,d) = cr(d,b,a,c) = cr(a,c,d,b) = cr(b,d,c,a) = \frac{1}{1-k}$.
- $cr(b,c,a,d) = cr(a,d,b,c) = cr(c,b,d,a) = cr(d,a,c,b) = 1-\frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$.
- $cr(c,b,a,d) = cr(d,a,b,c) = cr(b,c,d,a) = cr(a,d,c,b) = \frac{k}{k-1}$.

Proposición (Las homografías conservan la razón doble)

Sean $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ dos rectas proyectivas. Sean $a,b,c,d \in \mathbb{L}_1$ y $a',b',c',d' \in \mathbb{L}_2$ tales que, en ambos casos los tres primeros puntos son diferentes. Sea $\widetilde{h}$ la homografía que cumple $\widetilde{h}(a) = a'$, $\widetilde{h}(b) = b'$ y $\widetilde{h}(c) = c'$. Entonces $\widetilde{h}(d) = d'$ si y solo si $cr(a,b,c,d) = cr(a',b',c',d')$.

Proposición (Las homografías conservan la razón doble)

Sean $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ dos rectas proyectivas. Sean $a,b,c,d \in \mathbb{L}_1$ y $a',b',c',d' \in \mathbb{L}_2$ tales que, en ambos casos los tres primeros puntos son diferentes. Sea $\widetilde{h}$ la homografía que cumple $\widetilde{h}(a) = a'$, $\widetilde{h}(b) = b'$ y $\widetilde{h}(c) = c'$. Entonces $\widetilde{h}(d) = d'$ si y solo si $cr(a,b,c,d) = cr(a',b',c',d')$.

Demostración

Sean $\mathcal{R} = (a,b;c)$ y $\mathcal{R}' = (a',b';c')$. Observe que $\widetilde{h} = \widetilde{f}_{\mathcal{R}'}^{-1} \circ \widetilde{f}_{\mathcal{R}}$ ya que

- $(\widetilde{f}_{\mathcal{R}'} \circ \widetilde{h})(a) = \widetilde{f}_{\mathcal{R}'}(\widetilde{h}(a)) = \widetilde{f}_{\mathcal{R}'}(a') = \infty = \widetilde{f}_{\mathcal{R}}(a)$.
- $(\widetilde{f}_{\mathcal{R}'} \circ \widetilde{h})(b) = \widetilde{f}_{\mathcal{R}'}(\widetilde{h}(b)) = \widetilde{f}_{\mathcal{R}'}(b') = 0 = \widetilde{f}_{\mathcal{R}}(b)$.
- $(\widetilde{f}_{\mathcal{R}'} \circ \widetilde{h})(c) = \widetilde{f}_{\mathcal{R}'}(\widetilde{h}(c)) = \widetilde{f}_{\mathcal{R}'}(c') = 1 = \widetilde{f}_{\mathcal{R}}(c)$.

Por lo tanto, para todo $d \in \mathbb{L}_1$, se cumple $\widetilde{f}_{\mathcal{R}}(d) = \widetilde{f}_{\mathcal{R}'}(\widetilde{h}(d))$, y por tanto la equivalencia es clara. $\square$

Cuaterna armónica

Definición

Dada una recta proyectiva $\mathbb{L}$, diremos que una secuencia de puntos colineales (a,b,c,d) en $\mathbb{L}$, donde a,b,c son distintos, forman una *división armónica*, o *cuaterna armónica*, si
$$cr(a,b,c,d) = -1.$$

Definición

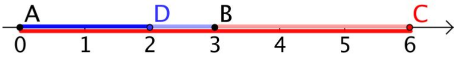
Dada una recta proyectiva $\mathbb{L}$, diremos que una secuencia de puntos colineales (a,b,c,d) en $\mathbb{L}$, donde a,b,c son distintos, forman una *división armónica*, o *cuaterna armónica*, si

$$cr(a,b,c,d) = -1.$$

Cuando $cr(a,b,c,d) = -1$, también decimos que c y d son armónicos conjugados de a y b.

Ejemplo de cuaterna armónica

$cr(A,B,C,D) = -1.$



Cuadrángulo completo

En un plano proyectivo, un cuadrángulo completo es un sistema de puntos (x, y, z, t) que forman una referencia proyectiva.

Cuadrángulo completo

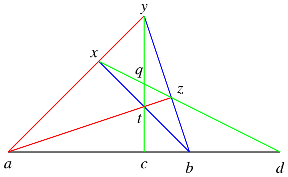
En un plano proyectivo, un cuadrángulo completo es un sistema de puntos (x, y, z, t) que forman una referencia proyectiva.

Diremos que:

- $\mathbb{L}_{xy}$ y $\mathbb{L}_{zt}$ son lados opuestos.
- $\mathbb{L}_{yz}$ y $\mathbb{L}_{xt}$ son lados opuestos.
- $\mathbb{L}_{xz}$ y $\mathbb{L}_{yt}$ son diagonales.

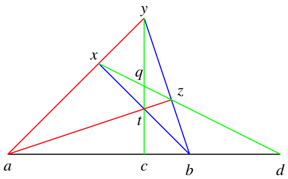
Ejercicio *

Sea (x,y,z,t) un cuadrángulo completo. Sean a,b,c y d los puntos definidos como $\{a\} = \mathbb{L}_{xy} \cap \mathbb{L}_{zt}$, $\{b\} = \mathbb{L}_{xt} \cap \mathbb{L}_{yz}$, $\{c\} = \mathbb{L}_{yt} \cap \mathbb{L}_{ab}$, mientras $\{d\} = \mathbb{L}_{xz} \cap \mathbb{L}_{ab}$. Demuestra que a y b son armónicos conjugados de c y d.



Ejercicio *

Sea (x,y,z,t) un cuadrángulo completo. Sean a,b,c y d los puntos definidos como $\{a\} = \mathbb{L}_{xy} \cap \mathbb{L}_{zt}$, $\{b\} = \mathbb{L}_{xt} \cap \mathbb{L}_{yz}$, $\{c\} = \mathbb{L}_{yt} \cap \mathbb{L}_{ab}$, mientras $\{d\} = \mathbb{L}_{xz} \cap \mathbb{L}_{ab}$. Demuestra que a y b son armónicos conjugados de c y d.

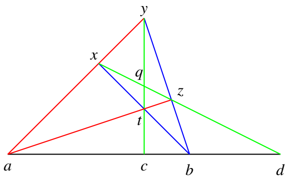


Solución

Sea $\sigma_y : \mathbb{L}_{xd} \longrightarrow \mathbb{L}_{ad}$ la homografía inducida por el haz de rectas de centro y. (Ver Proposición 3.45). Nótese que $\sigma_y(x) = a$, $\sigma_y(z) = b$, $\sigma_y(q) = c$ and $\sigma_y(d) = d$, lo que implica $cr(x,z,q,d) = cr(a,b,c,d)$.

Ejercicio *

Sea (x,y,z,t) un cuadrángulo completo. Sean a,b,c y d los puntos definidos como $\{a\} = \mathbb{L}_{xy} \cap \mathbb{L}_{zt}$, $\{b\} = \mathbb{L}_{xt} \cap \mathbb{L}_{yz}$, $\{c\} = \mathbb{L}_{yt} \cap \mathbb{L}_{ab}$, mientras $\{d\} = \mathbb{L}_{xz} \cap \mathbb{L}_{ab}$. Demuestra que a y b son armónicos conjugados de c y d.



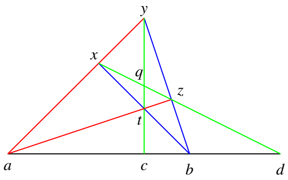
Solución

Sea $\sigma_y : \mathbb{L}_{xd} \longrightarrow \mathbb{L}_{ad}$ la homografía inducida por el haz de rectas de centro y. (Ver Proposición 3.45). Nótese que $\sigma_y(x) = a$, $\sigma_y(z) = b$, $\sigma_y(q) = c$ and $\sigma_y(d) = d$, lo que implica $cr(x,z,q,d) = cr(a,b,c,d)$.

Por analogía, definimos $\sigma_t : \mathbb{L}_{xd} \longrightarrow \mathbb{L}_{ad}$ y obtenemos $cr(x,z,q,d) = cr(b,a,c,d)$.

Ejercicio *

Sea (x,y,z,t) un cuadrángulo completo. Sean a,b,c y d los puntos definidos como $\{a\} = \mathbb{L}_{xy} \cap \mathbb{L}_{zt}$, $\{b\} = \mathbb{L}_{xt} \cap \mathbb{L}_{yz}$, $\{c\} = \mathbb{L}_{yt} \cap \mathbb{L}_{ab}$, mientras $\{d\} = \mathbb{L}_{xz} \cap \mathbb{L}_{ab}$. Demuestra que a y b son armónicos conjugados de c y d.



Solución

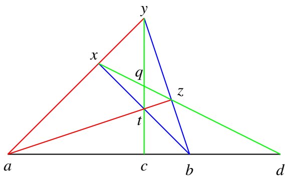
Sea $\sigma_y : \mathbb{L}_{xd} \longrightarrow \mathbb{L}_{ad}$ la homografía inducida por el haz de rectas de centro y. (Ver Proposición 3.45). Nótese que $\sigma_y(x) = a$, $\sigma_y(z) = b$, $\sigma_y(q) = c$ and $\sigma_y(d) = d$, lo que implica $cr(x,z,q,d) = cr(a,b,c,d)$.

Por analogía, definimos $\sigma_t : \mathbb{L}_{xd} \longrightarrow \mathbb{L}_{ad}$ y obtenemos $cr(x,z,q,d) = cr(b,a,c,d)$.

De ahí que $cr(a,b,c,d) = cr(b,a,c,d) = \frac{1}{cr(a,b,c,d)}$ y por tanto $(cr(a,b,c,d))^2 = 1$.

Ejercicio *

Sea (x,y,z,t) un cuadrángulo completo. Sean a,b,c y d los puntos definidos como $\{a\} = \mathbb{L}_{xy} \cap \mathbb{L}_{zt}$, $\{b\} = \mathbb{L}_{xt} \cap \mathbb{L}_{yz}$, $\{c\} = \mathbb{L}_{yt} \cap \mathbb{L}_{ab}$, mientras $\{d\} = \mathbb{L}_{xz} \cap \mathbb{L}_{ab}$. Demuestra que a y b son armónicos conjugados de c y d.



Solución

Sea $\sigma_y : \mathbb{L}_{xd} \longrightarrow \mathbb{L}_{ad}$ la homografía inducida por el haz de rectas de centro y. (Ver Proposición 3.45). Nótese que $\sigma_y(x) = a$, $\sigma_y(z) = b$, $\sigma_y(q) = c$ and $\sigma_y(d) = d$, lo que implica $cr(x,z,q,d) = cr(a,b,c,d)$.
Por analogía, definimos $\sigma_t : \mathbb{L}_{xd} \longrightarrow \mathbb{L}_{ad}$ y obtenemos $cr(x,z,q,d) = cr(b,a,c,d)$.
De ahí que $cr(a,b,c,d) = cr(b,a,c,d) = \frac{1}{cr(a,b,c,d)}$ y por tanto $(cr(a,b,c,d))^2 = 1$.
Como a,b,c y d son diferentes, $cr(a,b,c,d) = -1$. □

Ejercicio

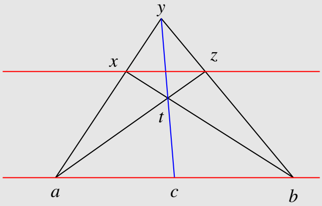
Consideremos dos rectas paralelas $\mathbb{L}$ y $\mathbb{L}'$ en un plano euclidiano, y sean a y b dos puntos diferentes en $\mathbb{L}$. Determina gráficamente el punto medio del segmento $\overline{ab}$ utilizando únicamente una regla.

Ejercicio

Consideremos dos rectas paralelas $\mathbb{L}$ y $\mathbb{L}'$ en un plano euclidiano, y sean a y b dos puntos diferentes en $\mathbb{L}$. Determina gráficamente el punto medio del segmento $\overline{ab}$ utilizando únicamente una regla.

Solución

Sea y un punto que no prtenece a estas rectas. Sea $\{x\} = \mathbb{L}' \cap \mathbb{L}_{ay}$ y $\{z\} = \mathbb{L}' \cap \mathbb{L}_{by}$ como se muestra en la figura. Sea $\{t\} = \mathbb{L}_{az} \cap \mathbb{L}_{bx}$.



Según demostramos en el ejercicio Ejercicio *, $-1 = cr(a,b,c,\infty) = \frac{c-a}{c-b}$, lo que implica que c es el punto medio del segmento $\overline{ab}$. $\square$

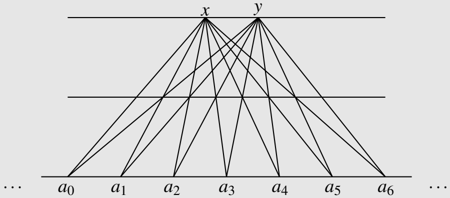
Ejercicio

Considere tres rectas paralelas en el plano euclidiano. Determina gráficamente una secuencia de puntos que se encuentren sobre una de estas rectas de modo que la distancia entre puntos consecutivos de la secuencia sea constante. En la construcción, utiliza solo una regla.

Ejercicio

Considere tres rectas paralelas en el plano euclidiano. Determina gráficamente una secuencia de puntos que se encuentren sobre una de estas rectas de modo que la distancia entre puntos consecutivos de la secuencia sea constante. En la construcción, utiliza solo una regla.

Solución



Aplicamos el Ejercicio *, con xy paralela a tz (en la figura t y z están en la recta del medio y varían según el valor de i) tenemos $a = \infty$, y por eso para $b = a_{i+1}$, $c = a_i$ y $d = a_{i+2}$ obtenemos $cr(\infty, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}) = cr(\infty, b, c, d) = -1$, lo que implica que $b = a_{i+1}$ es el punto medio del segmento $\overline{cd} = \overline{a_i a_{i+2}}$ para todo i. □