Propietats de la derivada

Àlex Arenas, Sergio Gómez

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

Propietats de la derivada

- Propietats
  - Aritmètiques, potència, composició (regla de la cadena), funció inversa, derivació implícita
- Teoremes
  - Extrems relatius, Rolle, valor mig de Cauchy, valor mig de Lagrange, regla de l’Hôpital

- Propietats de la derivada
  - Propietats aritmètiques
    - Siguin $f, g\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dues funcions reals de variable real definides en un interval obert I, i diferenciables en $x \in \mathbb{R}$
    - Aleshores

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\,, \quad \text{si } g(x) \neq 0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}\,, \quad \text{si } g(x) \neq 0$$

- Demostracions
  - Derivada de la suma

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x)
\end{aligned}
$$

  - Derivada del producte per una constant

$$
\begin{aligned}
(\lambda\, f)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\lambda\, f(x+h)-\lambda\, f(x)}{h} \\
&= \lambda \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lambda\, f'(x)
\end{aligned}
$$

Demostracions

- Derivada del producte

$$
\begin{aligned}
(f\,g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\,(f(x+h) - f(x)) + f(x)\,(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)
\end{aligned}
$$

- Demostracions
  - Derivada del recíproc

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)\,g(x+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)\,g(x+h)}\;\lim_{h\to 0}\frac{-(g(x+h)-g(x))}{h}\\ &= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

- Demostracions
  - Derivada del quocient

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f\,\frac{1}{g}\right)'(x)\\ &= f'(x)\,\frac{1}{g(x)} + f(x)\,\left(\frac{1}{g}\right)'(x)\\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\,\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\\ &= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

☐ Derivada de la funció potència

- Si $f(x) = x^n$ per $n \in \mathbb{N}$, aleshores $f'(x) = n\, x^{n-1}$

- Demostració

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, h^{n-k} - x^n \right] = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k\, h^{n-k-1}$$

$$= \binom{n}{n-1} x^{n-1} = n\, x^{n-1}$$

Derivada de la funció potència (general)

- Si $f(x) = x^n$ per $n \in \mathbb{Z}$ i $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aleshores $f'(x) = n\, x^{n-1}$

- Demostració del cas $n < 0$ per inducció sobre $m = -n > 0$
  - Base de l'inducció $m = 1$
    $$(x^{-1})' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$$
  - Hipòtesi d'inducció (HI)
    $$(x^{-m})' = -m\, x^{-m-1}$$
  - Pas d'inducció

$$\begin{aligned}
(x^{-(m+1)})' &= (x^{-m}\, x^{-1})' \\
&= (x^{-m})'\, x^{-1} + x^{-m}\,(x^{-1})' \\
&= -m\, x^{-m-1}\, x^{-1} + x^{-m}\,(-x^{-2}) && \text{(HI)} \\
&= -m\, x^{-(m+2)} - x^{-(m+2)} \\
&= -(m+1)\, x^{-(m+2)} \qquad \square
\end{aligned}$$

- Derivada de la funció potència (general)
  - Si $f(x) = x^n$ per $n \in \mathbb{Z}$ i $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aleshores $f'(x) = n\, x^{n-1}$
  - Demostració del cas $n < 0$ utilitzant derivada del recíproc i derivada de potències positives amb $m = -n > 0$

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= (x^{-m})' \\
&= \left(\frac{1}{x^m}\right)' \\
&= \frac{-m\, x^{m-1}}{x^{2m}} \\
&= -m\, x^{-m-1} \\
&= n\, x^{n-1}
\end{aligned}
$$

- Derivada de la composició (regla de la cadena)
  - Siguin $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g: J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dues funcions definides respectivament en els intervals oberts I i J, tals que $f(I) \subset J$. Suposem f diferenciable en el punt $a \in I$, i g diferenciable en el punt $b = f(a) \in J$
  - Aleshores la funció composta $g \circ f$ és diferenciable en $a \in I$, i

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a) = g'(b)\, f'(a)$$

Demostració de la regla de la cadena

- Volem calcular

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$$

- La idea seria escriure-ho d'aquesta manera

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

- Desafortunadament, no tenim garantit que, per valors de x al voltant de a, es compleixi que $f(x)\neq f(a)$. Per exemple, podríem tenir $f(x)=c$ o $f(x)=x^2\sin(1/x)$

- La solució consisteix a fer la substitució

$$\frac{g(y)-g(b)}{y-b}\;\Rightarrow\;\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & \text{si } y\neq b\\ g'(b) & \text{si } y=b\end{cases}$$

Demostració de la regla de la cadena

- Per tant, definim la funció auxiliar $G\colon J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(y) \equiv \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} & \text{si } y \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b \end{cases}$$

- G és contínua en b ja que

$$\lim_{y \to b} G(y) = g'(b) = G(b)$$

- Com la composició de funcions contínues és contínua, la funció $G \circ f$ és contínua en a. Per tant

$$\lim_{x \to a} (G \circ f)(x) = (G \circ f)(a) = G(f(a)) = G(b) = g'(b)$$

- Demostració de la regla de la cadena
  - Per tot $x \in I \setminus \{a\}$ es compleix que

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = G(f(x))\,\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ja que si $f(x) = f(a)$ els dos costats s'anul·len
i si $f(x) \neq f(a)$ el denominador de $G(f(x))$ es cancel·la amb el terme $f(x) - f(a)$

  - Queda finalment

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} G(f(x))\,\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'(b)\,f'(a)\end{aligned}$$

Derivada de la funció inversa

- Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ una funció contínua i bijectiva definida en els intervals oberts I i J, $f(I) = J$. Suposem f diferenciable en el punt $a \in I$, i $f'(a) \neq 0$.

- Aleshores la funció inversa $f^{-1}: J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ és diferenciable en $b = f(a)$, i

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Demostració de la derivada de la funció inversa

- Per definició de funció inversa

$$(f \circ f^{-1})(y) = y$$

- Per tant

$$(f \circ f^{-1})'(y) = 1$$

- Aplicant la regla de la cadena quedaria

$$f'(f^{-1}(b))\,(f^{-1})'(b) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(a)\,(f^{-1})'(b) = 1$$

- Desafortunadament la regla de la cadena només es pot aplicar quan les dues funcions són diferenciables; ara, però, només sabem que f és diferenciable

- Per tant, la demostració no pot fer ús de la regla de la cadena

- Demostració de la derivada de la funció inversa
  - Definim la funció auxiliar $F: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

  - F és contínua en a ja que

$$\lim_{x \to a} F(x) = f'(a) = F(a)$$

  - Com f és contínua, aleshores f^{-1} és contínua en b
  - Com la composició de funcions contínues és contínua, aleshores $F \circ f^{-1}$ és contínua en b

- Demostració de la derivada de la funció inversa
  - Per tant

$$f'(a) = (F \circ f^{-1})(b) = \lim_{y \to b} (F \circ f^{-1})(y)$$

$$= \lim_{y \to b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = \lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}$$

  - Com $f'(a) \neq 0$ queda finalment

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}$$

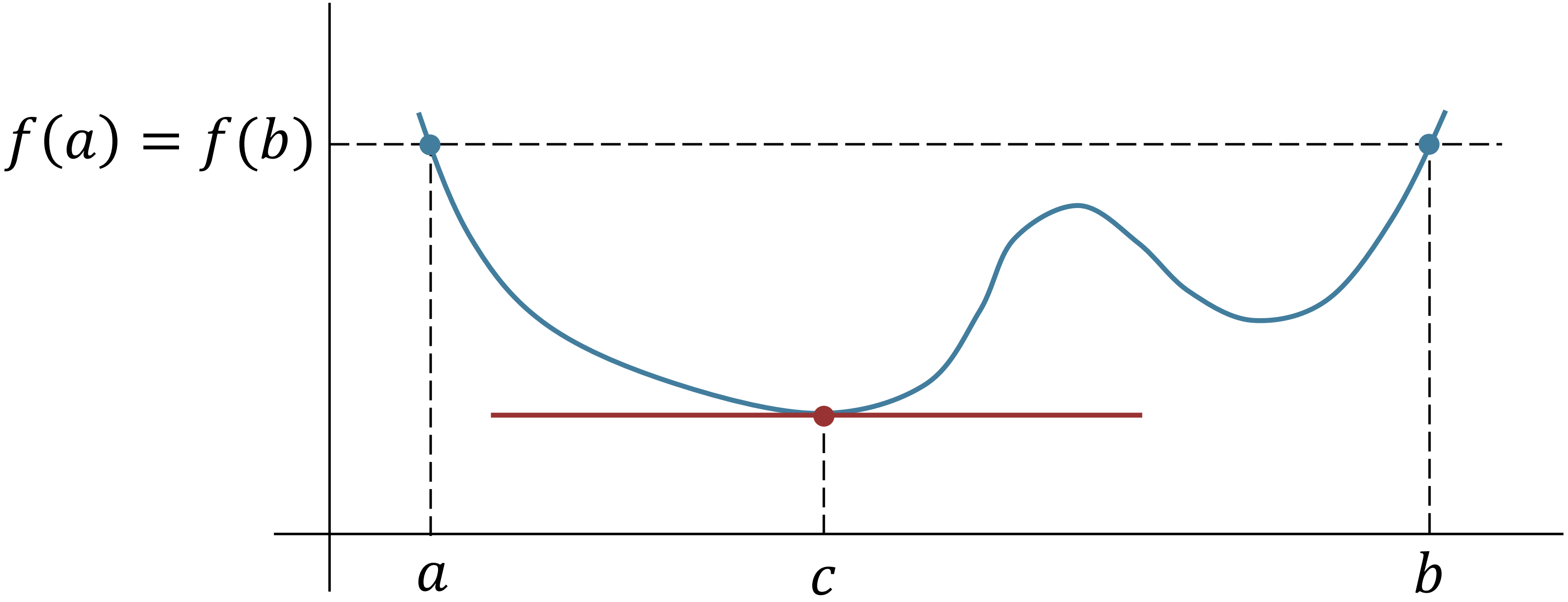
Teorema dels extrems relatius

- Sigui $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable en un punt a de l'interval obert I
- Si f té un extrem relatiu en a, aleshores $f'(a) = 0$
- Demostració
  - Suposem que és un màxim
  - Aleshores, $\exists \delta: f(x) - f(a) \leq 0 \;\; \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$
  - Si $x \in (a - \delta, a)$ tenim $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$
  - Si $x \in (a, a + \delta)$ tenim $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$
  - Com f és derivable en a, els límits laterals han de coincidir, i només s'aconsegueix si $f'(a) = 0$
  - Si fos un mínim la demostració és equivalent

□ Teorema de Rolle

- Sigui $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) i tal que $f(a) = f(b)$.

- Aleshores existeix $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$



Teorema de Rolle

- Sigui $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) i tal que $f(a) = f(b)$.

- Aleshores existeix $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

- Demostració
  - Per teorema de Weierstrass, existeixen $\alpha, \beta \in [a,b]$ tals que $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$, i $m \leq f(x) \leq M \ \ \forall x \in [a,b]$
  - Si $\alpha, \beta \in \{a,b\}$ aleshores la funció és constant, i $f'(x) = 0$ per tots els punts $x \in [a,b]$
  - Si $\beta \in (a,b)$, aleshores f té un màxim local en β, i pel teorema anterior $f'(\beta) = 0$
  - Si $\alpha \in (a,b)$, aleshores f té un mínim local en α, i pel teorema anterior $f'(\alpha) = 0$

- Teorema del valor mig de Cauchy
  - Sigui $f, g\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcions contínues en $[a,b]$ i diferenciables en (a,b)
  - Aleshores existeix $c \in (a,b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$$

  - Observació
    - Si $g(a) \neq g(b)$ i $g'(c) \neq 0$ es pot escriure

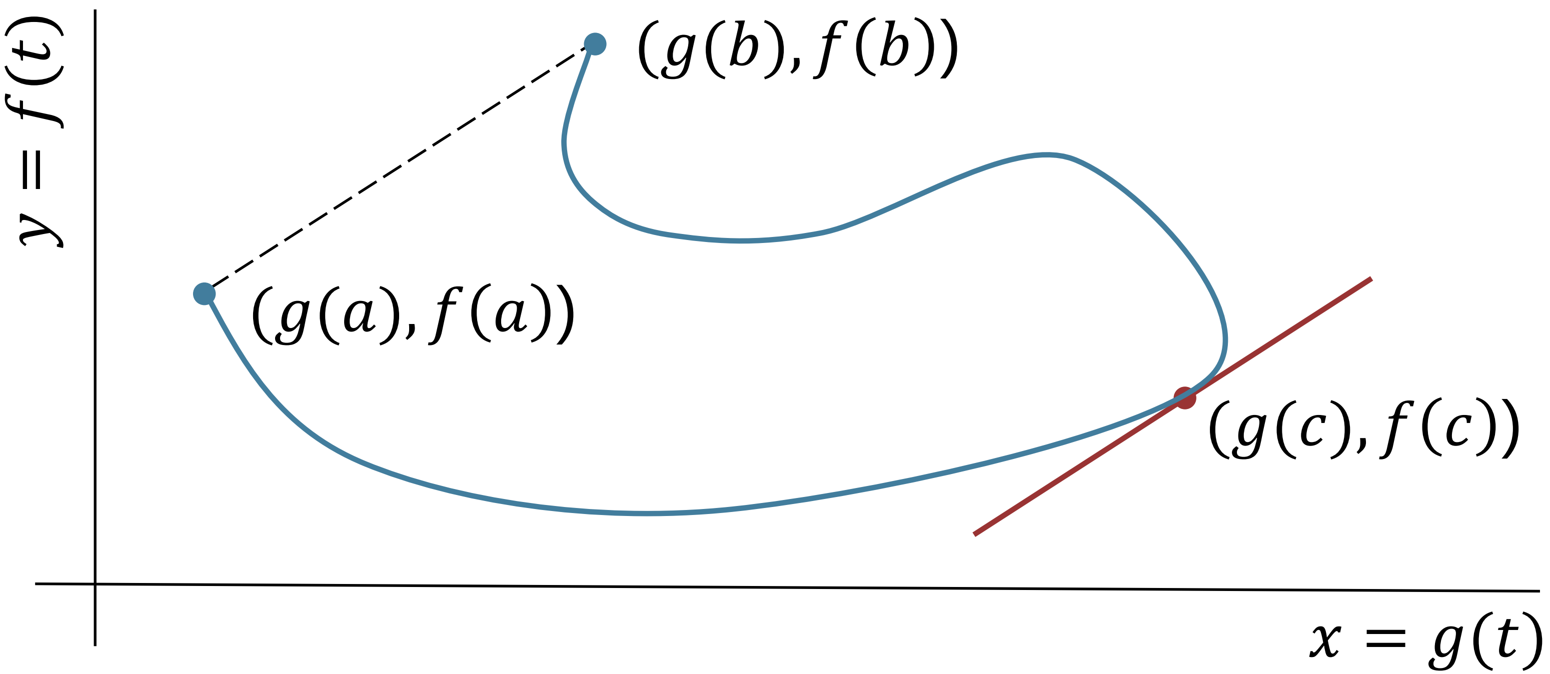
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teorema del valor mig de Cauchy

- Sigui $f, g\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcions contínues en $[a,b]$ i diferenciables en (a,b)

- Aleshores existeix $c \in (a,b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$$

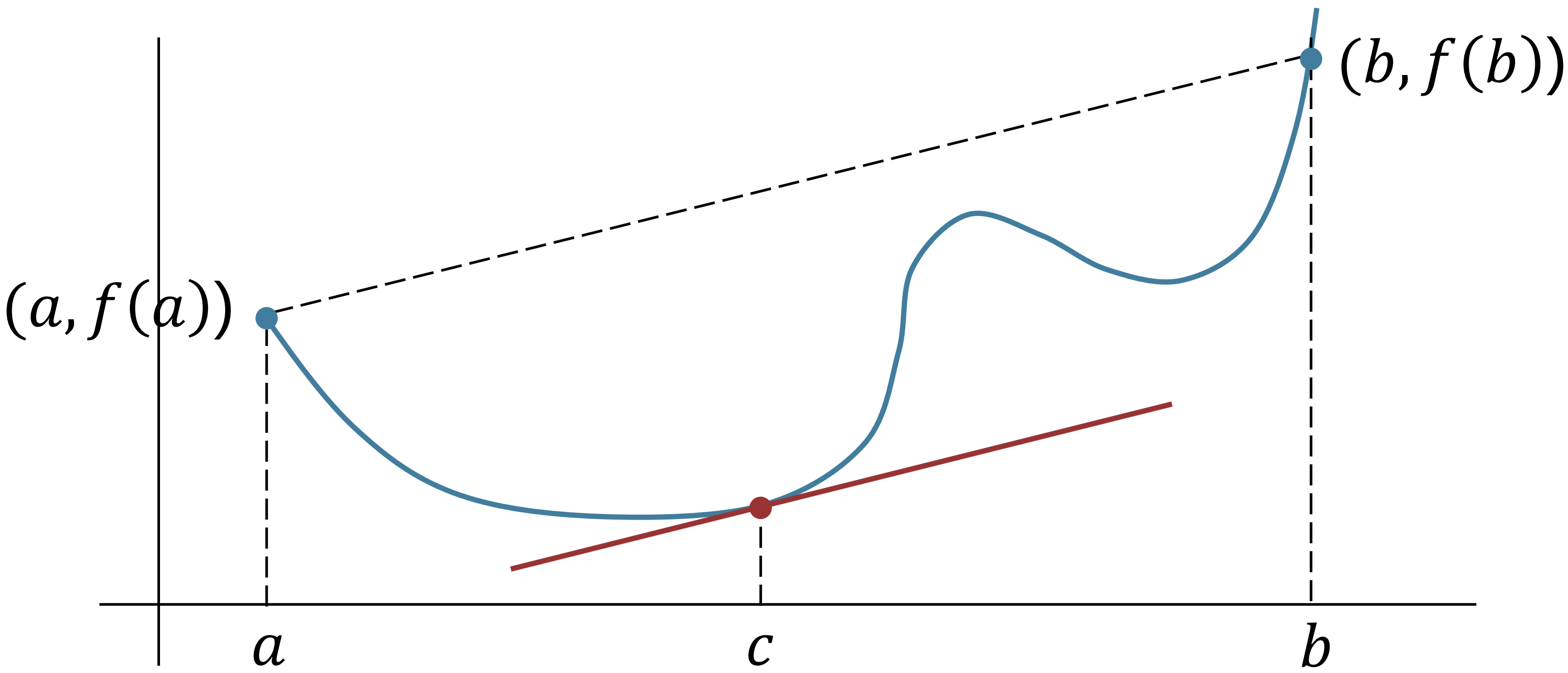


- Teorema del valor mig de Cauchy
  - Sigui $f, g\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcions contínues en $[a,b]$ i diferenciables en (a,b)
  - Aleshores existeix $c \in (a,b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$$

  - Demostració
    - Es defineix $h(x) \equiv [f(b) - f(a)]\, g(x) - [g(b) - g(a)]\, f(x)$
    - Aquesta funció és contínua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b), i $h(a) = h(b)$
    - Per tant, satisfà les condicions del teorema de Rolle, i això significa que $\exists c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$
    - Queda $h'(c) = [f(b) - f(a)]\, g'(c) - [g(b) - g(a)]\, f'(c) = 0$

- Teorema del valor mig de Lagrange
  - Sigui $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funció contínua en $[a, b]$ i diferenciable en (a, b)
  - Aleshores existeix $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$



Teorema del valor mig de Lagrange

- Sigui $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funció contínua en $[a, b]$ i diferenciable en (a, b)
- Aleshores existeix $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$
- Demostració
  - És un cas particular del teorema de Cauchy prenent $g(x) = x$

Regla de l'Hôpital

- Suposem que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

  i que el següent límit existeix

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Aleshores

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostració de la regla de l'Hôpital

- La hipòtesi que existeix

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

implica implícitament que

1. Existeix un interval $(a-\delta, a+\delta)$ en el que $f'(x)$ i $g'(x)$ existeixen $\forall x$, excepte potser a $x = a$
2. En aquest interval $g'(x) \neq 0$ excepte potser a $x = a$
3. No importen els valor de $f(a)$ i $g(a)$; podem (re)definir-los com $f(a) \equiv g(a) \equiv 0$, així f i g passen a ser contínues en a

- Sigui $x \in (a, a+\delta)$. Pel teorema del valor mig de Lagrange, $g(x) \neq 0$ ja que, en cas contrari, existiria un valor x_1 amb $g'(x_1) = 0$, entrant en contradicció amb 2.

Demostració de la regla de l'Hôpital

- Pel teorema del valor mig de Cauchy, $\exists \alpha_x \in (a, x)$ tal que

$$[f(x) - 0]\, g'(\alpha_x) = [g(x) - 0]\, f'(\alpha_x)$$

que també es pot escriure

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}$$

- α_x s'aproxima a a quan x s'apropa a a ja que $\alpha_x \in (a, x)$
- Com suposem que el límit $\lim_{y \to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}$ existeix, aleshores

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{y \to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

- Regla de l'Hôpital (generalitzada)
  - Si

$$\lim_{x\to\blacktriangle} f(x) = \lim_{x\to\blacktriangle} g(x) = \blacksquare$$

$$\lim_{x\to\blacktriangle} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \bigstar$$

amb

$$\blacktriangle \in \{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$$

$$\blacksquare \in \{0, +\infty, -\infty\}$$

$$\bigstar \in \{L, +\infty, -\infty\}$$

  - Aleshores

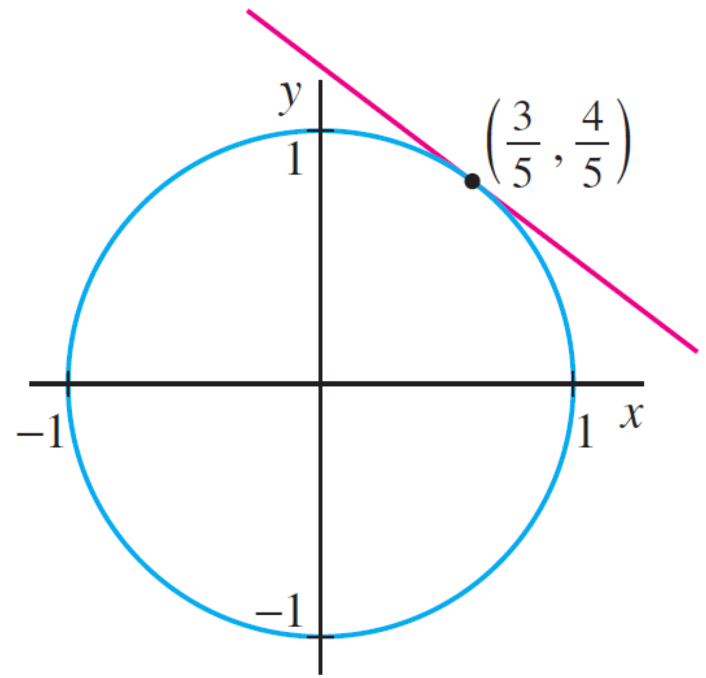
$$\lim_{x\to\blacktriangle} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\blacktriangle} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \bigstar$$

- Derivació implícita
  - De vegades no tenim $y = f(x)$ sinó una relació entre els valors de x i els de y, és dir, $g(x, y) = 0$
  - En aquests cassos, es pot utilitzar la regla de la cadena per a trobar y', encara que no coneguem $f(x)$

$$\frac{d}{dx}(h(y(x))) = \frac{dh(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dh}{dy}\, y'$$

Derivació implícita

- Exemples
  - $x^2 + y^2 = 1 \;\; (x^2 + y^2 - 1 = 0)$

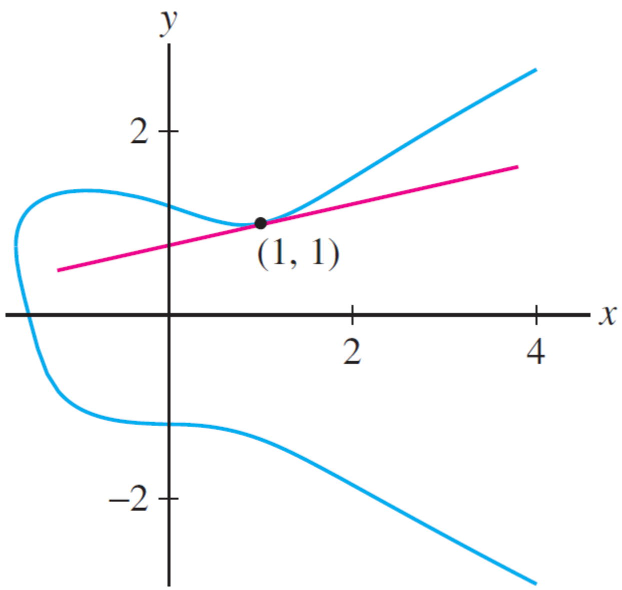


$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = 2x + 2y\,y' = 0 \;\;\Rightarrow\;\; y' = -\frac{x}{y}$$

Al punt $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ el pendent de la recta tangent és $y' = -\frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$

Derivació implícita

- Exemples
  - $y^4 + x\,y = x^3 - x + 2$



$$\frac{d}{dx}(y^4) + \frac{d}{dx}(x\,y) = \frac{d}{dx}(x^3 - x + 2)$$

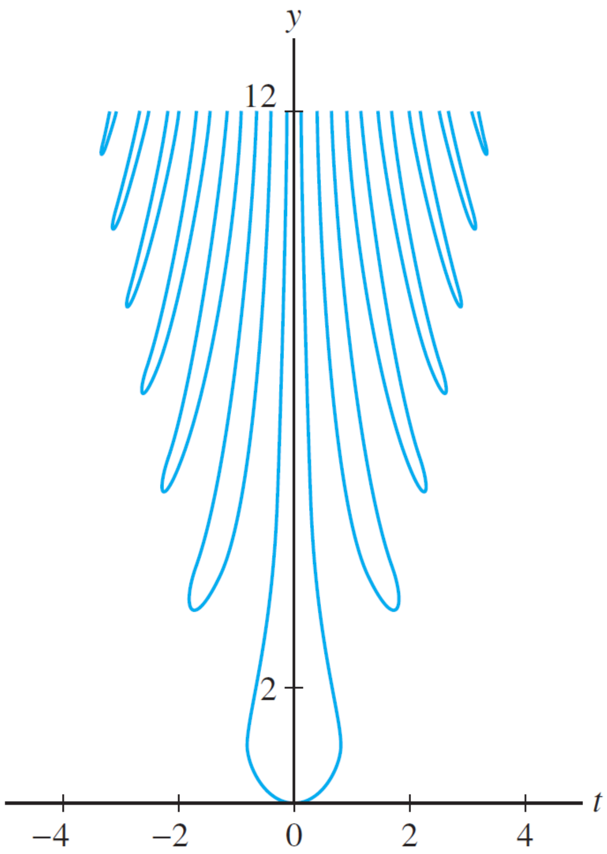
$$4y^3\,y' + y + x\,y' = 3x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3x^2 - 1 - y}{4y^3 + x}$$

Al punt $(1{,}1)$, $y' = \frac{1}{5}$

Derivació implícita

Exemples

- $\cos(ty) = \dfrac{t^2}{y}$



$$-\sin(ty)\,(y + t\,y') = \frac{2t\,y - t^2\,y'}{y^2}$$

$$y' = \frac{2t\,y + y^3\sin(t\,y)}{t^2 - t\,y^2\sin(t\,y)}$$