Materials dielèctrics.

Volum ple de molècules polaritzades o distribució volúmica de moments dipolars.

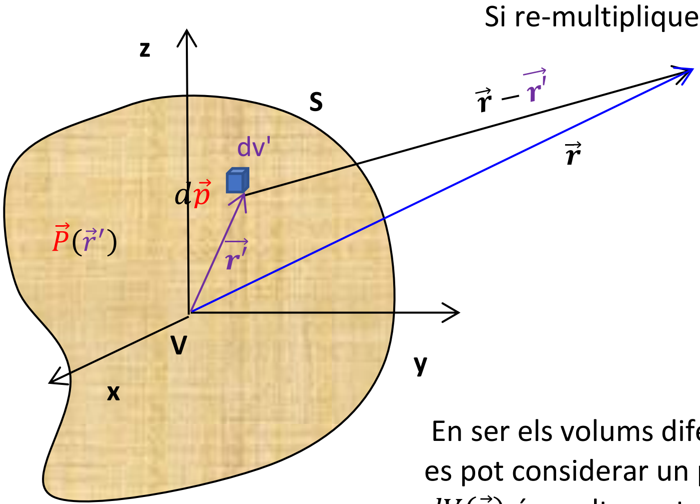
Sigui una distribució de molècules polaritzades dins d'un volum **V**. Cada molècula te un moment dipolar individual molt petit de $\vec{p}_0$. Si ara agafem un volum diferencial dv al voltant d'un punt $\vec{r}'$ dins de la distribució, i ens dediquem a sumar tots els petits moments dipolars $\vec{p}_{0,m}$ de totes les molècules que hi ha dins, llavors obtenim el diferencial de moment dipolar total $d\vec{p}$ dins del volum dv

$$d\vec{p} = \sum_m \vec{p}_{0,m}$$

i això ho dividim pel valor del volum diferencial dv, obtenim el *vector densitat de moment dipolar* $\vec{P}(\vec{r}')$:

$$\vec{P}(\vec{r}') \equiv \frac{d\vec{p}}{dv'} \qquad (1)$$

També s'anomena *vector polarització elèctrica* o simplement *polarització*.



Si re-multipliquem $\vec{P}(\vec{r}')$ pel diferencial de volum dv obtenim el diferencial de moment dipolar total $d\vec{p}$ dins del volum dv:

$$d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r}')dv'$$

Tractarem cadascun d'aquests $d\vec{p}$ com a dipols individuals, i com ja sabem el potencial lluny del dipol es calcula aproximadament com:

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv' \quad (1)$$

En ser els volums diferencials dv' molt petits, quasi qualsevol punt de l'espai $\vec{\boldsymbol{r}}$ es pot considerar un punt llunyà al dipol $d\vec{p}$ i per tant l'anterior expressió (1) de $dV(\vec{r})$ és molt exacta. L'agafarem com a exacta a efectes pràctics.

Així doncs el potencial produït per tota la distribució volúmica de $\vec{P}$ és:

$$V(\vec{r}) = \int_V dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv' = \left| Usant\colon\ \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{P}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \left(\vec{\nabla}'\cdot\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dv' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{\nabla}'\cdot\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{-\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' = \left|\begin{array}{c} Usant\ el\ teorema\ de\ la\ diverg\grave{e}ncia, \\ transformem\ la\ \boldsymbol{1a\ integral} \\ com\ a\ integral\ al\ llarg\ de\ la \\ superf\acute{i}cie\ externa\ \boldsymbol{S} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot d\vec{S}' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{-\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot\hat{n}_e}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot dS' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{-\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$$

Essent $\hat{n}_e$ el vector normal a cada punt de la superfície externa S apuntant cap enfora ('e' d'extern). Llavors fem les següents definicions de càrregues de polarització:

$$= \left| \begin{array}{c} Definim: \quad \vec{P}\cdot\hat{n}_e \equiv \sigma_P \quad (2) \\ com\ a\ densitat\ superficial\ de\ càrrega\ de\ polarització\ a\ la\ superfície\ S \\ \\ Definim: \quad -\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}') \equiv \rho_P(\vec{r}') \quad (3) \\ com\ a\ densitat\ volúmica\ de\ càrrega\ de\ polarització\ al\ volum\ V \end{array} \right|$$

L'expressió del potencial creat per aquestes distribucions de càrrega de polarització serà:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_P{}'(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot dS' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' \qquad (4)$$

Per a obtenir el camp només cal prendre menys el gradient del potencial. Recordem:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|}\right) = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}\prime)}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|^3}$$

llavors

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\big(V(\vec{r})\big) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_P{}'(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\cdot d\vec{S}' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_P(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv' \qquad (4')$$

És a dir el volum dielèctric ple de moments dipolars o petits dipols per tot arreu en el seu conjunt equival a:

<u>una distribució de càrrega volúmica de polarització</u> ρ_P **+** <u>una distribució de càrrega superficial de polarització</u> σ_P.

A aquest camp i potencial cal afegir-l'hi els efectes de les densitats de superficials i volúmiques reals de càrregues normals (no de polarització) també dites càrregues lliures: ρ_{ll} i σ_{ll}.

Així escrivint el teorema de Gauss diferencial per a aquest cas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{ll}+\rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{ll}-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right) = \rho_{ll}$$

definint:

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \qquad (5)$$

Com el camp vectorial anomenat *camp de desplaçament elèctric*,

llavors el teorema de Gauss en presència de materials dielèctrics, en termes d'aquest vector nou s'escriu només usant les càrregues lliures i sense la permitivitat:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{D}} = \rho_{ll}} \qquad (6)$$

Recordem (5):

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

A partir d'això ja veiem que, **D** te les mateixes dimensions que **P**, és a dir

$$[D] = [P] = [\varepsilon_0][E] = \frac{C^2}{Nm^2}\frac{N}{C} = \frac{C}{m^2}$$

que també són les unitats de σ. És a dir:

$$[D] = [P] = [\sigma] = \frac{C}{m^2}$$

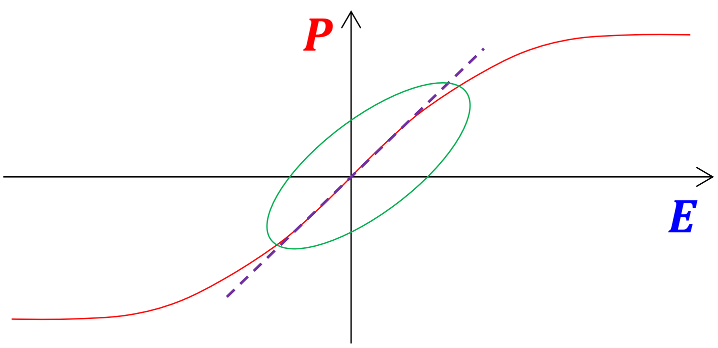
Resposta polaritzadora del material

Com hem vist, tenim tres camps: $\vec{E}, \vec{P}\ i\ \vec{D}$

I una relació (5) $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ entre ells, cal una segona relació que permeti posar-ho tot en funció d'un sol camp si ens convé.

Aquesta segona relació la dona el comportament o resposta sota polarització del material, és a dir, sota quina funció es genera polarització $\vec{P}$ en funció del camp $\vec{E}$ total

En *materials isotròpics* (ho són la majoria) els dipols s'orienten en mitjana, en la mateixa direcció del camp, per tant la conseqüència, $\vec{P}$, te la mateixa direcció i sentit que la causa, $\vec{E}$, que la produeix. Com a més causa hi haurà més conseqüència, per tant, podem deduir que la funció de $\vec{P}$ vs. $\vec{E}$ és creixent, i canvia de signe si $\vec{E}$ també canvia de signe, i que per $\vec{E}$ nul també tindrem també $\vec{P}$ nul. En resum, la funció serà quelcom així:



Ara bé, amb camps elèctrics suficientment baixos (la majoria dels que s'usen a la pràctica) no ens movem de la part central de la corba anterior i podem dir ***P*** i ***E*** són aproximadament proporcionals

$$\vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \qquad (7)$$

On χ és un factor adimensional que s'anomena *susceptibilitat dielèctrica* del que depèn del material

A partir de (5): $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ i substituint-hi (7):

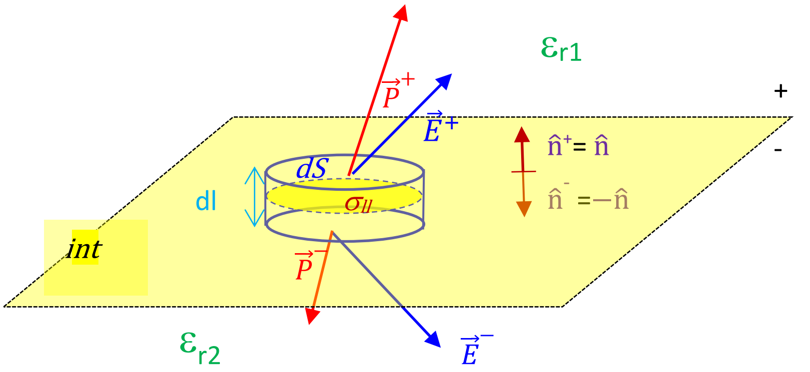
$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \left| \begin{array}{c} \text{definint: } \varepsilon_r \equiv 1+\chi > 1 \\ \text{com la } \mathit{permitivitat\ relativa} \\ \text{(adimensional) del material} \end{array} \right| = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{definint: } \varepsilon \equiv \varepsilon_0\varepsilon_r \\ \text{com la } \mathit{permitivitat\ absoluta} \\ \text{(dimensions de } \varepsilon_0\text{) del material} \end{array} \right| = \varepsilon\vec{E}$$

i podem reescriure el teorema de Gauss com:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon\vec{E}) = \rho_{ll}} \qquad (8)$$

Equacions a les interfícies entre dues zones de dos materials diferents



Considerem una interfície (int) entre dos medis materials diferents amb permitivitats relatives diferents ε_{r1} (dalt) i ε_{r2} (baix).

Posem un cilindre de Gauss travessat perpendicularment a la superfície (com es veu a al figura) amb la base superior (+) i la base inferior (-) molt a prop de la superfície, la + per dalt i la – per baix. La distància entre ambdues bases és un dl diferencial.

Calculem el flux a través d'aquest cilindre. Negligim el flux a través de la superfície lateral per ser dl molt petit

El flux serà per tant el de les dues bases dS^+ i dS^-

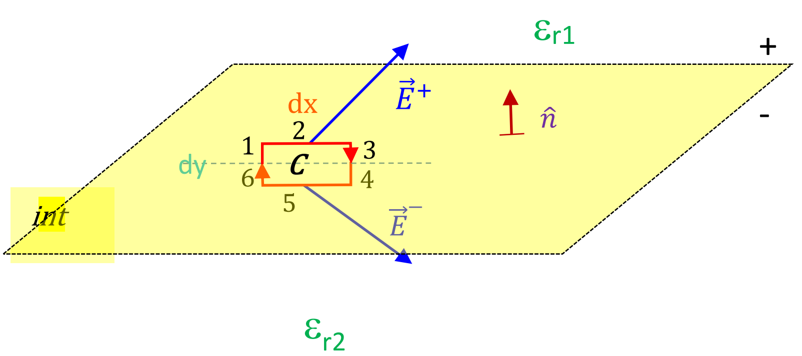
$$d\phi = \vec{E}^+ \cdot \hat{n}\, dS - \vec{E}^- \cdot \hat{n}\, dS = \left(\hat{n} \cdot \vec{E}^+ - \hat{n} \cdot \vec{E}^-\right) dS = |aplicant\ Gauss| =$$

$$= \frac{\sigma_{ll} + (\sigma_P{}^+ + \sigma_P{}^-)}{\varepsilon_0} dS = \frac{\sigma_{ll}}{\varepsilon_0} dS + \frac{\hat{n}^+ \cdot \vec{P}^- + \hat{n}^- \cdot \vec{P}^+}{\varepsilon_0} dS = \frac{\sigma_{ll}}{\varepsilon_0} dS + \frac{\hat{n} \cdot \vec{P}^- - \hat{n} \cdot \vec{P}^+}{\varepsilon_0} dS \quad \Rightarrow$$

$$\hat{n} \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E}^+ + \vec{P}^+\right) - \hat{n} \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E}^- + \vec{P}^-\right) = \sigma_{ll} \quad \Rightarrow \quad \hat{n} \cdot \left(\vec{D}^+ - \vec{D}^-\right) = \sigma_{ll}$$

És a dir hi ha una discontinuïtat de la component normal a la interfície de $\vec{D}$, si hi ha càrregues lliures a la interfície.

Que passa però amb la **component tangencial del camp**?. És a dir, la component paral·lela a la interfície. Com veurem és contínua. Per a demostrar-ho usarem el teorema de conservativitat del camp $\vec{E}$



Considerem una línia tancada ***C*** en forma de rectangle situada perpendicularment a la superfície. Aquest rectangle te unes dimensions diferencials: dy perpendicular a la interfície i dx paral·lel o tangencial a la interfície. Te una meitat per sobre (trams 1,2 i 3) i l'altra per sota la interfície (trams 4, 5 i 6). El camp present just a sobre la interfície l'anomenem $\vec{E}^+$, i el just per sota $\vec{E}^-$

Per a aplicar la conservativitat del camp, igualem a zero la integral de línia al llarg del rectangle ***C***, la qual descomponem en els sis trams del qual està formada (figura). Com que la línia tancada és de mida molt petita (diferencial), és fàcil adonar-se que el camp serà $\vec{E}^+$ el mateix en els tres trams de sobre (1, 2 i 3), i el mateix $\vec{E}^-$ en els tres trams de sota (4, 5 i 6). Així, la integral de línia la podríem descriure com:

$$0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}^+ \cdot \left(d\vec{l}_1 + d\vec{l}_2 + d\vec{l}_3\right) + \vec{E}^- \cdot \left(d\vec{l}_4 + d\vec{l}_5 + d\vec{l}_6\right)$$

Com que $d\vec{l}_1 = -d\vec{l}_3$ i $d\vec{l}_4 = -d\vec{l}_6$ resulta que 4 termes s'anul·len entre si i només en queden dos:

$$0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}^+ \cdot d\vec{l}_2 + \vec{E}^- \cdot d\vec{l}_5$$

I tenint en compte que també $d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_5 \equiv d\vec{x}$, llavors:

$$0 = \left(\vec{E}^+ - \vec{E}^-\right) \cdot d\vec{x}$$

Dit d'una altra manera, la component tangencial de $\vec{E}$ (paral·lela a $d\vec{x}$ o a la interfície) és contínua.

Una altra manera d'expressar-ho és per mitjà del vector normal $\hat{n}$

$$\hat{n}\, x \left(\vec{E}^+ - \vec{E}^-\right) = 0$$

Resum final de les equacions de l'electrostàtica amb dielèctrics inclosos, si convé

En el volum (o bulk):

1.a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{ll}$: Teorema de Gauss en termes de $\vec{D}$ i ρ_{ll}

2.a) $\vec{\nabla}\, \mathrm{x}\, \vec{E} = 0$: Conservativitat del camp $\vec{E}$

A les interfícies:

1.b) $\hat{n} \cdot \left(\vec{D}^+ - \vec{D}^-\right) = \sigma_{ll}$: Discontinuïtat de la component normal de $\vec{D}$ igual a la σ_{ll}

2.b) $\hat{n}\, x\left(\vec{E}^+ - \vec{E}^-\right) = 0$: Continuïtat de la component tangencial de $\vec{E}$.

A més tenim les relacions constitutives entre els tres camps, que valen en qualsevol punt i depenen de les propietats particulars del material on estiguem:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad ; \quad \vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{amb } \varepsilon_r = 1 + \chi$$

Tot usant aquestes equacions ens estalviem d'haver de tenir en compte les càrregues de polarització:

$$\vec{P} \cdot \hat{n}_e \equiv \sigma_P$$

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \equiv \rho_P$$