Anàlisi Matemàtica 1 (AM1)
GEMiF

E4.2 Exercicis: Sèries de Taylor

1. Trobeu el polinomi de Taylor de les funcions f per els valors donats d'a i n i trobeu la forma de Lagrange del residu:

a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4,\ n = 3$
b) $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/3,\ n = 4$
c) $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/4,\ n = 4$
d) $f(x) = \ln x, \quad a = 1,\ n = 5$

Es tracta de desenvolupar la funció, avaluada en un punt a, en sèrie de Taylor fins a un cert ordre, indicat pel valor de n. Recordem l'expansió de Taylor d'una funció qualsevol $f(x)$ i el terme del residu de Lagrange:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n,a,f}(x)$$

Sabem, perquè ho vàrem demostrar teòricament, que el terme del residu de Lagrange és:

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

És a dir, el residu és el següent terme després de l'ordre de la nostra aproximació. Si ens demanen una aproximació a $n = 4$, haurem de buscar el primer terme diferent de zero que comenci amb les derivades superiors a 4. Recordem que el valor ξ és un valor situat entre x i a. Si ens demanen estimar l'error màxim amb el residu de Lagrange, haurem de mirar el valor màxim que pot tenir la derivada $(n+1)$-èssima a l'interval que considerem.

Anem a aplicar aquest conceptes al problema en qüestió:

a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4,\ n = 3$

Aquí ens demanen arribar fins ordre 3, per tant:

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + R$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + R(x)$$

Cal fer la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ tres vegades, per facilitar-ho escrivim $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

Ara ja podem escriure que la funció aproximada a 3r ordre en Taylor al punt a, és:

$$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}(x-a) - \frac{1}{4\cdot 2!}a^{-\frac{3}{2}}(x-a)^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}a^{-\frac{5}{2}}(x-a)^3 + R(x)$$

Com ens diuen a=4:

$$\sqrt{x} = \sqrt{4} + \frac{1}{2}4^{-\frac{1}{2}}(x-4) - \frac{1}{8}4^{-\frac{3}{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{16}4^{-\frac{5}{2}}(x-4)^3 + R(x)$$

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 + R(x)$$

Ara, calculem el residu de Lagrange, necessitem la 4a derivada:

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$$

$$R(x) = \frac{-\frac{15}{16}\xi^{-\frac{7}{2}}}{4!}(x-4)^4 = -\frac{5}{128\sqrt{\xi^7}}(x-4)^4$$

b) $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/3, \ n = 4$

Repetint tot el procediment anterior:

$$\cos(x) = \cos(a) - \frac{1}{1!}\operatorname{sen}(a)\,(x-a) - \frac{1}{2!}\cos(a)\,(x-a)^2 + \frac{1}{3!}\sin(a)\,(x-a)^3 + \frac{1}{4!}\cos(a)\,(x-a)^4 + R(x)$$

Al punt $a = \frac{\pi}{3}$:

$$\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4 + R(x)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4 + R(x)$$

I el residu de Lagrange és:

$$R(x) = -\frac{\sin(\xi)}{5!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5$$

c) $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/4, \ n = 4$

$$\sin(x) = \sin(a) + \frac{1}{1!}\cos(a)\,(x-a) - \frac{1}{2!}\sin(a)\,(x-a)^2 - \frac{1}{3!}\cos(a)\,(x-a)^3 + \frac{1}{4!}\sin(a)\,(x-a)^4 + R(x)$$

$$\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{1!}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + R(x)$$

$$\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + R(x)$$

$$R(x) = -\frac{\cos\,(\xi)}{5!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$$

d) $f(x) = \ln x, \quad a = 1, \ n = 5$

$$\ln(x) = \ln(a) + \frac{1}{1!}\frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2!}\frac{1}{a^2}(x-a)^2 + \frac{1}{3!}\frac{2}{a^3}(x-a)^3 - \frac{1}{4!}\frac{6}{a^4}(x-a)^4 + \frac{1}{5!}\frac{24}{a^5}(x-a)^5 + R(x)$$

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 + R(x)$$

$$R(x) = -\frac{1}{6\xi^6}(x-1)^6$$

2. Utilitzeu la forma de Lagrange del residu per a demostrar que l'aproximació

$$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

té una precisió de quatre decimals per a valors $0 \le x \le \pi/4$.

Primer esbrinem com s'ha fet aquest desenvolupament. Mirant el desenvolupament de $\sin(x)$ de l'exercici anterior, expandim fins ordre 5, donat que veiem un terme d'aquest ordre, sabem que:

$$\sin(x) = \sin(a) + \frac{1}{1!}\cos(a)\,(x-a) - \frac{1}{2!}\sin(a)\,(x-a)^2 - \frac{1}{3!}\cos(a)\,(x-a)^3 + \frac{1}{4!}\sin(a)\,(x-a)^4 + \frac{1}{5!}\cos(a)\,(x-a)^5 + R(x)$$

Com es tracta d'un polinomi, podem comparar terme a terme el de l'enunciat amb el desenvolupament de Taylor general, per esbrinar al voltant de quin punt s'ha fet l'aproximació. El terme d'ordre zero és:

$$\sin(a) = 0$$

Per tant $a = k\pi$, amb $k = 0, 1, 2, \dots$

Comparant el primer ordre tindríem:

$$cos(a)(x-a) = x$$

Amb aquestes 2 restriccions ja tenim prou per saber que el desenvolupament s'ha fet al voltant del $a = 0$.

Per demostrar-ho caldrà calcular el residu de Lagrange, que serà el següent terme avaluat en un punt ξ entre 0 i x:

$$R(x) = -\frac{\sin(\xi)}{6!}(x-0)^6$$

Els valors de x ens diuen que estan a l'interval $[0, \pi/4]$, llavors mirem quin és el màxim valor del residu en aquest interval, i sabrem, la precisió de l'aproximació. Com que tenim la funció $\sin(x)$, el seu valor màxim a l'interval donat és $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ per tant el residu serà màxim:

$$|R(x)| = \left|-\frac{\sin(\xi)}{6!}x^6\right| \le \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{6!}x^6 = 0.00098x^6$$

El valor màxim que pot prendre x a en aquest interval és $\frac{\pi}{4} = 0.785$. Llavors:

$$|R(x)| \le 0.00098x^6 \le 0.00098\,(0.785)^6 \approx 0.00023$$

Que té precisió de gairebé 4 decimals.

3. Expandeix $g(x) = x^2 \ln x$ en potències de $x - 1$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^2 \ln x \\
g'(x) &= x + 2x \ln x \\
g''(x) &= 3 + 2 \ln x \\
g'''(x) &= 2x^{-1} \\
g^{(4)}(x) &= -2x^{-2} \\
g^{(5)}(x) &= (2)(2)x^{-3} \\
g^{(6)}(x) &= -(2)(2)(3)x^{-4} = -2(3!)x^{-4} \\
g^{(7)}(x) &= (2)(2)(3)(4)x^{-5} = (2)(4!)x^{-5}
\end{aligned}
$$

The pattern is now clear: for $k \geq 3$

$$g^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} 2(k-3)!\, x^{-k+2}.$$

Evaluation at $x = 1$ gives $g(1) = 0,\ g'(1) = 1,\ g''(1) = 3$ and, for $k \geq 3$,

$$g^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}\, 2(k-3)!.$$

The expansion in powers of $x - 1$ can be written

$$
\begin{aligned}
g(x) &= (x-1) + \frac{3}{2!}(x-1)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2)(k-3)!}{k!}(x-1)^k \\
&= (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + 2\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k-1)(k-2)}(x-1)^k.
\end{aligned}
$$

4. Utilitza el desenvolupament en sèrie de Taylor-Maclaurin de e^x per a calcular el desenvolupament en sèrie de Taylor de $g(x) = e^{x/2}$ al voltant de $x = 3$, sense calcular derivades.

La idea és calcular el desenvolupament de $g(t+3)$, i després fer $x = t + 3$

$$g(t+3) = e^{(t+3)/2} = e^{3/2} e^{t/2} = e^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^n = e^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, 2^n} t^n$$

Per tant,

$$g(x) = e^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, 2^n} (x-3)^n$$

Com l'expansió de $g(t+3)$ és vàlida per tot t real, l'expansió de $g(x)$ és vàlida per tot x real.

5. Verifica que l'interval de convergència de la següent sèrie és $(-1,1]$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

Si convergeix, el límit dels termes ha de ser 0:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} x^n \right) = \begin{cases} \text{no existeix}, & |x| > 1 \\ 0, & |x| \leq 1 \end{cases}$$

Per tant, només podria convergir si $|x| \leq 1$. Considerem la sèrie de valors absoluts:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} x^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |x|^n$$

Pel criteri del quocient de d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}|x|^{n+1}}{\frac{1}{n}|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x|$$

sabem que la sèrie convergeix absolutament si $|x| < 1$ i divergeix si $|x| > 1$. Per tant, tenim assegurada la convergència per $|x| < 1$. Manca analitzar els dos cassos que falten, $x = \pm 1$.

Si $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

és la sèrie harmònica, per tant divergeix.

Si $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

és alternada. Pel criteri de Leibniz, com els termes $1/n$ tendeixen a zero, la sèrie alternada és convergent.

En definitiva, queda demostrat que la sèrie només convergeix a l'interval $(-1, 1]$.

6. Quants termes de la sèrie de Taylor-Maclaurin de la funció e^x fan falta per a calcular e amb 8 xifres decimals correctes?

Desenvolupant fins a $n+1$ termes queda

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + R(x)$$

amb residu de Lagrange

$$R(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

on tenim $0 < \xi < x$. Ens interessa el valor de e^x per $x = 1$, i amb $R(1) < 10^{-8}$. Per tant, $e^\xi < e^1 < 3$, i podem escriure

$$R(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} 1^{n+1} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-8}$$

$$(n+1)! > 3 \cdot 10^8 = 300{,}000{,}000$$

n	$(n+1)!$
10	39,916,800
11	479,001,600

Per tant, amb $n = 11$ aconseguim la precisió demanada, és a dir, calen 12 termes.