Coordenadas homogéneas. Referencias proyectivas.

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

Definición (Independencia proyectiva)

Un conjunto de puntos $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq P(V)$ es *proyectivamente independiente* si y solo si cada conjunto de vectores $V' = \{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\} \subseteq V$, representantes de estos puntos, es linealmente independiente.

Definición (Independencia proyectiva)

Un conjunto de puntos $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq P(V)$ es *proyectivamente independiente* si y solo si cada conjunto de vectores $V' = \{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\} \subseteq V$, representantes de estos puntos, es linealmente independiente.

El subespacio proyectivo asociado al subespacio vectorial generado por V', se denomina subespacio proyectivo generado por A.

Definición (Independencia proyectiva)

Un conjunto de puntos $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq P(V)$ es *proyectivamente independiente* si y solo si cada conjunto de vectores $V' = \{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\} \subseteq V$, representantes de estos puntos, es linealmente independiente.

El subespacio proyectivo asociado al subespacio vectorial generado por V', se denomina subespacio proyectivo generado por A.

Observación

El máximo número de puntos proyectivamente independiente en un espacio proyectivo de dimensión n es $n+1$.

Coordenadas homogéneas

Observación

- Si $B = (\overrightarrow{u_0}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ es una base de V, entonces todo vector $\overrightarrow{v} \in V$ es determinado por sus coordenadas $\overrightarrow{v} = (x_0, \ldots, x_n)$ con respecto a la base B.
- Las coordenadas $(x_0, \ldots, x_n)$ y $(x'_0, \ldots, x'_n)$ representan el mismo punto $v = p(\overrightarrow{v}) \in P(V)$ si y solo si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $x'_i = \lambda x_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Coordenadas homogéneas

Observación

- Si $B = (\overrightarrow{u_0}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ es una base de V, entonces todo vector $\overrightarrow{v} \in V$ es determinado por sus coordenadas $\overrightarrow{v} = (x_0, \ldots, x_n)$ con respecto a la base B.
- Las coordenadas $(x_0, \ldots, x_n)$ y $(x'_0, \ldots, x'_n)$ representan el mismo punto $v = p(\overrightarrow{v}) \in P(V)$ si y solo si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $x'_i = \lambda x_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Coordenadas homogéneas

Si $\overrightarrow{v} = (x_0, \ldots, x_n) \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, diremos que las *coordenadas homogéneas* del punto $v = p(\overrightarrow{v}) \in P(V)$ están dadas por la clase $\lambda(x_0, \ldots, x_n)$, para todo $\lambda \neq 0$, y se denota

$$v = (x_0 : x_1 : \cdots : x_n).$$

Problema

Consideremos el problema de determinar las coordenadas de todos los puntos del espacio proyectivo $P(V)$ a partir de un sistema $A \subseteq P(V)$ de puntos.

Problema

Consideremos el problema de determinar las coordenadas de todos los puntos del espacio proyectivo $P(V)$ a partir de un sistema $A \subseteq P(V)$ de puntos.

Obviamente, necesitamos que A tenga el menor número posible de puntos.

Problema

Consideremos el problema de determinar las coordenadas de todos los puntos del espacio proyectivo $P(V)$ a partir de un sistema $A \subseteq P(V)$ de puntos.

Obviamente, necesitamos que A tenga el menor número posible de puntos.

Para hacer esto, necesitamos obtener una base B a partir de los puntos del sistema A. Esta base debe ser única, salvo una constante de proporcionalidad para todos los vectores de la base.

Problema

Consideremos el problema de determinar las coordenadas de todos los puntos del espacio proyectivo $P(V)$ a partir de un sistema $A \subseteq P(V)$ de puntos.

Obviamente, necesitamos que A tenga el menor número posible de puntos.

Para hacer esto, necesitamos obtener una base B a partir de los puntos del sistema A. Esta base debe ser única, salvo una constante de proporcionalidad para todos los vectores de la base.

Inconveniente

Una base $B = (\overrightarrow{u_0}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ NO queda determinada de manera única por el sistema $(p(\overrightarrow{u_0}), \ldots, p(\overrightarrow{u_n}))$ de puntos proyectivamente independientes, ya que

$$(p(\overrightarrow{u_0}), \ldots, p(\overrightarrow{u_n})) = (p(\lambda_0 \overrightarrow{u_0}), \ldots, p(\lambda_n \overrightarrow{u_n}))$$

y en general la base $(\lambda_0 \overrightarrow{u_0}, \ldots, \lambda_n \overrightarrow{u_n})$ es diferente de B, y tampoco es proporcional a B.

Resumen

Si $dim(P(V)) = n$, entonces no es suficiente tener $n+1$ puntos proyectivamente independientes para determinar las coordenadas homogéneas de cualquier punto.

Resumen

Si $dim(P(V)) = n$, entonces no es suficiente tener $n+1$ puntos proyectivamente independientes para determinar las coordenadas homogéneas de cualquier punto.

Para resolver este problema vamos a establecer algunos resultados y definiciones.

Proposición

Si $\{e_0, \ldots e_n, e\}$ es un sistema de $n+2$ puntos de un espacio proyectivo $P(V)$ de dimension n tal que todo subconjunto de $n+1$ puntos es proyectivamente independiente, entonces existe una base $B = (\overrightarrow{e_0}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de V tal que $e_i = p(\overrightarrow{e_i})$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ y $e = p(\overrightarrow{e})$, donde $\overrightarrow{e} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{e_i}$.

Proposición

Si $\{e_0, \dots e_n, e\}$ es un sistema de $n+2$ puntos de un espacio proyectivo $P(V)$ de dimension n tal que todo subconjunto de $n+1$ puntos es proyectivamente independiente, entonces existe una base $B = (\overrightarrow{e_0}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ de V tal que $e_i = p(\overrightarrow{e_i})$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ y $e = p(\overrightarrow{e})$, donde $\overrightarrow{e} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{e_i}$.

Demostración

Sea $U = (\overrightarrow{u_0}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ un sistema de vectores de V tal que $e_i = p(\overrightarrow{u_i})$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

Proposición

Si $\{e_0,\dots e_n,e\}$ es un sistema de $n+2$ puntos de un espacio proyectivo $P(V)$ de dimension n tal que todo subconjunto de $n+1$ puntos es proyectivamente independiente, entonces existe una base $B=(\overrightarrow{e_0},\dots,\overrightarrow{e_n})$ de V tal que $e_i=p(\overrightarrow{e_i})$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$ y $e=p(\overrightarrow{e})$, donde $\overrightarrow{e}=\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{e_i}$.

Demostración

Sea $U=(\overrightarrow{u_0},\dots,\overrightarrow{u_n})$ un sistema de vectores de V tal que $e_i=p(\overrightarrow{u_i})$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$. Como los puntos $e_0,\dots e_n$ son proyectivamente independientes, el sistema U es linealmente independiente, y es una base de V, ya que

$$\dim(V)=n+1.$$

Proposición

Si $\{e_0, \ldots e_n, e\}$ es un sistema de $n+2$ puntos de un espacio proyectivo $P(V)$ de dimension n tal que todo subconjunto de $n+1$ puntos es proyectivamente independiente, entonces existe una base $B = (\overrightarrow{e_0}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de V tal que $e_i = p(\overrightarrow{e_i})$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ y $e = p(\overrightarrow{e})$, donde $\overrightarrow{e} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{e_i}$.

Demostración

Sea $U = (\overrightarrow{u_0}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ un sistema de vectores de V tal que $e_i = p(\overrightarrow{u_i})$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$. Como los puntos $e_0, \ldots e_n$ son proyectivamente independientes, el sistema U es linealmente independiente, y es una base de V, ya que $\dim(V) = n+1$. Así, para $e = p(\overrightarrow{e})$, existen $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $\overrightarrow{e} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i}$.

Proposición

Si $\{e_0,\dots e_n,e\}$ es un sistema de $n+2$ puntos de un espacio proyectivo $P(V)$ de dimension n tal que todo subconjunto de $n+1$ puntos es proyectivamente independiente, entonces existe una base $B=(\overrightarrow{e_0},\dots,\overrightarrow{e_n})$ de V tal que $e_i=p(\overrightarrow{e_i})$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$ y $e=p(\overrightarrow{e})$, donde $\overrightarrow{e}=\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{e_i}$.

Demostración

Sea $U=(\overrightarrow{u_0},\dots,\overrightarrow{u_n})$ un sistema de vectores de V tal que $e_i=p(\overrightarrow{u_i})$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$. Como los puntos $e_0,\dots e_n$ son proyectivamente independientes, el sistema U es linealmente independiente, y es una base de V, ya que $\dim(V)=n+1$. Así, para $e=p(\overrightarrow{e})$, existen $\lambda_0,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tales que $\overrightarrow{e}=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\overrightarrow{u_i}$.

Observe que $\lambda_i\neq 0$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$, ya que en caso contrario existe $\lambda_j=0$ y obtenemos que el conjunto $\{e_0,\dots e_n,e\}\setminus\{e_j\}$ es proyectivamente dependiente, lo que es una contradicción.

Proposición

Si $\{e_0,\dots e_n,e\}$ es un sistema de $n+2$ puntos de un espacio proyectivo $P(V)$ de dimension n tal que todo subconjunto de $n+1$ puntos es proyectivamente independiente, entonces existe una base $B=(\overrightarrow{e_0},\dots,\overrightarrow{e_n})$ de V tal que $e_i=p(\overrightarrow{e_i})$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$ y $e=p(\overrightarrow{e})$, donde $\overrightarrow{e}=\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{e_i}$.

Demostración

Sea $U=(\overrightarrow{u_0},\dots,\overrightarrow{u_n})$ un sistema de vectores de V tal que $e_i=p(\overrightarrow{u_i})$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$. Como los puntos $e_0,\dots e_n$ son proyectivamente independientes, el sistema U es linealmente independiente, y es una base de V, ya que $\dim(V)=n+1$. Así, para $e=p(\overrightarrow{e})$, existen $\lambda_0,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tales que $\overrightarrow{e}=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\overrightarrow{u_i}$.

Observe que $\lambda_i\neq 0$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$, ya que en caso contrario existe $\lambda_j=0$ y obtenemos que el conjunto $\{e_0,\dots e_n,e\}\setminus\{e_j\}$ es proyectivamente dependiente, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, podemos tomar $\overrightarrow{e_i}=\lambda_i\overrightarrow{u_i}$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$ y así obtener una base $B=(\overrightarrow{e_0},\dots,\overrightarrow{e_n})$ de V con los requisitos deseados. $\square$

Definición

Si el conjunto ordenado de puntos $\{e_0,\ldots e_n,e\}$ satisface la proposición anterior, entonces se dice que $\mathcal{R}=(e_0,\ldots,e_n;e)$ es una referencia proyectiva de $P(V)$.

Definición

Si el conjunto ordenado de puntos $\{e_0, \ldots e_n, e\}$ satisface la proposición anterior, entonces se dice que $\mathcal{R} = (e_0, \ldots, e_n; e)$ es una referencia proyectiva de $P(V)$.

- Los puntos $e_0, \ldots, e_n$ se denominan puntos base, mientras e se denomina punto de control.

Definición

Si el conjunto ordenado de puntos $\{e_0, \ldots e_n, e\}$ satisface la proposición anterior, entonces se dice que $\mathcal{R} = (e_0, \ldots, e_n; e)$ es una referencia proyectiva de $P(V)$.

- Los puntos $e_0, \ldots, e_n$ se denominan puntos base, mientras e se denomina punto de control.
- La base $B = (\overrightarrow{e_0}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ se denomina base normalizada de la referencia $\mathcal{R}$.

Definición

Si el conjunto ordenado de puntos $\{e_0, \ldots e_n, e\}$ satisface la proposición anterior, entonces se dice que $\mathcal{R} = (e_0, \ldots, e_n; e)$ es una referencia proyectiva de $P(V)$.

- Los puntos $e_0, \ldots, e_n$ se denominan puntos base, mientras e se denomina punto de control.
- La base $B = (\overrightarrow{e_0}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ se denomina base normalizada de la referencia $\mathcal{R}$.
- Si $\overrightarrow{v} = \alpha_0 \overrightarrow{e_0} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n}$ y $v = p(\overrightarrow{v})$, entonces $(\alpha_0 : \alpha_1 \cdots : \alpha_n)$ son las coordenadas proyectivas de v respecto a $\mathcal{R}$.

Definición

Si el conjunto ordenado de puntos $\{e_0, \dots e_n, e\}$ satisface la proposición anterior, entonces se dice que $\mathcal{R} = (e_0, \dots, e_n; e)$ es una referencia proyectiva de $P(V)$.

- Los puntos $e_0, \dots, e_n$ se denominan puntos base, mientras e se denomina punto de control.
- La base $B = (\overrightarrow{e_0}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ se denomina base normalizada de la referencia $\mathcal{R}$.
- Si $\overrightarrow{v} = \alpha_0 \overrightarrow{e_0} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n}$ y $v = p(\overrightarrow{v})$, entonces $(\alpha_0 : \alpha_1 \cdots : \alpha_n)$ son las coordenadas proyectivas de v respecto a $\mathcal{R}$.
- Si $\overrightarrow{e_0} = (1, 0, \dots, 0)$, $\overrightarrow{e_1} = (0, 1, 0 \dots, 0), \dots$, $\overrightarrow{e_n} = (0, \dots, 1)$ y $\overrightarrow{e} = (1, 1, 1 \dots, 1)$, entonces $(e_0, \dots e_n; e)$ se conoce como la referencia proyectiva canónica.

Definición

Si el conjunto ordenado de puntos $\{e_0, \ldots e_n, e\}$ satisface la proposición anterior, entonces se dice que $\mathcal{R} = (e_0, \ldots, e_n; e)$ es una referencia proyectiva de $P(V)$.

- Los puntos $e_0, \ldots, e_n$ se denominan puntos base, mientras e se denomina punto de control.
- La base $B = (\overrightarrow{e_0}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ se denomina base normalizada de la referencia $\mathcal{R}$.
- Si $\overrightarrow{v} = \alpha_0 \overrightarrow{e_0} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n}$ y $v = p(\overrightarrow{v})$, entonces $(\alpha_0 : \alpha_1 \cdots : \alpha_n)$ son las coordenadas proyectivas de v respecto a $\mathcal{R}$.
- Si $\overrightarrow{e_0} = (1, 0, \ldots, 0)$, $\overrightarrow{e_1} = (0, 1, 0 \ldots, 0), \ldots$, $\overrightarrow{e_n} = (0, \ldots, 1)$ y $\overrightarrow{e} = (1, 1, 1 \ldots, 1)$, entonces $(e_0, \ldots e_n; e)$ se conoce como la referencia proyectiva canónica.
- Si no se especifica lo contrario, asumiremos que trabajamos con la referencia proyectiva canónica.

Proposición

Dos bases $B = (\overrightarrow{e_0}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ y $B' = (\overrightarrow{e_0'}, \ldots, \overrightarrow{e_n'})$ son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$ si y solo si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i} = \lambda \overrightarrow{e_i'}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Proposición

Dos bases $B = (\overrightarrow{e_0}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ y $B' = (\overrightarrow{e'_0}, \ldots, \overrightarrow{e'_n})$ son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$ si y solo si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i} = \lambda \overrightarrow{e'_i}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Demostración

Por definición, si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i} = \lambda \overrightarrow{e'_i}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, entonces B y B' son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$.

Proposición

Dos bases $B = (\overrightarrow{e_0}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ y $B' = (\overrightarrow{e'_0}, \ldots, \overrightarrow{e'_n})$ son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$ si y solo si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i} = \lambda \overrightarrow{e'_i}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Demostración

Por definición, si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i} = \lambda \overrightarrow{e'_i}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, entonces B y B' son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$.

Vamos a demostrar el recíproco.

Proposición

Dos bases $B = (\overrightarrow{e_0}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ y $B' = (\overrightarrow{e'_0}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$ si y solo si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i} = \lambda \overrightarrow{e'_i}$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

Demostración

Por definición, si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i} = \lambda \overrightarrow{e'_i}$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, entonces B y B' son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$.

Vamos a demostrar el recíproco. Si $B = (\overrightarrow{e_0}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ y $B' = (\overrightarrow{e'_0}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ son bases normalizadas de $\mathcal{R}$, entonces $p(\overrightarrow{e_i}) = p(\overrightarrow{e'_i})$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ y $p(\overrightarrow{e_0} + \dots + \overrightarrow{e_n}) = p(\overrightarrow{e'_0} + \dots + \overrightarrow{e'_n})$.

Proposición

Dos bases $B = (\overrightarrow{e_0}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ y $B' = (\overrightarrow{e_0'}, \ldots, \overrightarrow{e_n'})$ son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$ si y solo si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i} = \lambda \overrightarrow{e_i'}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Demostración

Por definición, si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i} = \lambda \overrightarrow{e_i'}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, entonces B y B' son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$.
Vamos a demostrar el recíproco. Si $B = (\overrightarrow{e_0}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ y $B' = (\overrightarrow{e_0'}, \ldots, \overrightarrow{e_n'})$ son bases normalizadas de $\mathcal{R}$, entonces $p(\overrightarrow{e_i}) = p(\overrightarrow{e_i'})$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ y $p(\overrightarrow{e_0} + \cdots + \overrightarrow{e_n}) = p(\overrightarrow{e_0'} + \cdots + \overrightarrow{e_n'})$. De ahí que existen escalares no nulos $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ y λ tales que $\overrightarrow{e_i} = \lambda_i \overrightarrow{e_i'}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, y $\overrightarrow{e_0} + \cdots + \overrightarrow{e_n} = \lambda(\overrightarrow{e_0'} + \cdots + \overrightarrow{e_n'})$.

Proposición

Dos bases $B=(\overrightarrow{e_0},\dots,\overrightarrow{e_n})$ y $B'=(\overrightarrow{e'_0},\dots,\overrightarrow{e'_n})$ son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$ si y solo si existe un escalar $\lambda\neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i}=\lambda\overrightarrow{e'_i}$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$.

Demostración

Por definición, si existe un escalar $\lambda\neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i}=\lambda\overrightarrow{e'_i}$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$, entonces B y B' son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$.
Vamos a demostrar el recíproco. Si $B=(\overrightarrow{e_0},\dots,\overrightarrow{e_n})$ y $B'=(\overrightarrow{e'_0},\dots,\overrightarrow{e'_n})$ son bases normalizadas de $\mathcal{R}$, entonces $p(\overrightarrow{e_i})=p(\overrightarrow{e'_i})$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$ y $p(\overrightarrow{e_0}+\dots+\overrightarrow{e_n})=p(\overrightarrow{e'_0}+\dots+\overrightarrow{e'_n})$. De ahí que existen escalares no nulos $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ y λ tales que $\overrightarrow{e_i}=\lambda_i\overrightarrow{e'_i}$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$, y $\overrightarrow{e_0}+\dots+\overrightarrow{e_n}=\lambda(\overrightarrow{e'_0}+\dots+\overrightarrow{e'_n})$.
Así, $\lambda_0\overrightarrow{e'_0}+\dots+\lambda_n\overrightarrow{e'_n}=\lambda(\overrightarrow{e'_0}+\dots+\overrightarrow{e'_n})$.

Proposición

Dos bases $B = (\overrightarrow{e_0}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ y $B' = (\overrightarrow{e'_0}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$ si y solo si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i} = \lambda \overrightarrow{e'_i}$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

Demostración

Por definición, si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{e_i} = \lambda \overrightarrow{e'_i}$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, entonces B y B' son bases normalizadas de la misma referencia proyectiva $\mathcal{R}$.

Vamos a demostrar el recíproco. Si $B = (\overrightarrow{e_0}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ y $B' = (\overrightarrow{e'_0}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ son bases normalizadas de $\mathcal{R}$, entonces $p(\overrightarrow{e_i}) = p(\overrightarrow{e'_i})$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ y $p(\overrightarrow{e_0} + \cdots + \overrightarrow{e_n}) = p(\overrightarrow{e'_0} + \cdots + \overrightarrow{e'_n})$. De ahí que existen escalares no nulos $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ y λ tales que $\overrightarrow{e_i} = \lambda_i \overrightarrow{e'_i}$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, y $\overrightarrow{e_0} + \cdots + \overrightarrow{e_n} = \lambda(\overrightarrow{e'_0} + \cdots + \overrightarrow{e'_n})$.

Así, $\lambda_0 \overrightarrow{e'_0} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e'_n} = \lambda(\overrightarrow{e'_0} + \cdots + \overrightarrow{e'_n})$. Como B' es una base, $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = (\lambda, \dots, \lambda)$, lo que implica que $\lambda_i = \lambda$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. $\square$

Proposición

Dada una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ de $P(V)$ y un vector no nulo $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, existe un único punto $x \in P(V)$ con coordenadas proyectivas $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ respecto a $\mathcal{R}$.

Proposición

Dada una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ de $P(V)$ y un vector no nulo $(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, existe un único punto $x \in P(V)$ con coordenadas proyectivas $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ respecto a $\mathcal{R}$.

Demostración

La prueba de la existencia es inmediata.

Proposición

Dada una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ de $P(V)$ y un vector no nulo $(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, existe un único punto $x \in P(V)$ con coordenadas proyectivas $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ respecto a $\mathcal{R}$.

Demostración

La prueba de la existencia es inmediata. Supongamos que hay dos puntos $x = p(\overrightarrow{x})$ y $x' = p(\overrightarrow{x'})$ con las mismas coordenadas proyectivas $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ con respecto a $\mathcal{R}$.

Proposición

Dada una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ de $P(V)$ y un vector no nulo $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, existe un único punto $x \in P(V)$ con coordenadas proyectivas $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ respecto a $\mathcal{R}$.

Demostración

La prueba de la existencia es inmediata. Supongamos que hay dos puntos $x = p(\overrightarrow{x})$ y $x' = p(\overrightarrow{x'})$ con las mismas coordenadas proyectivas $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ con respecto a $\mathcal{R}$. Sean $(\overrightarrow{e_0}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ y $(\overrightarrow{e'_0}, \ldots, \overrightarrow{e'_n})$ dos bases normalizadas asociadas a $\mathcal{R}$ tales que $\overrightarrow{x} = x_0 \overrightarrow{e_0} + \cdots + x_n \overrightarrow{e_n}$ y $\overrightarrow{x'} = x_0 \overrightarrow{e'_0} + \cdots + x_n \overrightarrow{e'_n}$.

Proposición

Dada una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ de $P(V)$ y un vector no nulo $(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$, existe un único punto $x\in P(V)$ con coordenadas proyectivas $(x_0:x_1:\cdots:x_n)$ respecto a $\mathcal{R}$.

Demostración

La prueba de la existencia es inmediata. Supongamos que hay dos puntos $x=p(\overrightarrow{x})$ y $x'=p(\overrightarrow{x'})$ con las mismas coordenadas proyectivas $(x_0:x_1:\cdots:x_n)$ con respecto a $\mathcal{R}$. Sean $(\overrightarrow{e_0},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ y $(\overrightarrow{e'_0},\ldots,\overrightarrow{e'_n})$ dos bases normalizadas asociadas a $\mathcal{R}$ tales que $\overrightarrow{x}=x_0\overrightarrow{e_0}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n}$ y $\overrightarrow{x'}=x_0\overrightarrow{e'_0}+\cdots+x_n\overrightarrow{e'_n}$. Según la proposición anterior, existe $\lambda\neq 0$ tal que

$$\overrightarrow{x'}=x_0\overrightarrow{e'_0}+\cdots+x_n\overrightarrow{e'_n}=\lambda(x_0\overrightarrow{e_0}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n})=\lambda\overrightarrow{x}.$$

Proposición

Dada una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ de $P(V)$ y un vector no nulo $(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$, existe un único punto $x\in P(V)$ con coordenadas proyectivas $(x_0:x_1:\cdots:x_n)$ respecto a $\mathcal{R}$.

Demostración

La prueba de la existencia es inmediata. Supongamos que hay dos puntos $x=p(\overrightarrow{x})$ y $x'=p(\overrightarrow{x'})$ con las mismas coordenadas proyectivas $(x_0:x_1:\cdots:x_n)$ con respecto a $\mathcal{R}$. Sean $(\overrightarrow{e_0},\dots,\overrightarrow{e_n})$ y $(\overrightarrow{e'_0},\dots,\overrightarrow{e'_n})$ dos bases normalizadas asociadas a $\mathcal{R}$ tales que $\overrightarrow{x}=x_0\overrightarrow{e_0}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n}$ y $\overrightarrow{x'}=x_0\overrightarrow{e'_0}+\cdots+x_n\overrightarrow{e'_n}$. Según la proposición anterior, existe $\lambda\neq 0$ tal que

$$\overrightarrow{x'}=x_0\overrightarrow{e'_0}+\cdots+x_n\overrightarrow{e'_n}=\lambda(x_0\overrightarrow{e_0}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n})=\lambda\overrightarrow{x}.$$

Por lo tanto, $x=x'$.

Ejemplo

Sea $\mathbb{L} = P(E)$ una recta de $P(\mathbb{R}^3)$ dada por la referencia proyectiva

$$\mathcal{R} = ((2:0:1),(0:1:1);(2:1:2)).$$

Nótese que $((2,0,1),(0,1,1))$ es una base normalizada de $\mathcal{R}$. En consecuencia, el punto $e_0 = (2:0:1)$ tiene coordenadas $(1:0)$ respecto a $\mathcal{R}$, el punto $e_1 = (0:1:1)$ tiene coordenadas $(0:1)$, mientras $e = (2:1:2)$ tiene coordenadas $(1:1)$.
En resumen, todo punto de $\mathbb{L}$ con coordenadas proyectivas $(x:y:z)$ en $P(\mathbb{R}^3)$, tiene coordenadas $(\alpha_0 : \alpha_1)$ con respecto a $\mathcal{R}$, donde

$$(x,y,z) = \alpha_0(2,0,1) + \alpha_1(0,1,1).$$

Por ejemplo, el punto de $\mathbb{L}$ con coordenadas proyectivas $(4/3 : 1/3 : 1)$ en $P(\mathbb{R}^3)$ tiene coordenadas $(2/3 : 1/3)$ con respecto a $\mathcal{R}$.

Ejercicio

Sea $\mathbb{L}$ una recta de $P(\mathbb{R}^3)$ dada por la referencia proyectiva

$$\mathcal{R} = ((1:1:0),(1:2:0);(0:1:0)).$$

Determina las coordenadas del punto $(1:0:0) \in \mathbb{L}$, con respecto a $\mathcal{R}$

Ejercicio

Sea $\mathbb{L}$ una recta de $P(\mathbb{R}^3)$ dada por la referencia proyectiva

$$\mathcal{R} = ((1:1:0),(1:2:0);(0:1:0)).$$

Determina las coordenadas del punto $(1:0:0) \in \mathbb{L}$, con respecto a $\mathcal{R}$

Solución

Sea $\mathbb{L} = P(E)$. Observe que $((1,1,0),(1,2,0))$ no es una base normalizada de $\mathcal{R}$, ya que $(1,1,0)+(1,2,0) \neq \lambda(0,1,0)$ para todo λ.
Vamos a determinar una base $(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1})$ de E, que es normalizada respecto a $\mathcal{R}$, donde $\overrightarrow{e_0} = \lambda_0(1,1,0)$, $\overrightarrow{e_1} = \lambda_1(1,2,0)$, con $\lambda_0\lambda_1 \neq 0$, y

$$(0,1,0) = \lambda_0(1,1,0) + \lambda_1(1,2,0).$$

Por lo tanto, $\lambda_0 = -1$ y $\lambda_1 = 1$, lo que implica que nuestra base normalizada es $((-1,-1,0),(1,2,0))$. De ahí que todo punto de coordenadas homogéneas $(x:y:z) \in \mathbb{L}$, tiene coordenadas $(\alpha_0 : \alpha_1)$ con respecto a $\mathcal{R}$, donde $(x,y,z) = \alpha_0(-1,-1,0) + \alpha_1(1,2,0)$. En particular, $(1:0:0)$ tiene coordenadas $(-2:-1)$.

Ejemplo

Tres puntos diferentes a, b y c de una recta proyectiva, siempre determinan una referencia proyectiva $(a, b; c)$. Analiza los detalles.

Ver otros ejemplos en los apuntes...