Resolució de problemes

2a. Fent servir la definició de límit, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n \tag{1}$$

Per a què Eq. (1) sigui certa cal que els límits de a_n i b_n existeixin, ja sigui a un valor finit o a infinit.

De fet, aquest propietat només és certa en aquests cassos:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}\\ \lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty\\ \lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}\\ \lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \pm \lim_{n\to\infty} b_n \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty\\ \lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}(+\infty)+(+\infty) & = & +\infty\\ (+\infty)-(-\infty) & = & +\infty\\ (-\infty)+(-\infty) & = & -\infty\\ (-\infty)-(+\infty) & = & -\infty\end{array}\right. \tag{5}$$

Els cassos $\infty - \infty$ són indeterminats.

Sigui el cas en que tots dos límits existeixen. Aleshorem, sabem que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon_1 > 0 \;\; \exists N_1 \in \mathbb{N}: \;\; \forall n \geqslant N_1 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon_1 \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \iff \forall\varepsilon_2 > 0 \;\; \exists N_2 \in \mathbb{N}: \;\; \forall n \geqslant N_2 \;\Rightarrow\; |b_n - b| < \varepsilon_2 \tag{7}$$

Volem demostrar primer que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \tag{8}$$

Per a tot $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ tenim, aplicant la desigualtat triangular,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{9}$$

Per a qualsevol $\varepsilon > 0$ puc seleccionar $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ i $N = \max(N_1, N_2)$. Per tant,

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \;\; \forall n \geqslant N \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon \qquad \square \tag{10}$$

Per a demostrar

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b \tag{11}$$

només cal adonar-se que

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) + (b - b_n)| \leqslant |a_n - a| + |b - b_n| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{12}$$

2b. Fent servir la definició de límit, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}\,, \quad b \neq 0 \tag{13}$$

Per fer-ho, cal demostrar primer el límit del recíproc és el recíproc del límit, i que el límit del producte és el producte de límits.

2b-1. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}\,, \quad a \neq 0 \tag{14}$$

Sabem que

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \;\forall n \geqslant N \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon \tag{15}$$

Volem analitzar

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n|\,|a|} \tag{16}$$

Utilitzant la desigualtat de la diferència, $|x - y| \geqslant \big|\,|x| - |y|\,\big|$, resulta immediat veure que el límit del valor absolut és el valor absolut del límit

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a| \tag{17}$$

ja que

$$\big|\,|a_n| - |a|\,\big| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon \tag{18}$$

Per tant,

$$\text{si } \varepsilon \leqslant \frac{|a|}{2} \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \;\forall n \geqslant N \;\Rightarrow\; \big|\,|a_n| - |a|\,\big| < \frac{|a|}{2} \tag{19}$$

Això implica

$$|a| - \frac{|a|}{2} < |a_n| < |a| + \frac{|a|}{2} \tag{20}$$

o equivalentment

$$\frac{|a|}{2} < |a_n| < \frac{3|a|}{2} \tag{21}$$

Substituïnt en Eq. (16) i utilitzant que a és el límit de a_n, Eq. (15), queda

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n|\,|a|} < \frac{2}{|a|^2}\,|a_n - a| < \frac{2}{|a|^2}\,\varepsilon \equiv \varepsilon' \tag{22}$$

Si $\varepsilon > \dfrac{|a|}{2}$ puc utilitzar la mateixa N que per a $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$. La conclusió és que

$$\forall\varepsilon' > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \;\forall n \geqslant N \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon' \tag{23}$$

on el valor de N es troba utilitzant $\varepsilon = \dfrac{|a|^2\,\varepsilon'}{2}$ en Eq. (15). $\square$

2b-2. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = a\, b \tag{24}$$

Donat que

$$a_n\, b_n - a\, b = a_n\, b_n - a\, b_n + a\, b_n - a\, b = b_n\,(a_n - a) + a\,(b_n - b) \tag{25}$$

i que $|b_n| \leqslant B$ per tot n ja que tota successió convergent és fitada, tenim

$$\begin{aligned} |a_n\, b_n - a\, b| &= |b_n\,(a_n - a) + a\,(b_n - b)| \\ &\leqslant |b_n|\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| \\ &\leqslant B\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| \end{aligned} \tag{26}$$

on s'ha utlitzat la desigualtat triangular. Volem

$$B\,|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{27}$$

$$|a|\,|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{28}$$

Per tant, seleccionem

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2\,B} \tag{29}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2\,|a|} \tag{30}$$

que, segons les Eqs. (6)–(7), ens permeten trobar uns valors N_1 i N_2 corresponents. Aleshores, $\forall n \geqslant N \equiv \max(N_1, N_2)$ queda

$$\begin{aligned} |a_n\, b_n - a\, b| &\leqslant B\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| \\ &< B\,\varepsilon_1 + |a|\,\varepsilon_2 \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \tag{31}$$

i així tenim

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \;\forall n \geqslant N \;\Rightarrow\; |a_n\, b_n - a\, b| < \varepsilon \qquad \square \tag{32}$$

2b-3. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}\,, \quad b \neq 0 \tag{33}$$

Aquesta demostració només requereix aplicar els resultats anteriors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \, \frac{1}{b_n} \right) = \lim_{n\to\infty} a_n \, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a \, \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \tag{34}$$