Derivada d'una funció

Àlex Arenas, Sergio Gómez

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

Derivada d’una funció

- Definicions
  - Derivada, interpretació geomètrica, derivades d’ordre superior, notació de Leibnitz, classes $\mathcal{C}^n(I)$
- Teoremes
  - Teorema de continuïtat

Derivada d'una funció

Definicions

- Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real definida en un interval obert I

- f és diferenciable (o derivable) en $a \in I$ si existeix el límit

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Derivada d’una funció

Definicions

- Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real definida en un interval obert I

- f és diferenciable (o derivable) en $a \in I$ si existeix el límit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

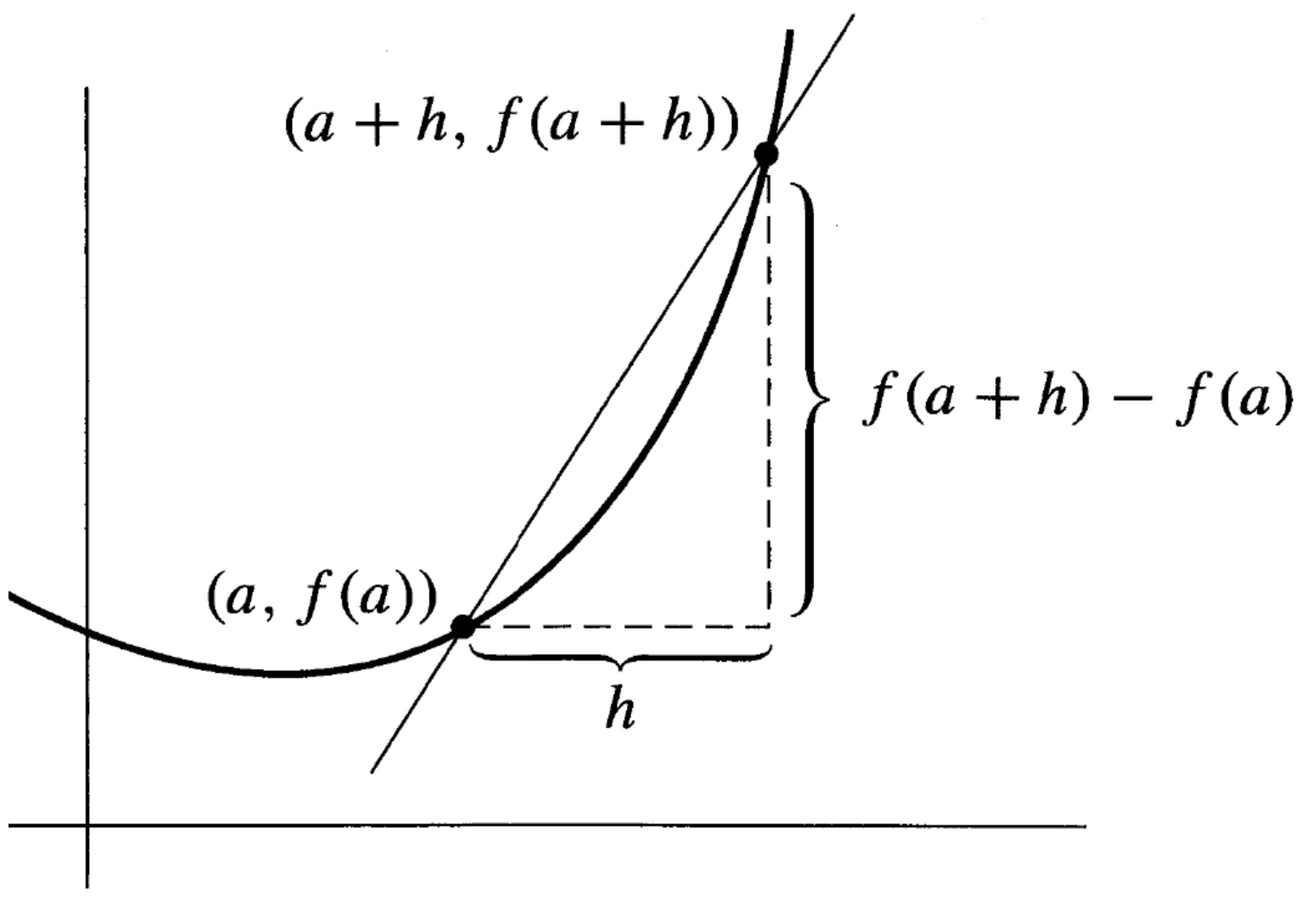
- El valor d’aquest límit s’anomena la derivada de f en a, i s’escriu $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

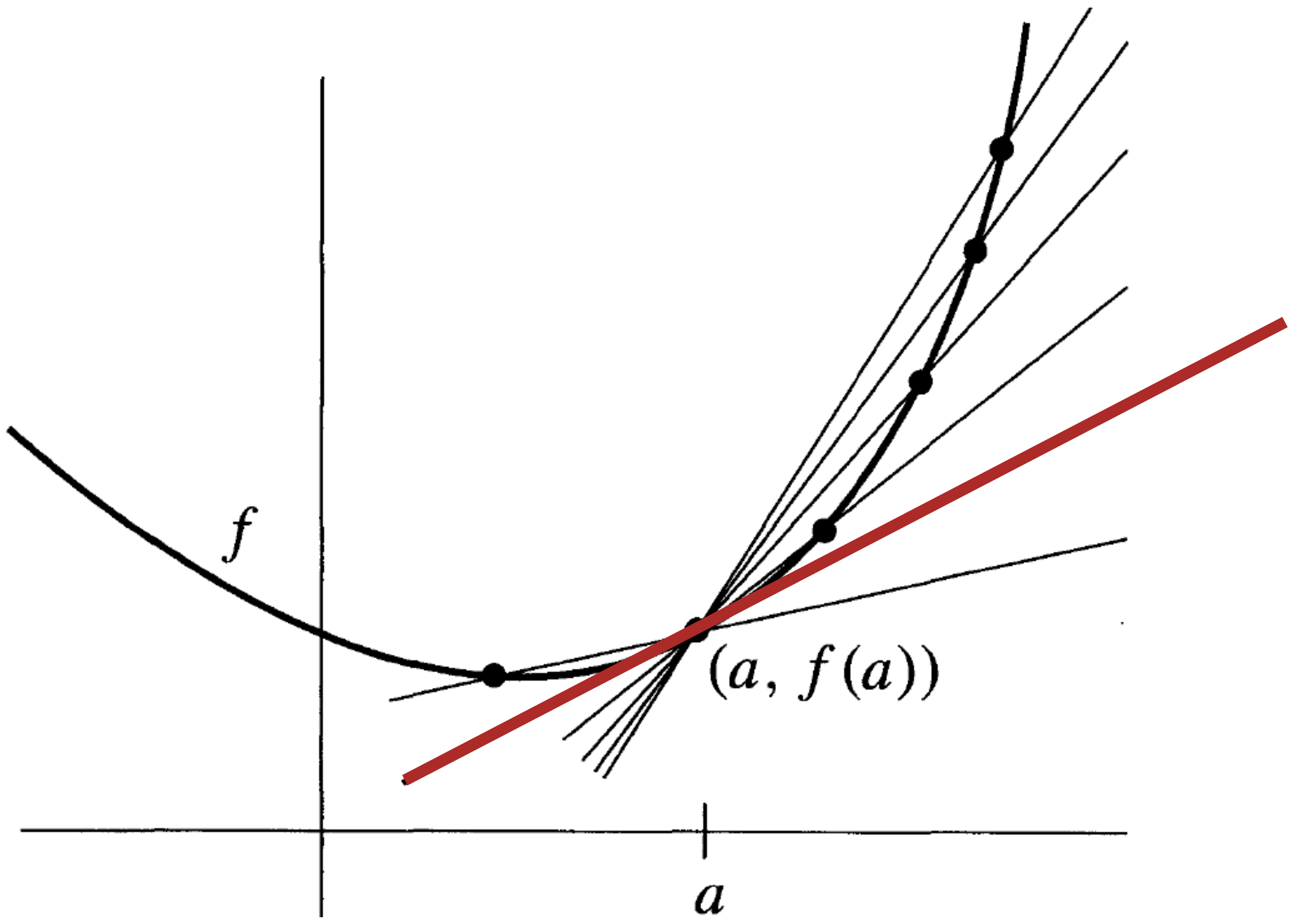
- Derivada d’una funció
  - Definicions
    - f és diferenciable (o derivable) en I si és diferenciable $\forall a \in I$

- Interpretació geomètrica
  - La derivada $f'(a)$ és el pendent de la recta tangent en a
    - El pendent d'una recta secant és

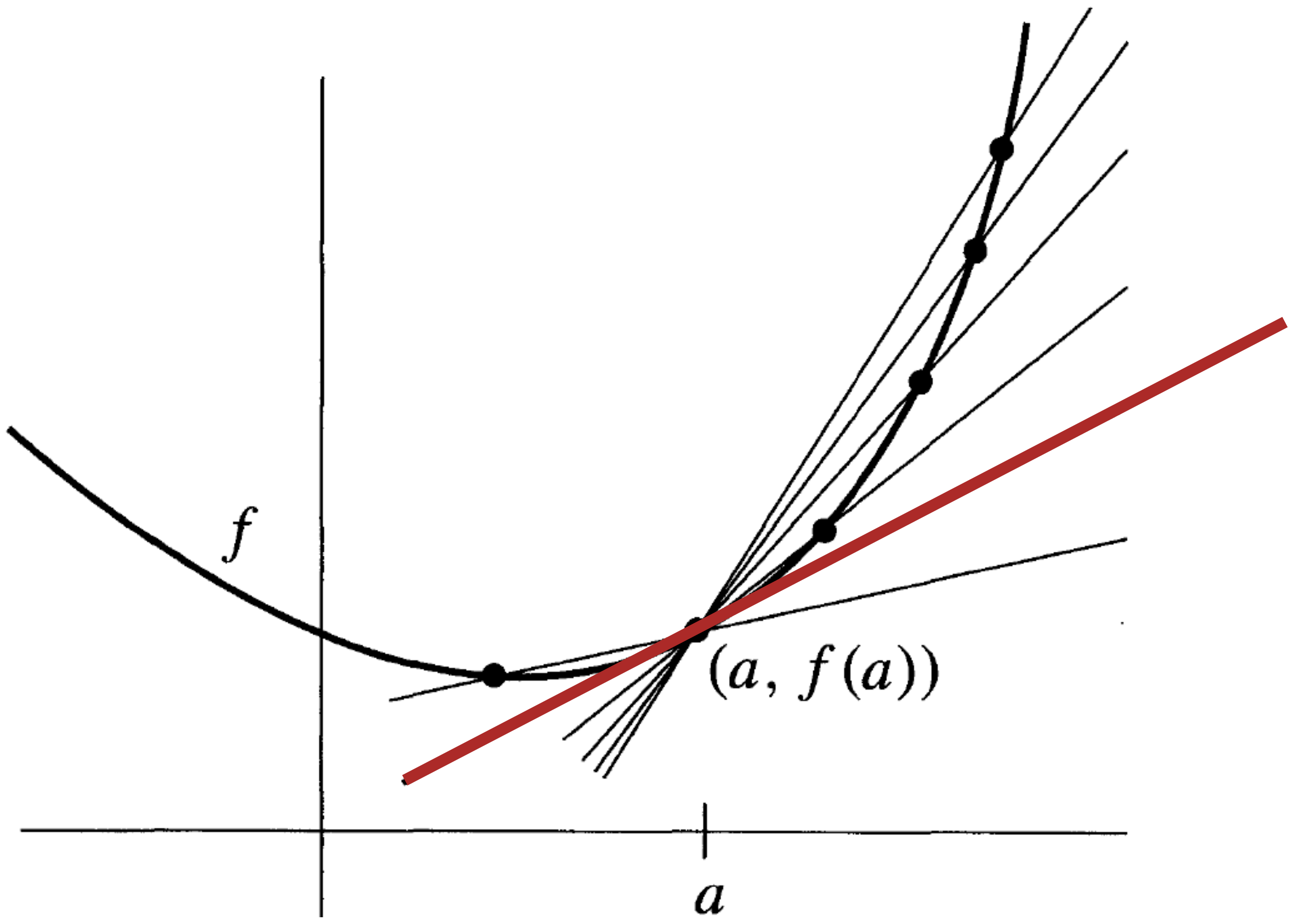
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



- Interpretació geomètrica
  - La derivada $f'(a)$ és el pendent de la recta tangent en a
    - Les secants es converteixen en la recta tangent quan $h \to 0$



- Interpretació geomètrica
  - La derivada $f'(a)$ és el pendent de la recta tangent en a
    - Equació de la recta tangent: $y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$



Exemples

- Si $f(x) = c$, amb $c \in \mathbb{R}$, aleshores $f'(a) = 0$ per tot $a \in \mathbb{R}$

Exemples

- Si $f(x) = c$, amb $c \in \mathbb{R}$, aleshores $f'(a) = 0$ per tot $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = 0$$

Exemples

- Si $f(x) = c$, amb $c \in \mathbb{R}$, aleshores $f'(a) = 0$ per tot $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = 0$$

- Si $f(x) = x$, aleshores $f'(a) = 1$ per tot $a \in \mathbb{R}$

Exemples

- Si $f(x) = c$, amb $c \in \mathbb{R}$, aleshores $f'(a) = 0$ per tot $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = 0$$

- Si $f(x) = x$, aleshores $f'(a) = 1$ per tot $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

Exemples

- Si $f(x) = c$, amb $c \in \mathbb{R}$, aleshores $f'(a) = 0$ per tot $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = 0$$

- Si $f(x) = x$, aleshores $f'(a) = 1$ per tot $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

- Si $f(x) = x^2$, aleshores $f'(a) = 2a$ per tot $a \in \mathbb{R}$

Exemples

- Si $f(x) = c$, amb $c \in \mathbb{R}$, aleshores $f'(a) = 0$ per tot $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = 0$$

- Si $f(x) = x$, aleshores $f'(a) = 1$ per tot $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

- Si $f(x) = x^2$, aleshores $f'(a) = 2a$ per tot $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2\,a$$

Teorema

- Si f és diferenciable en a, aleshores f és contínua en a

Demostració

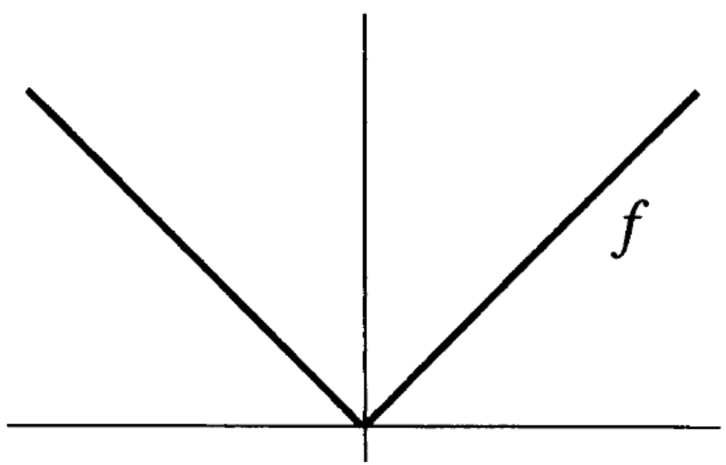
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

$$= f(a) + 0 \cdot f'(a) = f(a)$$

Observació

- El contrari no és cert: una funció pot ser contínua i no tenir derivada

- Contraexemple: la funció $f(x) = |x|$ és contínua però no és diferenciable en $a = 0$ (els límits laterals són diferents)

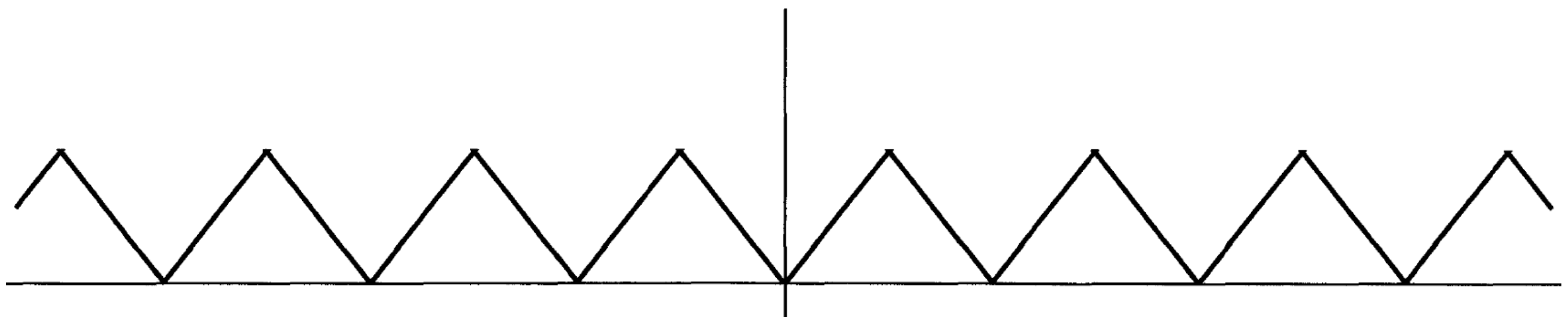


$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

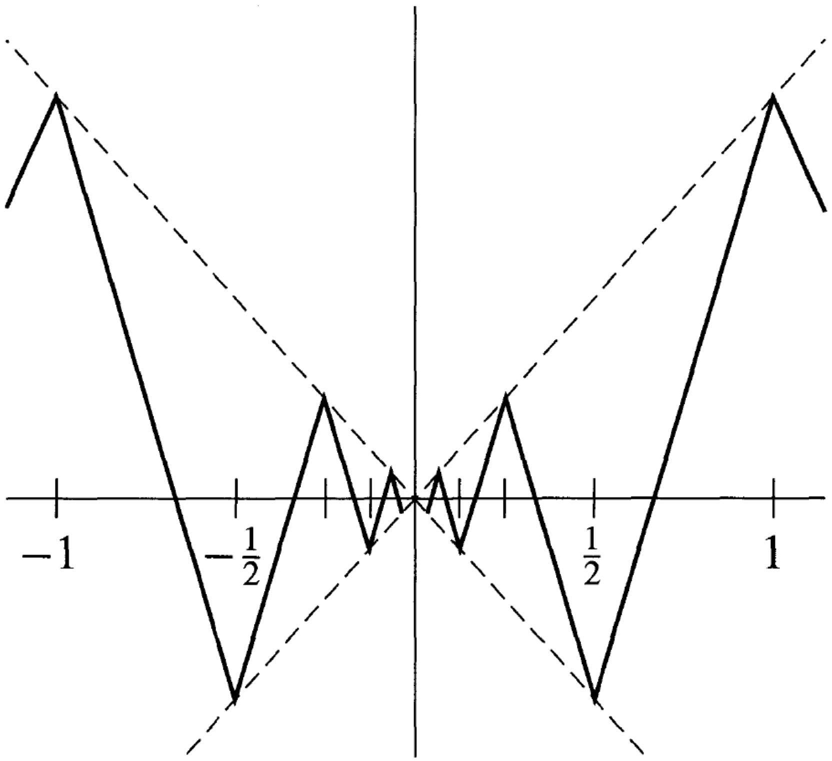
Observació

- El contrari no és cert: una funció pot ser contínua i no tenir derivada
- Contraexemple: funció contínua en $\mathbb{R}$ però amb infinits punts on no és diferenciable



Observació

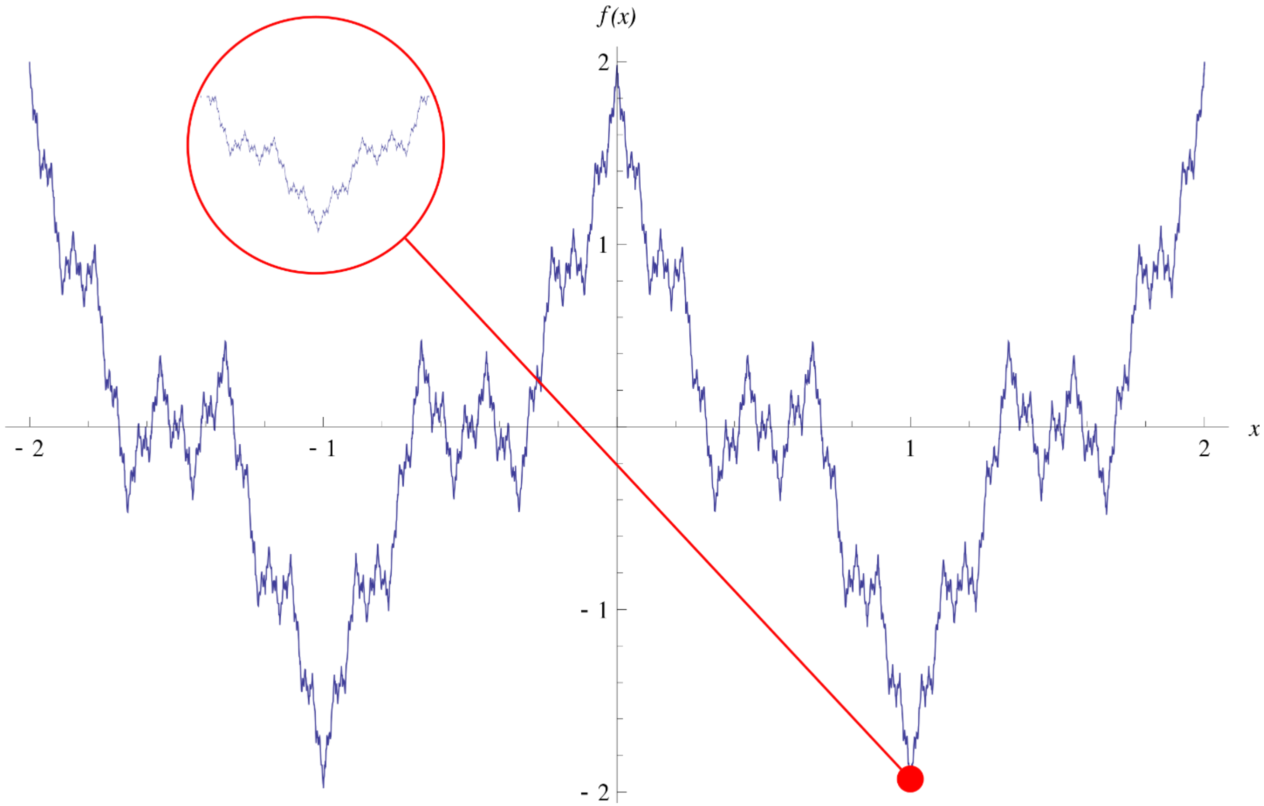
- El contrari no és cert: una funció pot ser contínua i no tenir derivada
- Contraexemple: funció contínua en $\mathbb{R}$ però amb infinits punts on no és diferenciable en l’interval $(0,1)$



Observació

- El contrari no és cert: una funció pot ser contínua i no tenir derivada

- Contraexemple: la funció de Weierstrass és contínua en $\mathbb{R}$ però no és diferenciable en cap punt



Definicions

- Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable, i sigui f' la seva derivada
- La derivada de f' s'anomena segona derivada de f, i es representa f''

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

- De forma equivalent es defineixen les derivades d'ordre superior
  - Segona derivada f''
  - Tercera derivada f'''
  - Quarta derivada $f^{(iv)}$
  - Derivada n-èssima $f^{(n)}$

Definicions

- Definició recursiva de les derivades d'ordre superior
  - $f^{(0)} \equiv f$
  - $f^{(n)} \equiv (f^{(n-1)})'$, per $n \geq 1$

Definicions

- Notació de Leibnitz

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

- Exemple
  - $f(x) = x^3$
  - $f'(x) = 3x^2$
  - $f''(x) = 6x$
  - $f'''(x) = 6$
  - $f^{(4)}(x) = 0$
  - $f^{(n)}(x) = 0$ per tot $n \geq 4$

Definicions

- Sigui $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real definida en un interval obert I

- Si f és contínua en I, f és de classe $\mathcal{C}^0(I)$, i s'escriu $f \in \mathcal{C}^0(I)$
- Si f és derivable i f' és contínua en I, f és de classe $\mathcal{C}^1(I)$, i s'escriu $f \in \mathcal{C}^1(I)$
- Si existeix $f^{(n)}$ i és contínua en I, f és de classe $\mathcal{C}^n(I)$, i s'escriu $f \in \mathcal{C}^n(I)$
- Si f és infinitament derivable en I, f és de classe $\mathcal{C}^\infty(I)$, i s'escriu $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$