Problemes: Aritmètica I

I.1. Trobeu el quocient i el residu per a les següents parelles de valors de dividends i divisors.

- 9 i 1
- 98 i 12
- 987 i 123
- 9876 i 1234
- 98765 i 12345
- 987654 i 123456
- 9876543 i 1234567
- 98765432 i 12345678
- 987654321 i 123456789

I.2. Comproveu que 12345679 és un divisor de 111111111. Deduïu que 12345679 és un divisor de 222222222, 333333333, 444444444, etc.

I.3. Calculeu $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\dots\cdot(1+x^{2^n})$.

I.4. Demostreu que, si $x \neq 1$, aleshores, $\frac{x^m-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}$.

I.5. Demostreu que, si m és senar, $\frac{x^m+1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{m-2} + x^{m-1}$.

I.6. Demostreu que si $2^m + 1$ és primer, aleshores m ha de ser una potència de 2.

I.7. Demostreu que per a tot $n \geq 1$ es compleix

- $6 \mid n(n+1)(n+2)$
- $30 \mid n^5 - n$
- $13 \mid 4^{2n+1} + 3^{n+2}$

I.8. Demostreu que $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ sempre és un nombre enter, per tot $n \in \mathbb{Z}$.

I.9. A l'anell dels enters demostreu

- Si $m^\alpha \mid a$ i $m^\beta \mid b$, llavors $m^{\alpha+\beta} \mid ab$
- Si $m^\alpha \mid a$; $m^\beta \mid b$ i $\alpha < \beta$, llavors $m^\alpha \mid a \pm b$
- Si $m|a$ i $n|a$, i m i n són primers entre ells, llavors $mn|a$

I.10. Quants divisors té 945? Comproveu-ho amb `sage`.

I.11. Demostreu que tot enter $n > 1$ no primer té un divisor positiu diferent d'1 i més petit o igual que $\sqrt{n}$.

I.12. Demostreu que $mcd(a,b) = mcd(a-b,b)$ per tota parella d'enters a i b.

I.13. Siguin a, b, c enters.

(a) Demostreu que, si $a \mid b$, aleshores $ac \mid bc$.

(b) Demostreu que, si $c \mid a$ i $c \mid b$, aleshores $a \mid b$ implica que $\frac{a}{c} \mid \frac{b}{c}$.

I.14. Siguin a, b dos enters i siguin $m = \mathrm{mcd}(a, b)$, $M = \mathrm{mcm}(a, b)$.

(a) Demostreu que, si c és un múltiple comú de a i b, aleshores $M \mid c$.

(b) Demostreu que, si d és un divisor comú de a i b, aleshores $d \mid m$.

I.15. Siguin a, b dos enters i siguin $m = \mathrm{mcd}(a, b)$, $M = \mathrm{mcm}(a, b)$. Demostreu que $m \cdot M = a \cdot b$. Indicació: Podeu utilitzar els dos exercicis anteriors.

I.16. Siguin a, b, c enters amb $c > 0$.

(a) Demostreu que $\mathrm{mcd}(ac, bc) = c\,\mathrm{mcd}(a, b)$.

(b) Demostreu que, si $c \mid a$ i $c \mid b$, aleshores $\mathrm{mcd}(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = \frac{\mathrm{mcd}(a,b)}{c}$.

I.17. Demostreu que no existeixen enters a i b tals que el seu màxim comú divisor és 7 i $a+b = 100$. D'altra banda, existeixen infinites parelles a, b tals que el seu màxim comú divisor és 5 i $a + b = 100$.

I.18. Considerem els nombres de Fibonacci:

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5$, etc.,

definits per la recurrència $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ per $i \geq 2$.

(a) Demostreu que qualsevol parella de nombres de Fibonacci consecutius són coprimers.

(b) Volem calcular la identitat de Bézout de dos nombres de Fibonacci consecutius F_{i-1}, F_i, per $i \geq 5$.

- Preneu un exemple particular de dos nombres de Fibonacci consecutius F_{i-1}, F_i amb $i \geq 7$ i calculeu-ne la identitat de Bézout.
- Considerem el cas general de dos nombres de Fibonacci consecutius F_{i-1}, F_i amb $i \geq 5$. Qui són els quocients i els residus de la taula de divisions successives en el cas general?
- Quina és la identitat de Bézout de dos nombres de Fibonacci consecutius F_{i-1}, F_i, per $i \geq 5$?

I.19. (a) Busqueu la definició de nombres primers bessons

(b) Construïu una funció amb `sage` que donat n retorni totes les parelles de nombres primers bessons menors que n.

I.20. (a) Escriviu una rutina que, donats un nombre enter n i una base b, retorni la llista de les xifres de n en base b.

(b) Construïu la funció inversa de l'anterior que, donada la base b i la llista de les xifres de n en base b, retorni n en base decimal.

(c) Utilitzant les funcions anteriors, construïu una funció que, donats dos enters b_1 i b_2 i la llista de les xifres d'un nombre n en base b_1, retorni la llista de les xifres de n en base b_2.

I.21. Sigui n un enter positiu,

(a) Proveu que existeixen enters a, b, c tals que $0 \leq a < b < c$ i

$$n = \binom{a}{1} + \binom{b}{2} + \binom{c}{3}.$$

(b) Proveu que els enters a, b, c tals que $0 \leq a < b < c$ i $n = \binom{a}{1} + \binom{b}{2} + \binom{c}{3}$ són únics. Indicació: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$.

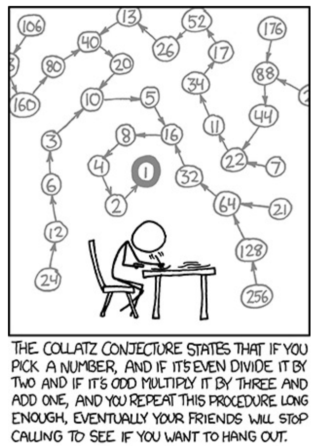
(c) Construïu una rutina que, donat n, retorni la llista dels enters $[a, b, c]$.

(d) Construïu la rutina inversa de l'anterior.

I.22. (a) La conjectura de Collatz tracta de les successions següents. Donat un enter positiu n_0 com a valor inicial, es defineix

$$n_{i+1} = \begin{cases} (3n_i + 1)/2 & \text{si } n_i \text{ és senar} \\ n_i/2 & \text{si } n_i \text{ és parell} \end{cases}$$

Per exemple, per $n_0 = 7$, la seqüència és $7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, \ldots$. Òbviament, si la seqüència arriba a 1, els valors $1, 2, 1, 2, \ldots$ es repetiran indefinidament. La conjectura és *Per tot enter positiu n_0 existeix un k tal que $n_k = 1$.*



(b) Construïu una funció amb `sage` que, donat n_0, retorni la successió dels n_i fins el terme $n_k = 1$. Apliqueu-la als nombres 27, 54, 83, 142, 143, 145, 711, 7111.

(c) Escriviu una altra funció que, donat n_0, calculi el nombre d'iteracions que cal fer fins arribar a 1. Apliqueu-la a $2^{100} - 1$ i a $25 \cdot 4^{100} + 1$.

(d) Sigui $\sigma(n)$ el nombre d'iteracions necessàries per arribar a 1 partint de n. Demostreu que

$$\sigma(n2^k) = \sigma(n) + k.$$

Obteniu expressions per $\sigma(n2^k - 1)$ i per $\sigma(n4^k + 1)$ que permetin abreujar els càlculs de l'apartat anterior.

I.23. (a) Els nombres d'Ulam es defineixen de la manera següent:

- $U_1 = 1$
- $U_2 = 2$
- U_i és el menor enter més gran que U_{i-1} i tal que pot ser escrit com $U_j + U_k$ per una *única* parella i, j amb $1 \leq i < j \leq i - 1$.

Els primers nombres d'Ulam són $1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13$.

(b) Demostreu que hi ha un nombre infinit de nombres d'Ulam.

(c) Construïu una funció amb `sage` que donat un enter n retorni els primers n nombres d'Ulam.

(d) Demostreu que a partir de cert punt no hi pot haver tres nombres consecutius que siguin, tots tres, nombres d'Ulam. Quin és el punt a partir del qual es compleix?

(e) Demostreu que donats 5 nombres consecutius, com a molt dos d'ells poden ser d'Ulam.

I.24. Diem que un conjunt de la forma $\mathbb{N}_0 \setminus \{a_1, \ldots, a_g\}$ amb $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_g$ és un semigrup numèric si és tancat per la suma. Diem que el *gènere* del semigrup és g i, si $g > 0$, el *conductor* és $c = a_g + 1$.

(a) Quin és el nombre n_0 de semigrups de gènere 0? i el nombre n_1 de semigrups de gènere 1? I el nombre n_2 de semigrups de gènere 2?

(b) Demostreu que per tot semigrup numèric de gènere positiu es compleix $c \leq 2g$.

(c) Construïu una funció amb `sage` que donat un enter g calculi el nombre n_g de semigrups de gènere g.

(d) Comproveu experimentalment que, per tot g positiu, $n_g \geq n_{g-1}$ fins a un cert g.

(e) Comproveu experimentalment que, per tot $g > 1$, $n_g \geq n_{g-1} + n_{g-2}$ fins a un cert g.

(f) Comproveu experimentalment que la fracció $\frac{n_{g-1}+n_{g-2}}{n_g}$ tendeix a 1.

(g) Comproveu experimentalment que la fracció $\frac{n_g}{n_{g-1}}$ tendeix al nombre d'or.

(h) Les desigualtats $n_g \geq n_{g-1} + n_{g-2}$ i $n_g \geq n_{g-2}$ són a dia d'avui conjectures. Teniu alguna idea per demostrar-les?

- Podeu veure la primera publicació d'aquests resultats el 2008 i l'estat de l'art l'any 2017 en les referències

  M. Bras-Amorós: *Fibonacci-Like Behavior of the Number of Numerical Semigroups of a Given Genus*, Semigroup Forum, Springer, vol. 76, n. 2, 2008.
  N. Kaplan: *Counting Numerical Semigroups*, The American Mathematical Monthly, vol. 124, n. 8, 2017.

I.25. Sigui A el conjunt dels nombres que tenen com a màxim quatre xifres no totes iguals. S'anomena aplicació de Kaprekar T a la funció que aplica $a \in A$ en la diferència entre el nombre que s'obté escrivint les xifres de a en ordre decreixent (afegint zeros a la dreta, si cal, per obtenir un nombre de quatre xifres) i el nombre que resulta d'escriure les xifres de a en ordre creixent. Per exemple, $T(2127) = 7221 - 1227 = 5994$, $T(2085) = 8520 - 0258 = 8262$, $T(0054) = 5400 - 0045 = 5355$.

(a) Calculeu el cardinal del conjunt imatge.

(b) Implementeu la funció T de Kaprekar.

(c) Calculeu $T(A)$. Comproveu que $T(A) \subset A$.

(d) Comproveu que T té un únic punt fix, és a dir, existeix un únic $k \in A$ tal que $T(k) = k$.

(e) Comproveu que existeix n tal que per tota $a \in A$, $T^n(a) = k$.