Potencials retardats com a solucions de les equacions de l'electromagnetisme en potencials: φ i $\vec{A}$

Estem usant el ***Gauge de Lorentz***:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{A}}(\vec{r},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t}=0 \qquad (1)$$

I tenim les equacions que deriven de les de Maxwell en termes dels potencials:

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi(\vec{r},t)}{\partial t^2}=-\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{\mathrm{A}}(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{\mathrm{j}}(\vec{r},t) \qquad (3)$$

• La solució de (2) la coneixem pel cas en que la distribució o densitat de càrrega no depengui del temps: $\rho(\vec{r},\cancel{t})$, amb la qual cosa el potencial escalar : $\varphi(\vec{r},\cancel{t})$ tampoc hi dependrà.

I l'equació (2) es converteix en, l'equació de Poisson de l'àmbit de l'*electrostàtica*:

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r})=-\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad (4)$$

I llavors $\varphi(\vec{r})=V(\vec{r})$ és el típic potencial electrostàtic en (volts).

La forma de calcular el potencial i per tant solucions de (4) consisteix en la integral de volum següent, que es fa a partir de la densitat de càrrega.

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' \qquad (5)$$

Essent ***V*** el domini sencer de volum que ocupa la densitat de càrrega: $\rho(\vec{r}')$

• Igualment, la solució de (3) la coneixem pel cas en que la densitat de corrent no depengui del temps: $\vec{\mathrm{j}}(\vec{r},\cancel{t})$, amb la qual cosa el potencial vectorial : $\vec{\mathrm{A}}(\vec{r},\cancel{t})$ tampoc hi dependrà.

I l'equació (3) es converteix en, una equació similar a la de Poisson (4), però vectorial, és a dir, per a cadascuna de les components de $\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})$ i $\vec{\mathrm{j}}(\vec{r})$. En aquest cas estem en l'àmbit de la *magnetostàtica*.

$$\vec{\nabla}^2\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})=-\mu_0\vec{\mathrm{j}}(\vec{r}) \qquad (6)$$

Per a calcular la solució $\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})$ de (6) es fa de mateixa manera que (5), però ara amb $\mu_0\vec{\mathrm{j}}(\vec{r})$ enlloc de $\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$, amb al qual cosa surt de la integral de volum següent:

$$\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{\mathrm{j}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' \qquad (7)$$

Solucions a l'àmbit de l'electromagnetisme.

Si ara estem a l'àmbit de l'electromagnetisme en la qual almenys alguna de les dues densitats: $\rho(\vec{r},t)$ o $\vec{\mathrm{j}}(\vec{r},t)$ varien amb el temps, llavors també ho faran els potencials

I les equacions a resoldre seran la (2) i la (3) sense negligir el terme de la 2a. derivada temporal:

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi(\vec{r},t)}{\partial t^2}=-\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{\mathrm{A}}(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{\mathrm{j}}(\vec{r},t) \qquad (3)$$

Com trobarem les solucions dels potencials? Una opció aparentment plausible seria fer el mateix que abans introduint la pertinent variació en el temps a les densitats. És a dir simplement:

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv' \quad (5')$$

$$\vec{\mathrm{A}}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{\mathrm{j}}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv' \quad (7')$$

Però realment (5') i (7') no són les solucions de (2) i (3)!!. Les veritables solucions de (2) i de (3) són com (5') i (7`) si introduïm uns termes de retard o de propagació restats a la variable t, és a dir:

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv' \quad (8)$$

$$\vec{\mathrm{A}}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{\mathrm{j}}\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv' \quad (9)$$

Aquest terme nou: $-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$ restat al temps te una significació **molt curiosa!**, i merescudament intuïtiva!. En efecte:

Cada cop que es produeix una variació de $\rho(\vec{r}\,',\mathrm{t}')$ o de $\vec{\mathrm{j}}(\vec{r}\,',\mathrm{t}')$ en una posició $\vec{r}\,'$ i en un instant concret t', aquesta variació no es deixa sentir al potencial situat a $\vec{r}$, **fins un cert temps** t **després**.

El curiós és que la diferència $t-t'$ és **igual al temps que tarda el senyal electromagnètic a viatjar** amb la velocitat de la llum c des de $\vec{r}\,'$ fins a $\vec{r}$ que és $\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$. Podem escriure, per tant:

$$t-t'=\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} \qquad o\ bé \qquad t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$$

Per aquesta raó als potencials calculats com (8) i (9) els anomenem *potencials retardats*.

I als retards o termes nous restats a la variable temps $-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\prime|}{c}$ els anomenem *temps de propagació*.

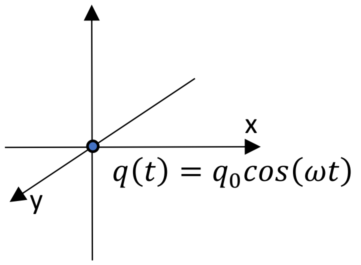
La demostració formal de que (8) i (9) són les solucions de (2) i de (3) respectivament la deixem per a més endavant.

Ara farem uns exemples simples de càlcul dels potencials electromagnètics per casos molt simples de distribucions de càrrega o de corrent que varien en el temps.

Càlcul dels potencials electromagnètics per casos molt simples de distribucions de càrrega o de corrent que varien en el temps

Cas 1. Càrrega puntual de valor oscil·lant.

Sigui una càrrega puntual de valor variable: $q(t) = q_0 cos(\omega t)$, col·locada de forma fixa a l'origen de coordenades



La forma de posar una càrrega puntual com una densitat de càrrega és usant la distribució delta de Dirac (tridimensional en aquest cas). És a dir:

$$\rho(\vec{r}', t) = q(t)\, \delta(\vec{r}') = q_0 cos(\omega t)\, \delta(\vec{r}')$$

Recordem que la delta de Dirac $\delta(\vec{r}')$ és una distribució que val zero a $\vec{r}' \neq 0$ i en canvi te un valor infinit a $\vec{r}' = 0$, és per tant un pic de distribució tota concentrada en un sol punt, però de forma tal que la integral sota la distribució continuï valent 1.

Segons això, calculem el potencial escalar $\varphi(\vec{r}, t)$ segons (8)

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv' = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\right) \delta(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$$

$$= \left| \begin{matrix} usant\ el\ fet\ que\ \delta(\vec{r}')\ només \\ és\ diferent\ de\ 0\ a\ \vec{r}' = 0 \end{matrix} \right| = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)\right)}{|\vec{r}|}$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

Això te la forma d'una ona de potencial de freqüència ω que es propaga des de l'origen cap a totes direccions per igual a una velocitat c. La posició només depèn del seu mòdul $r = |\vec{r}|$ i per tant es propaga per igual en totes direccions (simetria esfèrica). També veiem que a mesura que s'allunya el seu valor decreix com 1/r, per tant a la llarga el potencial s'atenuarà.

Ara hem de trobar el potencial vector: $\vec{A}(\vec{r},t)$, però no usarem l'expressió (9) ja que no sabem quina és la densitat de corrent associada a aquest cas.

Enlloc d'això usarem el gauge o norma de Lorentz:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (1)$$

Calculant el terme de la dreta:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\overbrace{\varepsilon_0\mu_0}^{1/c^2}\, q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\frac{cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{r} = \frac{\mu_0 q_0}{4\pi}\frac{\omega}{r}sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

Per tant:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 q_0}{4\pi}\frac{\omega}{r}sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

Escrivint la divergència en esfèriques:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial(sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} = \frac{\mu_0 q_0}{4\pi}\frac{\omega}{r}sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

Per la simetria esfèrica que te la distribució (una càrrega puntual immòbil, generarà els mateixos camps i potencials independentment de la direcció cap a la qual ens allunyem de la càrrega) la component de colatitud A_θ i la component d'azimut A_φ han de ser nul·les. Per tant només es manté la component radial A_r . El potencial vector és un camp radial amb un mòdul que només depèn de la distància r. La equació la podem simplificar així:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} = \frac{\mu_0 q_0}{4\pi}\frac{\omega}{r}sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} = \frac{\mu_0 q_0}{4\pi}\omega\, r\, sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

Integrant entre 0 i r aquesta igualtat (anomenem r' a la variable d'integració per a distingir-la de r, límit superior)

$$r^2 A_r = \frac{\mu_0 q_0}{4\pi}\omega \int_0^r r'\, sin\left(\omega\left(t-\frac{r'}{c}\right)\right) dr' = |integrant\ per\ parts| =$$

$$= \frac{\mu_0 q_0}{4\pi}\omega\left\{\left[r'\frac{c}{\omega}\, cos\left(\omega\left(t-\frac{r'}{c}\right)\right)\right]_0^r - \int_0^r \frac{c}{\omega} cos\left(\omega\left(t-\frac{r'}{c}\right)\right) dr'\right\}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0}{4\pi}\omega\frac{c}{\omega}\left\{\left[r'\, cos\left(\omega\left(t-\frac{r'}{c}\right)\right)\right]_0^r + \left[\frac{c}{\omega}\, sin\left(\omega\left(t-\frac{r'}{c}\right)\right)\right]_0^r\right\}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0}{4\pi} c\left\{r\, cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) + \frac{c}{\omega}\, sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) - \frac{c}{\omega} sin(\omega t)\right\}$$

$$A_r = \frac{\mu_0 q_0}{4\pi} c\left\{\frac{1}{r}\, cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) + \frac{c}{\omega}\frac{1}{r^2}\, sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) - \frac{c}{\omega}\frac{1}{r^2} sin(\omega t)\right\}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = A_r(\vec{r},t)\hat{r} = \frac{\mu_0 q_0}{4\pi} c\left\{\frac{1}{r}\, cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) + \frac{c}{\omega}\frac{1}{r^2}\, sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) - \frac{c}{\omega}\frac{1}{r^2} sin(\omega t)\right\}\hat{r} =$$

$$= \frac{\mu_0 q_0}{4\pi} c\left\{\frac{1}{r^2}\, cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) + \frac{c}{\omega}\frac{1}{r^3}\, sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) - \frac{c}{\omega}\frac{1}{r^3} sin(\omega t)\right\}\vec{r}$$

El potencial escalar era: $\varphi(\vec{r},t) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$

I recordem, que podem re-obtenir els camps així:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (1)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}(\varphi) \qquad (2)$$

- Calculem per exemple $\vec{E}(\vec{r},t)$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \vec{\nabla}\big(\varphi(\vec{r},t)\big) =$$

$$= -\frac{\mu_0 q_0}{4\pi} c \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{r^2} \; cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) + \frac{c}{\omega}\frac{1}{r^3} \; sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) - \frac{c}{\omega}\frac{1}{r^3} sin(\omega t)\right\}\vec{r}$$

$$-\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r} cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\right) =$$

$$= -\frac{\mu_0 q_0 c}{4\pi}\left\{-\frac{\omega}{r^2} \; sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) + \frac{c}{r^3} \; cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) - \frac{c}{r^3} cos(\omega t)\right\}\vec{r}$$

$$-\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3} cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) + \frac{1}{rc} sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{r}$$

$$= \left| \begin{matrix} els\ termes\ 1r\ i\ 5è\ s'anul\cdot len \\ mútuament, ja\ que\ \mu_0 c = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{\mu_0 q_0 c^2}{4\pi}\left(\frac{\vec{r}}{r^3} \; cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) - \frac{\vec{r}}{r^3} cos(\omega t)\right) - \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3} cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\right) =$$

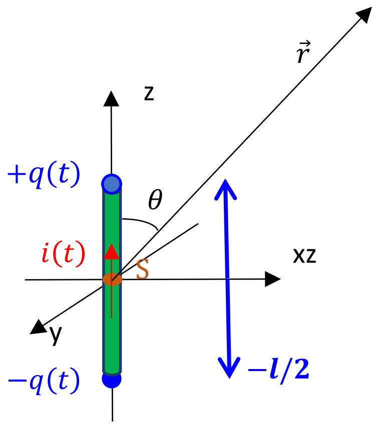
$$= -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(2cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) - cos(\omega t)\right)\frac{\vec{r}}{r^3}$$

- Calculem per exemple $\vec{B}(\vec{r},t)$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) =$$

$$= \frac{\mu_0 q_0 c}{4\pi} c \, \vec{\nabla} x\left\{\frac{\vec{r}}{r^2} \; cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) + \frac{c}{\omega}\frac{\vec{r}}{r^3} \; sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) - \frac{c}{\omega}\frac{\vec{r}}{r^3} sin(\omega t)\right\} = 0$$

Ja que tots els termes són camps són centrals $f(r)\vec{r}$, que tenen rotacional nul, i per tant conservatius. En general: $\vec{\nabla} x(f(r)\vec{r}) = 0$



Cas 2. Dipol oscil·lant.

Sigui dues càrregues variables de valors sempre oposats: q(t) i -q(t) situades una distància l entre sí, a l'eix de les z (una a z=+l/2 i l'altra a z=-l/2), tal i com es veu a la figura:

Les dues càrregues varien de valor ja que hi ha un corrent i(t) que viatja per una barra a l'eix de les z, de llargada l i secció S, que comunica les dues càrregues.

És evident que:

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t)$$

Com que tenim un corrent ben definit amb densitat de corrent:

$$\vec{j}(t) = (0, 0, j_z(t)) = \left(0, 0, \frac{i(t)}{S}\right)$$

Ara resultarà més fàcil obtenir primer

$$\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathbf{j}}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (9)$$

$$A_z(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{i\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{S|\vec{r} - \vec{r}'|} \overbrace{dv'}^{Sdz'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{i\left(t - \frac{|\vec{r} - z'\hat{z}|}{c}\right)}{|\vec{r} - z'\hat{z}|} dz'$$

I no te dependència en $\vec{r}'$, ja que no pot dependre de z', o sinó hi hauria acumulació de càrrega en punts centrals de la barra cosa que no passa, el corrent és uniforme al llarg de la barra encara que variable en el temps

Calculem: $|\vec{r} - z'\hat{z}| = \sqrt{(\vec{r} - z'\hat{z}) \cdot (\vec{r} - z'\hat{z})} = (r^2 + z'^2 - 2rz' \cos\theta)^{1/2} = r\left(1 + \left(\frac{z'}{r}\right)^2 - \frac{z'}{r}\cos\theta\right)^{1/2} \approx r\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{z'}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}2\frac{z'}{r}\cos\theta\right)$

Suposem que calculem el potencial a punts molt allunyats del dipol, és a dir:

$$r \gg \frac{l}{2} \geq |z'|$$

Negligim els termes de segon ordre en $\frac{z'}{r}$

$$|\vec{r} - z'\hat{z}| \approx r\left(1 - \frac{z'}{r}\cos\theta\right) = r - z'\cos\theta$$

Així:

$$A_z(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{i\left(t - \frac{r - z'\cos\theta}{c}\right)}{(r - z'\cos\theta)} dz'$$

Podem negligir ara també el terme de primer ordre $-z'\cos\theta$ front a r que és molt més gran.

$$A_z(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{i(t - r/c)}{r} dz' = \frac{\mu_0}{4\pi} l \frac{i(t - r/c)}{r}$$

És a dir, l'efecte del corrent es deixa sentir a r retardat per r/c i atenuat en 1/r.

Per a trobar $\varphi(\vec{r},t)$ a partir de $\vec{\mathrm{A}}(\vec{r},t)$ farem servir el gauge o norma de Lorentz:

$$\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t} = -c^2\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{A}}(\vec{r},t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t} = -c^2\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{A}}(\vec{r},t) = -c^2\frac{\partial^2 A_z(\vec{r},t)}{\partial \mathrm{z}^2} = -c^2\frac{\mu_0}{4\pi}l\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\frac{i(t-r/c)}{r}$$

$$= \left|usant\ que{:}\ r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$= -\frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\frac{2z\cdot i(t-r/c)}{r^3} - \frac{1}{2c}\frac{2z\cdot i'(t-r/c)}{r\cdot r}\right) =$$

$$= \frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^2}\left(\frac{i(t-r/c)}{r} + \frac{i'(t-r/c)}{c}\right) = \frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Per tant:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^2}\int dt\left(\frac{i(t-r/c)}{r} + \frac{i'(t-r/c)}{c}\right)$$

No podem seguir sinó concretem el tipus de funció en el temps que segueixen: i(t) i q(t)

Concretem al cas del dipol oscil·lant:

$$q(t) = q_0 cos(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega q_0 sin(\omega t)$$

Amb això el càlcul del potencial vector és:

$$A_z(\vec{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}l\frac{i\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi}l\frac{\omega q_0 sin\big(\omega(t-r/c)\big)}{r}$$

Que és la típica forma d'una ona sinusoidal de potencial A que es propaga a freqüència ω i velocitat c, en la direcció z, i que s'atenua com 1/r.

Com veiem, l'expressió de d'aquest potencial vector te simetria de revolució, al voltant de l'eix z del dipol $\hat{z}$, només conté la component A_z i a més només depèn de $r = \sqrt{s^2+z^2}$ On es defineix $\vec{s} = (x,y,0)$ com la projecció de $\vec{r} = (x,y,z)$ sobre el pla perpendicular a l'eix $\hat{z}$, i el mòdul de $\vec{s}$, que és $s = \sqrt{x^2+y^2}$, i és la típica coordenada radial de les coordenades cilíndriques: (s, φ, z). Així:

$$A_z(s,\cancel{\varphi},z,t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} l\omega q_0 \frac{\sin\left(\omega\left(t-\sqrt{s^2+z^2}/c\right)\right)}{\sqrt{s^2+z^2}}$$

I A_z no depèn de la coordenada atzimutal: φ

Substituïm ara la forma de $i(t-r/c)$ i de $i'(t-r/c)$ en el potencial escalar:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^2}\int dt\left(\frac{i(t-r/c)}{r}+\frac{i'(t-r/c)}{c}\right)$$

$$= \frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^2}\int dt\left(\frac{q_0\cos(\omega(t-r/c))}{r}-\frac{\omega q_0\sin(\omega(t-r/c))}{c}\right) =$$

$$= \frac{lq_0}{4\pi\varepsilon_0} z\left(\frac{\sin(\omega(t-r/c))}{\omega r^3}+\frac{\cos(\omega(t-r/c))}{cr^2}\right) + A$$

A és la constant arbitrària de la integral indefinida que hem fet.

Com veiem, l'expressió de d'aquest potencial escalar també te simetria de revolució, al voltant de l'eix z del dipol $\hat{z}$, només depèn de z i de s a través de: $r = \sqrt{s^2+z^2}$. Per tant es pot escriure en cilíndriques sense la coordenada atzimutal: φ

$$\varphi(s,\cancel{\varphi},z,t) = \frac{lq_0}{4\pi\varepsilon_0} z\left(\frac{\sin\left(\omega\left(t-\sqrt{s^2+z^2}/c\right)\right)}{\omega(s^2+z^2)^{3/2}}+\frac{\cos\left(\omega\left(t-\sqrt{s^2+z^2}/c\right)\right)}{c(s^2+z^2)}\right) + A$$

Calculem ara els camps. Per a fer això, posem els operadors procedents de nabla en cilíndriques ja que s'adapten millor al nostre problema:

Calculem primer el camp magnètic:

$$\vec{B}(s,\varphi,z,t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(s,z,t) =$$

$$= \frac{1}{s}\begin{vmatrix} \hat{s} & s\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underbrace{A_s}_{0} & s\,\underbrace{A_\varphi}_{0} & A_z(s,z,t) \end{vmatrix} = \frac{1}{s}\begin{vmatrix} \hat{s} & s\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_0}{4\pi} l\omega q_0 \frac{\sin\left(\omega\left(t-\frac{\sqrt{s^2+z^2}}{c}\right)\right)}{\sqrt{s^2+z^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{s} s\hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\mu_0}{4\pi} l\omega q_0 \frac{\sin\left(\omega\left(t-\frac{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)\right)}{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = -\hat{\varphi}\frac{\mu_0}{4\pi} l\omega q_0 \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\sin\left(\omega\left(t-\frac{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)\right)}{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$= |desenvolupant\ la\ derivada\ resp. s\ del\ denominador\ i\ del\ numerador\ com\ a\ dos\ termes|$

$$= -\hat{\varphi}\frac{\mu_0}{4\pi} l\omega q_0 \left[\underbrace{-\frac{1}{2}\frac{2s}{(s^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}}_{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)} \sin\left(\omega\left(t-\frac{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)\right) + \frac{1}{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \underbrace{\left(-\frac{\omega}{c}\frac{1}{2}\frac{2s\cos\left(\omega\left(t-\frac{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)\right)}{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}_{\frac{\partial}{\partial s}\sin\left(\omega\left(t-\frac{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)\right)}\right]$$

$$\vec{B}(s,\varphi,z,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} l\omega q_0 \left[\frac{\sin\left(\omega\left(t-\frac{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)\right)}{(s^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega}{c}\frac{\cos\left(\omega\left(t-\frac{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)\right)}{(s^2+z^2)}\right] s\,\hat{\varphi}$$

Simplificant novament les $r = (s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\vec{B}(s,z,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} l\omega q_0 \left[\frac{\sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{r^3} + \frac{\omega}{c}\frac{\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{r^2}\right] s\,\hat{\varphi}}$$

Es comprova que aquest $\vec{B}(\vec{r},t)$ només te component atzimutal $\hat{\varphi}$ i a sobre no depèn de la coordenada φ. Forma, per tant , <u>les típiques línies de camp circulars i tancades, al voltant de l'eix $\hat{z}$</u> del corrent o del dipol. $\vec{B}$ és clarament de mòdul igual en donar la volta ja que, com veiem, la magnitud no depèn de la coordenada φ.

Calculem en segon lloc el camp elèctric:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \vec{\nabla}\big(\varphi(\vec{r},t)\big) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l\omega q_0}{r} \frac{\partial sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{\partial t} \hat{z} - \frac{l q_0}{4\pi\varepsilon_0} \vec{\nabla}\left(z \frac{sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{\omega r^3} + z \frac{cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{c r^2} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l\omega q_0}{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial sin\left(\omega\left(t-\frac{(s^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right)\right)}{\partial t} \hat{z}$$

$$= -\frac{l q_0}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\left(\hat{s}\frac{\partial}{\partial s} + \hat{\varphi}\frac{1}{s}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \varphi}}_{0} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\vec{\nabla}_{cilíndriques}} z \left(\frac{sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{\omega r^3} + z \frac{cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{c r^2} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l\omega q_0}{r} \omega \, cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) \hat{z} - \frac{l q_0}{4\pi\varepsilon_0} \hat{z} \frac{\partial z}{\partial z} \left(\frac{sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{\omega r^3} + \frac{cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{c r^2} \right)$$

$$- \frac{l q_0}{4\pi\varepsilon_0} z \underbrace{\left(\hat{s}\frac{\partial}{\partial s} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}} \left(\frac{sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{\omega r^3} + \frac{cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{c r^2} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l\omega q_0}{r} \omega \, cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) \hat{z} - \frac{l q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{\omega r^3} + \frac{cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{c r^2} \right) \hat{z}$$

$$- \frac{l q_0}{4\pi\varepsilon_0} z \, \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{\omega r^3} + \frac{cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{c r^2} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l\omega q_0}{r} \omega \, cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) \hat{z} - \frac{l q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{\omega r^3} + \frac{cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{c r^2} \right) \hat{z}$$

$$- \frac{l q_0}{4\pi\varepsilon_0} z \, \hat{r} \left(-3 \frac{sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{\omega r^4} - \frac{\omega}{c} \frac{cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{\omega r^3} - 2 \frac{cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{c r^3} + \frac{\omega}{c} \frac{sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{c r^2} \right) =$$

$$= \frac{l q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\omega^2}{c^2} \, cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) \hat{z} - \frac{sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{\omega r^3} - \frac{cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{c r^2} \right) \hat{z}$$

$$-\frac{lq_0}{4\pi\varepsilon_0} z \left(\left(\frac{\omega}{c^2 r^2} - \frac{3}{\omega r^4} \right) sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) - \frac{1}{cr^3} cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \right) \hat{r} =$$

$$= \frac{lq_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\omega^2}{c^2}\ cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \hat{z} - \frac{sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{\omega r^3} - \frac{cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{cr^2} \right) \hat{z}$$

$$-\frac{lq_0}{4\pi\varepsilon_0} z \left(\left(\frac{\omega}{c^2 r^2} - \frac{3}{\omega r^4} \right) sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) - \frac{1}{cr^3} cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \right) \hat{r} =$$