# Sèries i criteris de convergència

**Àlex Arenas, Sergio Gómez**

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

# Sèries i criteris de convergència

- Sèries
  - Definicions
    - Donada una successió $\{a_n\}_{n\geq 1}$ s'anomena sèrie a la suma de tots els termes de la successió

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

    - Per a donar sentit matemàtic a la sèrie cal definir la successió $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de sumes parcials

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

de manera que la successió $\{a_n\}_{n\geq 1}$ és sumable si

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n$$

## Observacions

- Una sèrie només té sentit si la successió de sumes parcials és convergent, i es diu que la sèrie és convergent
- Quan una successió és no sumable es diu que és divergent
- Per definició: $a_n$ sumable $\Leftrightarrow$ $s_n$ convergent
- Es compleix: $a_n = s_n - s_{n-1} \quad \forall n > 1$
- Per qualsevol $p \in \mathbb{N}$ es compleix

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{convergent} \iff \sum_{n=p}^{\infty} a_n \ \text{convergent}$$

És dir, per a saber la sumabilitat no importa el terme d'inici

## Exemples

- La sèrie formada per la successió aritmètica de terme inicial $a_1$ i diferència $d$ és divergent (llevat si $a_1 = d = 0$)

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left( a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2} \left( d + \frac{2a_1 - d}{n} \right) = \infty$$

# Exemples

- La sèrie formada per la successió geomètrica de terme inicial $a_1 \neq 0$ i raó $r$ és convergent si $|r| < 1$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1 \\ a_1 n, & r = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{a_1}{1-r}, & |r| < 1 \\ \infty, & |r| \geq 1 \end{cases}$$

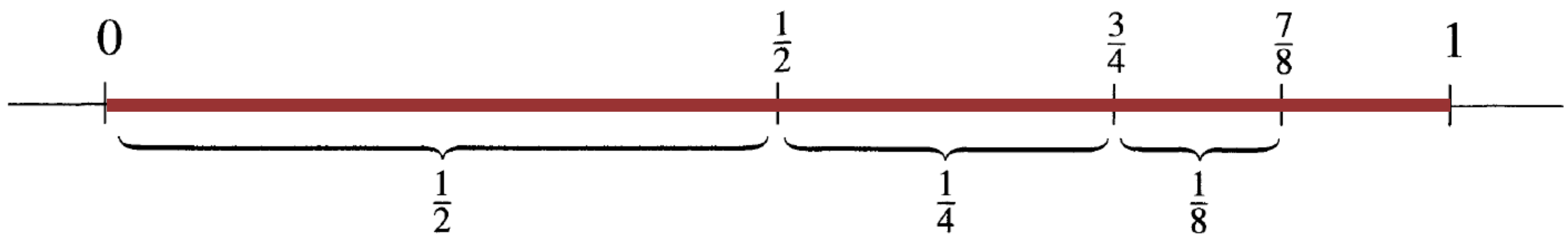
Per tant, la sèrie geomètrica (per $|r| < 1$) s'escriu

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

# Exemples

- Cas particular

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)}=1$$



## Exemples

- La sèrie harmònica és divergent

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots \qquad \text{amb } a_n=\frac{1}{n}$$

Es demostra pel criteri de comparació de límits:

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots \quad\longrightarrow\quad \infty
\end{aligned}$$

- **Teorema**
  - Siguin $a_n$ i $b_n$ dues successions sumables. Aleshores
    - La successió $a_n + b_n$ és sumable i el seu valor és

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

    - La successió $c\, a_n$ és sumable per tot $c \in \mathbb{R}$ i el seu valor és

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c\, a_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

  - Observacions
    - La demostració es basa en les propietats aritmètiques dels límits de successions
    - De moment no hem definit el producte de sèries

- Teorema
  - $a_n$ sumable $\Longrightarrow$ $a_n$ convergeix a zero, és a dir, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  - Demostració
    - Sigui $S = \lim_{n\to\infty} a_n$
    - Sabem $a_n = s_n - s_{n-1}$
    - Aleshores
      $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0$$
  - Observació
    - La implicació recíproca no és certa en general, per exemple, per la sèrie harmònica

- Teorema: criteri de Cauchy
  - $a_n$ sumable $\Leftrightarrow$ $\lim_{m,n\to\infty}(a_{n+1}+\cdots+a_m)=0$
  - Demostració
    - Es basa en l'aplicació teorema de Cauchy a la successió de sumes parcials, i utilitzar que $a_{n+1}+\cdots+a_m=s_m-s_n$

- Teorema: criteri de fitament
  - Sigui $a_n$ no negativa ($a_n \geq 0$). Aleshores

    $$a_n \text{ sumable} \quad \Leftrightarrow \quad s_n \text{ fitada}$$

  - Demostració
    - Com $a_n$ és no negativa, $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots$, i per tant $s_n$ és monòtona creixent
    - Només cal recordar que, per les successions monòtones, són fitades si, i només si, són convergents

- **Teorema:** criteri de comparació
  - Siguin $a_n$ i $b_n$ no negatives, tals que $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n$. Aleshores

    $$b_n \text{ sumable} \quad \Longrightarrow \quad a_n \text{ sumable}$$

  - Demostració
    - Siguin $s_n$ i $t_n$ les successions de sumes parcials de $a_n$ i $b_n$, respectivament
    - Sabem $s_n \leq t_n \ \forall n$
    - Com $b_n$ sumable, aleshores $t_n$ és fitada, i per tant, $s_n$ també és fitada
    - Pel criteri de fitament, tenim que $a_n$ és sumable

- Teorema: criteri de comparació
  - Siguin $a_n$ i $b_n$ no negatives, tals que $0 \le a_n \le b_n \ \forall n$. Aleshores

$$b_n \text{ sumable} \quad \Longrightarrow \quad a_n \text{ sumable}$$

  - Observació

$$a_n \text{ no sumable} \quad \Longrightarrow \quad b_n \text{ no sumable}$$

- Teorema: criteri de comparació
  - Siguin $a_n$ i $b_n$ no negatives, tals que $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n$. Aleshores

    $$b_n \text{ sumable} \quad \Longrightarrow \quad a_n \text{ sumable}$$

  - Exemple
    - La sèrie

      $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n + n^2}$$

      convergeix ja que

      $$0 \leq \frac{\sin^2 n}{2^n + n^2} \leq \frac{1}{2^n + n^2} \leq \frac{1}{2^n}$$

      i ja hem vist que $2^{-n}$ és sumable

- Teorema: criteri de comparació en el límit
  - Siguin $a_n$ i $b_n$ positives ($a_n, b_n > 0 \;\; \forall n$), tals que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \qquad \text{amb } c > 0$$

Aleshores

$a_n$ sumable $\quad \Leftrightarrow \quad$ $b_n$ sumable

  - Demostració
    - Per la definició de límit, $\forall \epsilon > 0\; \exists N\colon \forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \epsilon$
    - Prenent $\epsilon = c$ tenim $a_n < 2cb_n \;\; \forall n \geq N$, i per tant, pel criteri de comparació, si $b_n$ sumable aleshores $a_n$ sumable
    - Per a la implicació recíproca només cal utilitzar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{c} > 0$$

- Teorema: prova del quocient de d'Alembert
  - Sigui $a_n$ positiva ($a_n > 0 \;\; \forall n$) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

Aleshores

$$r < 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n \text{ sumable}$$
$$r > 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n \text{ no sumable}$$

  - Observacions
    - Aquest és un criteri molt útil i directe per a saber si una sèrie és convergent
    - Si $r = 1$ aquest criteri no és concloent

- Teorema: prova del quocient de d'Alembert
  - Demostració cas $r < 1$
    - Per la definició de límit, $\forall \epsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \epsilon$
    - Prenem un nombre $s$ tal que $r < s < 1$
    - Si seleccionem $\epsilon = s - r$ tenim $a_{n+1} < s a_n \ \ \forall n \geq N$

$$a_{N+1} < s a_N$$
$$a_{N+2} < s a_{N+1} < s^2 a_N$$
$$a_{N+k} < s a_{N+k-1} < \cdots < s^k a_N$$

    - Queda

$$0 < \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k} < a_N\left(1 + s + s^2 + \cdots\right) = \frac{a_N}{1 - s}$$

    - Per tant, el costat dret és sumable, i pel criteri de comparació, la sèrie $a_n$ és sumable

- Teorema: prova del quocient de d'Alembert
  - Demostració cas $r > 1$
    - Per la definició de límit, $\forall \epsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \epsilon$
    - Prenem un nombre $s$ tal que $1 < s < r$
    - Si seleccionem $\epsilon = r - s$ tenim $a_{n+1} > s a_n \ \ \forall n \geq N$

$$a_{N+1} > s a_N$$
$$a_{N+2} > s a_{N+1} > s^2 a_N$$
$$a_{N+k} > s a_{N+k-1} > \cdots > s^k a_N$$

    - Queda que $a_n$ no està fitada superiorment, i per tant és divergent (per a ser sumable és necessari que el límit de $a_n$ sigui zero)

- Teorema: prova del quocient de d'Alembert
  - Exemple
    - La sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

convergeix $\forall x \in \mathbb{R}$ ja que, pel criteri del quocient,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

- Teorema: prova del quocient de d'Alembert
  - Exemple
    - La sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

convergeix si $x < 1$ ja que, pel criteri del quocient,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x}{n} = x < 1$$

- Teorema: prova del quocient de d'Alembert
  - Exemple
    - La sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

convergeix però el criteri del quocient no és concloent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

- Teorema: prova de l'arrel de Cauchy
  - Sigui $a_n$ positiva ($a_n > 0 \ \ \forall n$) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

Aleshores

$$r < 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n \text{ sumable}$$
$$r > 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n \text{ no sumable}$$

  - Observació
    - Si $r = 1$ aquest criteri no és concloent

- Teorema: prova de l'arrel de Cauchy
  - Demostració cas $r < 1$
    - Per la definició de límit, $\forall \epsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geq N \Rightarrow \left|a_n^{1/n} - r\right| < \epsilon$
    - Prenem un nombre $s$ tal que $r < s < 1$
    - Si seleccionem $\epsilon = s - r$ tenim $a_n^{1/n} < s \;\; \forall n \geq N$, és a dir, tenim $0 < a_n < s^n$
    - Com $s^n$ és sumable si $|s| < 1$ (és la sèrie geomètrica), pel criteri de comparació queda demostrat que $a_n$ és sumable

- Teorema: prova de l'arrel de Cauchy
  - Demostració cas $r > 1$
    - Per la definició de límit, $\forall\epsilon > 0\ \exists N\colon \forall n \geq N \Rightarrow \left|a_n^{1/n} - r\right| < \epsilon$
    - Prenem un nombre $s$ tal que $1 < s < r$
    - Si seleccionem $\epsilon = r - s$ tenim $a_n^{1/n} > s\ \ \forall n \geq N$, és a dir, tenim $a_n > s^n$
    - Com $s^n$ no és sumable si $|s| > 1$ (és la sèrie geomètrica), pel criteri de comparació queda demostrat que $a_n$ no és sumable

- Teorema: prova de l'arrel de Cauchy
  - Exemple
    - La sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

convergeix ja que, pel criteri de l'arrel,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(\ln n)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

- Definició
  - Una successió $a_n$ és absolutament sumable si la successió de valors absoluts $|a_n|$ és sumable

  - Observació
    - És més difícil que una sèrie convergeixi si tots els seus termes són positius que si hi ha barreja de positius i negatius

- Teorema
  - $a_n$ absolutament sumable $\implies$ $a_n$ sumable
  - Demostració
    - Donat que $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, i que $a_n$ és absolutament sumable, pel criteri de comparació, $a_n + |a_n|$ és sumable
    - Utilitzant les propietats aritmètiques, la següent sèrie és convergent

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

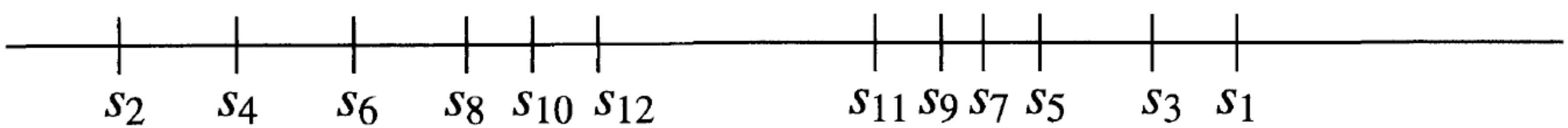
- Teorema: criteri de Leibniz
  - Sigui $a_n$ una successió no negativa i monòtona decreixent, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$, convergent a zero
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
Aleshores, la successió alternada $(-1)^{n+1}a_n$ és sumable, és a dir, la següent sèrie convergeix
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

- Teorema: criteri de Leibniz
  - Esquema de la demostració
    - Les sumes parcials segueixen la següent ordenació

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots$$

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots$$

$$s_p \leq s_q \quad \text{si } p \text{ parell i } q \text{ senar}$$




    - Com són monòtones i fitades, les subseqüències de termes parells i senars convergeixen a $\alpha$ i $\beta$ respectivament, i $\alpha \leq \beta$
    - Com $a_n = s_n - s_{n-1}$, i $a_n$ convergeix a zero, aleshores

$$\alpha = \beta = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

- Teorema: criteri de Leibniz
  - Exemple
    - La sèrie harmònica alternada és convergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

    - La convergència es dedueix del teorema de Leibniz, ja que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

    - El càlcul del valor requereix tècniques més avançades

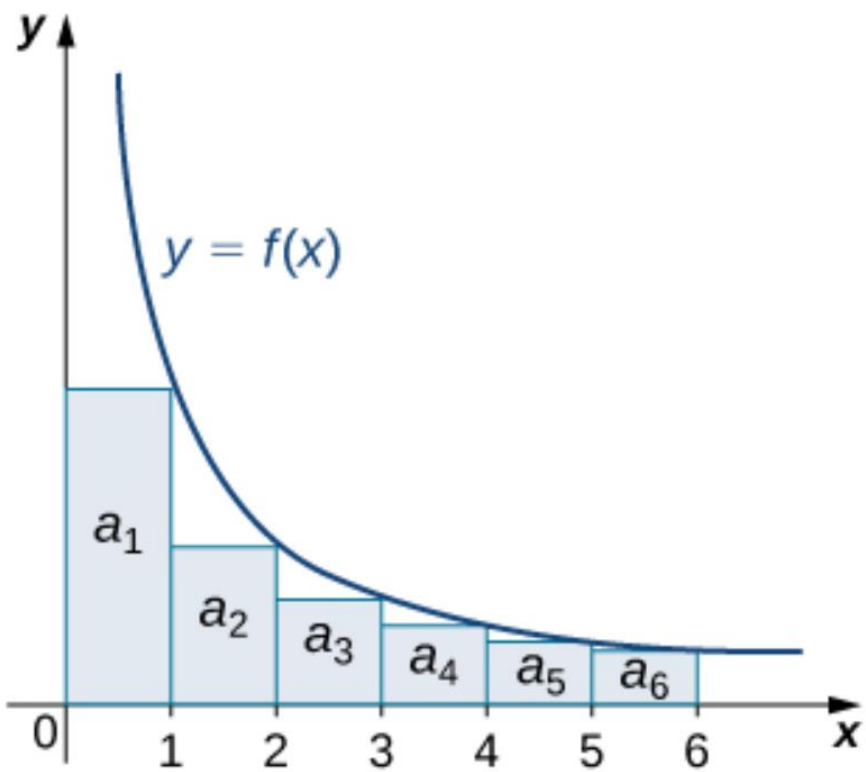
- Teorema: criteri de la integral
  - Sigui $f : [N, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció monòtona decreixent, amb $N$ un enter positiu. Aleshores

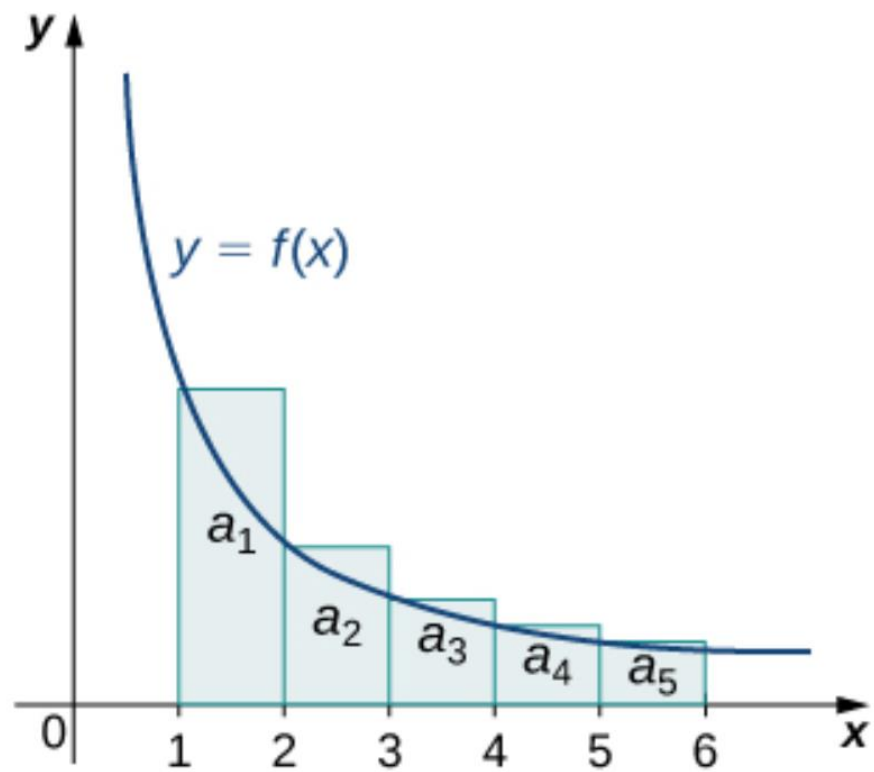
$$\sum_{n=N}^{\infty} f(n) \ \text{convergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_N^{\infty} f(x)dx \ \ \text{convergent}$$

  - Addicionalment, si és convergent, es satisfà

$$\int_N^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n) \leq f(N) + \int_N^{\infty} f(x)dx$$

- Teorema: criteri de la integral
  - Interpretació (cas $N = 1$)




$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\right) - f(1) \leq \int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

- Teorema: criteri de la integral
  - Exemple
    - La sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$$

convergeix sii $r > 1$ ja que, pel criteri de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r} dx = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{1-r} \lim_{A\to\infty} \left(A^{1-r} - 1\right) = \begin{cases} +\infty, & r < 1 \\ \dfrac{1}{r-1}, & r > 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{\infty} = \lim_{A\to\infty} (\ln A - \ln 1) = +\infty$$