Tema 2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.1. Dos interpretaciones gráficas de los sistemas lineales

Muchos problemas prácticos que aparecen en diversas disciplinas, tales como la biología, la química, la economía o la ingeniería, pueden ser frecuentemente reducidos a la resolución de ecuaciones lineales, concepto conocido de cursos anteriores. En los sistemas lineales, las ecuaciones sólo involucran la primera potencia de cada incógnita y éstas no van multiplicadas entre sí. En particular cada incógnita sólo aparece multiplicada por algún escalar.

El álgebra lineal surgió como resultado de los intentos de encontrar métodos sistemáticos para resolver tales sistemas. En otras palabras, el problema central del álgebra lineal es resolver sistemas de n ecuaciones lineales. Recordemos algunas nociones básicas.

Sea la combinación lineal de las variables $x_1, \dots x_n$ dada por la expresión

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \,.$$

Los números reales $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ se denominan **coeficientes de la combinación**.

Una **ecuación lineal** en las incógnitas o variables $x_1, \dots x_n$ es una expresión de la forma

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = b\,,$$

donde $b \in \mathbb{R}$ se denomina **término constante**.

Una n-tupla $(s_1, \dots, s_n)$ es una **solución** de la ecuación lineal

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = b\,,$$

si, al sustituir las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ por los números $s_1, \dots, s_n$, se obtiene una identidad.

Un *sistema de* m *ecuaciones lineales y* n *incógnitas*

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1\,, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = b_2\,, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = b_m \end{cases}$$

tiene **solución** $(s_1, \dots, s_n)$ si dicha n-tupla es una solución de <u>todas</u> las ecuaciones del sistema.

La solución de un sistema lineal no existe necesariamente y, si lo hace, no es necesariamente única.

Si un sistema de ecuaciones tiene solución o soluciones se denomina **sistema compatible**; en caso contrario diremos que es un **sistema incompatible**.

El conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales dado se denomina **conjunto de soluciones**.

Cuando el sistema no tiene solución, el conjunto de soluciones se dice *vacío*, lo que representamos con el símbolo $\emptyset$ (que denota al conjunto vacío en teoría de conjuntos).

Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única se dice que es **compatible determinado**; si tiene más de una solución se dice que es **compatible indeterminado**.

Finalmente recordemos que:

Dos sistemas son **equivalentes** si ambos tienen el mismo conjunto de soluciones.

A continuación veremos dos maneras distintas de *interpretar* los sistemas lineales.

Ejemplo

Sea el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0\,, \\ x_1 + 2x_2 = 4\,. \end{cases}$$

La primera de las interpretaciones geométricas es bien conocida: cada par de números reales (x_1, x_2) que verifiquen $x_1 - x_2 = 0$, e.g., $(0, 0)$, $(-3, -3)$ ó $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, es solución de la primera ecuación. Si representamos tales puntos en el plano obtenemos una recta, como se ve en la figura 2.1. En general, si representamos cada ecuación (fila) por una recta en el plano, obtendremos que la intersección de todas ellas, si existe, es la solución del sistema. En particular, el par $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ es la solución del sistema anterior.

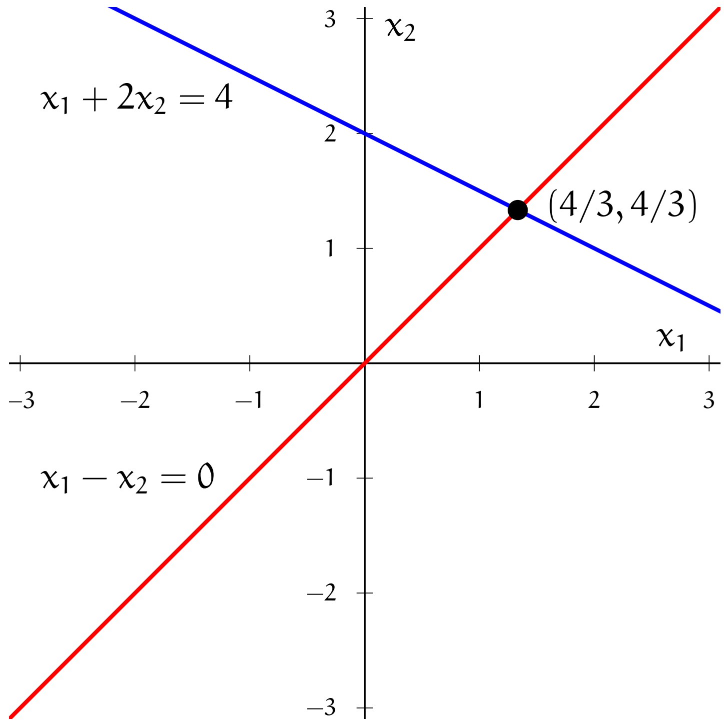

Figura 2.1: Representación gráfica de un sistema lineal por ***filas***.

Obsérvese que podemos usar este procedimiento gráfico para ***resolver*** sistemas con dos incógnitas.

De manera alternativa, podemos escribir el sistema usando notación vectorial de la siguiente manera: $x_1\,(1,1)^t + x_2\,(-1,2)^t = (0,4)^t$. Utilizando el concepto de combinación lineal, esta expresión nos dice que la $\boxed{\text{solución } (x_1, x_2)^t}$ del sistema lineal está dada por los $\boxed{\text{coeficientes}}$ (escalares x_1 y x_2) que hacen que la combinación lineal de los vectores columna $(1,1)^t$ y $(-1,2)^t$ sea igual al vector $(0,4)^t$.
Podemos observar en la figura 2.2 que la elección correcta para tales escalares es obviamente la dada por el punto intersección de la figura 2.1: $x_1 = x_2 = \dfrac{4}{3}$.

Nótese que esta representación $\boxed{\text{NO}}$ debe usarse como procedimiento sistemático para resolver sistemas (pues habría que hacerlo mediante prueba y error), pero es una ma-

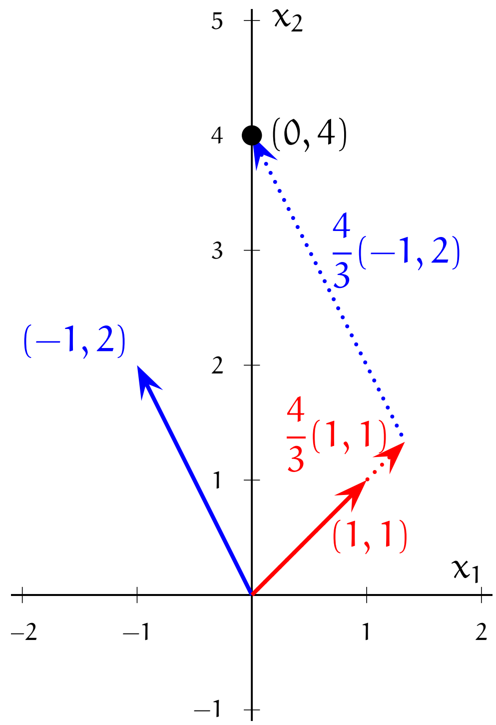

Figura 2.2: Representación gráfica de un sistema lineal por ***columnas***.

nera de comprender el significado de la solución en términos de combinaciones lineales de ciertos vectores, concepto que será de importancia fundamental en futuros temas. La primera representación del sistema lineal como líneas que se cortan (o no ...) en el plano (bidimensional) o como planos que se cortan en un espacio tridimensional, nos resulta más familiar que la que usa combinaciones lineales de vectores; sin embargo, para dimensiones mayores, es más sencillo "imaginar" una combinación lineal de, digamos, cuatro vectores en un espacio de dimensión 4, que "imaginar" la intersección de cuatro hiperplanos en dimensión 4.

Finalmente, recordemos que también podemos representar el sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0\,, \\ x_1 + 2x_2 = 4\,, \end{cases}$$

como un problema matricial $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, escribiendo:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}^{\mathbf{b}},$$

donde A es la matriz de coeficientes, $\mathbf{x}$ el vector (columna) de incógnitas y $\mathbf{b}$ el vector de constantes.

NOTA: a partir de este punto, usaremos la *representación matricial* para escribir las soluciones de los SEL (sistema de ecuaciones lineales) que consideremos. Es decir, daremos las soluciones como vectores columna.

2.2. Resolución de sistemas lineales

Resolver un sistema consiste en encontrar su conjunto de soluciones.

Existen diferentes técnicas para encontrar el conjunto de soluciones de un sistema. En este tema nos centraremos en el método de Gauss, un procedimiento sistemático para resolver sistemas lineales. Su objetivo es obtener una secuencia de sistemas, cada uno de ellos equivalente al anterior, hasta obtener un sistema "escalonado, triangular superior" mediante la utilización de "operaciones elementales" de sus *filas* (ecuaciones), para posteriormente obtener la solución mediante *sustitución hacia atrás*. Las operaciones entre filas permitidas están descritas en el siguiente teorema:

Método de Gauss

Supongamos que un sistema lineal es modificado mediante alguna de las siguientes operaciones:

1) *Intercambio*: una ecuación intercambia su posición con cualquier otra.

2) *Re-escalado*: se multiplican los dos miembros de una ecuación por una constante no nula.

3) *Combinación de filas*: una ecuación es sustituida por la suma de ella y algún múltiplo de otra.

Entonces los dos sistemas tienen el mismo conjunto de soluciones.

Ejemplo

Consideremos otra vez el sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0\,, & (R_1)\,, \\ x_1 + 2x_2 = 4\,, & (R_2)\,, \end{cases}$$

cuya solución está representada en la figura 2.1. Si sustituimos la segunda ecuación R_2 por la combinación de filas $R_2 - R_1$ obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0\,, \\ 3x_2 = 4\,. \end{cases}$$

La figura 2.3 ilustra que ambos sistemas son equivalentes (tienen la misma solución).

En cada fila de un sistema, la primera variable con coeficiente no nulo es la **variable pivote** de la fila. Un sistema está en **forma escalonada** si cada variable pivote se encuentra a la derecha de la variable pivote de la fila inmediatamente superior (exceptuando la

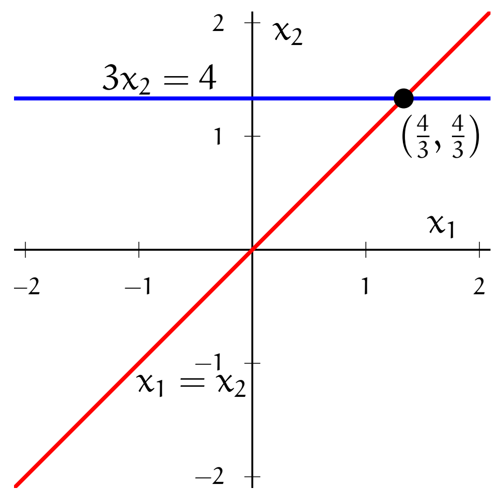

Figura 2.3: La aplicación de operaciones elementales de Gauss no cambia el conjunto de soluciones de un sistema lineal.

variable pivote de la primera fila). Además, diremos que un sistema está en **forma escalonada reducida** si está escrito en forma escalonada, si los coeficientes de todas las variables pivote son iguales a 1 y si éste es el único coeficiente no nulo de la correspondiente ecuación.

Ejemplo

Si resolvemos el siguiente sistema mediante el método de Gauss, tenemos que realizar las siguientes operaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3\,, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3\,. \end{cases} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ -3x_2 + 3x_3 = 3\,, \\ -3x_2 - x_3 = 3\,. \end{cases} \xrightarrow[R_3 - R_2]{} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ -3x_2 + 3x_3 = 3\,, \\ -4x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Observemos que este tercer sistema está en $\boxed{\text{forma escalonada.}}$ Después de los pasos de eliminación, obtenemos de la tercera fila que $x_3 = 0$; sustituyendo en la segunda fila, resulta $x_2 = -1$ y sustituyendo en la primera fila obtenemos $x_1 = 1$. Así, el conjunto de soluciones sólo consta de un elemento y lo podemos escribir como $\{(1,-1,0)^t\}$. También podemos obtener la $\boxed{\text{forma escalonada reducida}}$ del sistema con las siguientes operaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ -3x_2 + 3x_3 = 3\,, \\ -4x_3 = 0\,. \end{cases} \xrightarrow[-R_3/4]{-R_2/3} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ x_2 - x_3 = -1\,, \\ x_3 = 0\,. \end{cases} \xrightarrow{R2+R3} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ x_2 = -1\,, \\ x_3 = 0\,. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R1-R2} \begin{cases} x_1 = 1\,, \\ x_2 = -1\,, \\ x_3 = 0\,. \end{cases}$$

que proporcionan de manera directa la solución del sistema (obviamente, la misma que hemos encontrado anteriormente). Este método se conoce como **método de Gauss-Jordan**.

Ejemplo

Consideremos el siguiente SEL y las operaciones indicadas:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1\,, \\ 2x_1 + x_2 = -3\,, \\ 2x_1 + 2x_2 = -2\,. \end{cases} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-2R_1} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1\,, \\ -5x_2 = -5\,, \\ -4x_2 = -4\,. \end{cases} \xrightarrow[R_3-4R_2/5]{} \begin{cases} rx_1 + 3x_2 = 1\,, \\ -5x_2 = -5\,, \\ 0 = 0\,. \end{cases}$$

Esto muestra que una de las ecuaciones es redundante. De la segunda fila obtenemos $x_2 = 1$ y sustituyendo en la primera ecuación resulta $x_1 = -2$, por lo que el conjunto de soluciones es $\{(-2,1)^t\}$.

Ejemplo

Ahora consideremos el siguiente sistema, donde llevamos a cabo las siguientes operaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1\,, \\ 2x_1 + x_2 = -3\,, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0\,. \end{cases} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-2R_1} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1\,, \\ -5x_2 = -5\,, \\ -4x_2 = -2\,. \end{cases}$$

La tercera fila muestra que $x_2 = 1/2$ y la segunda que $x_2 = 1$, es decir, el sistema es incompatible o, en otras palabras, el conjunto de soluciones es vacío.

Así:

- Un sistema lineal con solución única tiene un conjunto de soluciones con un único elemento.
- Un sistema lineal sin solución tiene un conjunto de soluciones vacío.

En estos casos, el conjunto de soluciones es fácil de describir. Los conjuntos de soluciones más complicados de expresar son aquellos que contienen "muchos" elementos. Cuando esto ocurre, el número de posibles soluciones es infinito. La manera de identificar esta situación es la siguiente: *cuando un SEL tiene un número infinito de soluciones y lo escribimos en forma escalonada, entonces no todas las variables son variables pivote*.

Ejemplo

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4\,, \\ 2x_1 + 2x_2 = 8\,. \end{cases} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{cases} x_1 + x_2 = 4\,, \\ 0 = 0\,. \end{cases}$$

Esto muestra que cualquier par de números reales x_1, x_2 que satisfaga la primera ecuación también satisface la segunda: hay un número infinito de soluciones del sistema. El conjunto de soluciones puede describirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\left\{(x_1,x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 + x_2 = 4\,, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\} &= \left\{(x_1,x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 = 4 - x_1\,, x_1 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x_1,x_2)^t = (x_1, 4-x_1)^t \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(0,4)^t + x_1(1,-1)^t \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \in \mathbb{R}\right\} .
\end{aligned}$$

Se pueden obtener soluciones particulares asignando valores arbitrarios a x_1. Por ejemplo, los vectores columna $(x_1, x_2)^t = (0,4)^t, (1,3)^t, (-2,6)^t$ y $(\sqrt{3}, 4-\sqrt{3})^t$ son soluciones particulares del sistema.

Llamamos **parámetro** a una variable que es utilizada para describir una familia de soluciones.

En resumen, para cualquier sistema de ecuaciones lineales existen exactamente tres posibilidades, que identificamos fácilmente si está escrito en forma escalonada:

1. No hay solución; esto ocurre cuando hay alguna inconsistencia entre las ecuaciones.
2. Hay solución única; esto ocurre cuando cada variable es una variable pivote.
3. Hay un número infinito de soluciones; esto ocurre cuando hay al menos una variable que no es pivote y, por tanto, existe al menos un parámetro.

2.2.1. Matrices equivalentes

Según hemos visto, las operaciones gaussianas producen *sistemas equivalentes*. También vimos anteriormente que los sistemas lineales pueden ser escritos de manera más compacta por medio de su expresión matricial, $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Cuando resolvemos un sistema, esta notación es más adecuada, pues permite realizar exactamente las mismas operaciones que haríamos escribiendo el sistema completo, pero con una escritura más breve. Para ello, construimos lo que se conoce como la **matriz aumentada o ampliada del sistema**, escribiendo como una sola matriz la matriz de coeficientes y el vector de constantes (separados por una barra vertical): $\left(A \mid \mathbf{b}\right)$.

Ejemplo

Consideremos una vez más el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3\,, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3\,. \end{cases}$$

Si realizamos operaciones elementales en la matriz aumentada del sistema, podemos obtener una forma escalonada (por filas) de dicha matriz como sigue:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

y de nuevo resulta, por sustitución hacia atrás, el conjunto de soluciones $\{(1, -1, 0)^t\}$.

Ejemplo

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ x_2 - x_3 = 1\,, \\ x_3 = 3\,. \end{cases}$$

La matriz aumentada asociada es

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Usando notación matricial, escribimos el sistema de la forma $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo hacia atrás determinamos el conjunto de soluciones: $\{(-4, 4, 3)^t\}$.

Ejemplo

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 3\,, \\ x_1 + x_2 = 1\,, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3\,. \end{cases}$$

Si usamos notación matricial, describiremos dicho sistema de la forma $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aunque la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{crc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

no está en forma escalonada, A es triangular inferior y es evidente que podemos resolver el sistema mediante *sustitución hacia delante* (e.g., sustituyendo de arriba a abajo). El conjunto de soluciones es $\{(3,-2,-5)^t\}$.

Es muy sencillo observar que hacer operaciones gaussianas sobre los elementos de la correspondiente matriz ampliada de un SEL equivale a realizar ciertos productos entre matrices. En efecto:

1. El *intercambio* de las filas i y j de una matriz se obtiene multiplicando dicha matriz (por la izquierda) por la matriz P que resulta al intercambiar en la matriz identidad las filas i-ésima y j-ésima.

Ejemplo

Para intercambiar las filas 1 y 3 de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la multiplicamos por la izquierda por la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. El *re-escalado* de las fila i de una matriz por un factor a se obtiene multiplicando dicha matriz (por la izquierda) por la matriz P que resulta al multiplicar la fila i-ésima de la matriz identidad por a.

Ejemplo

Para multiplicar la segunda fila de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

por el escalar 5, la multiplicamos por la izquierda por la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. La sustitución de la fila i de A por la *combinación* de la fila i y la fila j multiplicada por a se obtiene multiplicando A (por la izquierda) por la matriz P que resulta al sustituir el elemento (i, j) de la matriz identidad por a.

Ejemplo

Dada la matriz A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

para restar a la fila primera de A su fila tercera multiplicada por 4, la multiplicamos por la izquierda por la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 & -9 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que cualquiera de las operaciones elementales anteriores sobre una matriz A produce una matriz B que es equivalente a A (con $Q = I$). El siguiente resultado es fundamental y nos facilitará muchos razonamientos:

Si las matrices A y B son equivalentes, entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

2.2.2. Inversa de una matriz (mediante eliminación gaussiana)

Supongamos que queremos resolver un sistema lineal, escrito en forma matricial como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sabemos que si A es cuadrada ($n \times n$) y no singular ($\det(A) \neq 0$), podemos realizar la operación

$$\overbrace{A^{-1}\,A}^{I_n}\,\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b}\,.$$

El método de Gauss-Jordan se puede usar para determinar fácilmente la inversa de una matriz no singular A como sigue.

Supongamos que el sistema que queremos resolver es $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1, 0, 0, \ldots, 0)^t$. Si multiplicamos $A^{-1}\,\mathbf{b}$, observamos que el resultado de esta operación es la primera columna de la matriz A^{-1}. Si hacemos la misma consideración con $\mathbf{b} = (0, 1, 0, \ldots, 0)^t$, el producto $A^{-1}\,\mathbf{b}$ proporciona la segunda columna de la inversa. Si repetimos este procedimiento hasta que multiplicamos $A^{-1}\,\mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (0, 0, \ldots, 0, 1)^t$ para obtener la última columna de A^{-1}, obtendremos la matriz inversa completa. Todos estos cálculos pueden ser realizados de manera eficiente, resolviendo todos los sistemas a la vez, si usamos eliminación gaussiana para obtener la forma escalonada reducida de la matriz

$$\left(A \,\middle|\, I_n\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

que es una matriz con n filas y $2n$ columnas, con A a la izquierda y la matriz identidad I_n de dimensión n a la derecha. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo

Para calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

escribimos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_2]{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Entonces, la inversa de A es la matriz de la derecha:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.3. Teoría de los sistemas lineales

Como hemos visto, podemos interpretar el sistema de ecuaciones $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de dos maneras. Si nos centramos en las filas, s es una solución del sistema si está situado sobre la intersección de todos los hiperplanos definidos por el sistema de ecuaciones. Si nos centramos en las columnas, la solución s es un conjunto de escalares que proporciona una representación del vector $\mathbf{b}$ como una combinación lineal de las $\boxed{\text{columnas de la matriz } A.}$ Observemos que esto está estrechamente relacionado con el *espacio columna* de la matriz

A (que desempeñará un papel muy importante en futuros capítulos). Cuando tal solución existe, decimos que el sistema es *compatible*; en caso contrario, decimos que es *incompatible*. En particular, el sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible si y sólo si $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$. Como ya sabemos, es fácil reconocer los sistemas incompatibles a partir de cualquiera de sus formas escalonadas: un sistema es incompatible cuando hay una ecuación escrita en la forma $0\,x_1 + \cdots + 0\,x_n = c$, para algún escalar c no nulo. En tal situación, ***es imposible expresar*** $\mathbf{b}$ ***como combinación lineal de las columnas de*** A.

Una cuestión más difícil es la siguiente: ¿bajo qué condiciones un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ puede ser representado como una combinación lineal de las columnas de A? Para responder a esta pregunta, se usa el *rango* r de la matriz A, que será igual al número de filas no nulas en la correspondiente matriz escalonada o, en otras palabras, el número de variables pivote del sistema. Aunque el siguiente resultado es bien conocido de cursos anteriores, recordamos que:

Teorema de Rouché-Frobenius

El sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible si y sólo si el rango de la matriz A es igual al rango de la matriz ampliada $\left(A \mid \mathbf{b}\right)$. El sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible determinado si y sólo si el rango de la matriz A (igual al rango de la matriz ampliada) coincide con el número de incógnitas.

NOTA: en temas posteriores veremos una interpretación geométrica de este hecho, basándonos en el espacio columna de A.

2.3.1. Unicidad de soluciones

A continuación nos centramos en la pregunta de cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones compatible dado. Como ya hemos mencionado, un sistema compatible tiene solución única si y sólo si el rango de A es igual al número de incógnitas. Además, como veremos más adelante, las soluciones de un sistema lineal compatible de la forma $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ están íntimamente relacionadas con las soluciones del sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Diremos que una ecuación lineal es **homogénea** si su término constante es igual a 0:

$$a_1\,x_1 + \cdots + a_n\,x_n = 0\,.$$

Si todas las ecuaciones de un sistema lineal son homogéneas, éste se denomina **sistema homogéneo**.

Claramente la solución dada por $x_1 = \cdots = x_n = 0$ es solución de dicho sistema y se denomina solución **trivial**. Cualquier solución en la que al menos una variable tiene valor no nulo es denominada **solución no trivial**.

Dado un sistema lineal, siempre podremos asociarle un sistema homogéneo haciendo cero las constantes. Así se verifica el siguiente resultado:

Proposición

Si un sistema de ecuaciones con n incógnitas $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible, entonces tiene solución única si y sólo si el sistema homogéneo asociado $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial. Esto ocurre exactamente cuando $\mathrm{rg}(A) = n$.

Estos resultados también pueden relacionarse de la siguiente manera:

Proposición

Sea A una matriz $n \times n$. Los siguientes resultados son equivalentes:

1. A es no singular (i.e., $\det(A) \neq 0$).
2. $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. Para cada $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única.

Ejemplo

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0\,, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\,, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -1\,. \end{cases}$$

Vamos a $\boxed{\text{ILUSTRAR}}$ la equivalencia de los tres resultados anteriores.

La matriz aumentada puede escribirse de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Esto muestra que el rango de A y el de la matriz aumentada es 2 (inferior al número de incógnitas); por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Por otro lado, el sistema homogéneo asociado está dado por

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0\,, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\,, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

y su conjunto de soluciones se describe como

$$\left\{(-3x_3, 2x_3, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 \in \mathbb{R}\right\}\,,$$

es decir, tiene un número infinito de soluciones. Finalmente, es inmediato comprobar que $\det(A) = 0$.

Además, los sistemas lineales homogéneos verifican las siguientes propiedades:

Sean $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ dos soluciones del sistema lineal homogéneo $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ dos escalares arbitrarios; entonces $\mathbf{s}_3 = \alpha_1\,\mathbf{s}_1 + \alpha_2\,\mathbf{s}_2$ es también solución del sistema homogéneo.

NOTA: como veremos en el próximo capítulo, estas propiedades convierten al conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo en lo que denominaremos un *espacio vectorial* (o más precisamente, en un *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$).

Finalmente, daremos el siguiente resultado para sistemas lineales no homogéneos:

Teorema

Sea el sistema de ecuaciones lineales compatible $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde A es una matriz de dimensión $m \times n$. Consideremos el sistema lineal homogéneo asociado $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Entonces cualquier solución del sistema homogéneo se puede escribir como una solución del sistema homogéneo más una solución particular del sistema no homogéneo. En otras palabras, si $S_h = \{\mathbf{s}_h \in \mathbb{R}^n \colon A\,\mathbf{s}_h = \mathbf{0}\}$ es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo y $\mathbf{s}_p$ es UNA SOLUCIÓN CUALQUIERA del sistema no homogéneo, entonces el conjunto de soluciones S del sistema no homogéneo se describe de la forma

$$S = \{\mathbf{s}_p + \mathbf{s}_h \colon \mathbf{s}_h \in S_h\}.$$

NOTA: el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo tiene la estructura de un *espacio afín*. Esto quiere decir que dadas dos soluciones cualesquiera del sistema no homogéneo $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$, su diferencia $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$ es un elemento de un espacio vectorial (en este caso, es el definido por las soluciones del correspondiente sistema lineal homogéneo).

Ejemplo

Sea el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\,, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 3\,, \\ -x_1 + 5x_2 = 3\,. \end{cases}$$

Si consideramos el sistema homogéneo asociado, comprobamos fácilmente que su conjunto de soluciones viene dado por:

$$S_h = \left\{ x_3 \left(-\frac{5}{9}, -\frac{1}{9}, 1 \right)^t \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 \in \mathbb{R} \right\}\,,$$

que como vemos depende de un único parámetro $x_3 \in \mathbb{R}$.

Consideremos a continuación los vectores $(5, 1, -9)^t, (2, 1, -3)^t$ y $(-3, 0, 6)^t$. Es inmediato verificar que el primero de ellos NO es solución del sistema, pues al sustituir estos valores en las ecuaciones, las dos últimas no dan lugar a una identidad. En cambio, el segundo de ellos sí lo es. Según el teorema anterior, conocer este segundo vector (o cualquier otro que sea solución) es suficiente para escribir el conjunto de soluciones:

$$S = \left\{ \left(2 - \frac{5}{9}s_3, 1 - \frac{1}{9}s_3, s_3 - 3 \right)^t \in \mathbb{R}^3 \colon s_3 \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

Finalmente, podemos comprobar que el tercer vector también es solución del sistema no homogéneo, por lo que de nuevo, por el teorema anterior, podemos escribir el conjunto de soluciones de la forma

$$S = \left\{ \left(-3 - \frac{5}{9}s_3, -\frac{1}{9}s_3, 6 + s_3 \right)^t \in \mathbb{R}^3 \colon s_3 \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

Obsérvese que aunque ambas descripciones del conjunto S son diferentes, corresponden al mismo conjunto. Por ejemplo, en el primer caso, si hacemos $s_3 = 0$ obtenemos la solución particular $(2, 1, -3)^t$. Esta misma solución resulta de la segunda descripción haciendo $s_3 = -9$. Se deja como ejercicio encontrar los valores de s_3 en la primera y en la segunda descripción que proporcionan la solución particular $(-3, 0, 6)^t$.