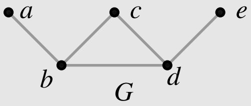
Subgrafos

Definición

Un grafo $H=(V',E')$ es un **subgrafo** del grafo $G=(V,E)$ si $V'\subseteq V$ y $E'\subseteq E$.

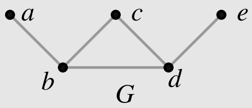
Ejemplo

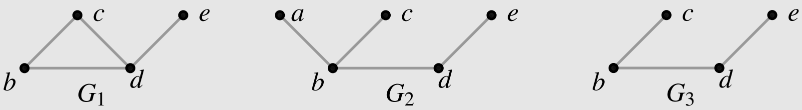
Determina tres subgrafos de G.



Ejemplo

Determina tres subgrafos de G.





Definición

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un subconjunto $S \subseteq V$, el **subgrafo generado** o **inducido** por S en G se define como el grafo $\langle S \rangle = (S, E')$, de tal manera que $\{u, v\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \in E$ y $u, v \in S$.

Definición

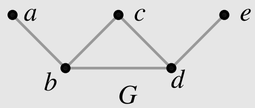
Dado un grafo $G = (V,E)$ y un subconjunto $S \subseteq V$, el **subgrafo generado** o **inducido** por S en G se define como el grafo $\langle S \rangle = (S,E')$, de tal manera que $\{u,v\} \in E' \Leftrightarrow \{u,v\} \in E$ y $u,v \in S$.

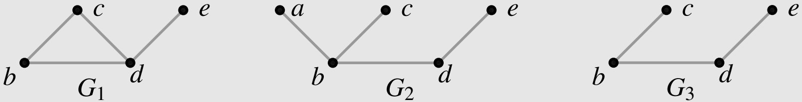
Definición

Sean $G = (V,E)$ y $H = (V',E')$ dos grafos. Se dice que H es **subgrafo generador** o **de expansión** de G si $V' = V$ y $E' \subseteq E$.

Ejemplo

Entre estos subgrafos de G, solo G_2 es un subgrafos generador.





Complemento de un grafo

Definición

Se define el **complemento** de un grafo $G = (V,E)$ como el grafo $G^c = (V,E')$, donde

$$\{u,v\} \in E' \longleftrightarrow \{u,v\} \notin E.$$

Definición

Se define el **complemento** de un grafo $G=(V,E)$ como el grafo $G^c=(V,E')$, donde

$$\{u,v\}\in E' \longleftrightarrow \{u,v\}\notin E.$$

Observación

Dos grafos son isomorfos si y sólo si lo son los complementos respectivos. Es decir,

$$G\cong H \longleftrightarrow G^c\cong H^c$$

Definición

Se define el **complemento** de un grafo $G = (V, E)$ como el grafo $G^c = (V, E')$, donde

$$\{u, v\} \in E' \longleftrightarrow \{u, v\} \notin E.$$

Observación

Dos grafos son isomorfos si y sólo si lo son los complementos respectivos. Es decir,

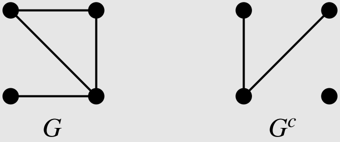
$$G \cong H \longleftrightarrow G^c \cong H^c$$

Ejemplo

$(K_n)^c = N_n$ y $(N_n)^c = K_n$.

Ejemplo

Un grafo de orden 4 y su complemento



Ejercicio

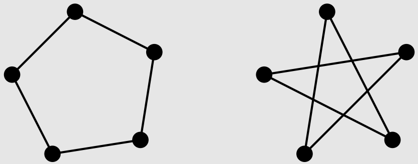
Determina el complemento de C_5

Ejercicio

Determina el complemento de C_5

Solución

La siguiente figura muestra el grafo C_5 y su complemento, que vuelve a ser C_5.



Ejercicio

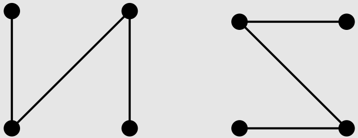
Determina el complemento de P_4

Ejercicio

Determina el complemento de P_4

Solución

La figura siguiente muestra que el camino de orden 4 también es autocomplementario: $(P_4)^c \cong P_4$

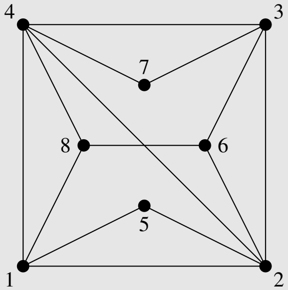


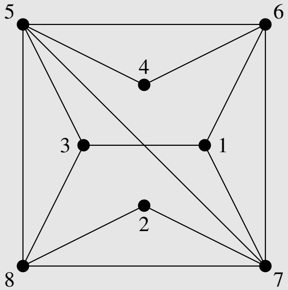
Ejemplo

Un grafo G que es isomorfo a su complemento: $G \cong G^c$.

Ejemplo

Un grafo G (a la izquierda) que es isomorfo a su complemento (a la derecha): $G \cong G^c$.





Ejercicio

Determina la relación entre los grados en G y los grados en G^c.

Ejercicio

Determina la relación entre los grados en G y los grados en G^c.

Solución

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden n. Para todo vértice $v\in V$ se cumple

$$\delta_{G^c}(v)=n-1-\delta_G(v).$$

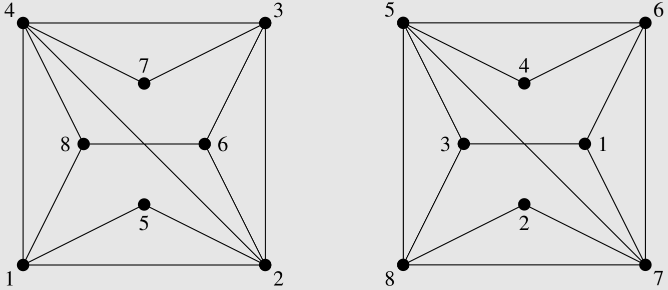
Ejercicio

Determina la relación entre los grados en G y los grados en G^c.

Solución

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden n. Para todo vértice $v \in V$ se cumple

$$\delta_{G^c}(v) = n-1-\delta_G(v).$$



Ejercicio

Determina una fórmula para calcular la medida de G^c.

Ejercicio

Determina una fórmula para calcular la medida de G^c.

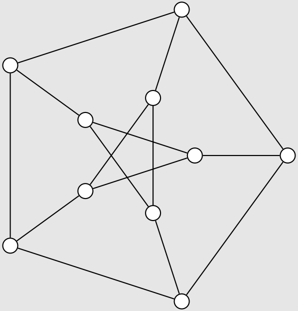
Solución:

$$n(G^c) = n(G)$$

$$m(G^c) = \binom{n(G)}{2} - m(G).$$

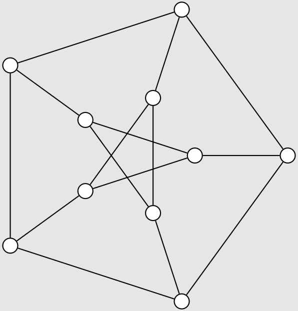
Ejercicio

Calcula la medida del complemento del grafo de Petersen mostrado en la figura.



Ejercicio

Calcula la medida del complemento del grafo de Petersen mostrado en la figura.



Solución:

$$m(G) = \frac{n\delta}{2} = 15 \longrightarrow m(G^c) = \binom{10}{2} - 15 = 30.$$

Ejercicio

Si $G = (V, E)$ es un grafo de orden $n = 6$, demuestra que G o su complemento G^c contiene algún triángulo.

Ejercicio

Si $G=(V,E)$ es un grafo de orden $n=6$, demuestra que G o su complemento G^c contiene algún triángulo.

Solución

Sea α uno de los seis vértices de G. Distribuimos los cinco vértices restantes en dos "cajas" de este modo: en la caja 1 ponemos los adyacentes a α, y en la caja 2 los que no son adyacentes a α. Dado que $5>2\cdot 2$, podemos afirmar que en una de las cajas hay por lo menos tres vértices. Supongamos que en la caja 1 se encuentran los vértices β, γ, δ. Si dos de ellos, digamos β y γ, son adyacentes, entonces α, β, γ forman un triángulo. Si ningún par de vértices entre β, γ, δ son adyacentes, entonces β, γ, δ están mutuamente conectados en el complemento (forman un triángulo en G^c). Un razonamiento análogo se puede realizar si es la caja 2 la que contiene tres (o más) vértices.

Ejercicio

Sea G un grafo de orden $n = 12$, donde $\delta_G(v) \in \{5, 7\}$ para todo vértice v de G. Además, la medida del complemento de G es $m(G^c) = 31$.

1. Calcula el número de vértices de grado 5 en G. Calcula también el número de vértices de grado 7.
2. Determina la secuencia de grados de G^c.

Ejercicio

Sea G un grafo de orden $n = 12$, donde $\delta_G(v) \in \{5,7\}$ para todo vértice v de G. Además, la medida del complemento de G es $m(G^c) = 31$.

1. Calcula el número de vértices de grado 5 en G. Calcula también el número de vértices de grado 7.
2. Determina la secuencia de grados de G^c.

Solución

1. Sea x_5 el número de vértices de grado 5 en G, y sea x_7 el número de vértices de grado 7. Como la medida de G es $m(G) = \frac{12 \cdot 11}{2} - 31 = 35$, según la fórmula de los grados, $5x_5 + 7x_7 = 70$. Además, $x_5 + x_7 = n = 12$. Por lo tanto, $x_5 = 7$ y $x_7 = 5$.
2. En G^c el grado de cada vértice v es $\delta_{G^c}(v) = 11 - \delta_G(v)$. Por lo tanto, la secuencia de grados de G^c es: $6,6,6,6,6,6,6,4,4,4,4,4$.

Grafo línea

Definición

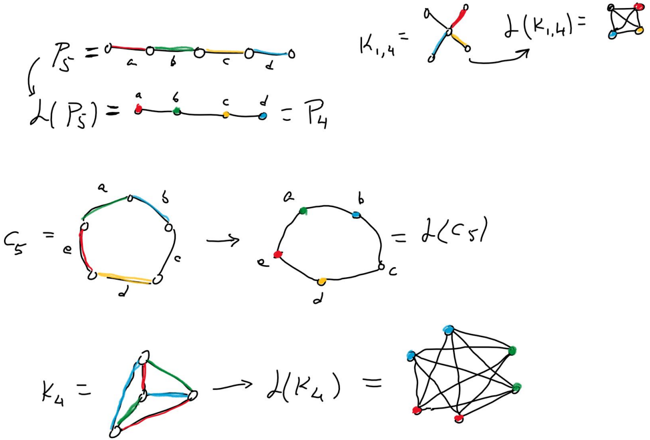
El **grafo línia** de un grafo $G = (V, E)$ de medida $m \geq 1$ es un grafo $L(G) = (E, E')$ tal que los vértices de $L(G)$ son las aristas de G y dos vértices son adyacentes en $L(G)$ si y sólo si las aristas correspondientes tienen un vértice en común.

Ejercicio

Determina el grafo línea de los siguientes grafos: P_n, $K_{1,n-1}$, C_n y K_4.

Solución

$L(P_n) \cong P_{n-1}$, $L(K_{1,n-1}) \cong K_{n-1}$, $L(C_n) \cong C_n$, $L(K_4) \cong K_6 - F$.



Ejercicio

Sea G un grafo de medida $m \geq 1$. Determina el máximo entero r tal que K_r es un subgrafo de $L(G)$.

Ejercicio

Sea G un grafo de medida $m \geq 1$. Determina el máximo entero r tal que K_r es un subgrafo de $L(G)$.

Solución:

Sea $\Delta(G) = \text{máx}\{\delta(v) : v \in V(G)\}$. Sabemos que dos vértices de $L(G)$ son adyacentes si las aristas correspondientes en G tienen un vértice en común. Además, $L(K_3) \cong K_3$. Por lo tanto, si G no tiene triángulos, entonces $r = \Delta(G)$ y, si G tiene triángulos, entonces $r = \text{máx}\{\Delta(G), 3\}$. $\square$

Ejercicio

Determina una fórmula para la medida de $L(G)$.

Ejercicio

Determina una fórmula para la medida de $L(G)$.

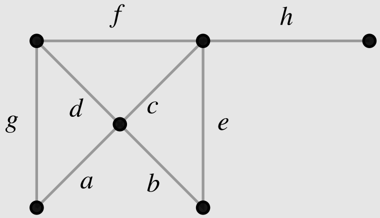
Solución:

Para calcular la medida de $L(G)$ es suficiente observar que dos aristas de G son adyacentes en $L(G)$ si y sólo si son incidentes a un mismo vértice de G. Por lo tanto la medida de $L(G)$ se puede calcular a partir de la secuencia de grados de G:

$$m(L(G)) = \sum_{v\in V(G):\delta(v)\geq 2} \binom{\delta(v)}{2} = \sum_{v\in V(G)} \frac{\delta(v)(\delta(v)-1)}{2}.$$

Ejercicio

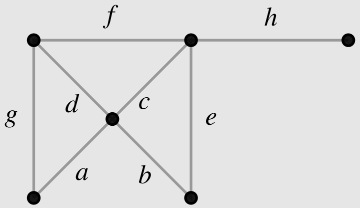
Sea G el grafo de la figura.

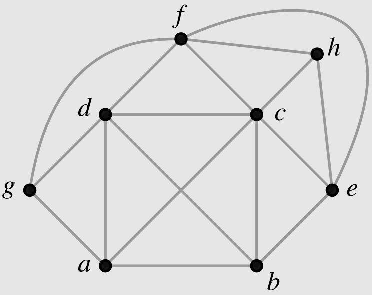


(a) Representa gráficamente el grafo línea de G, denotado por $L(G)$.

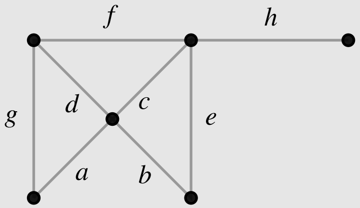
(b) Calcula el número de aristas del complemento de $L(G)$.

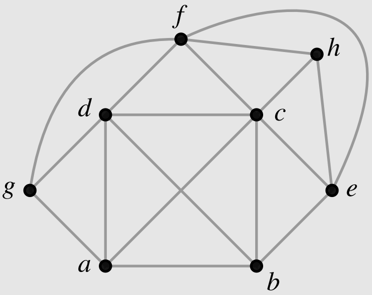
Solución





Solución





$$m((L(G))^c) = \binom{8}{2} - m(L(G)) = 28 - 17 = 11.$$

Unión de grafos

Definición

La **unión** de dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, donde $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, es el grafo

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2).$$

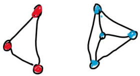
Definición

La **unión** de dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, donde $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, es el grafo
$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2).$$

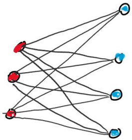
Ejemplo

$(K_r \cup K_s)^c = K_{r,s}$.

$K_3 \cup K_4 =$

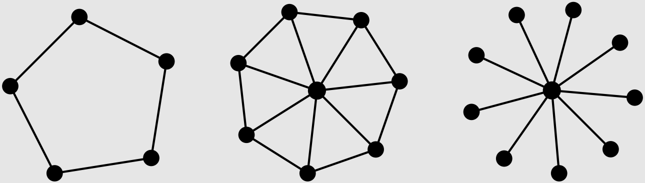


$(K_3 \cup K_4)^c =$



Ejemplo

El grafo de la siguiente figura se puede expresar como $G = C_5 \cup W_8 \cup K_{1,9}$.



Suma de grafos, "+"(join)

Definición

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos tales que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. La **suma** $G_1 + G_2$ es el grafo

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{u, v\} : u \in V_1,\ v \in V_2\}).$$

Definición

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. La **suma** $G_1 + G_2$ es el grafo

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{u,v\} : u \in V_1,\ v \in V_2\}).$$

Ejemplo

Los siguientes grafos se obtienen como suma de grafos conocidos.

- $K_{r+s} = K_r + K_s$.
- $K_{r,s} = N_r + N_s$

Ejercicio

Determina una fórmula para la medida de $G+H$.

Ejercicio

Determina una fórmula para la medida de $G+H$.

Solución:

El grafo $G+H$ se obtiene tomando una copia del grafo G y una del grafo H y luego uniendo cada vértice de G con todos los de H. Por lo tanto, la medida de $G+H$ es

$$m(G+H) = m(G) + m(H) + n(G) \cdot n(H).$$

Ejercicio

Determina la medida de $G = (K_4 \cup K_3)^c + P_4$.

Ejercicio

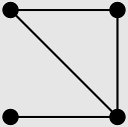
Determina la medida de $G=(K_4\cup K_3)^c+P_4$.

Solución:

$$m(G)=m(K_{4,3})+m(P_4)+n(K_{4,3})\cdot n(P_4)=12+3+28=43.$$

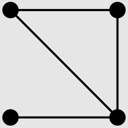
Ejercicio

Expresa el grafo de la figura mediante operaciones de grafos.



Ejercicio

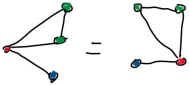
Expresa el grafo de la figura mediante operaciones de grafos.



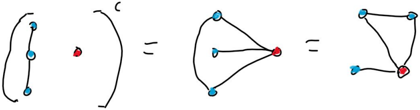
Solución:

$$G = K_1 + (K_2 \cup K_1) = (P_3 \cup K_1)^c.$$

$K_1 + (K_2 \cup K_1) =$

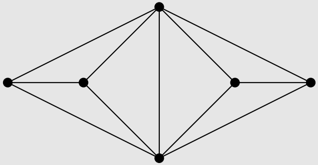


$(P_3 \cup K_1)^c =$



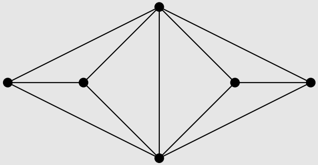
Ejercicio

Expresa el grafo de la figura mediante operaciones de grafos.



Ejercicio

Expresa el grafo de la figura mediante operaciones de grafos.



Solución

$G = K_1 + (K_1 + (K_2 \cup K_2)) = K_2 + (K_2 \cup K_2) = (N_2 \cup C_4)^c$.

Producto cartesiano de grafos

Definición [Harary 1969]

Dados los grafos $G = (V_1, E_1)$, $H = (V_2, E_2)$, se define el **producto cartesiano** $G \Box H = (V_1 \times V_2, E)$ de manera que los vértices (g_1, h_1), (g_2, h_2) son adyacentes si y sólo si se cumple *alguna* de las condiciones siguientes:

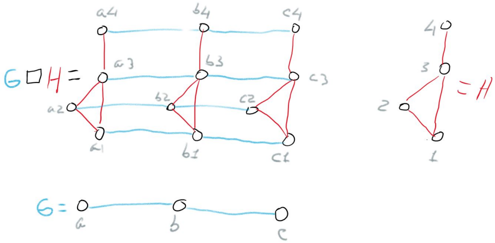
1. $g_1 = g_2$ y $h_1 \sim h_2$.
2. $g_1 \sim g_2$ y $h_1 = h_2$.

Definición [Harary 1969]

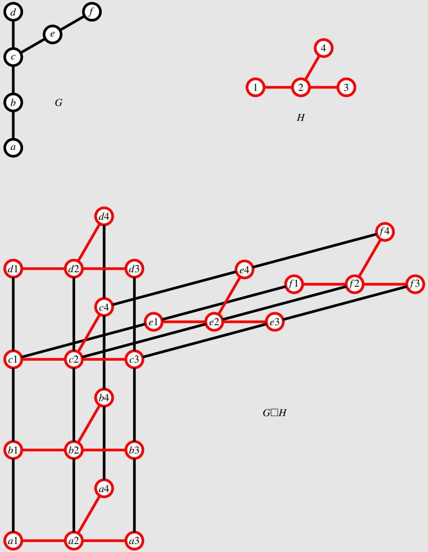
Dados los grafos $G=(V_1,E_1)$, $H=(V_2,E_2)$, se define el **producto cartesiano** $G\square H=(V_1\times V_2,E)$ de manera que los vértices (g_1,h_1), (g_2,h_2) son adyacentes si y sólo si se cumple *alguna* de las condiciones siguientes:

1. $g_1=g_2$ y $h_1\sim h_2$.
2. $g_1\sim g_2$ y $h_1=h_2$.

Ejemplo



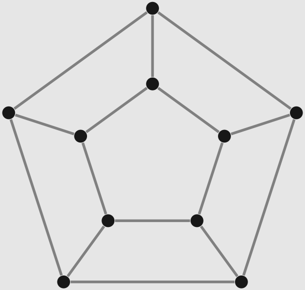
Ejemplo

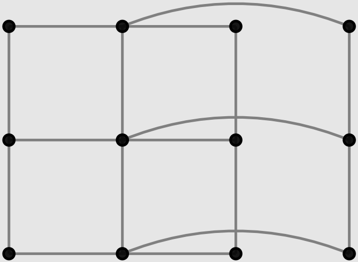


d
f
e
c
b
G
a
4
1
2
3
H
d4
f4
d1
d2
d3
e4
f1
f2
f3
c4
e1
e2
e3
c1
c2
c3
b4
G□H
b1
b2
b3
a4
a1
a2
a3

Ejemplo

La siguiente figura muestra los grafos $C_5 \Box K_2$ y $K_{1,3} \Box P_3$.





Proposición

Si F, G y H son grafos, entonces

1. $G \square H \cong H \square G$.
2. $F \square (G \square H) \cong (F \square G) \square H$.

Proposición

Si F, G y H son grafos, entonces

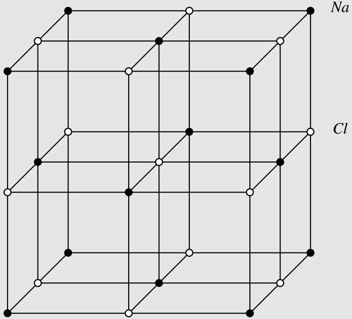
1. $G \square H \cong H \square G$.
2. $F \square (G \square H) \cong (F \square G) \square H$.

Demostración

Ver apuntes.

Ejemplo: Red cristalina iónica

Los compuestos iónicos en estado sólido forman estructuras cristalinas reticulares. Los dos factores principales que determinan la forma de la red cristalina son las cargas relativas de los iones y sus tamaños relativos. La siguiente figura muestra la red cristalina del NaCl. Esta representación corresponde al grafo $P_3 \square P_3 \square P_3$.



Ejercicio

- Determina una fórmula para el grado de los vértices de $G\square H$.
- Determina una condición necesaria y suficiente para que $G\square H$ sea regular.

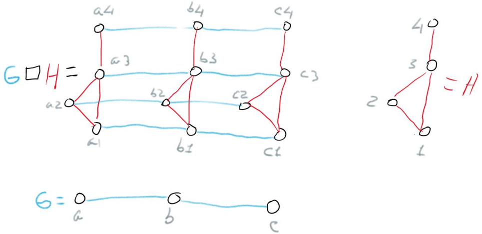
Ejercicio

- Determina una fórmula para el grado de los vértices de $G\Box H$.
- Determina una condición necesaria y suficiente para que $G\Box H$ sea regular.

Solución

- El grado de un vértice (g,h) en $G\Box H$ es

$$\delta_{G\Box H}(g,h) = \delta_G(g) + \delta_H(h).$$



Ejercicio

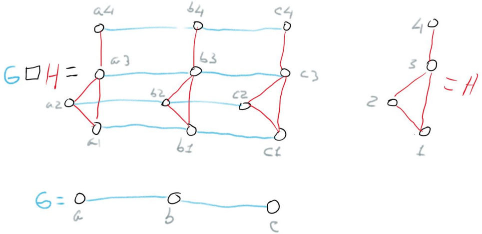
- Determina una fórmula para el grado de los vértices de $G\Box H$.
- Determina una condición necesaria y suficiente para que $G\Box H$ sea regular.

Solución

- El grado de un vértice (g,h) en $G\Box H$ es

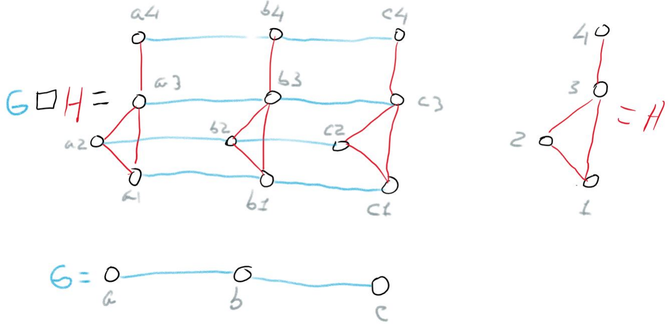
$$\delta_{G\Box H}(g,h) = \delta_G(g) + \delta_H(h).$$

- $G\Box H$ es regular si y sólo si G y H son regulares.



Ejercicio

Determina una fórmula para el orden y la medida de $G_1 \square G_2$.



Ejercicio

Determina una fórmula para el orden y la medida de $G_1 \Box G_2$.

Solución:

Sea $G_i = (V_i, E_i)$, $i \in \{1,2\}$. El orden de $G_1 \Box G_2$ es $n(G_1 \Box G_2) = |V_1 \times V_2| = n(G_1) \cdot n(G_2)$ y la medida de $G_1 \Box G_2$ se calcula por la fórmula de los grados:

$$
\begin{aligned}
2m(G_1 \Box G_2) &= \sum_{(a,b) \in V_1 \times V_2} (\delta_{G_1}(a) + \delta_{G_2}(b)) \\
&= \sum_{a \in V_1} \left(\sum_{b \in V_2} (\delta_{G_1}(a) + \delta_{G_2}(b)) \right) \\
&= \sum_{a \in V_1} (n(G_2) \cdot \delta_{G_1}(a) + 2m(G_2)) \\
&= 2n(G_2) \cdot m(G_1) + 2m(G_2) \cdot n(G_1).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $m(G_1 \Box G_2) = n(G_1) \cdot m(G_2) + m(G_1) \cdot n(G_2)$.

¿Cómo podemos definir los hipercubos?

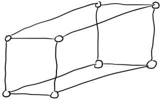
Definición. Familia de **hipercubos**

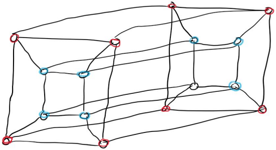
La familia de los hipercubos Q_k se define por recurrencia:

- $Q_k = Q_{k-1} \square K_2$, $k \geq 2$.
- $Q_1 = K_2$.

$Q_1 = K_2 =$ 

$Q_2 = Q_1 \square K_2 = K_2 \square K_2 =$ 

$Q_3 = Q_2 \square K_2 = C_4 \square K_2 =$ 

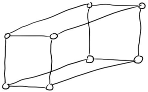
$Q_4 = Q_3 \square K_2 =$ 

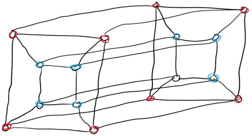
Ejercicio

Determina el orden y la medida del hipercubo Q_k.

$Q_1 = K_2 =$ 

$Q_2 = Q_1 \square K_2 = K_2 \square K_2 =$ 

$Q_3 = Q_2 \square K_2 = C_4 \square K_2 =$ 

$Q_4 = Q_3 \square K_2 =$ 

Ejercicio

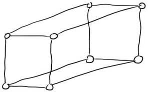
Determina el orden y la medida del hipercubo Q_k.

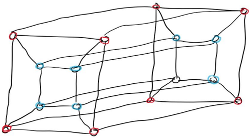
Solución:

Orden $n = 2^k$, grado $\delta = k$ y medida $m = \frac{n\delta}{2} = k2^{k-1}$.

$Q_1 = K_2 =$ 

$Q_2 = Q_1 \square K_2 = K_2 \square K_2 =$ 

$Q_3 = Q_2 \square K_2 = C_4 \square K_2 =$ 

$Q_4 = Q_3 \square K_2 =$ 

Ejercicio

Calcula la medida del complemento de $Q_3 \square P_4$.

Ejercicio

Calcula la medida del complemento de $Q_3 \Box P_4$.

Solución:

La medida de $Q_3 \Box P_4$ es

$$m(Q_3 \Box P_4) = m(Q_3)n(P_4) + n(Q_3)m(P_4) = 72.$$

La medida de $(Q_3 \Box P_4)^c$ es

$$m((Q_3 \Box P_4)^c) = \binom{32}{2} - m(Q_3 \Box P_4) = 496 - 72 = 424.$$

Ejercicio

Sea G un grafo δ-regular y sea $H = (G \square K_2) \square C_4$.

(1) Calcula el grado de los vértices de H.

(2) Sabiendo que $\delta = 3$ y que la medida de H es 192, calcula el orden de G.

(3) Con los datos del apartado anterior, calcula la medida del complemento de H.

Ejercicio

Sea G un grafo δ-regular y sea $H = (G \square K_2) \square C_4$.

(1) Calcula el grado de los vértices de H.

(2) Sabiendo que $\delta = 3$ y que la medida de H es 192, calcula el orden de G.

(3) Con los datos del apartado anterior, calcula la medida del complemento de H.

Solución:

(1) El grafo H es regular de grado $\delta + 3$.

Ejercicio

Sea G un grafo δ-regular y sea $H = (G \square K_2) \square C_4$.

(1) Calcula el grado de los vértices de H.

(2) Sabiendo que $\delta = 3$ y que la medida de H es 192, calcula el orden de G.

(3) Con los datos del apartado anterior, calcula la medida del complemento de H.

Solución:

(1) El grafo H es regular de grado $\delta + 3$.

(2) Sea x el orden de G. Como H es 6-regular y su orden es $n(H) = 8x$, su medida es $m(H) = \frac{8x \cdot 6}{2} = 192$. Por lo tanto, el orden de G es $x = 8$.

Ejercicio

Sea G un grafo δ-regular y sea $H = (G \square K_2) \square C_4$.

(1) Calcula el grado de los vértices de H.

(2) Sabiendo que $\delta = 3$ y que la medida de H es 192, calcula el orden de G.

(3) Con los datos del apartado anterior, calcula la medida del complemento de H.

Solución:

(1) El grafo H es regular de grado $\delta + 3$.

(2) Sea x el orden de G. Como H es 6-regular y su orden es $n(H) = 8x$, su medida es $m(H) = \frac{8x \cdot 6}{2} = 192$. Por lo tanto, el orden de G es $x = 8$.

(3) $m(H^c) = \binom{8x}{2} - 192 = \binom{64}{2} - 192 = 1824$.

Proposición

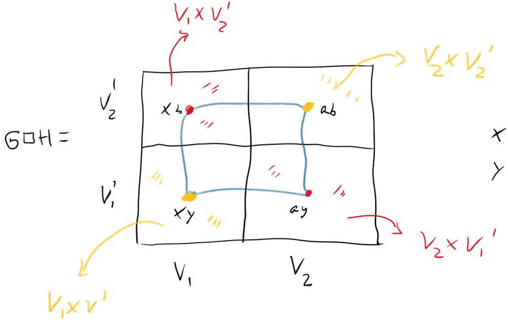
Si G y H son grafos bipartitos, entonces $G \square H$ es bipartito.

Proposición

Si G y H son grafos bipartitos, entonces $G \square H$ es bipartito.

Demostración:

$G = (V_1 \cup V_2, E)$, $H = (V_1' \cup V_2', E')$



$x \sim a$ en G
$y \sim b$ en H

$\langle V_1 \times V_1' \rangle$ = nulo
$\langle V_2 \times V_1' \rangle$ = nulo
$\langle V_2 \times V_2' \rangle$ = nulo
$\langle V_1 \times V_2' \rangle$ = nulo

Proposición

Si G y H son grafos bipartitos, entonces $G\Box H$ es bipartito.

Demostración:

Sea $G=(V_1\cup V_2,E)$ y $H=(V_1'\cup V_2',E')$. Es suficiente observas que en $G\Box H$,

- los subgrafos $\langle V_1\times V_1'\cup V_2\times V_2'\rangle$ y $\langle V_1\times V_2'\cup V_2\times V_1'\rangle$ son nulos
- las aristas de $G\Box H$ van del conjunto $V_1\times V_1'\cup V_2\times V_2'$ al conjunto $V_1\times V_2'\cup V_2\times V_1'$.

Proposición

Si G y H son grafos bipartitos, entonces $G\square H$ es bipartito.

Demostración:

Sea $G=(V_1\cup V_2,E)$ y $H=(V_1'\cup V_2',E')$. Es suficiente observas que en $G\square H$,

- los subgrafos $\langle V_1\times V_1'\cup V_2\times V_2'\rangle$ y $\langle V_1\times V_2'\cup V_2\times V_1'\rangle$ son nulos
- las aristas de $G\square H$ van del conjunto $V_1\times V_1'\cup V_2\times V_2'$ al conjunto $V_1\times V_2'\cup V_2\times V_1'$.

Corolario

Todo hipercubo es bipartito.

Producto fuerte de grafos

Definición

Dados los grafos $G=(V_1,E_1)$, $H=(V_2,E_2)$, se define el **producto fuerte** $G\boxtimes H=(V_1\times V_2,E)$ de manera que los vértices (g_1,h_1), (g_2,h_2) son adyacentes si, y sólo si, se cumple *alguna* de las condiciones siguientes:

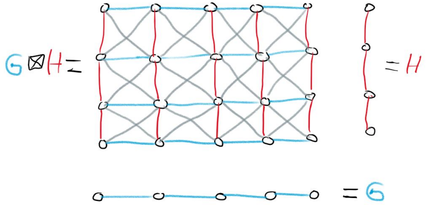
1. $g_1=g_2$ y $h_1\sim h_2$
2. $g_1\sim g_2$ y $h_1=h_2$
3. $g_1\sim g_2$ y $h_1\sim h_2$

Definición

Dados los grafos $G=(V_1,E_1)$, $H=(V_2,E_2)$, se define el **producto fuerte** $G\boxtimes H=(V_1\times V_2,E)$ de manera que los vértices (g_1,h_1), (g_2,h_2) son adyacentes si, y sólo si, se cumple *alguna* de las condiciones siguientes:

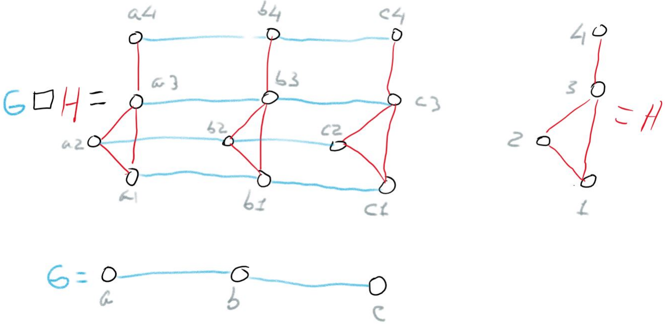
1. $g_1=g_2$ y $h_1\sim h_2$
2. $g_1\sim g_2$ y $h_1=h_2$
3. $g_1\sim g_2$ y $h_1\sim h_2$

Ejemplo



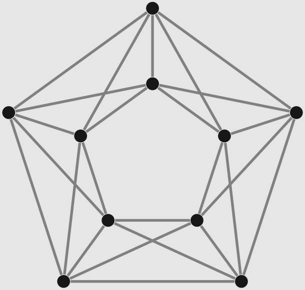
Ejemplo

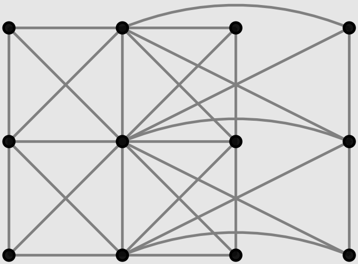
Construye $G \boxtimes H$ a partir de $G \Box H$.



Ejemplo

La siguiente figura muestra los grafos $C_5 \boxtimes K_2$ y $K_{1,3} \boxtimes P_3$.





Ejercicio

Determina el grado de un vértice (a, b) de $G_1 \boxtimes G_2$.

Ejercicio

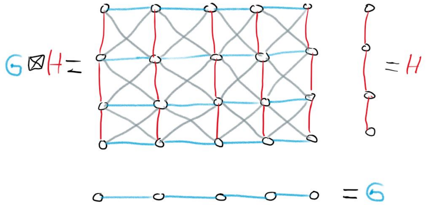
Determina el grado de un vértice (a,b) de $G_1 \boxtimes G_2$.

Solución

El grado de un vértice (a,b) en $G_1 \boxtimes G_2$ es

$$\delta_{G_1 \boxtimes G_2}(a,b) = \delta_{G_1}(a) + \delta_{G_2}(b) + \delta_{G_1}(a) \cdot \delta_{G_2}(b).$$

Por lo tanto, el producto fuerte de grafos regulares es un grafo regular.



Ejercicio

Determina una fórmula para la medida de $G_1 \boxtimes G_2$.

Ejercicio

Determina una fórmula para la medida de $G_1 \boxtimes G_2$.

Solución:

Aplicando la fórmula de los grados obtenemos la medida de $G_1 \boxtimes G_2$:

$$\begin{aligned} 2m(G_1 \boxtimes G_2) &= \sum_{(a,b)\in V_1\times V_2} \delta_{G_1\boxtimes G_2}(a,b) \\ &= \sum_{a\in V_1}\sum_{b\in V_2} \left(\delta_{G_1}(a) + \delta_{G_2}(b) + \delta_{G_1}(a)\cdot\delta_{G_2}(b)\right) \\ &= \sum_{a\in V_1} \left(n(G_2)\delta_{G_1}(a) + 2m(G_2) + 2\delta_{G_1}(a)m(G_2)\right) \\ &= 2n(G_2)\cdot m(G_1) + 2m(G_2)\cdot n(G_1) + 4m(G_1)\cdot m(G_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la medida de $G_1 \boxtimes G_2$ es

$$m(G_1 \boxtimes G_2) = n(G_2)\cdot m(G_1) + m(G_2)\cdot n(G_1) + 2m(G_1)\cdot m(G_2).$$

Observación

Nótese, que el producto fuerte es “conmutativo”, en el siguiente sentido:

$$G \boxtimes H \cong H \boxtimes G.$$

Además, el producto fuerte es asociativo.

Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $G = [(K_{2,3} \cup K_{3,3})^c \Box (P_3 \boxtimes K_6)] + K_{2,5}$

Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $G=[(K_{2,3}\cup K_{3,3})^c\Box(P_3\boxtimes K_6)]+K_{2,5}$

Solución:

El orden es

$$n(G)=n((K_{2,3}\cup K_{3,3})^c\Box(P_3\boxtimes K_6))+7=(11\cdot 18)+7=198+7=205.$$

Haciendo $G_1=(K_{2,3}\cup K_{3,3})^c$ y $G_2=P_3\boxtimes K_6$ se obtiene:
$m(G_1)=\binom{11}{2}-m(K_{2,3}\cup K_{3,3})=40$
$m(G_2)=m(P_3)n(K_6)+n(P_3)m(K_6)+2m(P_3)m(K_6)=117.$

$$\begin{aligned} m(G) &= m(G_1)n(G_2)+n(G_1)m(G_2)+10+198\cdot 7\\ &=(40\cdot 18+11\cdot 117)+10+198\cdot 7\\ &=3403. \end{aligned}$$

Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $G = [(K_3 + Q_3) \boxtimes (Q_3 \square K_{3,3})]^c$

Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $G = [(K_3 + Q_3) \boxtimes (Q_3 \Box K_{3,3})]^c$

Solución:

El orden es

$$n(G) = n(K_3 + Q_3)n(Q_3 \Box K_{3,3}) = 11 \cdot 48 = 528.$$

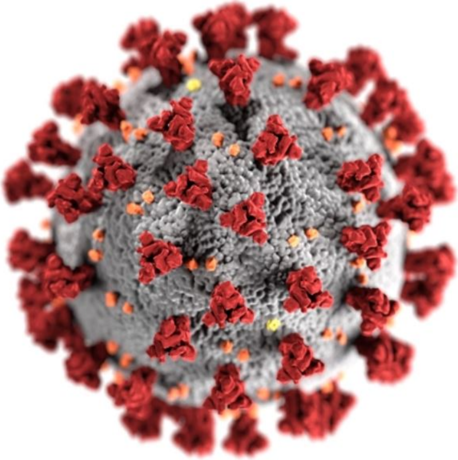
Haciendo $G_1 = K_3 + Q_3$ y $G_2 = Q_3 \Box K_{3,3}$ se obtiene

$$\begin{aligned} m(G_1 \boxtimes G_2) &= m(G_1)n(G_2) + n(G_1)m(G_2) + 2m(G_1)m(G_2) \\ &= 39 \cdot 48 + 11 \cdot 144 + 2 \cdot 39 \cdot 144. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$m(G) = \binom{528}{2} - m(G_1 \boxtimes G_2) = 124440,$$

Producto corona de grafos



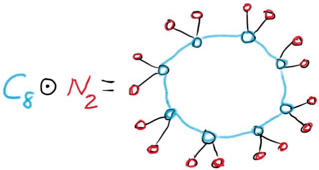
Definición

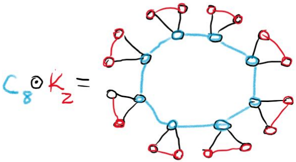
Sean G y H dos grafos. El **producto corona** $G \odot H$ se define a partir de G y H tomando una copia de G y $n(G)$ copias de H, y uniendo (con una arista) cada vértice de la i-ésima copia de H con el i-ésimo vértice de G.

Definición

Sean G y H dos grafos. El **producto corona** $G \odot H$ se define a partir de G y H tomando una copia de G y $n(G)$ copias de H, y uniendo (con una arista) cada vértice de la i-ésima copia de H con el i-ésimo vértice de G.

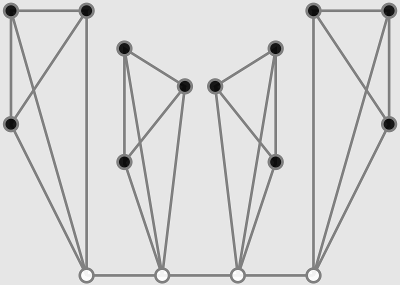
Ejemplos

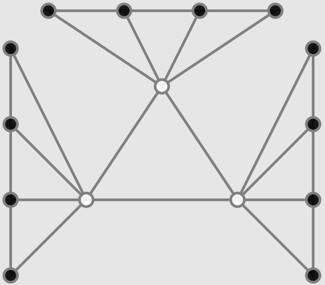




Ejemplo

La siguiente figura muestra los grafos corona $P_4 \odot C_3$ y $C_3 \odot P_4$.





Ejercicio

Determina una fórmula para el orden y la media de $G \odot H$.

Ejercicio

Determina una fórmula para el orden y la media de $G \odot H$.

Solución:

El orden de $G \odot H$ es

$$n(G \odot H) = n(G) + n(G)n(H) = n(G)(1 + n(H))$$

y la medida es

$$m(G \odot H) = m(G) + n(G)m(H) + n(G)n(H).$$

Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $G = (C_8 \odot N_6) \square (C_7)^c$

Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $G = (C_8 \odot N_6) \Box (C_7)^c$

Solución:

El orden es

$$n(G) = n(C_8 \odot N_6) \cdot 7 = (8 + 8 \cdot 6) \cdot 7 = 392$$

y la medida es

$$m(G) = 56 \cdot 14 + 56 \cdot 7 = 1176.$$

Producto lexicográfico de grafos

Definición

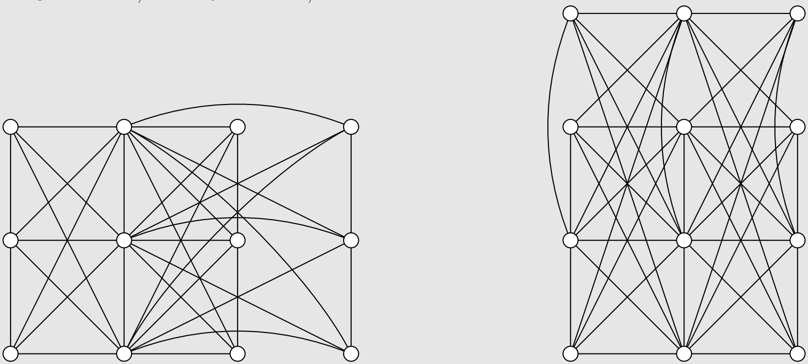
El *producto lexicografico* de dos grafos G y H es el grafo $G \circ H$ cuyo conjunto de vértices es $V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$ y $(g,h)(g',h') \in E(G \circ H)$ si y solo si $gg' \in E(G)$ o $g = g'$ y $hh' \in E(H)$.

Definición

El *producto lexicografico* de dos grafos G y H es el grafo $G \circ H$ cuyo conjunto de vértices es $V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$ y $(g,h)(g',h') \in E(G \circ H)$ si y solo si $gg' \in E(G)$ o $g = g'$ y $hh' \in E(H)$.

Ejemplos

Los grafos $K_{1,3} \circ P_3$ y $P_3 \circ K_{1,3}$.



Ejercicio

Determina una fórmula para el grado de (g,h) en $G \circ H$,

Ejercicio

Determina una fórmula para el grado de (g,h) en $G \circ H$,

Solución:

$\delta_{G\circ H}(g,h) = \delta_G(g)n(H) + \delta_H(h)$.

Ejercicio

Determina una fórmula para la medida de $G \circ H$.

Ejercicio

Determina una fórmula para la medida de $G \circ H$.

Solución:

Sea $G = (V_1, E_1)$ y $H = (V_2, E_2)$. El orden de $G \circ H$ es

$$n(G \circ H) = |V_1||V_2| = n(G)n(H).$$

Para la medida tenemos,

$$\begin{aligned} 2m(G \circ H) &= \sum_{(g,h) \in V_1 \times V_2} \delta_{G \circ H}(g,h) \\ &= \sum_{g \in V_1} \sum_{h \in V_2} (\delta_G(g) n(H) + \delta_H(h)) \\ &= \sum_{a \in V_1} \Big((n(H))^2 \cdot \delta_G(g) + 2m(H) \Big) \\ &= 2(n(H))^2 \cdot m(G) + 2m(H) \cdot n(G). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la medida de $G \circ H$ es $m(G \circ H) = m(G) \cdot (n(H))^2 + n(G) \cdot m(H)$. $\square$

Observación

En general, el producto lexicográfico no es conmutativo.

Ejercicio

Demuestra que para todo grafo G y todo entero $n \geq 1$,

$$G \circ K_n \cong K_n \boxtimes G.$$