

# Conservació de la massa, del moment i de l'energia

# Índex

<b>Contingut</b>	<b>2</b>
3.1 Introducció i objectius	2
3.2 Descripcions Euleriana i Lagrangiana	2
3.3 Línies de corrent i trajectòries	4
3.4 Conservació de la matèria	6
3.5 Conservació del moment	10
3.6 Conservació de l'energia	13
3.7 L'equació de Bernoulli	15
3.8 Vorticitat i circulació	17
3.9 Potencial de velocitat	21
3.10 La funció de corrent	22
3.11 El potencial complex $F$	26
<b>Bibliografia</b>	<b>36</b>
<b>Complements formatius</b>	<b>37</b>
<b>Exercicis</b>	<b>39</b>

# Contingut

## 3.1 Introducció i objectius

Les equacions que governen el moviment dels fluids expressen lleis físiques ben establertes: la conservació de la massa, del moment i de l'energia (l'energia no es conserva als fluids reals, a causa de les forces viscoses). Com que el fluid és un medi continu i deformable, en lloc de masses puntuals aïllades, l'anàlisi es realitza en termes de balanços microscòpics: són les equacions diferencials del moviment per als camps hidrodinàmics (densitat, velocitat, temperatura).

Els objectius que volem assolir són

- ▶ Introduir els punts de vista Lagrangia i Euleria de la cinemàtica dels fluids, la derivada material, les línies de corrent i les trajectòries de les partícules fluides.
- ▶ Introduir la vorticitat com a velocitat angular local, i la circulació, com a camps derivats de la velocitat.
- ▶ Formular l'equació d'Euler per al flux invíscid (no viscos).
- ▶ Enunciar la condició de flux incompressible

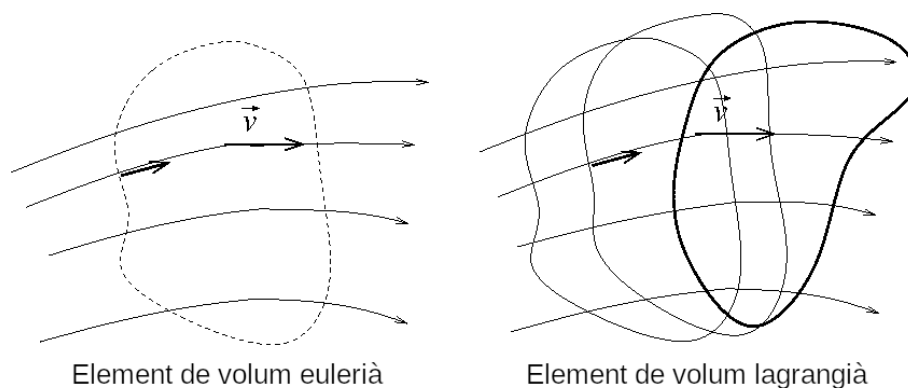
Els conceptes d'aquest tema es basen en els continguts dels llibres de ([Panton, 2013](#), pàg. 54-60, 438-450), ([De las Heras, 2012](#), pàg. 27-29), ([Batchelor, 2000](#), pàg. 71-173) i ([Landau i Lifschitz, 1987](#), pàg. 1-6, 11-25).

## 3.2 Descripcions Euleriana i Lagrangiana

El primer que cal precisar és el tipus d'element de fluid que utilitzarem per al càlcul dels balanços, sigui aquest element finit o infinitesimal. Es poden fer servir dos tipus d'element de volum,

1. El volum està fixat a l'espai (cas Euleria), i el fluid pot passar lliurement a través del seu contorn.
2. El volum està adossat al fluid (concepció Lagrangiana). Aquest és una propietat del propi fluid, porta la massa i es mou amb el mateix, i no hi ha fluid a través de la frontera de l'element.

Ambdues concepcions són igualment vàlides, i hi ha mètodes en CFD basats en cadascuna, i si bé la Lagrangiana és la que connecta més directament amb la mecànica, la Euleriana és la més útil per descriure el medi continu.



**Fig. 1.** L'element de volum Eulerià està fix a l'espai, mentre que el Lagrangià es mou amb el fluid.

Si descrivim el flux d'un fluid a través les magnituds que el caracteritzen en funció de la posició  $\vec{r}$  i del temps  $t$  (per exemple, la densitat  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ , i la velocitat  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ , etc), estem utilitzant una descripció Euleriana, ja que associem cada magnitud a punts fixos de l'espai. Si descrivim el moviment del fluid en termes del sistema d'elements materials que el constitueixen (igual que a Mecànica es descriu el moviment d'objectes físics com ara masses puntuals, cossos, etc.), estem utilitzant una descripció Lagrangiana. Moltes vegades és útil perquè és més susceptible d'interpretacions intuïtives complementar la descripció Euleriana amb la descripció Lagrangiana, consistent a associar cada magnitud amb punts materials.

Com a exemple, considerem la velocitat  $\vec{v}$ . La seva variació temporal a l'entorn d'un punt fix de l'espai, és a dir,  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ , no té una interpretació física directa. En canvi, la variació temporal de la velocitat d'un punt material  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  representa l'acceleració del fluid contingut en un volum infinitesimal al voltant d'aquest punt. L'acceleració  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ , vinculada a la resultant de les forces que actuen sobre l'element material, té una interpretació física més directa que la de  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ .

Com a contrapartida, les derivades espacials de  $\vec{v}$  formen un tensor amb les components del gradient de la velocitat, que sí que té una clara interpretació física i determina en part el tensor d'esforços en els fluids viscosos. En contrast, la diferència de velocitat entre dos punts materials propers no

es pot associar amb un gradient, ja que la distància entre dos punts materials varia en general amb el temps. Per aquestes raons, cal disposar de fórmules que permetin passar amb flexibilitat d'un tipus de descripció a l'altra. Si es coneix el camp de velocitat  $\vec{v}$  a l'entorn d'un punt  $P(\vec{r}, t)$ , i  $q$  representa una magnitud escalar qualsevol, la seva derivada temporal en sentit Lagrangia, o derivada *total* o *material*  $dq/dt$  es pot relacionar amb la derivada temporal en sentit Eulerià, o derivada local  $\partial q/\partial t$ ,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_P} \frac{\partial x_P}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y_P} \frac{\partial y_P}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z_P} \frac{\partial z_P}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla q \quad (1)$$

### 3.3 Línies de corrent i trajectòries

Les línies de corrent, de traça i de trajectòria són línies de camp del flux. En un flux estacionari totes coincideixen, però difereixen quan aquest és funció del temps. Si  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  és el camp que especifica el vector velocitat del flux,

1. Les línies de corrent són una família de corbes tangents a la velocitat en cada punt i en cada instant de temps (Fig. 2). Mostren la direcció en què un element de fluid (sense massa) es mouria a cada punt, a cada moment.

Si  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{j}$  és el vector camp de velocitat, definit en cada punt del fluid, i definim

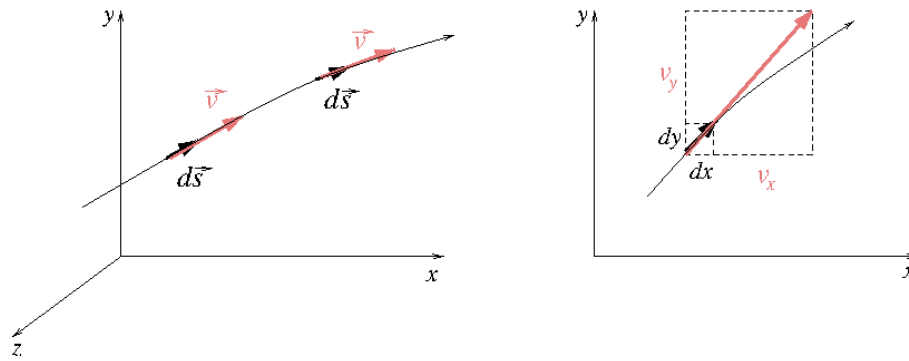
$$d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{j}$$

com una longitud d'arc infinitesimal al llarg de la línia de corrent, sent aquesta paral·lela a  $\vec{v}$  ha de ser

$$d\vec{s} \times \vec{v} = 0$$

$$(v_z dy - v_y dz) \vec{i} + (v_x dz - v_z dx) \vec{j} + (v_y dx - v_x dy) \vec{j} = 0.$$

Aquesta equació vectorial proporciona tres equacions diferencials per a les línies de corrent. Les tres components de la velocitat han d'especificar-se com a funcions de  $x, y, z$  per poder integrar la família de corbes.

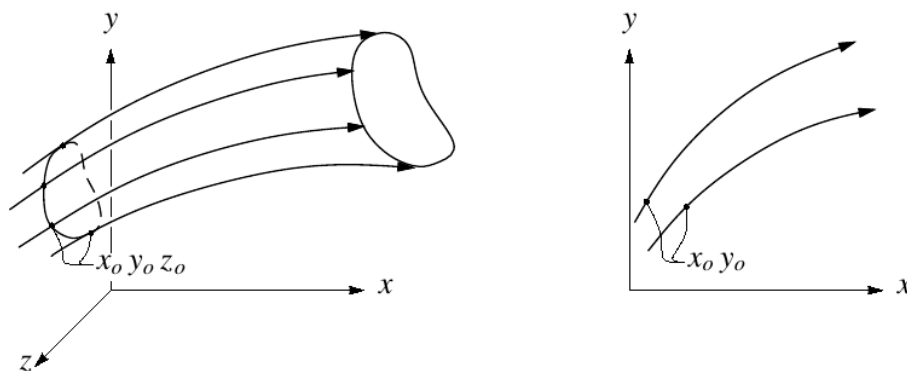


**Fig. 2.** Línies de corrente en 3D i en 2D.

En 2D,  $dz = 0$  i  $v_z = 0$ , per la qual cosa només sobreviu la component  $z$  de l'equació anterior, que es converteix en una equació diferencial ordinària per a les línies de corrent,  $y(x)$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \quad (2)$$

Un concepte útil és també el de *tub de corrent*. Considerem un conjunt de punts  $(x_0, y_0, z_0)$  del fluid que formen una línia tancada. Les línies de corrent que passen per tots aquests punts formen la superfície d'un tub de corrent (Fig. 3).



**Fig. 3.** Tub de corrent en 3D i en 2D.

2. Les línies de traça les formen els punts de les partícules fluides que han passat anteriorment i de manera contínua, a través d'un punt determinat. Per exemple, si injectem tinta o fum ininterrompudament a partir d'un punt fix en un fluid en moviment, s'estendrà al llarg d'una línia de traça. Tots els punts que la formen (no només l'extrem) s'hi mouen d'acord amb el camp instantani del flux.
3. Les línies de trajectòria són les que segueixen les partícules individu-

als. Si ens fixem en el recorregut que segueix **una** gota de tinta  $A$  que injectem, al llarg del temps tindrem la línia de trajectòria. La direcció que pren la trajectòria a cada moment queda determinada per la línia de corrent instantània que passa pel punt que ocupa la gota. Aquesta trajectòria queda descrita per les funcions  $x_A(t)$ ,  $y_A(t)$ ,  $z_A(t)$ , que poden calcular-se integrant les tres components de la velocitat  $v_x(x, y, z, t)$ ,  $v_y(x, y, z, t)$ ,  $v_z(x, y, z, t)$  al llarg de la trajectòria. La integració comença en el temps  $t_0$ , des de la posició on s'injecta la tinta  $(x_0, y_0, z_0)$ , fins al temps  $t$ .

$$x_A(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(x_A(\tau), y_A(\tau), z_A(\tau), \tau) d\tau$$

$$y_A(t) = y_0 + \int_{t_0}^t v_y(x_A(\tau), y_A(\tau), z_A(\tau), \tau) d\tau$$

$$z_A(t) = z_0 + \int_{t_0}^t v_z(x_A(\tau), y_A(\tau), z_A(\tau), \tau) d\tau$$

Per definició, diferents línies de corrent no poden intersectar al mateix instant. Dit d'una altra manera: dues línies de corrent no es poden tallar en cap punt perquè si no, aquest punt tindria definides dues velocitats.

Similarment, les línies de traça tampoc no poden creuar ni intersectar altres línies, perquè dues partícules no poden ocupar el mateix punt en el mateix instant de temps. En canvi, les trajectòries sí que es poden intersectar, a si mateixes i a altres trajectòries.

Les línies de corrent proporcionen una instantània del flux, mentre que línies de traça i trajectòries depenen de la història completa. Tant les unes com les altres s'utilitzen per obtenir informació sobre el flux i la seva història. Podeu observar un exemple on es distingeixen visualment línies de corrent, de traça i trajectòries, en el recurs sobre aquest tema que s'esmenta a l'apartat de [Complements](#)

### 3.4 Conservació de la matèria

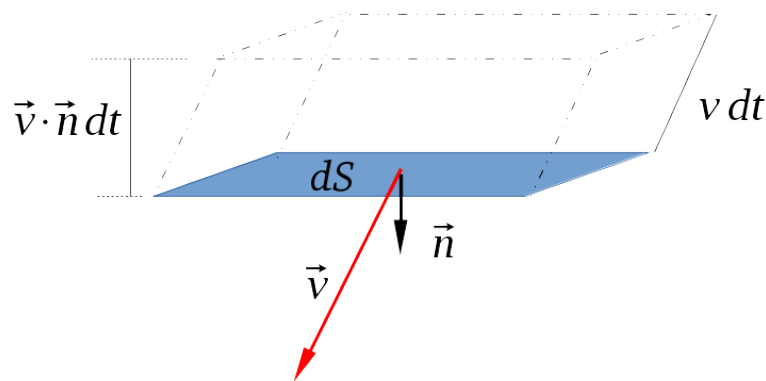
A continuació utilitzarem la idea Euleriana de l'element de volum fix. També utilitzarem el concepte de flux convectiu: s'anomena flux convectiu d'una magnitud  $\phi$  mitjançant una superfície fixa  $S$  en un sistema de referència

donat, la quantitat d'aquesta magnitud que la travessa per unitat de temps:

$$\text{flux convectiu a través de } S = \int_S \phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

on  $\vec{n}$  és el vector normal a  $S$  en cada punt.

Considerem una part  $dS$  de la superfície d'un element de volum  $dV$ . Si  $\vec{v}$  és la velocitat en aquest punt, la quantitat de fluid que travessarà  $dS$  en el temps  $dt$  és la compresa en una franja en forma de paral·lelepípede  $\vec{v} \cdot \vec{n} dt dS$ , on  $\vec{n}$  és el vector unitari normal a  $dS$ . Per la seva banda, la massa de fluid continguda en aquest paral·lelepípede és  $\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dt dS$ . Qualsevol variació de la



**Fig. 4.** La quantitat de matèria que surt a través de  $dS$  en  $dt$  es la continguda dins el paral·lelepípede de base  $dS$  i alçada  $\vec{v} \cdot \vec{n} dt$ .

massa de fluid en un element de volum,  $\rho dV$ , és deguda al flux de matèria en qualsevol sentit, a través de les cares de l'element. En un volum finit  $V$  passa el mateix. Per tant, el balanç de matèria en el volum  $V$  de fluid s'expressa com

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (3)$$

on la integral de superfície del segon membre s'estén a la superfície que envolta  $V$ . El signe del segon membre és negatiu perquè  $\vec{n}$  apunta cap a fora de l'element: si  $\vec{v}$  tingués el mateix sentit que  $\vec{n}$ , el flux seria de sortida, i es compta com a positiu el d'entrada.

Pel teorema de la divergència, la integral de superfície es pot expressar com una integral de volum,

$$\oint \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int \nabla \cdot \rho \vec{v} dV. \quad (4)$$

A més, la derivada temporal del primer membre es pot aplicar directament



com a derivada parcial dins del signe integral, ja que els elements de volum Eulerians estan fixos a l'espai,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (5)$$

per tant, finalment, obtenim

$$\int \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \right) dV = 0. \quad (6)$$

El balanç microscòpic que representa la conservació de la massa o equació de continuïtat s'escriu,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0. \quad (7)$$

En líquids, i en gasos a baixa velocitat, la densitat del fluid és essencialment constant, de manera que la conservació de la massa s'escriu com la coneguda condició de flux incompressible,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (8)$$

## Aplicació

En un tub de corrent (veure Fig. 3), a través de les línies de corrent que formen la superfície del tub no hi ha flux de matèria, ja que la velocitat és perpendicular al vector normal  $\vec{n}$  a cada punt de la superfície,  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ . Només a les seccions transversals el flux és diferent de zero. Per tant, a cadascuna, hi ha el mateix flux màssic.

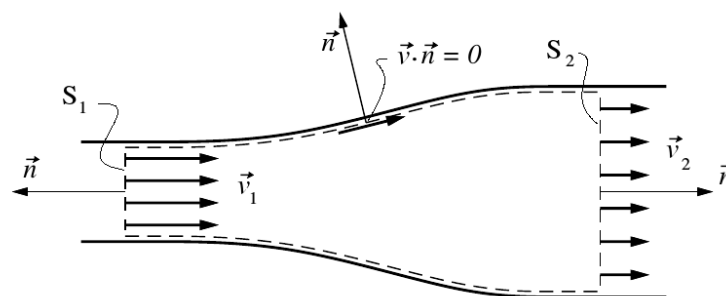
Qualsevol de les formes de l'equació de continuïtat s'utilitzen a la pràctica. La forma integral Eq. 3 juntament amb la restricció de flux estacionari,

$$\oint \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

és particularment útil en moltes aplicacions d'enginyeria. En una canonada (Fig. 5), a qualsevol porció de fluid que circula entre dues seccions  $S_1$  i  $S_2$  pot aplicar-se l'equació de continuïtat: el flux material a través de les parets de la canonada és zero, i la integral sobre les seccions 1 i 2 proporciona

$$\boxed{v_1 S_1 = v_2 S_2} \quad (9)$$

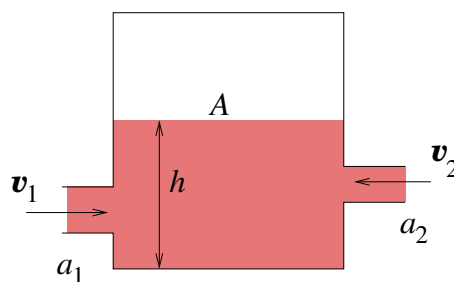
On, a la pràctica,  $v_1$  representa una velocitat mitjana sobre la secció  $S_1$ , ja que en realitat la velocitat varia punt a punt a la secció a causa de la fricció del fluid, com veurem al Tema 6.



**Fig. 5.** Volum de fluid inclòs entre dues seccions d'una canonada.

### Exemple (no estacionari): balanç de matèria

Un líquid omple un tanc de volum  $V$  per dues canonades de seccions  $a_1$  i  $a_2$ , amb velocitats mitjanes constants  $v_1$  i  $v_2$ , respectivament. La secció del tanc és  $A$ . Com varia l'alçada  $h$  del líquid en el tanc en funció del temps?



L'equació 3 aplicada sobre el líquid dins el volum  $V$  resulta<sup>1</sup>

$$\frac{d}{dt} \int_V dV = \frac{dV}{dt} = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

ja que en les condicions habituals del tràfec de líquids, aquests són incompressibles i la densitat és constant. A més a més, tenint en compte que  $dV/dt = A dh/dt$  s'obté

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a_1}{A} v_1 + \frac{a_2}{A} v_2$$

<sup>1</sup>És irrellevant si incloem o no dins el balanç de matèria l'aire que habitualment ocuparà part del tanc a mig omplir i serà desplaçat pel líquid quan aquest entra per les canonades. Suposant que l'incloem, acabarà per desaparèixer del balanç de matèria, tant si l'aire queda tancat dins de  $V$  (la massa d'aire no varia en el temps), com si el tanc queda obert i l'aire surt per un orifici a mesura que el líquid entra. Això és així perquè

$$-\rho_{\text{aire}} \frac{dh}{dt} = -\rho_{\text{aire}} v_{\text{sortida}} a_{\text{sortida}}$$

### 3.5 Conservació del moment

La quantitat de moviment és una magnitud conservada en qualsevol sistema físic en què no actuen forces externes. Com la matèria, el moment flueix a través de l'element de volum i el balanç ha de reflectir els principis de la mecànica. Això significa que la quantitat de moviment en el nostre element de volum Eulerià varia o bé perquè entra o en surt fluid net, o bé perquè actuen forces sobre ell.

El moment contingut en un element  $dV$  es pot escriure com  $\rho \vec{v} dV$ . De manera anàloga a com hem calculat el flux de matèria a l'apartat anterior, el moment que entra a través de la paret  $dS$  de l'element (el "flux de moment" a través de  $dS$ ) en un interval  $dt$ , és  $-\rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dt dS$ .

Per acabar, només cal afegir les forces que actuen sobre l'element de volum: forces màssiques,  $-\rho g \vec{j}$ , i forces de contacte a través de  $dS$ , expressades mitjançant el tensor d'esforços,  $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS$ .

Per a qualsevol porció  $V$  del fluid es té

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV & \quad \text{taxa de variació de la quantitat de moviment en } V \\ - \oint_S \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS & \quad \text{guany net de moment a través del contorn } S \text{ que} \\ & \quad \text{envolta } V, \text{ per unitat de temps} \\ - \int_V \rho g \vec{j} dV & \quad \text{pes del fluid contingut en } V \\ \oint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS & \quad \text{força de contacte exercida a través del contorn } S \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = - \oint_S \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \int_V \rho g \vec{j} dV + \oint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS \quad (10)$$

Igual que hem fet al balanç de matèria, apliquem el teorema de la divergència per convertir les integrals de superfície en integrals de volum,

$$\begin{aligned} \oint_S \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS &= \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) dV, \\ \oint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS &= \int_V \nabla \cdot \vec{\sigma} dV, \end{aligned}$$

per escriure finalment el balanç integral de moment,

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) dV + \int_V \nabla \cdot \vec{\sigma} dV - \int_V \rho g \vec{j} dV. \quad (11)$$

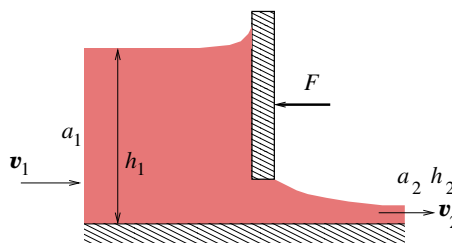
Com que aquest balanç integral no pot dependre del volum  $V$ , que és arbitrari, es pot expressar com

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \nabla \cdot \vec{\sigma} - \rho g \vec{j}, \quad (12)$$

la qual representa una equació diferencial per al transport de moment. Aquestes equacions són vàlides per a qualsevol fluid, compressible o incompressible, ideal o viscos. Certament no hem especificat el tensor d'esforços  $\vec{\sigma}$ , que en general consta de dos termes, un terme estàtic (el d'equilibri que ja vam analitzar al Tema 2), i un terme d'esforços viscosos que encara està per especificar, la qual cosa farem al Tema 4, quan estudiem el flux viscos.

### Exemple: balanç de moment estacionari

La comporta de la figura, d'amplada  $L$  en la direcció transversal al paper, controla el flux en canals oberts. A les seccions 1 i 2, considera que el flux és uniforme i la pressió és hidrostàtica.



Sense tenir en compte la fricció amb la paret inferior, quina és la força horitzontal  $F$  necessària per retenir la comporta?

Prenem un volum de control limitat per les seccions 1 i 2, el terra i un "sostre" suficientment alt per incloure tota l'alçada d'aigua així com la comporta. En aquest volum de control, farem el balanç (Eq. 10) sobre la direcció  $x$ , on els eixos coordenats prenen la direcció i sentit habituals.

L'equació de balanç del moment

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) dV + \int_V \nabla \cdot \vec{\sigma} dV - \int_V \rho g \vec{j} dV + \vec{F}. \quad (13)$$

s'escriu, terme a terme i en aquest cas particular (en la direcció  $x$ )

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_x dV = 0$$

variació del moment en el volum de control. El flux és estacionari, així que la variació és nul·la

$$\left[ - \oint_S \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS \right]_x = \rho v_1^2 h_1 L - \rho v_2^2 h_2 L$$

balanç de moment a través de les seccions 1 i 2, per unitat de temps

$$\left[ \oint_S \vec{\sigma} dS \right]_x = \rho g \frac{h_1}{2} h_1 L - \rho g \frac{h_2}{2} h_2 L$$

forces de pressió a través dels contorns en 1 i 2

El balanç s'escriu doncs

$$F = \rho v_1^2 h_1 L - \rho v_2^2 h_2 L + \rho g \frac{h_1}{2} h_1 L - \rho g \frac{h_2}{2} h_2 L$$

Òbviament no hi ha creació ni destrucció de matèria dins  $V$ , i entra per 1 la mateixa matèria que surt per 2,  $dm_1 = dm_2$ , en cada unitat de temps. Encara més, el cabal volumètric a l'entrada i la sortida és el mateix ja que l'aigua és un líquid incompressible en aquestes condicions de flux,  $\rho_1 = \rho_2$ . I la igualtat dels cabals volumètrics a l'entrada i la sortida,  $dV_1/dt = dV_2/dt$ , implica  $v_1 h_1 L = v_2 h_2 L$ .

Aquesta igualtat permet eliminar  $v_2$  en funció de  $v_1$ , i expressar  $F$  com

$$F = \frac{1}{2} \rho g L (h_1^2 - h_2^2) - \rho L v_1^2 h_1^2 \left( \frac{h_1}{h_2} - 1 \right)$$

---

### L'equació d'Euler per a la conservació del moment

En un flux invíscid, el tensor d'esforços es redueix al d'equilibri,

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

ja que els esforços tangencials són viscosos: si no hi ha viscositat, no hi ha comunicació, no hi ha transport de moment entre les diferents capes del fluid. La força que arrossega unes capes de fluid sobre les altres és viscosa.

Per això,  $\nabla \cdot \vec{\sigma} = -\nabla p$ . D'altra banda, podem fer servir el balanç de matèria per desenvolupar i substituir al primer terme de l'equació 12

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} = \vec{v}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\vec{v}\nabla \cdot (\rho\vec{v}) + \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}, \quad (14)$$

Per expandir els operadors vectorials (gradient, divergència) com a derivades parcials, és molt convenient utilitzar la notació d'Einstein, per la qual es prescindeix del símbol de sumatori  $\Sigma$  i s'entén que quan els índexs es repeteixen van sumats sobre totes les components, és a dir

$$\sum_{i=x,y,z} a_i b_i \equiv a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Així podem escriure  $\nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v})$  com  $\partial_i(\rho\partial_i v_j)$ . Apliquem la derivada del producte per escriure,

$$\partial_i(\rho v_i v_j) = \rho v_i \partial_i v_j + v_j \partial_i(\rho v_i)$$

de forma que el segon terme de 12 queda

$$\nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) = \rho\vec{v} \cdot \nabla\vec{v} + \vec{v} \nabla \cdot (\rho\vec{v}). \quad (15)$$

Sumant els dos termes de l'equació 12, és a dir 14 i 15, resulta l'equació d'Euler per a la conservació del moment,

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\vec{v} \cdot \nabla\vec{v} = -\nabla p - \rho g\vec{j} \quad (16)$$

### 3.6 Conservació de l'energia

L'energia total continguda a l'element de volum  $dV$  és  $\varepsilon dV \equiv (\rho e + \frac{1}{2}\rho v^2)dV$ , on  $e$  és la densitat d'energia interna per unitat de massa, mentre que el segon terme és la densitat d'energia cinètica. Les variacions de l'energia total es deuen a

- i) el flux d'energia a través de les parets  $dS$  de l'element,  $\varepsilon\vec{v} \cdot \vec{n}dS$
- ii) la potència de les forces que actuen sobre ell. Per una banda, la força pes, que contribueix amb el terme  $-\rho g\vec{j} \cdot \vec{v}dV$ . Per altra banda, la potència desenvolupada per les forces de contacte a través de  $dS$ :  $\vec{v} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n}dS$ .

iii) Per acabar, la potència calorífica,  $\dot{Q}dV$ . Aquest terme no el desenvoluparem.

Per a un volum arbitrari  $V$  de fluid,

$\frac{d}{dt} \int_V \varepsilon dV$	taxa de variació de l'energia
$-\oint_S \varepsilon \vec{v} \cdot \vec{n} dS$	guany net d'energia total a través del contorn $S$ que envolta $V$ , per unitat de temps
$-\int_V \rho g \vec{j} \cdot \vec{v} dV$	potència desenvolupada pel pes del volum de fluid considerat
$\int_S \vec{v} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS$	ídem per part de les forces de contacte exercides a través del contorn $S$
$\int_V \dot{Q} dV$	potència calorífica

De nou apliquem el teorema de la divergència per convertir les integrals de superfície en integrals de volum,

$$\oint_S \varepsilon \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\varepsilon \vec{v}) dV,$$

$$\oint_S \vec{v} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) dV,$$

per poder escriure finalment el balanç integral d'energia en qualsevol volum  $V$ ,

$$\int_V \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\varepsilon \vec{v}) dV + \int_V \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) dV - \int_V \rho g \vec{j} \cdot \vec{v} dV + \int_V \dot{Q} dV. \quad (17)$$

En la forma diferencial, el balanç s'escriu

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \vec{v}) = \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) - \rho g \vec{j} \cdot \vec{v} + \dot{Q}. \quad (18)$$

En absència de fonts de calor,  $\dot{Q} = 0$ , i l'energia només es conserva si no actuen forces dissipatives. Com que els fluids reals són viscosos, i les forces viscoses són dissipatives, l'energia no es conserva en general. Si suposem que els efectes viscous són menyspreables (ja veurem que això mai no és realista si hi ha parets o cossos sòlids immersos en el flux), el tensor d'esforços és com el d'equilibri,  $\vec{\sigma} = -p\mathbb{1}$ , on  $\mathbb{1}$  és la matriu identitat. Aleshores

el primer terme del segon membre de l'equació 18 es pot escriure com

$$\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) = \partial_i (\sigma_{ij} v_j) = -\partial_i (p \delta_{ij} v_j) = -\partial_i (p v_i) = \nabla \cdot (p \vec{v}),$$

on  $\delta_{ij}$  és el símbol de Kronecker, igual a 1 si els índexs es repeteixen, i 0 si són diferents. D'aquesta manera obtenim l'equació d'Euler per a la conservació de l'energia,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \vec{v}) = -\nabla \cdot (p \vec{v}) - \rho g \vec{j} \cdot \vec{v} \quad (19)$$

### 3.7 L'equació de Bernoulli

En enginyeria s'usa molt extensament l'equació de Bernoulli. Aquesta es troba als llibres de text més elementals, consisteix en un balanç macroscòpic que representa el principi de conservació de l'energia mecànica i es compleix molt aproximadament en situacions pràctiques de gran interès, com ara el flux en canonades, amb les addicions adequades.

Hi ha moltes maneres d'obtenir l'equació de Bernoulli. Totes suposen de partida un flux estacionari i incompressible, on línies de corrent i trajectòries coincideixen i la densitat no varia a causa de canvis de pressió. Com que tenim escrits els balanços microscòpics, podem utilitzar-los per a la deducció. Considerem l'equació d'Euler per a la conservació del moment, equació 16, en el cas estacionari,

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} + g \vec{j} = 0,$$

o equivalentment, atès que la densitat del fluid és constant, podem incloure  $\rho$  sota l'operador gradient,

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + g \vec{j} = 0.$$

Introduint el potencial gravitatori (ja que el pes és una força conservativa), això es pot reescriure com

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \nabla \left( \frac{p}{\rho} + gy \right) = 0$$

Al llarg d'una línia de corrent, formada per elements  $d\vec{s}$  paral·lels a  $\vec{v}$  en tota



la seva longitud (veure Fig. 2), el gradient queda projectat sobre la direcció de  $\vec{ds}$ , que és la de  $\vec{v}$ ,

$$v \frac{dv}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{p}{\rho} + gy \right) = 0.$$

Finalment, ens queda

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy \right) = 0,$$

la qual, integrada al llarg de la línia de corrent es coneix com l'equació de Bernoulli (1778),

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy = \text{Cte.}} \quad (20)$$

Aquesta equació té implícites diverses hipòtesis:

1. efectes viscosos insignificants,
2. flux estacionari,
3. flux incompressible,
4. aplicable només a una línia de corrent.

L'última daquestes hipòtesis significa que la constant d'integració variarà d'una línia de corrent a una altra. Això és molt restrictiu, i es pot demostrar que hi ha altres condicions sota les quals es compleix l'equació de Bernoulli. Per exemple, quan es compleix que el flux és *irrotacional*:  $\nabla \times \vec{v} = 0$ . Si expressem el terme  $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$  com<sup>2</sup>

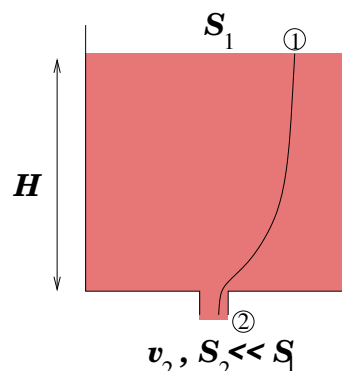
$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}),$$

obtindrem l'equació de Bernoulli si  $\nabla \times \vec{v} = 0$ . A continuació definirem la vorticitat i explicarem què significa que el flux sigui irrotacional.

<sup>2</sup>Per obtenir aquesta igualtat, desenvolupa el doble producte vectorial  $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$  per components, o utilitza les identitats del càlcul vectorial.

### Exemple: equació de Bernoulli

Utilitza l'equació de Bernoulli per trobar la velocitat de sortida del líquid d'un dipòsit d'alçada estacionària  $H$  que està obert a l'atmosfera, tot suposant que en el tràfec no hi ha pèrdues viscoses de cap mena i que la secció de l'orifici de sortida del líquid és molt menor que la del dipòsit.



Situem l'origen d'alçades al nivell del punt 2, i utilitzem la línia de corrent entre els punts 1 i 2 marcada al dibuix per escriure

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gH = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}.$$

Si el dipòsit està obert a l'atmosfera,  $p_1 = p_2 = p_{at}$ . Per altra banda, si  $S_2 \ll S_1$ , podem suposar  $v_1 \approx 0$  aplicant l'equació de continuïtat, i obtenim el conegut resultat

$$v_2 = \sqrt{2gH},$$

que és la velocitat d'un objecte sòlid que cau des de l'alçada  $H$  en el camp gravitatori. Ara repeteix el problema sense suposar  $S_2 \ll S_1$ .

## 3.8 Vorticitat i circulació

En mecànica de fluids, es defineix el vector vorticitat  $\vec{\Omega}$  com el rotacional del vector velocitat en cada punt

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} \quad (21)$$

La vorticitat és una mesura de la rotació del fluid al voltant d'un punt (White, 2011, §4.8, pàg.261-263), i s'anomena irrotacional el flux per al qual  $\vec{\Omega} = 0$ . Aquests fluxos són *potencials*, és a dir, la velocitat deriva d'un potencial escalar (recordem que el rotacional d'un gradient és idènticament zero):  $\vec{v} = \nabla \phi$ .

### Exemple: càlcul de la vorticitat

Calcula la vorticitat del camp de velocitats

$$\vec{v} = (x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j},$$

En un flux en el pla  $xy$ , la vorticitat només pot tenir component  $z$ ,

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} = -2y + 2y = 0$$

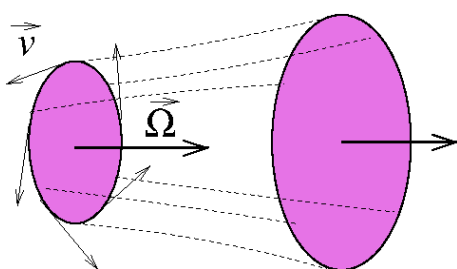
que essent nul·la, indica que el flux és irrotacional (per tant, potencial).

Pel teorema de Stokes, la circulació del vector velocitat al llarg d'una línia tancada qualsevol  $L$  que delimita la superfície  $S$ ,

$$\Gamma_L \equiv \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dS \quad (22)$$

s'anul·la. Aquesta condició expressa altrament que el flux és irrotacional.

Quan la vorticitat no és zero, per analogia amb les línies de corrent, és útil definir les línies de vòrtex o remolí, que són tangents al vector vorticitat a cada punt. De forma anàloga també es defineix el tub de vòrtex, les parets del qual estan formades per línies de vòrtex.



**Fig. 6.** A l'esquerra, tub de vòrtex. Les línies discontinuïques són línies de vòrtex, tangents al vector vorticitat  $\vec{\Omega}$  a cada punt. Com que el flux total a través de la superfície que delimita el volum representat a la figura és zero, el flux de  $\vec{\Omega}$  que entra al volum per la secció de l'esquerra és el que surt per la dreta, i per això diem que és constant al llarg del tub. A la dreta, un tornado és un bon exemple de tub de vòrtex (font: [www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com))

Com que  $\vec{\Omega}$  procedeix d'un rotacional, la seva divergència és zero. Pel teorema de la divergència, el flux del camp de vorticitat a través d'una superfície

tancada,

$$\oint_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{\Omega} dV = 0$$

s'anul·la. Aleshores, el flux de vorticitat és constant al llarg d'un tub de vòrtex en qualsevol instant de temps.

### Teorema de Kelvin

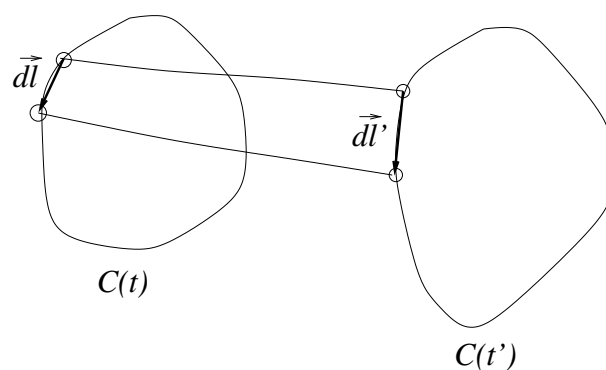
Aquest teorema estableix les condicions per a les quals la circulació  $\Gamma$  que hem definit en l'Eq. 3.11 és constant:

En un flux

1. barotròpic (és a dir, on la pressió depèn com a molt de la densitat),
2. invíscid,
3. sota forces màssiques conservatives (com ara la gravetat, però no sota forces de Coriolis, per exemple),

la circulació de la velocitat al voltant d'una corba tancada  $C$ , que es mou amb el fluid, es manté constant,

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = 0. \quad (23)$$



**Fig. 7.** Corba  $C$  constituïda per partícules materials del fluid i la seva evolució  $C(t')$ , en dos instants consecutius

$C$  és funció del temps. Més senzillament, aquest teorema diu que si ens fixem en un contorn tancat  $C$  format per partícules materials en un determinat instant  $t$ , i seguim el contorn al llarg del temps a través del moviment

de les seves partícules materials fins a l'instant  $t'$ , la circulació calculada sobre les dues corbes,  $C(t)$  i  $C(t')$ , és la mateixa.

Demostració:

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{\ell} + \oint_C \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} d\vec{\ell}$$

Per desenvolupar al primer terme utilitzem l'equació d'Euler, Eq. 16,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \Phi$$

on hem escrit el terme de les forces massiques conservatives per unitat de volum, com el gradient d'un potencial  $\Phi$ . Aplicant el teorema de la divergència, transformem la integral de línia en la integral sobre la superfície  $S$  delimitada per la corba  $C$ ,

$$\oint_C \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \left( -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \Phi \right) \cdot d\vec{\ell} \quad (24)$$

$$\int_S \left[ \nabla \times \left( -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \Phi \right) \right] \cdot \vec{n} dS \quad (25)$$

$$\int_S \left( \frac{\nabla \rho}{\rho^2} \times \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla p + \nabla \times \nabla \Phi \right) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (26)$$

que és nul·la perquè el rotacional d'un gradient és zero, i perquè la condició barotròpica implica també  $\nabla \rho \times \nabla p = 0$ .

El segon terme es pot transformar tenint en compte que, si la corba  $C$  està formada per partícules materials <sup>3</sup>,

$$\frac{d}{dt} d\vec{\ell} = d\vec{v}$$

Per tant,

$$\oint_C \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} d\vec{\ell} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} \oint_C d|\vec{v}|^2$$

que és zero també perquè l'integrand és una forma diferencial exacta integrada al llarg d'un camí tancat.

<sup>3</sup>Comprova-ho sobre l'esquema de la Fig. 7, expressant  $d\vec{\ell}$  com  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  —sent  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  els vectors de posició de dues partícules contigües, i prenent la diferència entre  $t' = t + dt$  i  $t$  per fer la derivada temporal de  $d\vec{\ell}$ .

### 3.9 Potencial de velocitat

Hem dit al principi d'aquest apartat que un flux irrotacional, és a dir, que compleix  $\nabla \times \vec{v} = 0$ , és un flux potencial. Efectivament, ha d'existir una funció  $\phi$  tal que  $\nabla\phi = \vec{v}$ . Això és així perquè el rotacional d'un gradient és automàticament nul. Aleshores,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = v_y, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = v_z \quad (27)$$

Si a més a més el flux és incompressible,  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

equació que, que en termes del potencial de velocitat  $\phi$  es pot escriure com

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0.$$

És a dir, el potencial de velocitat satisfà l'equació de Laplace,

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (28)$$

Les solucions a l'equació de Laplace s'anomenen funcions harmòniques, amb una teoria al respecte ben establerta i coneguda. Per als fluxos potencials, una única funció  $\phi$  determina el camp de velocitat. Observa que [28](#) és una equació lineal, i com a tal aplica el principi de superposició: *la suma de dos fluxos potencials és un altre flux potencial*. Per això el cas de fluxos potencials és particularment interessant, tot i que és una aproximació al flux de fluids més formal que pràctica.

Els fluxos *ideals* satisfan les condicions de 1) incompressibilitat i 2) vorticitat nul·la. El llibre de ([Panton, 2013](#)) dedica els capítols 18 i 19 als fluxos ideals en 2D i 3D respectivament. A la secció [3.11](#) desenvoluparem alguns exemples clàssics de fluxos ideals en 2D mitjançant les tècniques de variable complexa.

### Exemple: potencial de velocitat

Donat el camp de velocitats

$$\vec{v} = (x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j},$$

Digues si existeix el potencial de velocitat, i si és així, troba'l i dibuixa les línies equipotencials.

Perquè existeixi el potencial de velocitat, el flux ha de ser irrotacional. Justament a l'exemple de la secció 3.8 hem demostrat que aquest camp de velocitats té vorticitat nul·la, per tant hem de trobar la funció  $\phi$  que satisfà les condicions 27,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x^2 - y^2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2xy.$$

De la primera obtenim integrant  $\psi = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + g(y)$ , i de la segona  $\phi = -xy^2 + f(x)$ , amb  $f(x)$  i  $g(y)$  funcions arbitràries. Identificant els termes,  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ct$ , mentre que  $g(y)$  com a molt pot ser una constant. Per tant, el potencial de velocitats  $\phi$  queda definit per

$$\phi = \frac{1}{3}x^3 - xy^2$$

excepte una constant arbitrària, que de fet no juga cap paper. Podem dibuixar les isolínies de  $\phi$  amb la funció **contour** de MATLAB,

```
x = -5:0.2:5;
y = -5:0.2:5;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
funcio = X.^3/3 - X.*Y.^2 ;
contour(x, y, funcio, 50)
```

## 3.10 La funció de corrent

Si un flux és

1. incompressible,
2. només funció de dues coordenades (suposem  $x$  i  $y$  com a exemple, en cas que la geometria sigui cartesiana)

es pot definir una funció  $\psi$  tal que,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (29)$$

de manera que la condició de flux incompressible se satisfaci automàticament (comprova-ho). En altres sistemes de coordenades la construcció té en compte l'expressió del gradient, però és igualment vàlida.

Quin sentit físic té  $\psi$ , —és a dir, per què es diu funció de corrent?

*Les corbes  $\psi = ct$  són les línies de corrent del flux.* Efectivament, les línies de corrent satisfan

$$\frac{v_x}{dx} = \frac{v_y}{dy}$$

és a dir,  $v_x dy - v_y dx = 0$ , que en termes de la funció de corrent és

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0$$

que és una forma diferencial exacta  $d\psi = 0$ . Per tant les línies de corrent són les corbes solució  $\psi = ct$ .

En termes de la funció de corrent  $\psi$ , el rotacional de la velocitat és

$$\nabla \times \vec{v} = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \vec{k},$$

de manera que si el flux és *irrotacional*, la funció de corrent satisfà l'equació de Laplace,

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0 \quad (30)$$

La funció de corrent  $\psi$  i el potencial de velocitat  $\phi$  són per tant solucions de l'equació de Laplace, i ambdues són funcions harmòniques. Les tècniques de variable complexa s'utilitzen per estudiar les solucions de fluxos ideals (veure Sec. 3.11). La funció de corrent i el potencial de velocitat van ser inventats per Joseph Louis Lagrange i publicats en el seu tractat de mecànica de fluids el 1781.



**Exemple: funció de corrent**

Donat el camp de velocitats

$$\vec{v} = (x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j},$$

Digues si existeix la funció de corrent, i si és així, troba-la i dibuixa-la amb MATLAB.

Perquè existeixi la funció de corrent, el flux ha de ser incompressible i funció de dues coordenades espacials només. Com que la segona es compleix, només cal que comprovis que el flux és incompressible ( $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ). Fet això, hem de trobar la funció  $\psi$  que satisfà les condicions 29,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 - y^2, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2xy.$$

De la primera obtenim integrant  $\psi = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + f(x)$ , i de la segona  $\psi = x^2y + g(y)$ , amb  $f(x)$  i  $g(y)$  funcions arbitràries. Identificant els termes,  $f(x)$  com a molt pot ser una constant, i  $g(y) = -\frac{1}{3}y^3 + ct$ . Per tant,  $\psi$  queda definida per

$$\psi = x^2y - \frac{1}{3}y^3$$

excepte una constant arbitrària. Ara introdueix en MATLAB el codi següent, observa el gràfic de sortida i interpreta els resultats.

```
x = -5:0.2:5;
y = -5:0.2:5;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
funcio = X.^2.*Y - Y.^3/3;
surfc(x, y, funcio)
```

En aquest i als exemples següents, fixa't bé en els punts que requereixen els operadors  $*$ ,  $/$  i  $^{\wedge}$ . Modifica una mica l'escript per utilitzar la comanda **streamslice**:

```
x = -5:0.2:5;
y = -5:0.2:5;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
vx = X.^2 - Y.^2;
```

```
vy = -2*X.*Y;
streamslice(x,y,vx,vy)
axis equal, axis tight
```

Hauràs observat que en el primer cas dibuixem la funció de corrent amb les seves isolínies en un gràfic 3D, i en el segon cas directament dibuixem les línies de corrent a partir del camp de velocitats.

Si un flux és alhora irrotacional i descrit només per dues coordenades, tant la funció de corrent  $\psi$  com el potencial de velocitat  $\phi$  existeixen, i les línies de corrent i les línies equipotencials són mútuament perpendiculars. Per exemple, per al flux incompressible en el pla  $xy$ , tindríem

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

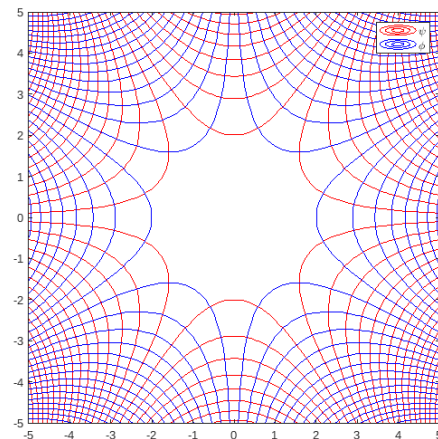
$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

del que ràpidament es dedueix que les isolínies respectives són perpendiculars entre sí, a part de comprovar també que  $\phi$  i  $\psi$  satisfan l'equació de Laplace.

Aprofitant que hem generat tant la funció de corrent  $\psi = x^2y - y^3/3$  com el potencial de velocitat  $\phi = x^3/3 - xy^2$  del camp de velocitats  $\vec{v} = (x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$ , representarem en un mateix gràfic de MATLAB les isolínies de les dues funcions,

```
% Funció de corrent
x = -5:0.2:5;
y = -5:0.2:5;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
f_corr = X.^2.*Y - Y.^3/3;
contour(x,y,f_corr,30,'r'), hold on

% Potencial de velocitat
pot_vel = X.^3/3 - X.*Y.^2;
contour(x,y,pot_vel,30,'b'), hold off
axis square, axis tight
legend('\psi', '\phi')
```



on s'aprecia com les línies de corrent i les línies equipotencials són perpendiculars entre sí.

### 3.11 El potencial complex $F$

L'anàlisi que farem en aquesta secció fa servir la teoria de variable complexa, que és una eina molt potent per trobar solucions de l'equació de Laplace. Malauradament, es restringeix al cas pla bidimensional, on l'equació de Laplace pren la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Comencem per representar el pla físic del flux per la variable complexa  $z$ . Les relacions entre  $z$ , les variables cartesianes  $x, y$  i les coordenades polars  $r, \theta$  són

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

Les propietats de flux es poden expressar com a funcions complexes de  $z$ . Per exemple, el potencial complex  $F = F(z)$  es defineix com

$$F = F(z) \equiv \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (31)$$

La part real de  $F$  és el potencial de velocitat i la part imaginària és la funció de corrent. El motiu darrere d'aquesta definició és el fet que les parts real i imaginària de qualsevol funció analítica d'una variable complexa són solucions conjugades de l'equació de Laplace.

La derivada de  $F$  es coneix com a *velocitat complexa*

$$W(z) \equiv \frac{dF}{dz}$$

La teoria de variable complexa demostra que la derivada de  $F$  està relacionada amb les derivades de les seves parts real i imaginària per

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

que, en termes de les components de la velocitat (Eqs. 27 i 29) es pot es-

criure

$$W = v_x - iv_y = qe^{-i\alpha} \quad (32)$$

on  $q$  és la magnitud de la velocitat i  $\alpha$  l'angle que formen les components. La velocitat complexa és en realitat el complex conjugat del vector velocitat. El potencial complex i la velocitat complexa són les idees essencials que relacionen les variables del flux amb la teoria de variable complexa.

Sovint, és avantatjós treballar amb coordenades polars  $r, \theta$ . Les components de velocitat corresponents estan relacionades amb les components en cartesianes mitjançant les equacions

$$v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta$$

$$v_y = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta$$

Per obtenir una expressió per a la velocitat complexa en coordenades polars, substitueix aquestes expressions en  $W = v_x - iv_y$ . Pots comprovar que això proporciona

$$W = [v_r(r, \theta) - iv_\theta(r, \theta)]e^{-i\theta} \quad (33)$$

Així doncs, treballant en coordenades rectangulars, trobarem les components de velocitat  $v_x$  i  $v_y$  substituint  $z = x + iy$  en  $W = W(z)$  i separant el resultat en les seves parts real i imaginària. Treballant en coordenades polars, per identificar les components  $v_r$  i  $v_\theta$  substituïrem  $z = re^{i\theta}$  en  $W = W(z)$  i arranjarem l'equació en la forma de l'equació 33.

### Fluxos ideals simples plans

Com que una funció analítica representa un flux ideal, podem plantejar-nos funcions complexes senzilles per intentar interpretar una possible situació pràctica, en comptes d'escollir d'antuvi una geometria de flux definida.

La funció complexa més senzilla és una constant, però aquest cas no té interès perquè no representa cap situació de flux, car la seva derivada és nul·la. De fet, es pot afegir una constant complexa a  $F$  sense alterar el camp de velocitats. Això és un reflex del fet que qualsevol constant afegida a  $\phi$  i  $\psi$  no canvia la velocitat. Més enllà de la constant, la següent funció més simple és  $F \propto z$ ,

$$F = [Ue^{-i\alpha}]z \quad (34)$$

on hem expressat la constant de proporcionalitat (complexa) en forma polar. Per a aquest potencial, la velocitat complexa és

$$W = \frac{dF}{dz} = Ue^{-i\alpha} = U \cos \alpha - i U \sin \alpha = v_x - i v_y$$

i per tant, de l'Eq. 32 trobem que  $v_x = U \cos \alpha$  i  $v_y = U \sin \alpha$ . Això representa un corrent uniforme de magnitud  $U$  que flueix amb un angle  $\alpha$  respecte de l'eix  $x$ .

A continuació, considerem el cas en què  $F$  és una potència de  $z$ ,

$$F = Az^n$$

amb  $A$  i  $n$  constants reals. Els patrons de flux realistes es produeixen si  $n \geq 1/2$ . Per a aquests fluxos, la velocitat complexa és

$$W = \frac{dF}{dz} = nAz^{n-1}$$

Per interpretar aquesta expressió és convenient utilitzar coordenades polars; per tant, substitueix  $z = re^{i\theta}$  i arregla el resultat per obtenir

$$W = nAr^{n-1}e^{in\theta}e^{-i\theta} = nAr^{n-1}(\cos n\theta + i \sin n\theta)e^{-i\theta}$$

Comparant amb l'equació 33, pots veure que

$$v_r = nAr^{n-1} \cos n\theta, \quad v_\theta = -nAr^{n-1} \sin n\theta \quad (35)$$

Per poder entendre aquest patró de flux, és útil obtenir la funció de corrent. Expandint  $F = Az^n$  en forma polar i utilitzant  $F = \phi + i\psi$ , trobem que

$$\phi = Ar^n \cos n\theta$$

$$\psi = Ar^n \sin n\theta$$

D'acord amb aquest resultat,  $\psi$  serà zero per a qualsevol valor de  $r$ , al llarg de les rectes orientades segons els angles  $\theta = k\pi/n$  per a valors enters de  $k$ . Al llarg d'aquestes línies radials, l'equació 35 mostra que  $v_\theta = 0$ , i com que  $\cos \pi k = (-1)^k$ , la velocitat radial és

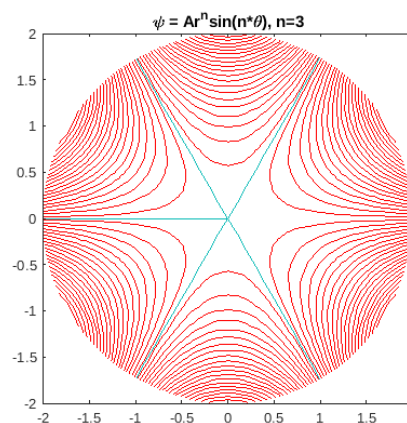
$$v_r = (-1)^k nAr^{n-1}$$

En particular, al semieix  $x$  positiu ( $k = 0$ ),  $v_r$  és positiu, indicant una sortida cap a la dreta al llarg de l'eix  $x$ . La següent línia on  $\psi = 0$  és per a  $k = 1$ , donant  $\theta = \pi/n$ . Aquí el flux  $v_r$  és negatiu, dirigint-se cap a l'origen. El flux dins de la falca  $\theta = 0, \pi/n$  primer arriba a l'origen i després flueix al llarg de l'eix  $x > 0$ .

Un flux ideal permet que el fluid llisqui en contacte amb la paret. En una solució de flux ideal, qualsevol línia de corrent del patró de flux es pot considerar que representa una paret sòlida.

A continuació representem amb MATLAB el patró de línies de corrent per a  $n = 3$ :

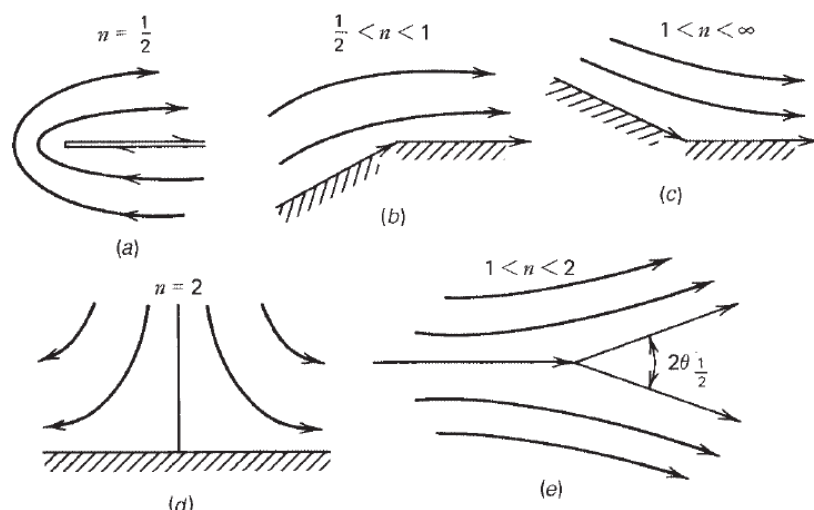
```
R = 0:0.2:2;
Th = 0:pi/100:2*pi;
[r,th] = meshgrid(R,Th);
x=r.*cos(th);
y=r.*sin(th);
A=1; n=3;
f_corr = A*r.^n.*sin(n*th);
contour(x,y,f_corr,40,'r'), hold on
contour(x,y,f_corr,[0 0]), hold off
title(['\psi = Ar^n sin(n*\theta)',',', n=',num2str(n)])
```



El patró no es repeteix quan ens acostem a  $\theta = 2\pi$ . Els valors de  $W$  per a  $\theta = 2\pi$  i  $\theta = 0$  no són necessàriament els mateixos (recordem que  $n$  pot ser qualsevol constant real). Per a  $\theta \geq 2\pi$  comencem un segon full de la funció. En restringir els valors de  $\theta$  a  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , tenim una funció única amb una branca tallada al llarg de  $\theta = 0, 2\pi$ , però el flux en  $\theta = 0$  i  $\theta = 2\pi$  en general no coincideix.

La Fig. 8 mostra algunes interpretacions típiques per a diferents valors del paràmetre  $n$ . Dos dels casos més importants són el punt d'estancament pla amb  $n = 2$  (d) i el flux sobre una falca de punta afilada (e). En aquest últim cas, l'angle de la falca és  $2\theta_{1/2} = 2\pi(n - 1)/n$ . Pots utilitzar l'escript de MATLAB de dalt per general el patró de línies de corrent de tots aquests exemples.

Quina utilitat poden tenir aquestes solucions? Doncs, tot i que el flux real és viscos, podem esperar que les solucions de flux ideal siguin una apro-



**Fig. 8.** Valors útils de  $n$ : (a) flux entorn d'un perfil agut; (b) cantonada convexa; (c) cantonada còncava; (d)  $n = 2$  dos segments de flux que donen un punt d'estancament pla; i (e) dos segments amb  $1 < n < 2$  que donen el flux sobre una falca. Font: (Panton, 2013, pàg. 444)

ximació *local* per a una regió que forma part d'un flux molt més gran. Per exemple, la falca afilada podria ser la part més prominent d'un cos, de manera que la solució de flux ideal (e) per a una falca infinita seria vàlida per a algun entorn prop de la protuberància.

Els fluxos de cantonada també són solucions locals. Si qualsevol flux ideal té una cantonada, hi ha una petita regió prop de la cantonada on només l'angle de la cantonada és important. En aquesta regió, el flux local prop de la paret (no a sobre, ni molt a prop) s'assembla bastant a la solució amb  $F = Az^n$  dels casos (b) i (c) de la Fig. 8.

Una característica comuna a totes les cantonades convexes (b) és que la velocitat esdevé infinita i la pressió baixa a menys infinit just a la cantonada. Per tant aquests fluxos contenen una singularitat físicament irreal. En un flux real, però, hi ha viscositat, de manera que la cantonada efectivament se "suavitza".

Les cantonades còncaves (c) sempre tenen un punt d'estancament on la velocitat és zero i la pressió és el valor d'estancament, just a la cantonada. A mesura que el flux arriba a la cantonada, la pressió augmenta. Si la regió viscosa és prima, encara podem aplicar la solució de flux ideal al voltant de la paret (no a tocar de la paret).

Per acabar, una observació matemàtica: es pot demostrar que l'únic flux

ideal que té una velocitat finita sobre tot el pla és el corrent uniforme. Els fluxos en forma de falca, en canvi, tenen almenys un punt amb una velocitat infinita. En una cantonada convexa la velocitat infinita es produeix a la cantonada mateixa, mentre que en una cantonada còncava la velocitat infinita es produeix a l'infinit.

### Línia de fonts i línia de vòrtexs

Considerem el potencial complex

$$F = \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (36)$$

on  $m$  és una constant real. Sense perdre generalitat, podem reduir el potencial complex a  $F = m/2\pi \ln z$  desplaçant l'origen a  $z_0$ . Com abans, utilitzarem la forma polar:

$$F = \frac{m}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = \frac{m}{2\pi} (\ln r + i\theta)$$

D'on podem identificar directament (Eq. 31 el potencial de velocitat  $\phi$  i la funció de corrent  $\psi$ :

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{m}{2\pi} \theta$$

La velocitat complexa és

$$W = \frac{dF}{dz} = \frac{m}{2\pi z} = \frac{m}{2\pi r} e^{-i\theta}$$

Tenint en compte 33, deduïm de l'expressió anterior les components de la velocitat en coordenades polars,

$$v_r = \frac{m}{2\pi r}, \quad v_\theta = 0$$

Aquest és un flux purament radial, ja sigui cap a un desguàs (quan  $m$  és negatiu) o des d'una font (quan  $m$  és positiu), com pots veure a la Fig. 9.

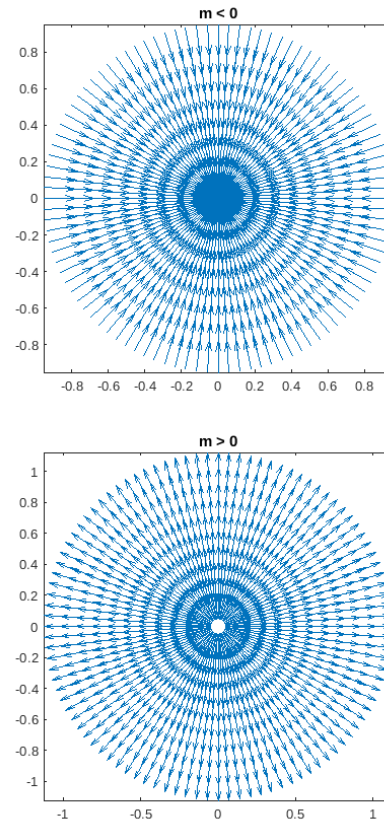
Considerat en dues dimensions, és com una mena de forat puntual que xucla el fluid ( $m < 0$ ), o bé una font puntual de la que emana el fluid ( $m > 0$ ). Considerat en tres dimensions, com un problema en coordenades cilíndriques on hi ha invariància translacional al llarg de l'eix  $r = 0$ , representa una *línia contínua de fonts* (a la Fig. 10 es representa esquemàticament una línia



de fonts positives).

La velocitat es fa infinita a l'origen proporcionalment a  $1/r$ ; per tant, aquest punt no és realista. La intensitat de la font ve donada per la constant  $m$ . Per entendre això, considerem el problema tridimensional de la línia de fonts sobre l'eix  $r = 0$  (coordenades cilíndriques).

```
R = 0.05:0.1:1;
Th = 0:pi/50:2*pi;
[r,th] = meshgrid(R,Th);
x=r.*cos(th);
y=r.*sin(th);
m=1;
vr = m./(2*pi*r); vth = 0;
vx = vr.*cos(th) - vth.*sin(th);
vy = vr.*sin(th) + vth.*cos(th);
modul= sqrt(vx.^2+vy.^2)
quiver(x,y,vx./modul,vy./modul);
axis square, axis tight
```

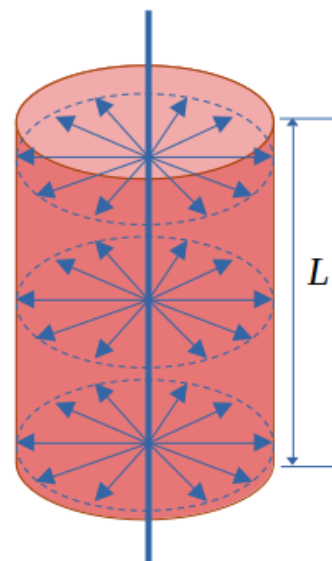


**Fig. 9.** Fonts de flux puntuals negativa (a dalt) i positiva (a baix). A l'esquerra, el codi de MATLAB amb el que pots reproduir les gràfiques.

Efectivament, si calculem el cabal volumètric a través de qualsevol superfície cilíndrica  $S$  de longitud  $L$  i radi  $r$  al voltant de  $r = 0$ , el cabal és

$$\begin{aligned} Q &= \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} v_r L r d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{m}{2\pi r} L r d\theta = mL \end{aligned}$$

És a dir,  $m$  és el cabal per unitat de longitud de la línia de fonts.



**Fig. 10.** Línia de fonts positives al llarg de  $r = 0$

El fet que la integral de superfície no s'anul·la, implica, pel teorema de Gauss, que

$$mL = \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int \nabla \cdot \vec{v} dV \neq 0$$

Important: sabem que en un flux incompressible,  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , de manera que el fet que la integral de volum no sigui zero significa que aquesta condició no es compleix en tot el flux. La singularitat de la velocitat a l'origen és una línia de fonts de fluid, i en  $r = 0$  el flux no obeeix la condició  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ . De fet, qualsevol superfície tancada que inclogui  $r = 0$  donarà flux net d'entrada o de sortida quan calculem el cabal, mentre que si no inclou l'origen, el flux net donarà zero. Aquest és un resultat molt entenedor sobre el que vol dir  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ .

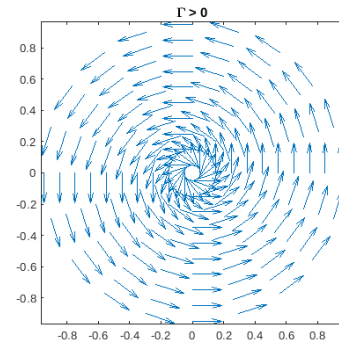
El vòrtex puntual i la línia de vòrtexs ideals són molt similars a la font puntual i la línia de fonts, respectivament. El seu potencial complex és també la funció logarítmica, però amb una constant imaginària:

$$F = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (37)$$

De nou, podem resituar l'origen de coordenades en  $z_0$ ). Pots demostrar que les components de velocitat d'aquest potencial resulten ser

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Aquest flux gira en sentit contrari a les agulles del rellotge si  $\Gamma$  és positiu (figura de la dreta) i decreix en magnitud com  $1/r$ , similar al cas de la font (la longitud dels vectors no és proporcional al mòdul de la velocitat).



Novament a l'origen hi ha una velocitat de rotació infinita, de manera que hem d'excloure aquest punt de qualsevol flux realista: en un vòrtex real, la velocitat al centre cau a zero a través d'una regió viscosa on la vorticitat és diferent de zero. Observa que fora de  $r = 0$ , el rotacional de la velocitat és zero, com correspon a un flux potencial. Però en  $r = 0$ , no.

Alternativament, pots extraure les components de la velocitat en coordenades cartesianes, has d'obtenir

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

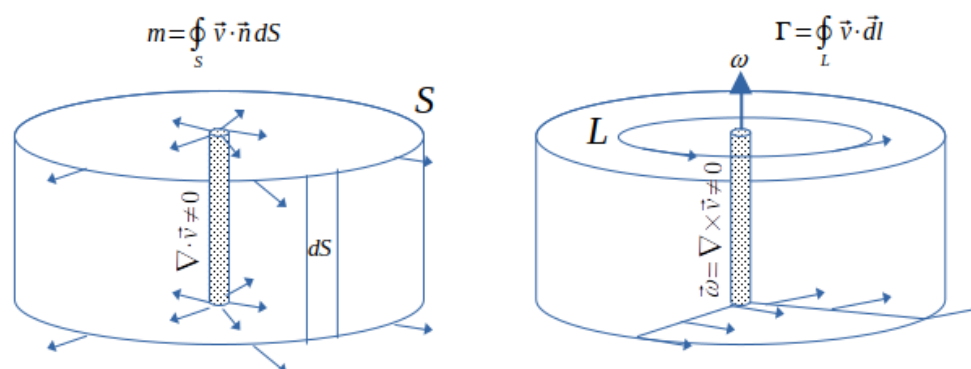
que són les de l'exercici 11, amb  $K = \Gamma/2\pi$ .

La intensitat d'un vòrtex ve donada per la circulació. La circulació  $\Gamma_L$  s'ha definit (Eq. 3.11) com la integral de línia de la component de velocitat tangencial al voltant d'un camí tancat  $L$  en sentit antihorari. Si triem un recorregut circular de radi  $r$  centrat en l'origen,

$$\Gamma_L = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_L v_\theta d\ell = \frac{\Gamma}{2\pi r} \int_L d\ell = \frac{\Gamma}{2\pi r} 2\pi r = \Gamma$$

La circulació s'anul·la en un flux irrotacional, perquè s'anul·la la vorticitat, relacionada amb la circulació pel teorema de Stokes. Per a qualsevol circuit dins d'un flux invíscid, la vorticitat és igual a zero, i per tant  $\Gamma = 0$ . Per al vòrtex ideal, com que la circulació no és zero, hi ha algun punt del flux (en aquest cas, l'origen) on la vorticitat no és zero.

Els fluxos ideals compleixen les dues condicions cinemàtiques de no dilatació ( $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ) i no rotació ( $\nabla \times \vec{v} = 0$ ). Una font és un flux que viola la primera condició en un punt, mentre que un vòrtex és un flux que viola la segona condició. Aquests fluxos són els dos tipus bàsics de singularitats (Fig. 11).



**Fig. 11.** Singularitats en el flux ideal: línia de fonts (esquerra); línia de vòrtexs (dreta). Adaptat de (Panton, 2013, pàg. 446)

A partir de casos simples, les tècniques de variable complexa permeten estudiar, gràcies al potencial complex, una varietat de fluxos ideals. Aprofitant que el problema és lineal, la superposició de potencials dona lloc a altres casos (veurem el *doblet* i el flux sobre un cilindre als problemes). I encara, les tècniques de la transformació conforme permeten estudiar casos més elaborats (transformació de Joukowski per a l'estudi del perfil aerodinàmic). Consulta l'apartat de **Complements** per ampliar els coneixements en aquest aspecte.

Potser et preguntaràs per què s'han dedicat tants esforços a estudiar a fons el flux invíscid, tot sabent que els fluids reals són viscosos. La resposta és que els fluxos ideals resulten una bona aproximació als fluxos reals si els fenòmens viscosos són insignificants. Veurem al tema següent que això passa prou lluny dels contorns sòlids quan no hi ha flux separat, i quan estudiem la capa límit (Tema 8), entendrem què vol dir això i per què. L'estudi del flux ideal va proporcionar una eina molt valuosa en el desenvolupament de l'aerodinàmica. Històricament, les equacions d'Euler, conservatives, junt amb les condicions d'incompressibilitat i de flux irrotacional, van resultar "més fàcils" de tractar analíticament, a part de permetre obtenir resultats orientatius en camps com l'aeronàutica. El cos de la mecànica de fluids es va anar bastint entre els segles XVIII i XIX, però no va ser fins el segle XX que noves idees van facilitar la resolució del flux viscos. Fins aleshores, hi va haver un divorci entre els resultats de la mecànica de fluids teòrica i les aplicacions pràctiques de la hidràulica, per exemple, i els fluxos reals en general.

## Bibliografia

- Auld, D., i Srinivas, K. (2024). *Aerodynamics for students*. [https://www.aerodynamics4students.com/fluid-mechanics/fluidmechanics\\_w.php?page=5&](https://www.aerodynamics4students.com/fluid-mechanics/fluidmechanics_w.php?page=5&). (Accessed: 28/6/2024)
- Batchelor, G. K. (2000). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511800955
- De las Heras, S. (2012). *Mecánica de fluidos en ingeniería*. Barcelona, España: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Landau, L., i Lifschitz, E. (1987). *Fluid mechanics*. Oxford: Pergamon Press.
- Panton, R. (2013). *Incompressible flow*. Wiley.
- White, F. (2011). *Fluid mechanics*. New York: Mc Graw Hill.

# Complements formatius

## Les contribucions de Euler a la mecànica de fluids

L'exposició que hem seguit per introduir els balanços de matèria, moment i energia en un fluid deixa molt de ser històrica. Diversos grans matemàtics, entre els quals destaquen Leonhard Euler i Joseph Louis Lagrange, han contribuït al llarg de diversos segles al desenvolupament d'aquesta matèria, la contribució més sofisticada a la mecànica clàssica. Pots llegir en el document de referència un recorregut històric i les principals aportacions d'Euler a la mecànica de fluids, exposat per un dels experts en el tema.

---

Liñán, A. (2007). Las ecuaciones de Euler de la mecánica de fluidos.

[http://oa.upm.es/2101/2/LINAN\\_CL\\_2009\\_01a.pdf](http://oa.upm.es/2101/2/LINAN_CL_2009_01a.pdf)

---

## Aplicacions de l'equació de Bernoulli

Hem dit a la secció 3.7 que l'equació de Bernoulli s'utilitza àmpliament en enginyeria, en una varietat de situacions. A les pàgines d'aquest manual trobaràs una exposició detallada de les aplicacions més comunes: sondes de velocitat, efecte venturi, efusió d'un líquid a través d'un orifici, flux a través de discs i preses, etc.

---

Gerhart, P.M., Gerhart, A.L., Hochstein, J.I. (2016). Munson, Young, and Okiishi's Fundamentals of Fluid Mechanics. Wiley 8ª ed. pàg. 113-134

---

## Línies de corrent, de traça i trajectòries

Es fa realment difícil comprendre la diferència entre aquests conceptes sense la seva representació gràfica, si és possible amb animacions. En aquest recurs trobaràs un exemple visual que permet distingir clarament aquestes diferències.

---

Educrafter Team (2017) What are streamline, pathline and streakline?

Educrafter

<https://www.youtube.com/watch?v=PtWz4p-WnL8>

---

### **La transformació conforme en l'estudi del flux sobre un perfil aerodinàmic**

La transformació conforme es va utilitzar en molts problemes de la física matemàtica per obtenir la solució analítica de l'equació de Laplace en geometries complicades. Gràcies a la transformació conforme, es pot mapejar una geometria complicada en una figura senzilla, i resoldre el patró de flux en el pla transformat. Les línies aerodinàmiques i potencials en el pla original es transformen en les línies aerodinàmiques i línies potencials en el pla transformat. La transformació de Joukowski (una transformació conforme especial) simplifica l'estudi del flux ideal sobre objectes cilíndrics bidimensionals (cilindres circulars, formes el·líptiques, plaques planes i un determinat tipus de forma aerodinàmica). Pots consultar el següent recurs per saber com s'utilitza la transformació conforme en fluxos ideals plans.

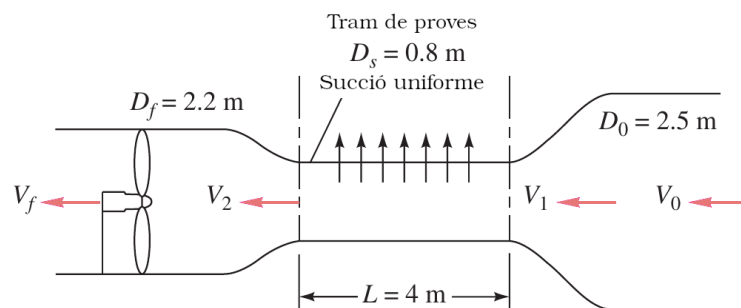
---

Panton, R.L (2013). *Incompressible Flow* 4th Edition. Wiley. pàg. 464-472

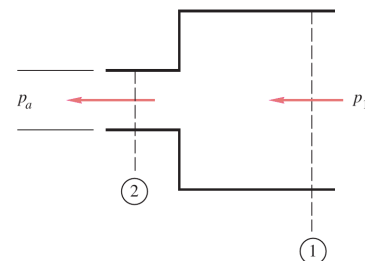
---

## Exercicis

- En alguns túnels de vent, el tram de proves està perforat per xuclar fluid, i així proporcionar una fina capa límit. La paret del tram de proves de la figura conté 1200 forats de 5 mm de diàmetre cadascun, per metre quadrat de superfície de paret. La velocitat de succió a través de cada forat és  $V_s$  8 m/s, i la velocitat d'entrada al tram és  $V_1 = 35$  m/s. Assumint flux incompressible, calcula
  - La velocitat d'entrada al túnel,  $V_0$ .
  - La velocitat de sortida del tram de proves,  $V_2$ .
  - La velocitat de sortida del túnel,  $V_f$ .



- Un líquid de densitat  $\rho$  flueix a través de la contracció sobtada de la figura, i surt a l'atmosfera on la pressió és  $p_a$ . Suposem condicions uniformes  $(p_1, V_1, D_1)$  a la secció 1 i  $(p_2, V_2, D_2)$  a la sortida 2.

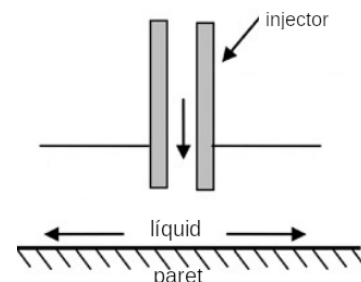


Sense considerar efectes viscosos, Troba una expressió per a la força  $F$  exercida pel fluid en la contracció.

- El camp de velocitats eulerià

$$\vec{v} = kx\vec{i} - ky\vec{j}$$

amb  $k \in \mathbb{R}$ , representa simplificadament el flux 2D acostant-se a un punt d'estancament prop d'una paret.



- És estacionari el camp de velocitats? Per què?
- És compressible el flux?



- c) Utilitzant la fórmula 1, calcula'n l'acceleració.
- d) Utilitzant la fórmula 21, calcula'n la vorticitat.
4. Prenent el mateix camp de velocitats de l'exercici anterior,
- Amb MATLAB, utilitza la funció **quiver** per dibuixar  $\vec{v}/k$ <sup>4</sup>, en la regió  $-2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$
  - Sobreimposa al gràfic del camp de vectors de **quiver**, les línies de corrent generades amb **streamslice**, com a l'exemple de la **funció de corrent**.
5. Seguint amb el camp de velocitats de l'exercici 3,
- Utilitza la fórmula 2 per obtenir l'equació diferencial de les línies de corrent i integra-la fàcilment, tenint en compte que és de variables separables.
  - Un cop trobada en a) la família de corbes solució,  $f(x, y) = C$ , afegeix la funció  $f$  a un escript de MATLAB com en l'exemple de la **funció de corrent** i representa les isolínies amb la comanda **contour**. La sortida per pantalla hauria de ser semblant al resultat de l'apartat b) del problema anterior.
6. Es donen les condicions per a l'existència del potencial de velocitat per al camp de l'exercici 3? Si és així, utilitza la fórmula 27 per calcular-lo.
7. Es donen les condicions per a l'existència de la funció de corrent del camp de velocitats de l'exercici 3? Si és així, utilitza la fórmula 29 per calcular-la.
8. Representa amb la comanda de MATLAB adequada les isolínies de la funció de corrent i del potencial de velocitat trobats als exercicis anteriors en un únic gràfic, i observa que les línies de corrent i les línies equipotencials són perpendiculars entre sí.
9. Utilitza

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

per integrar les equacions de la trajectòria d'una partícula fluida qualsevol immersa en el flux de l'exercici 3, en funció del paràmetre  $t$ . Després,

- Eliminant  $t$  entre les dues equacions paramètriques, troba l'equa-

<sup>4</sup>En aquest apartat i els que segueixen, si no es diu el contrari pots rescal·lar les velocitats pel factor  $k$  per poder representar els gràfics sense haver de donar valors particulars a  $k$

ció de la trajectòria. Coincideix aquesta amb l'equació de les línies de corrent?

- b) Pren  $k = 0.1$  i representa amb la comanda **comet** de MATLAB la trajectòria sobre el pla  $(x, y)$  d'una partícula fluida que parteix del punt  $x = 1, y = 2$  a  $t = 0$ , per a  $0 \leq t \leq 50$ .

- 10.** Demostra que el flux de Couette  $\vec{v} = Uy/L\vec{i}$  (el flux entre una placa estacionària en  $y = 0$  i una placa mòbil amb velocitat  $U$  en  $y = L$ ) té una funció de corrent, però no potencial de velocitat. Per què?

- 11.** Un flux incompressible bidimensional està definit per

$$v_x = -\frac{Ky}{x^2 + y^2} \quad v_y = \frac{Kx}{x^2 + y^2}$$

on  $K$  és una constant. És irrotacional aquest flux? En cas afirmatiu, troba el seu potencial de velocitat, dibuixa les línies equipotencials, i interpreta el patró del flux.

- 12.** El potencial de velocitat  $\phi(r, \theta)$  en coordenades polars queda definit per

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

Troba el potencial de velocitat per al flux en coordenades polars  $v_r = Q/r, v_\theta = K/r$ , on  $Q$  i  $K$  són constants.

- 13.** El potencial de velocitat d'un flux en coordenades polars és

$$\phi = \frac{K \cos \theta}{r}$$

on  $K$  és una constant.

- a) Troba la funció de corrent per a aquest flux.<sup>5</sup>  
 b) Dibuixa les línies de corrent i les línies equipotencials.  
 c) Interpreta el patró del flux.

- 14.** Un flux incompressible en coordenades cilíndriques ve donat per les

---

<sup>5</sup>Observa que la tria

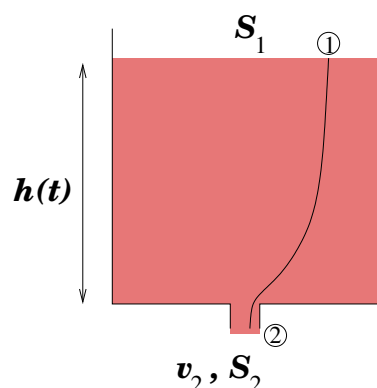
$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

amb  $\psi(r, \theta)$  la funció de corrent en coordenades polars, satisfà l'equació de continuïtat  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ .

components  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = Cr$ ,  $v_z = K(R^2 - r^2)$ , on  $C$  i  $K$  són constants i  $r \leq R$ ,  $z \leq L$ .

- Satisfà aquest camp de velocitats l'equació de continuïtat? <sup>6</sup>
- Què pot representar físicament?

- 15.** El dipòsit de la figura està obert a l'atmosfera i es buida per l'orifici de sota, és a dir el nivell de líquid  $h$  no és estacionari com en l'exemple que hem analitzat a la secció 3.7, sinó que decreix a mesura que passa el temps.



- Podem aplicar l'equació de Bernoulli en aquestes condicions?
- Suposem que la secció  $S_1$  del dipòsit és molt més gran que la de l'orifici  $S_2$ , de manera que el nivell del líquid baixa tan lentament que les línies de corrent són pràcticament constants,  $dh/dt$  s'acosta a zero i podem aplicar com una aproximació raonable l'equació de Bernoulli. Amb aquesta premisa, combina l'equació de continuïtat i l'equació de Bernoulli per obtenir una equació diferencial per a  $h(t)$ .
- Integra-la per obtenir el temps de buidat del dipòsit des del nivell inicial  $H$ .

Si vols fer més exercicis, al llibre de (White, 2011), pp. 196–227 trobaràs molts problemes senzills de balanços de matèria i energia sobre volums de control i de conservació de l'energia mecànica (equació de Bernoulli). Així mateix, si vols veure més exercicis sobre la funció de corrent i el potencial de velocitat en una varietat de geometries, consulta les pàgines 283–285. A partir del problema 16 es tracten les tècniques del potencial complex.

- 16.** Demostra l'expressió 33.

- 17.** Hem vist a l'apartat 3.11 que la línia de fonts i la línia de vòrtexs són

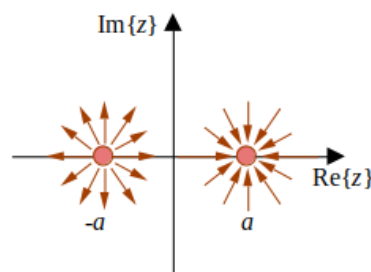
<sup>6</sup>L'expressió de la divergència en coordenades cilíndriques és

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z}$$

dos tipus de singularitats del flux on la velocitat és infinita i es viola una de les condicions cinemàtiques, ja sigui  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  o  $\nabla \times \vec{v} = 0$ . Hi ha altres tipus de singularitats que satisfan l'equació de Laplace a tot arreu excepte en un punt, per exemple el *doblet* (veure figura).

Sigui una font  $m > 0$  situada en  $(-a, 0)$  i una altra font  $-m$  col·locada en  $(a, 0)$ . Per a aquesta combinació de fonts, el potencial complex és

$$F = \frac{m}{2\pi} \ln(z + a) - \frac{m}{2\pi} \ln(z - a)$$



és a dir, la superposició de dos potencials del tipus Eq. 36.

a) Manipula aquesta expressió i utilitza el desenvolupament

$$\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \quad |z| < 1$$

per obtenir l'expressió per al potencial complex de la combinació de fonts,

$$F \simeq \frac{ma}{\pi z} \equiv \frac{K}{\pi z}, \quad |z| \gg a \quad (38)$$

vàlida a l'ordre més baix.<sup>7</sup>

b) Quin és el potencial de velocitat i la funció de corrent del doblet? Compara amb el resultat de l'exercici 13.

c) Calcula la velocitat complexa i extrau les components de la velocitat, segons la fórmula 33. Compara amb el resultat de l'exercici 13.

**18.** Considera ara la superposició de dos vòrtexs molt pròxims, un amb circulació positiva  $\Gamma$  en  $y = -a$  i un altre amb circulació negativa  $-\Gamma$  en  $y = a$ , com a la figura de sota. Per a aquesta combinació de vòrtexs, el potencial complex és (Eq. 37)

$$F = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z + ia) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - ia)$$

<sup>7</sup>Si permetem que les fonts s'apropin ( $a \rightarrow 0$ ) amb  $m$  constant, el resultat és  $F = 0$  i s'anul·len mútuament. Tanmateix, si a mesura que s'apropen,  $m$  augmenta de tal manera que el producte  $ma \equiv K$  és constant, tenim un doblet, on  $K$  s'anomena intensitat del doblet.

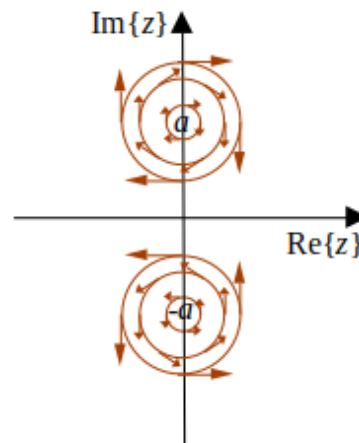
- a) Procedint com a l'exercici anterior, demostra que el potencial complex d'aquest doblet de vòrtexs per a  $|z| \gg a$  és

$$F = i \frac{\Gamma a}{\pi z}$$

- b) Troba el potencial i la funció de corrent del doblet de vòrtexs.

Definint  $\Gamma a \equiv K = 1$ , representa amb **contour** les línies de corrent del flux.

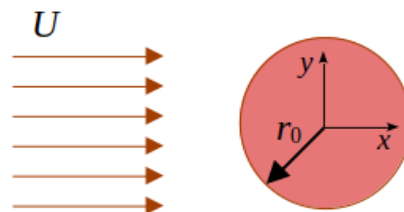
- c) Calcula la velocitat complexa i extrau les components de la velocitat. Representa el camp de velocitats amb **quiver**. Compara els resultats amb els de l'exercici 17 i observa que el patró de flux és com el del doblet de fonts, girat  $90^\circ$ .



19. El flux ideal incidint perpendicularment a l'eix d'un cilindre ve donat per la superposició d'un corrent uniforme (Eq. 31) amb angle d'incidència  $\alpha = 0$  i un doblet (Eq. 38). El potencial complex és

$$F = Uz + \frac{Ur_0^2}{z}$$

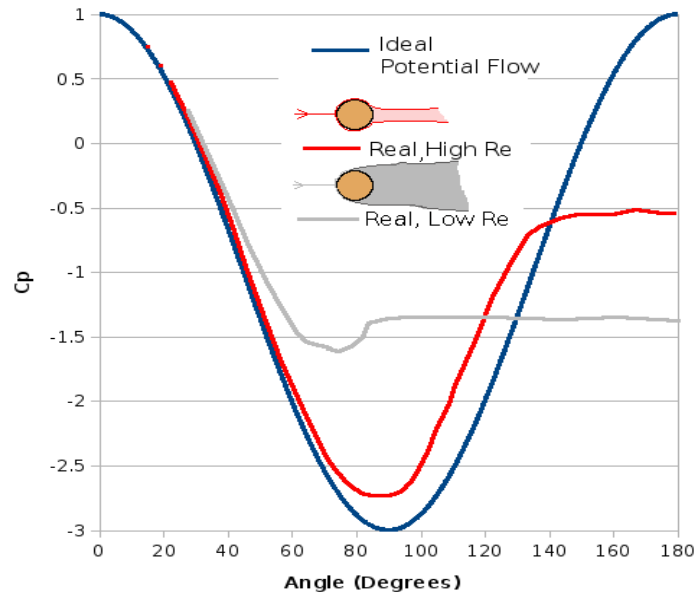
on hem redefinit la constant  $K \equiv \pi U r_0^2$ , amb  $r_0$  el radi del cilindre.



- Obtén el potencial i la funció de corrent del flux, i prenent  $U = 1$ ,  $r_0 = 1$  representa les línies de corrent amb **contour**.
- Obtén les components de la velocitat en cartesianes i polars. Representa el patró de flux amb **streamslice** (utilitza aquí coordenades cartesianes).
- Quant val la velocitat sobre la paret sòlida del cilindre?
- Anomena  $p_\infty$  a la pressió de referència, lluny del cilindre. Aplicant l'equació de Bernoulli sobre una línia de corrent que vagi des de l'infinit fins a la superfície del cilindre, quant val la pressió  $p$  sobre la paret sòlida?

Anticipant una mica el contingut del Tema 7 (Forces sobre objectes immersos en un flux) anomena  $C_p \equiv (p - p_\infty) / \frac{1}{2} \rho U^2$  i represen-

ta  $C_p$  entre 0 i  $\pi$ . De fet, veuràs que la pressió pren els mateixos valors en  $[0, \pi]$  i en  $[\pi, 2\pi]$ , per la simetria del problema respecte del flux incident. Compara el gràfic amb la figura següent (Auld i Srinivas, 2024):



- e) Veient la gràfica del coeficient de pressió  $C_p$  de l'apartat anterior i considerant la simetria respecte del valor  $\theta = \pi/2$ , sense haver de fer les integrals: sabries dir quant val la força total de pressió sobre la superfície cilíndrica si el flux és ideal?