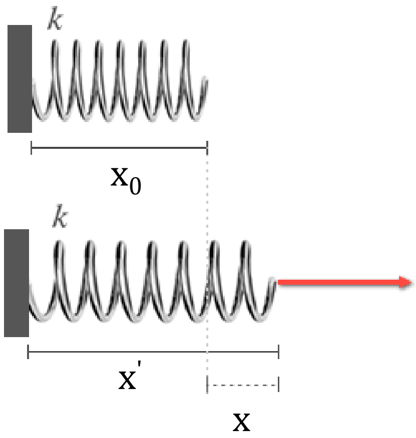
FORCES ELASTIQUES

- Aquelles que es descriuen com proporcionals a la deformació i oposades al seu sentit.

Expressió 1D:



$x = x' - x_0$

x: deformació a l'elongació

$F = -k\,x$

Expressió 3D:

$\vec{F} = -k\,\vec{r}$

- Les forces elàstiques són conservatives:

$$E_p = -\int_{x_0}^{x} (-kx)dx = \frac{1}{2}\,k\,(x - x_0)^2 \qquad Si\ x_0 = 0 \rightarrow E_p = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

En 3D:

$$E_p = \frac{1}{2}\,k\,r^2$$

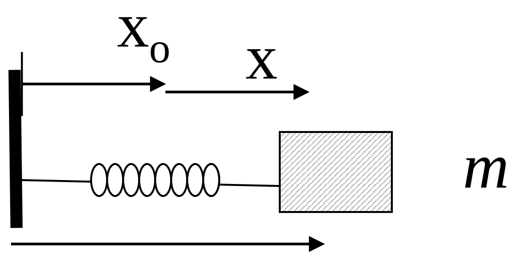
- IMPORTANCIA DEL PROBLEMA
  - ANÀLISI DE FOURIER
  - ANALISI DE TAYLOR

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/index.html

MOVIMENT HARMONIC SIMPLE

$F = -kx$

$k > 0$



$\vec{F} = m\vec{a}$

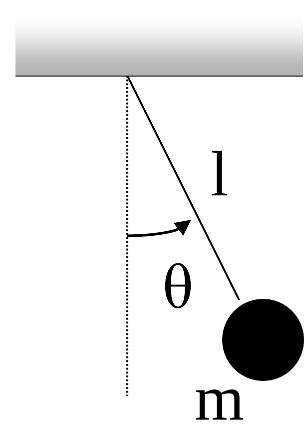
$$\boxed{-kx = m\ddot{x}}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$M = -lmg\sin\theta$$

$$L = lm\dot{\theta}l$$

$$\frac{dL}{dt} = ml^2\ddot{\theta}$$



per petites oscilacions:

$$M = -lmg\theta$$

$$\boxed{l\ddot{\theta} = -g\theta}$$

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow$$ eq. característica: $mp^2 + k = 0 \Rightarrow p^2 = -\frac{k}{m} = \omega^2 i^2$

$$p = \pm\omega i$$

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$ ← ***solucions matemàtiques***

separar les solucions físiques:

$$C_1 = Ce^{i\alpha}; \qquad C_2 = Ce^{-i\alpha}$$

$$x = Ce^{i\alpha}e^{\omega t i} + Ce^{-i\alpha}e^{-\omega t i} = Ce^{i(\omega t+\alpha)} + Ce^{-i(\omega t+\alpha)}$$

$$(e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\boxed{x = 2C\cos(\omega t + \alpha) = A\cos(\omega t + \alpha)}$$

CINEMÀTICA DEL PROBLEMA

VELOCITAT: $$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

ACCELERACIÓ: $$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -x\omega^2$$

PARÀMETRES DEL PROBLEMA

·**PERIODE:** T / x(t) = x(t + T), ∀ t, T el màxim!

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$x(t + T) = A \cos[\omega (t + T) + \alpha]$$

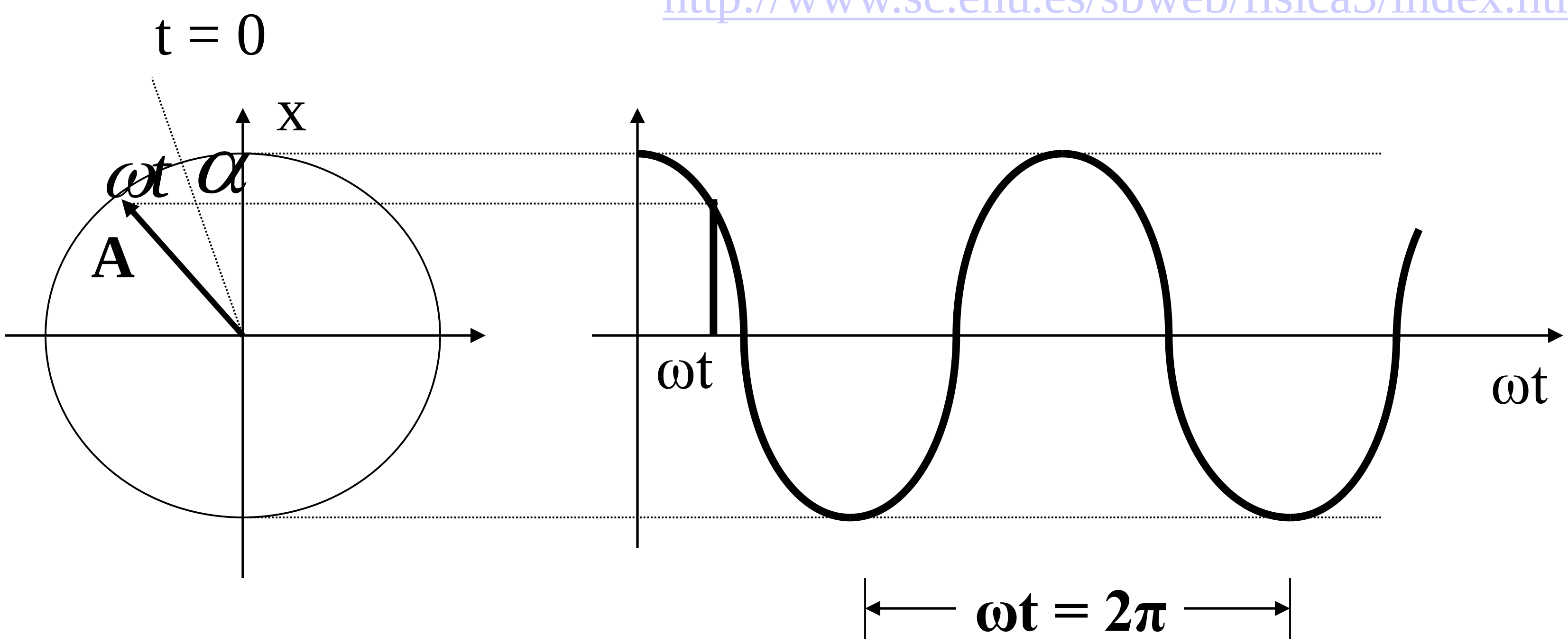
$$\cos(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t + \alpha + \omega T),\ \forall t \Longrightarrow \boxed{\omega T = 2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ ***pèndol*** $$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

· **FREQÜÈNCIA:** $\nu = \dfrac{1}{T}$

· **PULSACIÓ:** $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/index.html



CONSIDERACIONS ENERGÈTIQUES DEL PROBLEMA

* ENERGIA CINÈTICA:

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 sin^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \left[1 - \cos^2(\ldots)\right]$$

$$E_c = \frac{1}{2} m\omega^2 \left[A^2 - A^2 \cos^2(\omega t + \alpha)\right]$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m\omega^2 \left[A^2 - x^2\right]}$$

$$\begin{cases} x = A \Rightarrow E_c = 0 \\ x = 0 \Rightarrow E_c = \text{màx} \end{cases}$$

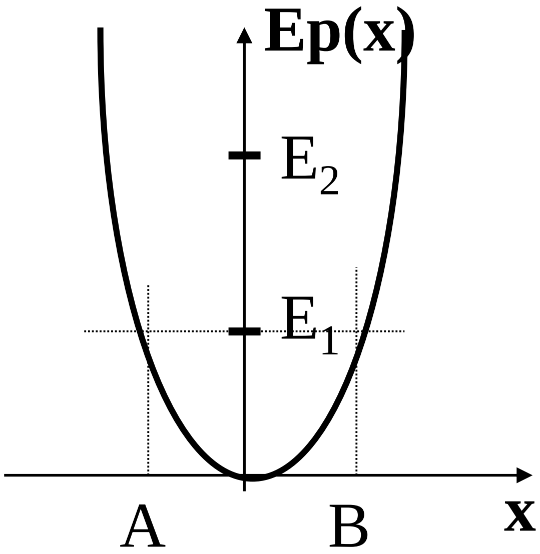
* ENERGIA POTENCIAL:

$$Ep = -\int_{x_o}^{x} \vec{F}.d\vec{x} = -\int_{x_o}^{x} -kx.dx = \left[\frac{1}{2} kx^2\right]_{x_o}^{x}$$

per tant, considerem $x_o = 0$

$$\boxed{Ep = \frac{1}{2} kx^2}$$

$$\begin{cases} x = A \Rightarrow Ep = \text{màx} \\ x = 0 \Rightarrow Ep = 0 \end{cases}$$



http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/index.html

*** ENERGIA MECÀNICA:**

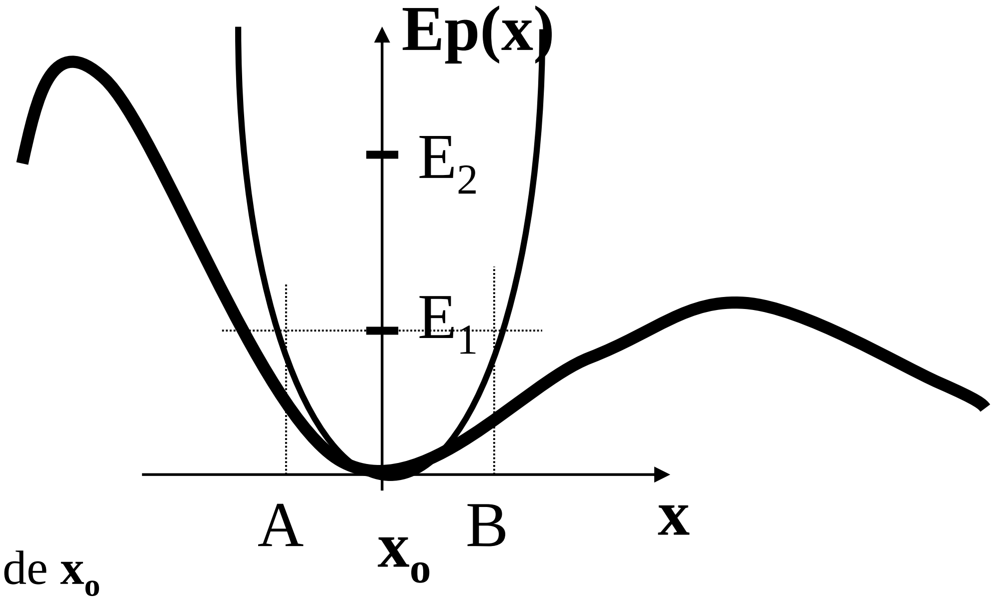
$$k = \omega^2 m$$

$$E = E_c + U = \frac{1}{2} m\omega^2 \left[A^2 - x^2\right] + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

es conserva!

ANHARMONICITAT



Desenvolupament de Taylor al voltant de $\mathbf{x_o}$

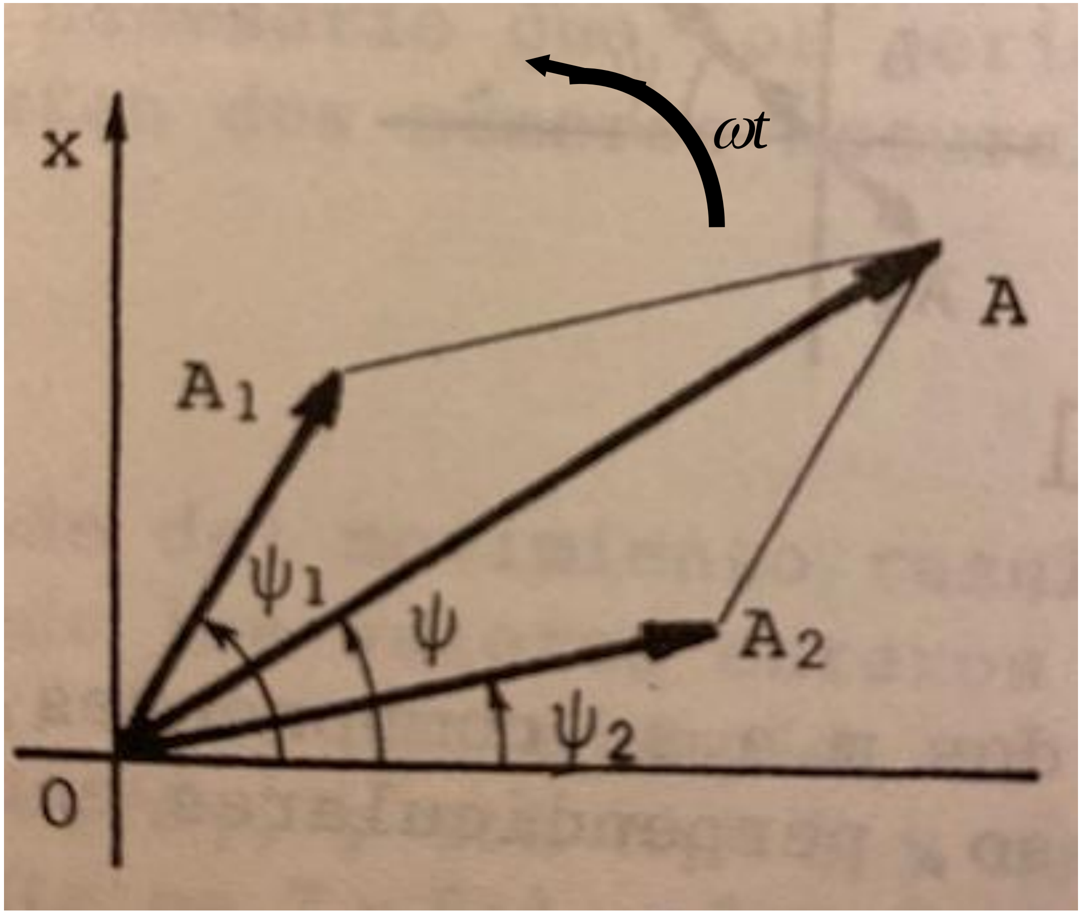
$$E_p(x) = E_p(x_o) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_o (x-x_o)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3Ep}{dx^3}\right)_o (x-x_o)^3 + \dots =$$

$$= E_p(x_o) + \frac{1}{2}\, k\, (x-x_o)^2 + \frac{1}{6}\, k'\, (x-x_o)^3 + \dots \quad \dots$$

k = constant harmònica   k’ = primera constant anharmonica

COMPOSICIÓ DE M.A.S EN LA MATEIXA DIRECCIÓ

a) IGUAL PULSACIÓ



$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \psi_1)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \psi_2)$$

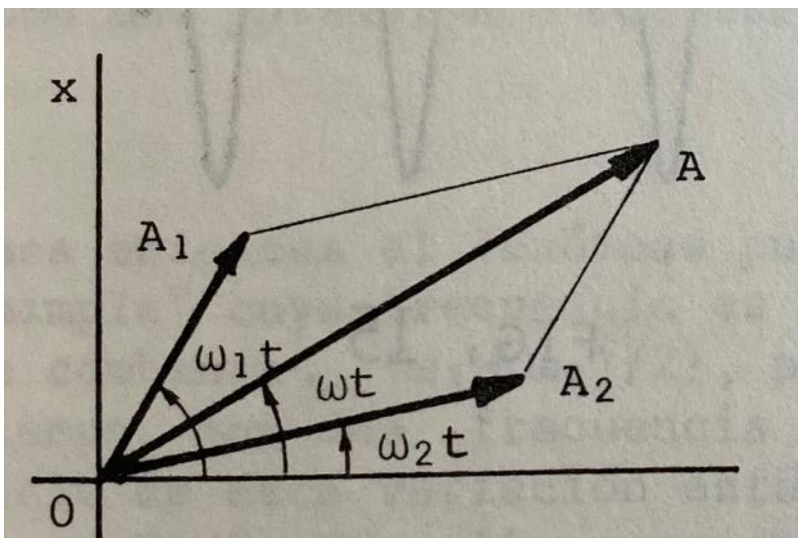
$$x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \psi)$$

COMPOSICIÓ DE M.A.S EN LA MATEIXA DIRECCIÓ

b) DIFERENT PULSACIÓ

$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$ $\qquad$ $x_2 = A_2 \sin \omega_2 t$

$x_1 + x_2$ *serà periòdica si* $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$



$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1 - \omega_2)t$$

COMPOSICIÓ DE M.A.S EN LA MATEIXA DIRECCIÓ

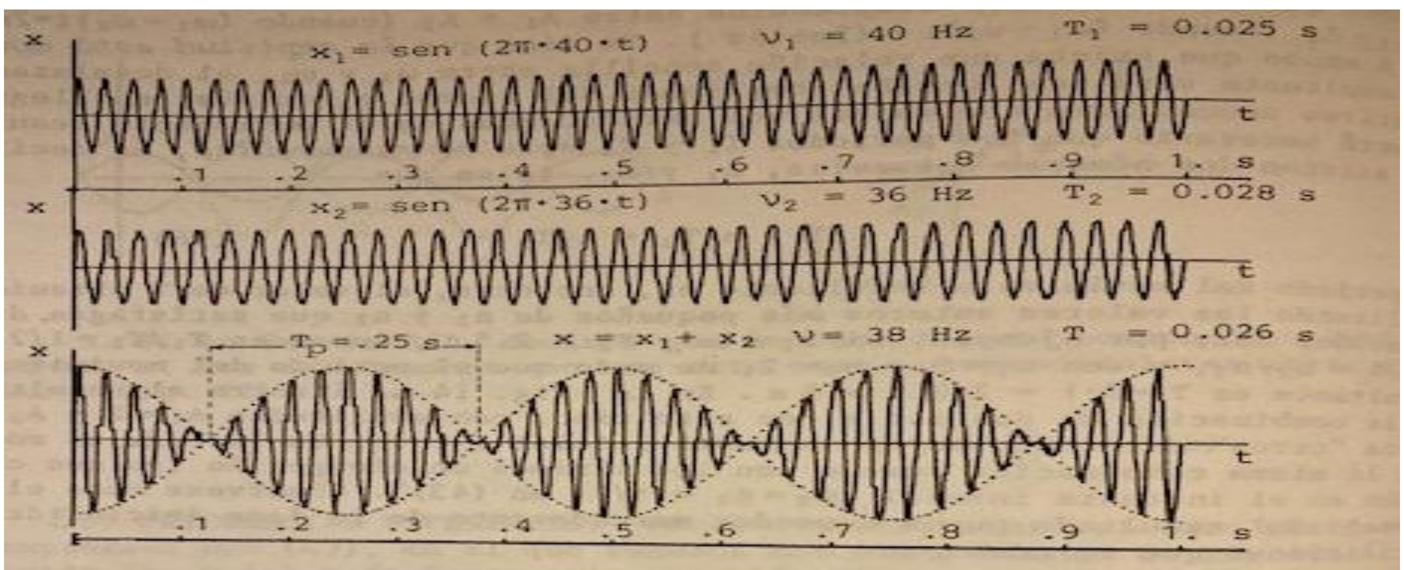
Cas particular de diferent pulsació i igual amplitud

$x_1 = A \sin \omega_1 t$ $\qquad$ $x_2 = A \sin \omega_2 t$

$x_1 + x_2$ = *es periòdica i amb modulació periòdica en amplitud*

$$x = x_1 + x_2 = A\,(\operatorname{sen} \omega_1 t + \operatorname{sen} \omega_2 t) =$$

$$= 2A \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right] \operatorname{sen}\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t\right]$$



COMPOSICIÓ DE M.A.S EN DIRECCIONS PERPENDICULARS

(Moviment produït per $\vec{F} = -k\vec{r}$)

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/index.htm

a) IGUAL PULSACIÓ

Sigui $\vec{F} = -k\vec{r}$, força central, atractiva i $\propto$ dist.

$$F_x = -kx$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$x = A\cos(\omega t' + \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$x = A\cos(\omega t' + \alpha)$$

definim $t' = t + \dfrac{\alpha_2}{\omega}$

$$F_y = -ky$$

$$m\ddot{y} = -ky$$

$$y = B\cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$y = B\cos\omega t'$$

$$\Downarrow$$

$$A(\cos\omega t'\cos\alpha - sin\omega t' sin\alpha) = A(\frac{y}{B}\cos\alpha - \sqrt{1-\frac{y^2}{B^2}}sin\alpha)$$

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B}\cos\alpha - \sqrt{1-\frac{y^2}{B^2}}sin\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\alpha + \frac{y^2}{B^2}\cos^2\alpha = (1-\frac{y^2}{B^2})sin^2\alpha$$

$$\Downarrow$$

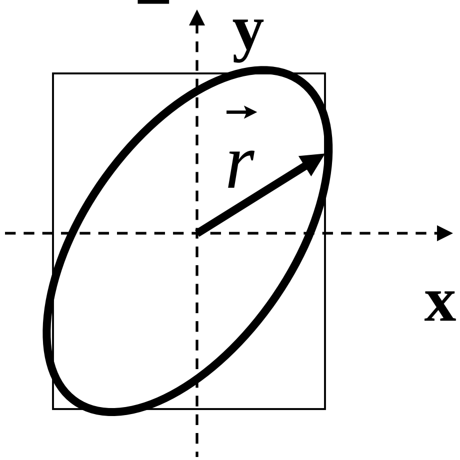
$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha = sin^2\alpha}$$

equació d'una el.lipse amb centre en el centre de coordenades

Algunes consideracions generals

velocitat aerolar?

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| = cte$$

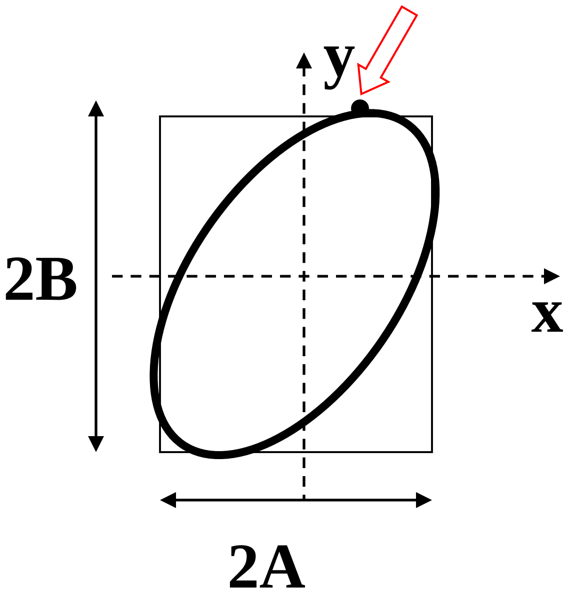


$$\left.\begin{aligned}
\dot{A} &= \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \\
x &= A\cos(\omega t' + \alpha) \\
y &= B\cos\omega t' \\
\dot{x} &= -A\omega\sin(\omega t + \alpha) \\
\dot{y} &= -B\omega\cos\omega t'
\end{aligned}\right\} \quad \dot{A} = \frac{1}{2}AB\omega\sin\alpha$$

per tant, quina serà l'àrea d'aquesta el.lipse?

$$\frac{A}{T} = \frac{1}{2}AB\omega\sin\alpha \Rightarrow A = \frac{1}{2}AB\underbrace{\omega T}_{2\pi}\sin\alpha$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{\cancel{2}}AB\cancel{2}\pi\sin\alpha = \underline{\underline{\pi AB\sin\alpha}}$$



sentit del recorregut?

imaginem t' = 0

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t' + \alpha) \\ y &= B\cos\omega t' \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow x = A\cos\alpha \\ &\rightarrow y = B \end{aligned}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right]_{t'=0} = -A\omega \sin(\omega t' + \alpha)\Big]_{t'=0}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right]_{t'=0} = -A\omega \sin\alpha$$

* $0 < \alpha < \pi$ ⇨ x DECREIX ⇨ **LEVOGIR**

* $\pi < \alpha < 2\pi$ ⇨ x CREIX ⇨ **DEXTROGIR**

$$\alpha = 0 \Rightarrow \frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 0 \rightarrow RECTA$$

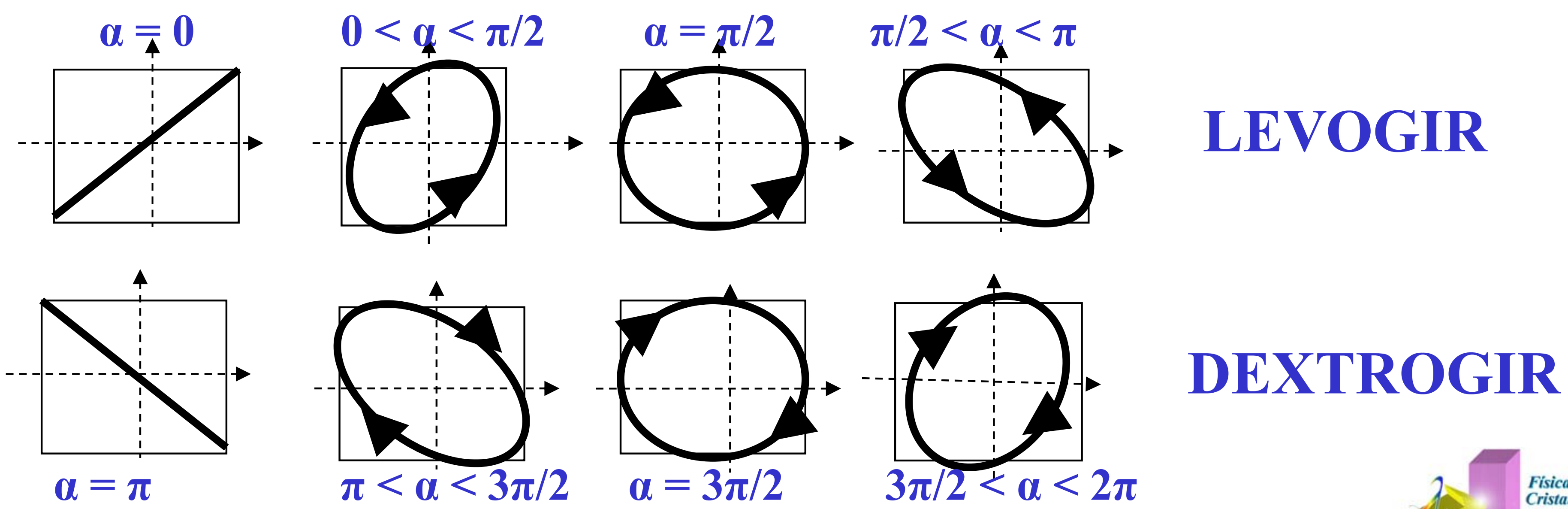
$$\alpha = {}^{\pi}\!/_{2} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \rightarrow$$

EL.LIPSE AMB EIXOS COINCIDENTS AMB ELS CARTESIANS (**LEVOGIR**)

$$\alpha = \pi \Rightarrow \frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 0 \rightarrow RECTA$$

$$\alpha = {}^{3\pi}\!/_{2} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

EL.LIPSE AMB EIXOS COINCIDENTS AMB ELS CARTESIANS (**DEXTROGIR**)



Consideracions energètiques

força conservativa!

* ENERGIA POTENCIAL:

$$Ep(r) = -\int_{r_s}^{r} \vec{F}.d\vec{r} = -\int_{0}^{r} -kr.dr = \frac{1}{2}kr^2 \qquad (r = x^2 + y^2)$$

* ENERGIA CINÈTICA:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

* ENERGIA TOTAL MECÀNICA:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 + B^2) = \frac{1}{2}k(A^2 + B^2)$$

COMPOSICIÓ DE M.A.S EN DIRECCIONS PERPENDICULARS

b) DIFERENT PULSACIÓ

$$x = A\cos(\omega xt + \alpha) \qquad\qquad x = A\cos\omega yt$$

Moviment en general no periòdic, però .....

Si $n_x T_x = n_y Ty = T$

Si $n_x / n_y = T_y / T_x = w_x / w_y$

Corbes de Lissajous

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/index.htm

OSCILACIONS ESMORTEIDES

ACCIÓ SIMULTÀNIA DE :

- FÍSICA ELÀSTICA $F = -kx$
- FORÇA DE FREGAMENT VISCOS

$$\vec{F}_r = -b\vec{v}$$

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = 0$$

$$pol.característic : mp^2 + bp + k = 0$$

$$p = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{b}{2m} \\ \omega_o &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}\right\} \rightarrow p = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

Distingim tres casos:

$$a)\ \frac{k}{m} > \left(\frac{b}{2m}\right)^2; \qquad \omega_o > \gamma \quad \text{INFRAESMORTEIT}$$

$$b)\ \frac{k}{m} < \left(\frac{b}{2m}\right)^2; \qquad \omega_o < \gamma \quad \text{SOBREESMORTEIT}$$

$$c)\ \frac{k}{m} = \left(\frac{b}{2m}\right)^2; \qquad \omega_o = \gamma \quad \text{ESMORTEIMENT CRITIC}$$

$a)$ $\omega_o > \gamma$ INFRAESMORTEIT

$$p = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$

$$p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{-\underbrace{(\omega_o^2 - \gamma^2)}_{+}}$$

$$\omega_1 < \omega_o$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$p_{1,2} = -\gamma \pm i\omega_1$$

Per tant, la solució general:

$$x = C_1 e^{-\gamma t + i\omega_1 t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega_1 t}$$

solucions reals només: **(C_1 , C_2) $\longrightarrow$ (A, θ)**

$$C_1 = \frac{1}{2} A e^{i\theta}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} A e^{-i\theta}$$

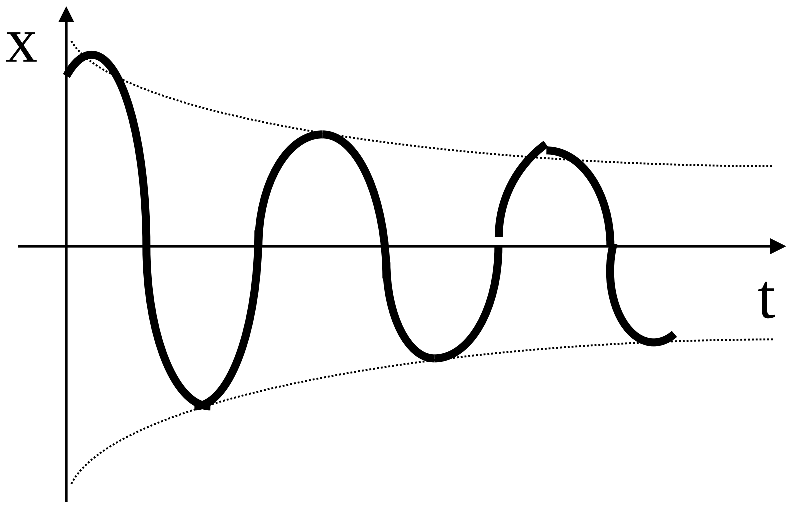
$$\boxed{x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)}$$

* Amplitud exponencialment decreixent

* pulsació menor que el no amortiguat.

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_o{}^2 - \gamma^2}$$

CAS PARTICULAR



decreixement logaritmic

$$\left|\ln \frac{x(t+T)}{x(t)}\right| = \left|\ln e^{-\gamma T}\right| = \gamma T$$

$b) \quad \omega_o < \gamma \quad$ SOBREESMORTEIMENT

$$P_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} =$$

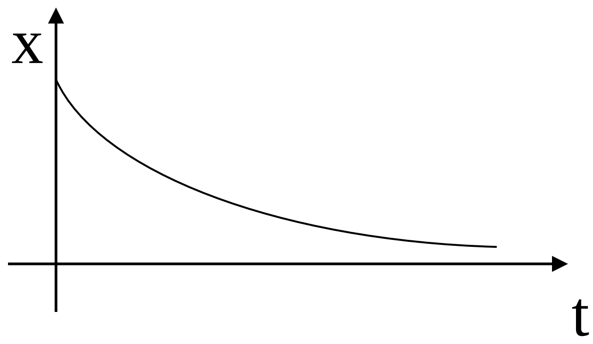
$$-\gamma_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_o{}^2}$$

$$-\gamma_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_o{}^2}$$

Així γ_1 i γ_2 són positives i diferents de γ

la solució general:

$$x = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}$$



c) $\omega_o = \gamma$ *ESMORTEIMENT CRÍTIC*

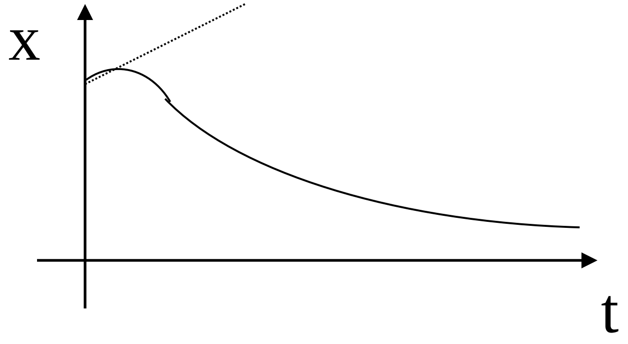
$p = -\gamma$ *doble* $e^{-\gamma t}$

$te^{-\gamma t}$

la solució general:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t}$$

$$\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$$



OSCIL·LACIONS FORÇADES

$\rightarrow -kx$

$\rightarrow -b\dot{x}$

$\rightarrow$ força externa : $F_{ext} = F_o \cos \omega t$

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_o \cos \omega t}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Suposem condicions <u>d'infraamortiguament</u>

$$x_h(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$$

A, θ : constants arbitràries

Solució particular? I de quin tipus?

Suposem: $x_p = A' \sin(\omega t - \theta')$

És possible? Quins valors per a A' i θ' ?

$$\dot{x} = A'\omega\cos(\omega t - \theta')$$

$$\ddot{x} = -A'\omega^2 \sin(\omega t - \theta')$$

$$-A'm\omega^2 \sin(\omega t - \theta') + A'b\omega\cos(\omega t - \theta') + kA'\sin(\omega t - \theta') = F_o \cos\omega t$$

$$A'(k - m\omega^2)\sin(\omega t - \theta') + A'b\omega\cos(\omega t - \theta') = F_o \cos\omega t, \forall t$$

En particular per a un t / $\omega t - \theta' = \pi/2$

$$\sin(\omega t - \theta') = 1$$

$$\cos(\omega t - \theta') = 0$$

Per tant: $A'(k - m\omega^2) = F_o \cos(\pi/2 + \theta') = -F_o \sin\theta'$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A'(k - m\omega^2) = -F_o \sin\theta'} \quad (1)$$

Per a un altre t / $\omega t - \theta' = 0$

$$\sin(\omega t - \theta') = 0$$
$$\cos(\omega t - \theta') = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A' b\omega = F_o \cos\theta'}$$

D'aquestes dues equacions $\Rightarrow$ A', θ'

* Si dividim (1) amb (2)

$$\frac{-F_o \sin\theta'}{F_o \cos\theta'} = \frac{A'(k - m\omega^2)}{A' b\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\theta' = \frac{m\omega^2 - k}{b\omega}}$$

* Si elevem al quadrat i sumem

$$A'^2 (k - m\omega^2)^2 + A'^2 b^2 \omega^2 = F_o^{\ 2} \ ; A'^2 \left[(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2 \right] = F_o^{\ 2}$$

$$\boxed{A' = \frac{F_o}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}} \qquad A' = \frac{F_o}{D} \quad \text{on} \quad D = \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

Així doncs, la solució particular:

$$x_p = \frac{F_o}{D}\sin(\omega t - \theta')$$

$$D = \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

$$\theta' = arctg\,\frac{m\omega^2 - k}{b\omega}$$

Solució general:

$$x = \underbrace{Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta)}_{\textbf{TRANSITORI}} + \underbrace{\frac{F_o}{D}\sin(\omega t - \theta')}_{\textbf{ESTACIONARI}}$$

RESSONÀNCIA

Per a t >> 0 $\Rightarrow$

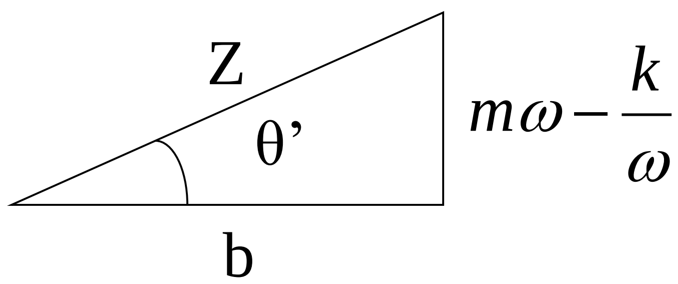
$$x_p \approx \frac{F_o}{D}\sin(\omega t - \theta')$$

$$v = \dot{x} = \frac{F_o}{D/\omega}\cos(\omega t - \theta') = \frac{F_o}{Z}\cos(\omega t - \theta')$$

Z : impedància mecànica

$$Z = \frac{D}{\omega} = \sqrt{b^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}$$

RECORDEM θ' ! $\Rightarrow$



ESTUDIEM Z! I DEDUÏM EL COMPORTAMENT DE $\dot{x}$

$$Z = \sqrt{b^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2} = Z(\omega) \qquad (1)$$

- Si $\omega \to 0$ $\Rightarrow$ $Z \to \infty$
- Valors petits de ω : $Z = \sqrt{b^2 + \frac{k^2}{\omega^2}}$ es a dir, si $\omega\uparrow$ $\Rightarrow$ $Z\downarrow$
- Si $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_o$

$$m\omega - \frac{k}{\omega} = m\sqrt{\frac{k}{m}} - \frac{k}{\sqrt{k/m}} = \sqrt{mk} - \sqrt{mk} = 0$$

Per tant: $\boxed{\mathbf{Z = b}}$

- En valors intermitjos de l'equació (1)

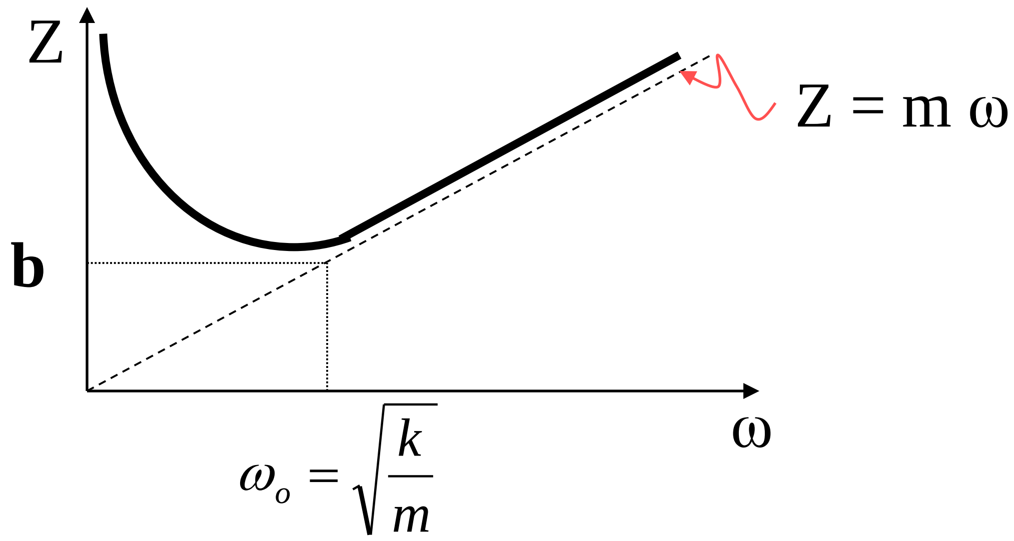
Per a ω molt grans, $\omega >> \omega_o$

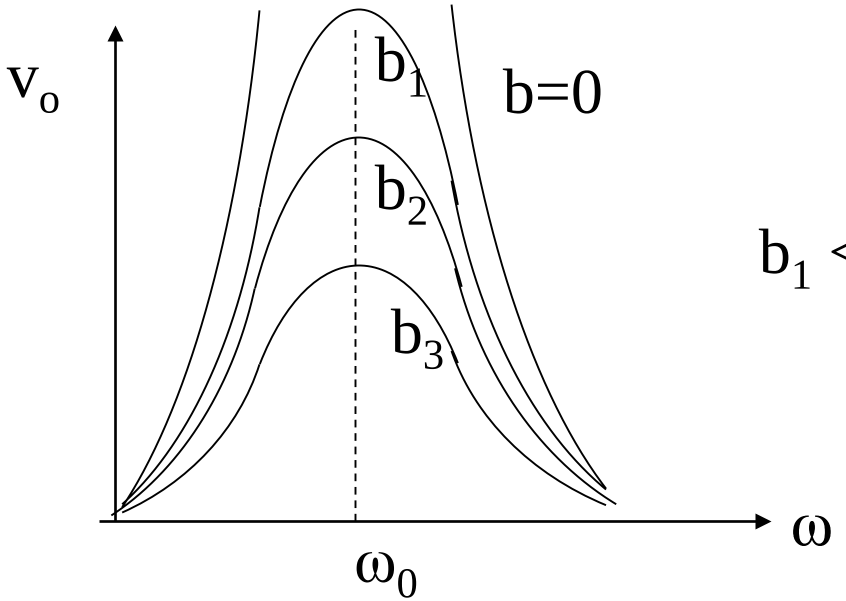
$$Z \approx \sqrt{b^2 + m^2\omega^2} \Rightarrow Z^2 = b^2 + m^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$\frac{Z^2}{b^2} - \frac{\omega^2}{b^2/m^2} = 1$$ **HIPÈRBOLA**

$$\frac{Z}{b} - \frac{\omega}{b/m} = 0$$ **ASÍMPTOTA: Z = m ω**

Per tant:





I el màxim d'elongació, què passarà?

$$x_o = \frac{F_o}{D} = \frac{F_o}{Z.\omega} \qquad D = \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

Recordem: $D^2 = k^2 + \underbrace{m^2\omega^4 - \omega^2(2km - b^2)}_{MINIMITZAR-HO!!}$

$$\frac{d(D^2)}{d\omega}$$ Derivant i igualant a zero $4m^2\omega^3 - 2\omega(2km - b^2) = 0$

Tenim dos opcions:

→ $\omega = 0$ ⇒ $D = k$ ⇒ x_o ← MÍNIM

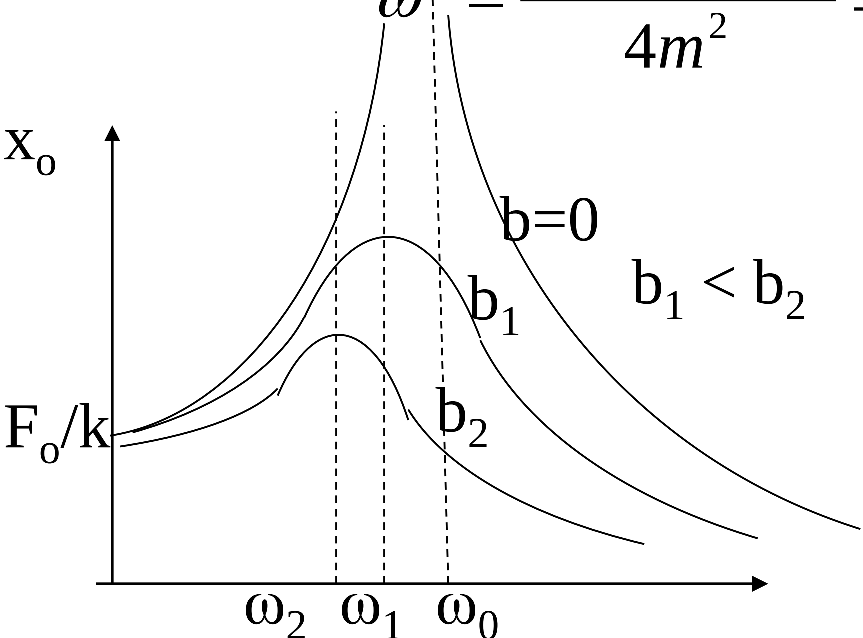
O bé:

→ $4m^2\omega^2 - 2(2km - b^2) = 0$

$$\omega^2 = \frac{2(2km - b^2)}{4m^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$$

⇓

x_o MÀXIM



NOTA: Si b = 0 → <u>D = 0</u>

⇒ $x_o = \infty$

RES. CATASTROFICA

POTENCIA EN UN MOVIMENT HARMONIC SIMPLE

$$\overline{P} = \overline{Fv} = \overline{F}\,\overline{v}$$

Exercici: Demostra que la P promitjada en el temps es $\overline{P} = \frac{1}{2} F_o v_o$

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T Fv\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (F_o \cos\omega t) v_o \cos(\omega t - \theta')\,dt$$

$$\cos(\omega t - \theta') = \cos\omega t \cos\theta' + \sin\omega t \sin\theta' \qquad \cos^2\omega t = \frac{1+\cos 2\omega t}{2}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{T} F_o v_o \left[\underbrace{\int_0^T \cos^2\omega t \cos\theta'\,dt}_{\frac{T}{2}\cos\theta'} + \underbrace{\int_0^T \underbrace{\cos\omega t \sin\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t} \sin\theta'\,dt}_{0} \right]$$

PER TANT: $\overline{P} = \frac{1}{2} F_o v_o \cos\theta'$

donat que: $\cos\theta' = {}^{b}\!/_{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{P} = \frac{1}{2} F_o v_o \cos\theta' \\ \cos\theta' = {}^{b}\!/_{Z} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \overline{P} = \dfrac{F_o v_o b}{2Z} \\ \overline{P} = \dfrac{v_o^2 b}{2} \end{array}$$

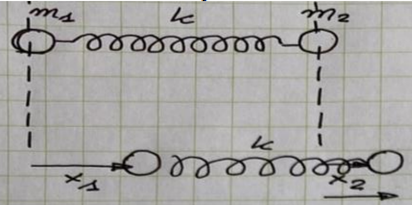
en el cas de ressonància, donat que:

$$\cos\theta' = 1$$

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2} F_o v_o}$$

DOS COSOS RELACIONATS ELASTICAMENT

- Dues masses puntuals i una k elàstica.



situació d'equilibri ≡ molla llargada natural

situació fora de l'equilibri

Força sobre $m_1 \Longrightarrow -k(x_1-x_2)$

Força sobre $m_2 \Longrightarrow -k(x_2-x_1)$

Equacions del moviment:

Per m_1 : $m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1-x_2) \Longrightarrow m_1\ddot{x}_1 + k(x_1-x_2) = 0$ (1)

Per m_2 : $m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2-x_1) \Longrightarrow m_2\ddot{x}_2 + k(x_2-x_1) = 0$ (2)

multiplicant (1) per m_2 ; multiplicant (2) per m_1, i restant les dues equacions

$$m_1 m_2(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) + k m_2(x_1-x_2) - k m_1(x_2-x_1) = 0$$

$$m_1 m_2(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) + k m_2(x_1-x_2) + k m_1(x_1-x_2) = 0$$

$$m_1 m_2(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) + k(x_1-x_2)(m_1+m_2) = 0$$

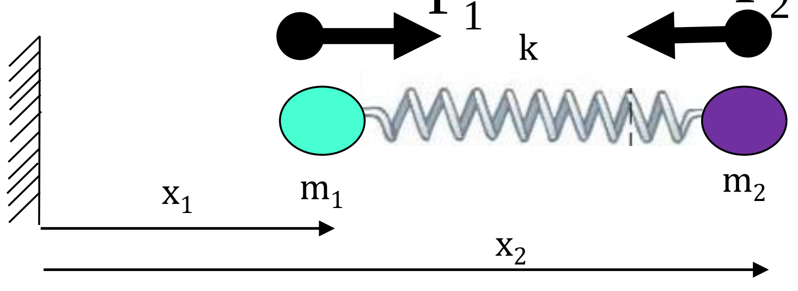
$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\ddot{(x_1-x_2)} + k(x_1-x_2) = 0$$

si : $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}$; $\boxed{(x_1-x_2) = A\cos(\omega t+\alpha)}$ amb $\omega = \sqrt{k/\mu}$

massa reduïda

DOS COSOS RELACIONATS ELASTICAMENT

- Dues masses puntuals i una k elàstica.



(si x es positiva)

l = llargada en repòs

$Elongació: (x_2 - x_1) - l = x$ $\quad$ $Força: \; /\mathrm{F}/ = / - \mathrm{k\,x} \; / \begin{cases} F_1 = +k\,x \\ F_2 = -k\,x \end{cases}$

- Equacions diferencials del moviment:

$$m_1\ddot{x}_1 + kx = 0 \Longrightarrow m_1\ddot{x}_1 + k[(x_2 - x_1) - l] = 0 \longleftarrow \cdot \mathrm{m}_2$$

$$m_2\ddot{x}_2 + kx = 0 \Longrightarrow m_2\ddot{x}_2 + k[(x_2 - x_1) + l] = 0 \longleftarrow \cdot \mathrm{m}_1$$

DOS COSOS AMB INTERACCIÓ ELÀSTICA

Llavors:

$$\left.\begin{aligned} m_1 m_2 \ddot{x}_1 + k m_2 x &= 0 \\ m_1 m_2 \ddot{x}_2 - k m_1 x &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ restant}$$

$$m_1 m_2 (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + kx(m_1 + m_2) = 0$$

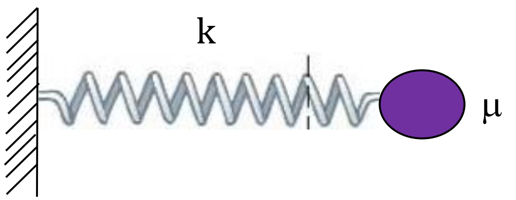
Dividint per $(m_1 + m_2)$:

$$\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \underbrace{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}_{\ddot{x}} + kx = 0$$

Si $\mu = \dfrac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ **massa reduïda** del sistema

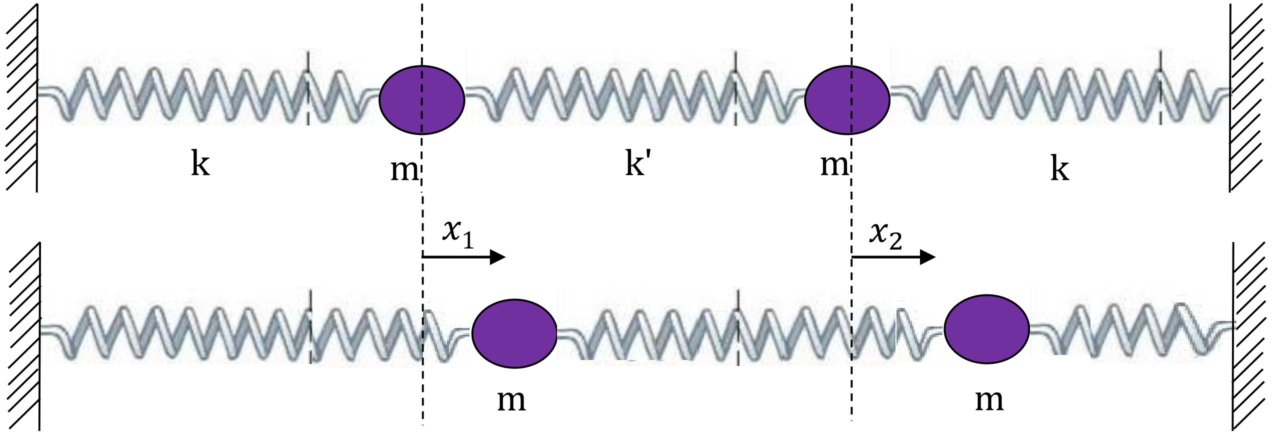
$$\mu \ddot{x} + kx = 0 \Longrightarrow x = A \cos\,(\omega\, t + \propto) \qquad \boxed{\omega = \sqrt{k/\mu}}$$

Per tant equivalent a



μ, també utilitzada en el problema de "2 cossos" gravitacionals.

OSCIL·LACIONS ACOBLADES



$$-kx_1 - k'(x_1 - x_2) = m\,\frac{d^2x_1}{dt^2}$$

$$(+)\quad -kx_2 - k'(x_2 - x_1) = m\,\frac{d^lx_2}{dt^2}$$

$$-k(x_1 + x_2) = m\,\frac{d^2\,(x_1 +\ x_2)}{dt^2}$$

$$-kx_1 - k'(x_1 - x_2) = m\,\frac{d^2x_1}{dt^2}$$

$$(\text{-})\quad -kx_2 - k'(x_2 - x_1) = m\,\frac{d^lx_2}{dt^2}$$

$$-2k'(x_1 - x_2) - k(x_1 - x_2) = m\,\frac{d^2\,(x_1 -\ x_2)}{dt^2}$$

$$m\,\frac{d^2\,(x_1 +\ x_2)}{dt^2} + k(x_1 + x_2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_1 +\ x_2 = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t +\ \alpha\right)$$

$$m\,\frac{d^2\,(x_1 -\ x_2)}{dt^2} + (k + 2k')(x_1 - x_2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_1 -\ x_2 = B\sin\left(\sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}\cdot t +\ \beta\right)$$

OSCIL·LACIONS ACOBLADES

Conseqüentment:

Sumant:

$$x_1 = \left[A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k+2k'}{m}}\, t + \beta\right)\right] \Big/ 2$$

Restant:

$$x_2 = \Bigg[\underbrace{A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha\right)}_{\textit{Mode “en fase”}} - \underbrace{B \sin\left(\sqrt{\frac{k+2k'}{m}}\, t + \beta\right)}_{\textit{Mode “en contrafase”}}\Bigg] \Big/ 2$$

Per tant es veu que el moviment general de dos oscil·ladors acoblats és la superposició de dos modes normals de vibració del sistema de pulsacions.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{i} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$$

OSCIL·LACIONS ACOBLADES

Com podem excitar el sistema per tal de que mostri un comportament de "mode en fase" (exclusivament)?

Fixant unes condicions inicials (per exemple)

$$t = 0 \begin{cases} x_{01} = x_{02} = A \\ \dot{x}_{01} = \dot{x}_{02} = 0 \end{cases} \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Com podem excitar el "mode en contrafase" (exclusivament)?

Fixant unes condicions inicials (per exemple)

$$t = 0 \begin{cases} x_{01} = A \quad i \quad x_{02} = -A \\ \dot{x}_{01} = \dot{x}_{02} = 0 \end{cases} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}$$

OSCIL·LACIONS ACOBLADES

Suposem que les condicions inicials són:

$$t = 0 \begin{cases} x_{01} = A' \quad i \quad x_{02} = 0 \\ \dot{x}_{01} = 0 = \dot{x}_{02} \end{cases}$$

$$\alpha = {}^{\pi}/_{2} \qquad \text{i} \qquad \beta = {}^{\pi}/_{2}$$

$$B = A = \frac{A'}{2}$$

I en aquest cas llavors:

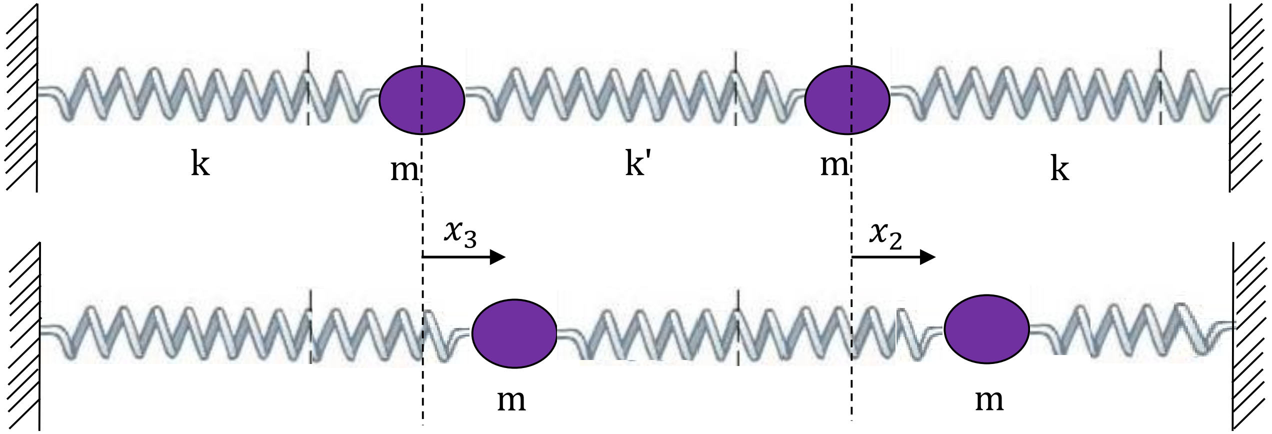
$$x_1 = {}^{A'}/_{2} \sin\left(\omega_1 t + {}^{\pi}/_{2}\right) + {}^{A'}/_{2} \sin\left(\omega_2 t + {}^{\pi}/_{2}\right)$$

$$x_2 = {}^{A'}/_{2} \sin\left(\omega_1 t + {}^{\pi}/_{2}\right) - {}^{A'}/_{2} \sin\left(\omega_2 t + {}^{\pi}/_{2}\right)$$

$$x_1 = {}^{A'}/_{2} [\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t] = A' \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}$$

$$x_2 = {}^{A'}/_{2} [\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t] = A' \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \sin \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}$$

OSCIL·LACIONS ACOBLADES



$$-kx_1 - k'(x_1 - x_2) = m\,\frac{d^2x_1}{dt^2}$$

$$(+)\quad -kx_2 - k'(x_2 - x_1) = m\,\frac{d^lx_2}{dt^2}$$

$$-k(x_1 + x_2) = m\,\frac{d^2\,(x_1 +\ x_2)}{dt^2}$$

$$-kx_1 - k'(x_1 - x_2) = m\,\frac{d^2x_1}{dt^2}$$

$$(\text{-})\quad -kx_2 - k'(x_2 - x_1) = m\,\frac{d^lx_2}{dt^2}$$

$$-2k'(x_1 - x_2) - k(x_1 - x_2) = m\,\frac{d^2\,(x_1 -\ x_2)}{dt^2}$$

$$m\,\frac{d^2\,(x_1 +\ x_2)}{dt^2} + k(x_1 + x_2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{x_1 +\ x_2 = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t +\ \alpha\right)}$$

$$m\,\frac{d^2\,(x_1 -\ x_2)}{dt^2} + (k + 2k')(x_1 - x_2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{x_1 -\ x_2 = B\sin\left(\sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}\cdot t +\ \beta\right)}$$

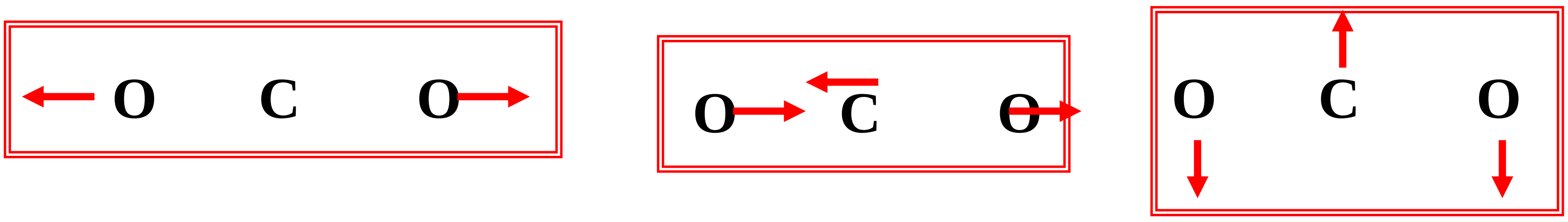
EXEMPLE QUÍMIC

molècula de CO_2 ⇨ $O = C = O$

$m_1 \quad m_2 \quad m_1$

TRES MODES NORMALS!

LA POSICIÓ DEL C. D. M. S’HA DE MANTENIR



I CONCRETAMENT EL SEU ESPECTRE RESSONANT ÉS: