Anàlisi Matemàtica 1 (AM1)
GEMiF

E5.4 Exercicis: Aplicacions de la integral definida

1. Calcula l'àrea de la regió delimitada per les corbes $x = y^2$ i $x - y = 2$
   a) Per integració respecte x
   b) Per integració respecte y

2. Calcula l'àrea de la regió delimitada per les corbes
   a) $4x = 4y - y^2$, $4x - y = 0$
   b) $x + y = 2y^2$, $y = x^3$
   c) $8x = y^3$, $8x = 2y^3 + y^2 - 2y$
   d) $y = \cos x$, $y = \sec^2 x$, $x \in [-\pi/4, \pi/4]$
   e) $y = 2\cos x$, $y = \sin 2x$, $x \in [-\pi, \pi]$
   f) $y = 6 - x^2$, $y = -|x|$
   g) $x^2 = 4py$, $y^2 = 4px$, $p > 0$
   h) Els cercles de radi 2 i centres $(0,0)$ i $(2,2)$

3. Calcula l'àrea dels polígon de vèrtexs
   a) $(0,0)$, $(1,3)$, $(3,1)$
   b) $(0,1)$, $(2,0)$, $(3,4)$
   c) $(-2,-2)$, $(1,1)$, $(5,1)$, $(7,-2)$

4. La regió delimitada per $y = x^2$ i $y = 4$ es divideix en dues subregions de la mateixa àrea amb la línia $y = c$. Troba el valor de c.

5. Calcula l'àrea de la regió delimitada per la corba $y = 1 + a - ax^2$, $a > 0$, al primer quadrant. Quin valor d'a fa que l'àrea sigui mínima?

6. Volem calcular l'àrea delimitada per les corbes del tipus $f(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, en el primer quadrant.
   a) Calcula l'àrea a l'interval $[1, +\infty)$, en funció del paràmetre α
   b) Calcula l'àrea a l'interval $(0,1)$, en funció del paràmetre α
   c) Calcula l'àrea a l'interval $(0, +\infty)$, en funció del paràmetre α

7. La base d'un sòlid és la regió envoltada per l'el·lipsi
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
   Troba el volum del sòlid tal que les seccions perpendiculars a l'eix x són triangles isòsceles amb vèrtexs de la base sobre la el·lipsi i alçada la meitat que la base.

8. Troba el volum del sòlid de revolució obtingut en girar la regió Ω delimitada per les corbes indicades al voltant de l'eix x
    a) $x + y = 3$, $y = 0$, $x = 0$
    b) $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$
    c) $y = x^3$, $x + y = 10$, $y = 1$
    d) $y = \cos x$, $y = x + 1$, $y = \pi/2$
    e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$

9. Troba el volum del sòlid de revolució obtingut en girar la regió Ω delimitada per les corbes indicades al voltant de l'eix y
    a) $x = y^3$, $x = 8$, $y = 0$
    b) $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$
    c) $y = x$, $y = 2x$, $x = 4$
    d) $x = \sqrt{9 - y^2}$, $x = 0$
    e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$

10. Troba el volum del sòlid de revolució obtingut en girar la regió delimitada per $x = 1$, $x = 4$, $y = 4x - x^2$ al voltant de l'eix y

11. Donat un hemisferi de radi a, se li fa un forat cilíndric de radi r perpendicularment a la base i d'eix que passa pel centre de la base. Calcula el volum que queda:
    a) Pel Washer method
    b) Pel Shell method

12. Troba el volum del sòlid de revolució obtingut en girar la regió Ω delimitada per les corbes indicades al voltant de l'eix y utilitzant el mètodes de capes
    a) $y = x$, $x = 1$, $y = 0$
    b) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$
    c) $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$

13. Troba la longitud de les següents corbes
    a) $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$, entre $x = 1$ i $x = 2$
    b) $y = a\cosh\frac{x}{a}$, $x = -L$, $y = L$ (una catenària)

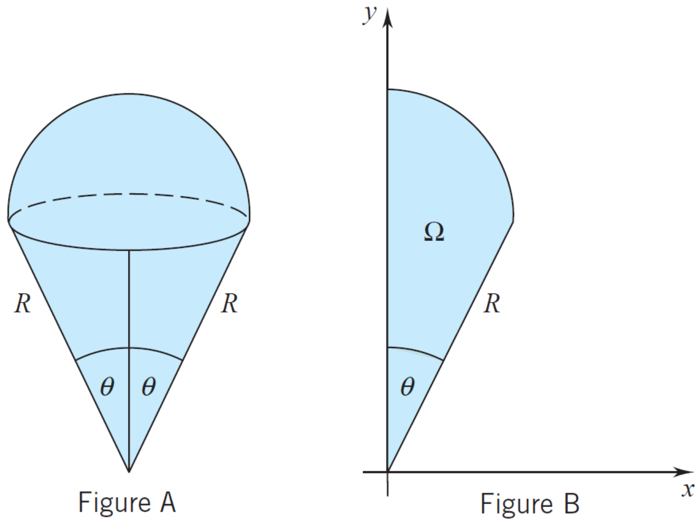
14. Troba l'àrea de la superfície generada per una paràbola $y = x^2$ entre $x = 0$ i $x = 1$ en girar respecte l'eix y (paraboloide de revolució)

15. Troba el centroide de les següents regions
    a) Triangle rectangle de base b i alçada h
    b) Regió delimitada per $y = x^2$, $y = 2x$

16. Utilitzant el teorema de Pappus, calcula el volum del cos de revolució en fer girar el triangle de l'exercici 15a al voltant del següent eixos
    a) Eix x
    b) Eix y
    c) Recta $x = -b$
    d) Recta $y = -x$

17. Calcula el volum del cos de revolució en fer girar les següents regions respecte els eixos x i y
    a) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$
    b) $y = x^2$, $x = y^3$
    c) $y = 2x$, $x = 3$, $y = 2$
    d) $x + y = 1$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$
    e) $y = x$, $x + y = 6$, $y = 1$

18. Calcula el volum del con de gelat de la figura A, i la coordenada x del centroide de la figura B



19. Calcula el volum de la intersecció entre dos cilindres de radi r amb eixos perpendiculars i que es troben en el mateix pla.