Energia d'un sistema de càrregues electrostàtiques.

Ja sabem que el potencial a qualsevol punt $\vec{\boldsymbol{r}}$ d'una càrrega puntual de valor q_i situada a la coordenada: $\vec{\boldsymbol{r}}_i$, es calcula amb l'expressió:

$$V(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i|} \qquad (1)$$

Aquesta expressió pressuposa que l'origen de potencial està a l'infinit.

Calculem ara el treball necessari per a construir un sistema de N càrregues puntuals, de valors

q_1 , q_2 , ..., q_i , ..., q_N

situades respectivament a les posicions finals

$\vec{\boldsymbol{r}}_1, \vec{\boldsymbol{r}}_2 , \dots , \vec{\boldsymbol{r}}_i , \dots , \vec{\boldsymbol{r}}_N$

aquest treball global s'identificarà amb l'energia potencial electrostàtica total del sistema de càrregues i l'anomenarem U.

Per a fer aquest càlcul suposem que anem col·locant les càrregues que estan "aparcades" a l'infinit (molt lluny de la nostra distribució), un a una, en ordre, des de la q_1, fins a la q_N portant-les des de l'infinit fins a la seva posició final.

1. Suposem que no tenim cap càrrega de moment, per tant no hi ha camp ni potencial, el trasllat de la primera càrrega q_1 des de l'infinit fins a $\vec{\boldsymbol{r}}_1$ no suposarà cap treball ja que encara no hi ha ningú que li faci força. Per tant:

$$U_1 = 0$$

2. Ara ja tenim q_1 a $\vec{\boldsymbol{r}}_1$, i aquesta crea un potencial al seu voltant de:

$$V_1(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_1|}$$

   Si ara portem la q_2 des de l'infinit fins a la seva posició final $\vec{\boldsymbol{r}}_2$, l'energia o treball esmerçat serà

$$U_2 = q_2 V_1(\vec{\boldsymbol{r}}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_1}{|\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1|}$$

3. Ara ja tenim q_1 a $\vec{\boldsymbol{r}}_1$ i q_2 a $\vec{\boldsymbol{r}}_2$ i aquestes dues creen un potencial a l'espai de:

$$V_{12}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_2|}$$

   Si ara portem la q_3 des de l'infinit fins a la seva posició final $\vec{\boldsymbol{r}}_3$, l'energia o treball esmerçat serà

$$U_3 = q_3 V_{12}(\vec{\boldsymbol{r}}_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{|\vec{\boldsymbol{r}}_3 - \vec{\boldsymbol{r}}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}_3 - \vec{\boldsymbol{r}}_2|}$$

4. Ara ja tenim q_1 a $\vec{\boldsymbol{r}}_1$, q_2 a $\vec{\boldsymbol{r}}_2$ i q_3 a $\vec{\boldsymbol{r}}_3$ i aquestes tres creen un potencial a l'espai de:

$$V_{123}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_2|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_3|}$$

Si ara portem la q_4 des de l'infinit fins a la seva posició final $\vec{\boldsymbol{r}}_4$, l'energia o treball esmerçat serà

$$U_4 = q_4 V_{123}(\vec{\boldsymbol{r}}_4) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4 q_1}{|\vec{\boldsymbol{r}}_4 - \vec{\boldsymbol{r}}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4 q_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}_4 - \vec{\boldsymbol{r}}_2|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4 q_3}{|\vec{\boldsymbol{r}}_4 - \vec{\boldsymbol{r}}_3|}$$

.
.
.

i. Ara ja tenim q_1 a $\vec{\boldsymbol{r}}_1$, q_2 a $\vec{\boldsymbol{r}}_2$, q_3 a $\vec{\boldsymbol{r}}_3$ .... q_{i-1} a $\vec{\boldsymbol{r}}_{i-1}$ i aquestes (i-1) creen un potencial a l'espai de:

$$V_{123\ldots(i-1)}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_2|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_3|} + \cdots \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{i-1}}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{i-1}|}$$

Si ara portem la q_i des de l'infinit fins a la seva posició final $\vec{\boldsymbol{r}}_i$, l'energia o treball esmerçat serà

$$U_i = q_i V_{123\ldots(i-1)}(\vec{\boldsymbol{r}}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_1}{|\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_2|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_3}{|\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_3|} + \cdots \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_{i-1}}{|\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_{i-1}|}$$

.
.
.

N. Ara ja tenim q_1 a $\vec{\boldsymbol{r}}_1$, q_2 a $\vec{\boldsymbol{r}}_2$, q_3 a $\vec{\boldsymbol{r}}_3$ .... q_{N-1} a $\vec{\boldsymbol{r}}_{N-1}$ i aquestes (N-1) creen un potencial a l'espai de:

$$V_{123\ldots(N-1)}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_2|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_3|} + \cdots \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{N-1}}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{N-1}|}$$

Si ara portem la q_N (l'última) des de l'infinit fins a la seva posició final $\vec{\boldsymbol{r}}_N$, l'energia o treball esmerçat serà

$$U_N = q_i V_{123\ldots(N-1)}(\vec{\boldsymbol{r}}_4) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_N q_1}{|\vec{\boldsymbol{r}}_N - \vec{\boldsymbol{r}}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_N q_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}_N - \vec{\boldsymbol{r}}_2|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_N q_3}{|\vec{\boldsymbol{r}}_N - \vec{\boldsymbol{r}}_3|} + \cdots \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_N q_{N-1}}{|\vec{\boldsymbol{r}}_N - \vec{\boldsymbol{r}}_{N-1}|}$$

Amb això ja donem per acabada la construcció del sistema final. Calculem quanta energia U hem esmerçat en total. Aquesta serà la suma de les energies de cadascuna de les N etapes anteriors.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots U_i + \cdots + U_N = \sum_{i=1}^{N} U_i$$

Substituint-hi les expressions trobades per a cada U_i :

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i = \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot V_{123\ldots(i-1)}(\vec{\boldsymbol{r}}_i) = \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{|\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_j|} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{|\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_j|} \quad (2)$$

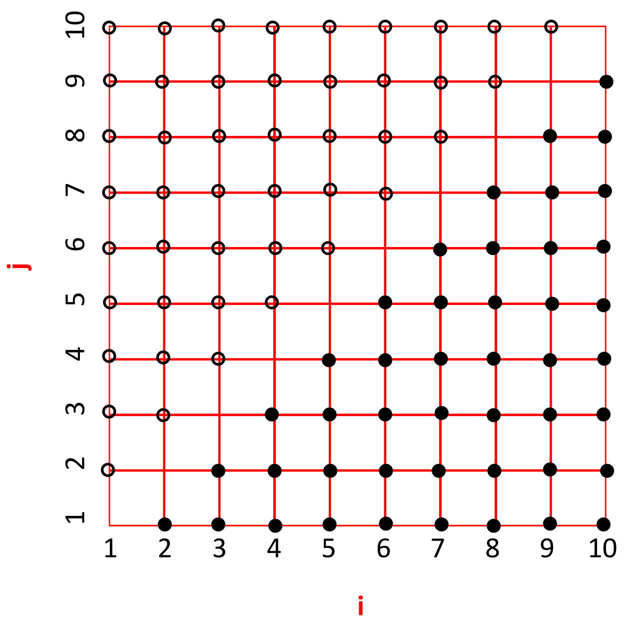
Podríem anomenar també els termes parcials d'energia $U_{i,j}$ com:

$$U_{i,j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{|\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_j|}$$

I considerar l'energia com la suma doble d'aquests termes:

$$U = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} U_{i,j}$$

Fixem-nos que el doble sumatori conté només els termes del triangle inferior d'un diagrama de punts bidimensional: i>j ja que com s'ha vist i resulta lògic, la càrrega i-èssima només nota el potencial de totes les anteriors j=1,...,i-1; j< i. El sumatori tampoc conté els termes de la diagonal, $U_{i,i}$, ja que la càrrega i-èssima no es pot fer energia a si mateixa, bàsicament perquè no hi era quan ella mateixa arriba.



En el diagrama de l'esquerra es considera un cas on N=10 (deu càrregues puntuals), i veiem els termes inclosos a la suma final (cadascú d'ells amb índexos (i,j)) com a punts emplenats en negre. En tots ells j<i.

El que passa és que podem fer el truc d'estendre la suma tots els termes, tant per j<i , com per j>i, (és a dir incloure també els punts no emplenats del triangle superior del diagrama).

Això és possible ja que, en intercanviar índexs i per j, i viceversa. El terme

$$U_{i,j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{|\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_j|}$$

Es canvia per:

$$U_{j,i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j q_i}{|\vec{\boldsymbol{r}}_j - \vec{\boldsymbol{r}}_i|}$$

Que és idèntic al $U_{i,j}$, és a dir: $U_{i,j} = U_{j,i}$, ja que el producte de càrregues ho és: $q_i q_j = q_j q_i$; i l'invers del mòdul de la diferència de posicions també ho és: $\frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$

Per tant podem estendre la suma de (2) per a tots els casos de i i de j, (excepte quan i=j, la diagonal), i sabent que si ho fem estem comptant el doble cada terme, per la qual cosa cal dividir per 2 per a avaluar correctament l'energia del sistema.

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{|\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_j|} \qquad (3)}$$

Aquesta és una expressió molt usada i correcte per a calcular l'energia del sistema de càrregues.

L'expressió (3) és independent de l'ordre seguit en la col·locació de les N càrregues, cosa que ha de ser així per pura coherència.

Una altra forma de posar aquesta expressió és:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{|\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_j|} = \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{\boldsymbol{r}}_i) \qquad (4)$$

On s'ha identificat:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{|\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_j|}$$

Com el potencial a la posició $\vec{\boldsymbol{r}}_i$ de la càrrega q_i , degut a la resta de càrregues puntuals (totes excepte, ella mateixa, la q_i), per tant en definitiva és el potencial del sistema a $\vec{\boldsymbol{r}}_i$: $V(\vec{\boldsymbol{r}}_i)$.

L'expressió (4) diu que per a trobar l'energia d'un sistema de càrregues s'ha de sumar els productes d'aquestes càrregues pels potencials d'allà on estan, **i tot això dividir-ho per 2**! Aquest factor ½ és degut a la història, és a dir que les càrregues han anat entrant una darrera l'altra i que mai s'ha construït un sistema posant de cop totes les càrregues al final.

L'expressió (4) es pot generalitzar a distribucions contínues de càrrega, simplement canviant les q_i per diferencials de càrrega $dq = \rho(\vec{\boldsymbol{r}}') \cdot dv$ per a cada diferencial de volum dv i coherentment canviant el sumatori per una integral:

$$\boxed{U = \ \frac{1}{2}\int_V \ V(\vec{\boldsymbol{r}}')\, \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\, dv \qquad (5)}$$

Essent V tot el volum que conté alguna càrrega. En general V ha de ser tot l'espai $\mathbb{R}^3$, ja que hi poden haver càrregues a qualsevol lloc.

Podem seguir manipulant aquesta expressió:

$$U = \ \frac{1}{2}\int_V \ V(\vec{\boldsymbol{r}}')\, \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\, dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \ V(\vec{\boldsymbol{r}}')\, \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}')\, dv$$

On hem usat el teorema de Gauss en versió diferencial: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

Seguint en la manipulació de l'expressió, i tenint en compte ara una integració per parts, des de l'operador nabla:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \ V(\vec{\boldsymbol{r}}')\, \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}')\, dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \ \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \Big(V(\vec{\boldsymbol{r}}')\, \vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}')\Big) dv - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \ \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \Big(V(\vec{\boldsymbol{r}}')\Big) \ \cdot \vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}') \cdot dv$$

El primer terme el transformem en una integral de flux per mitjà del teorema de la divergència, i en el segon usem la relació diferencial entre el camp i el potencial: $\vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\nabla}\big(V(\vec{\boldsymbol{r}})\big)$

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S \ V(\vec{\boldsymbol{r}}')\, \vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}') d\vec{S} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \ \vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}') \ \cdot \vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}') \cdot dv$$

Quan el primer terme de la integral de flux: $\frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S \ V(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}')d\vec{S}$, hem de tenir en compte que si, com hem dit abans V és tot l'espai $\mathbb{R}^3$, llavors el seu contorn S, és una superfície situada a l'infinit. Donada qualsevol càrrega ja sabem que el potencial cau a raó inversa de la distància i el camp a raó de la inversa de la distància al quadrat, per tant el producte, $V(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}')$, de l'integrand cau a raó inversa de la distància al cub. Per altra banda la superfície d'integració, creix a raó de la distància al quadrat. Amb tot això la integral de flux anterior, decreix netament amb l'invers a la distància, si aquesta distància la fem tendir a l'infinit, llavors la integral anterior tendeix simplement a zero i la podem negligir. Amb tot això, finalment, l'energia del sistema s'escriu per mitjà de la següent integral de volum:

$$\boxed{U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}')\cdot\vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}')\cdot dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left|\vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}')\right|^2 \cdot dv \qquad (6)}$$

La forma de l'equació (6) suggereix que l'integrand complert, es pugui interpretar com la densitat d'energia $u(\vec{\boldsymbol{r}})$ a cada punt $\vec{\boldsymbol{r}}$

$$\boxed{u(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left|\vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}})\right|^2 \qquad (7)}$$

És a dir, el propi camp elèctric ja te una energia, amb densitat volúmica proporcional al mòdul al quadrat d'aquest camp a cada punt.