

Forces sobre objectes immersos en un flux

Índex

Continguts	2
7.1 Introducció i objectius	2
7.2 Flux estacionari al voltant d'una esfera	3
7.3 Força de Stokes	9
7.4 Flux al voltant d'un cilindre	13
7.5 Coeficients de <i>Drag</i> y <i>Lift</i>	14
7.6 Forces dinàmiques de sustentació: l'efecte Magnus	18
Bibliografia	19
Complements formatius	21
Exercicis	23

Continguts

7.1 Introducció i objectius

Sempre que hi ha parets sòlides en contacte amb el flux, hi ha esforços viscosos i producció de vorticitat (Panton, 2013, pp. 296-297). El flux no és mai irrotacional a prop de parets sòlides, i per això no pot ser un flux potencial, ni ideal per tant. El flux potencial no pot satisfer la condició de contorn de *no-slip*. Les tècniques del flux potencial (Panton, 2013, Cap. 18) no proporcionen les línies de corrent correctes, llevat que el nombre de Reynolds tendeixi efectivament a infinit, que és el cas inviscut. Però aquest cas és sempre una aproximació: aquest tipus de fluid existeix només a la nostra imaginació.

Quan el nombre de Reynolds és petit, dominen per contra les forces viscoses. La motivació per a l'estudi del flux a nombres baixos de Reynolds (*creeping flow*) és l'estudi de les forces de lubricació. Stokes va donar la solució del flux al voltant d'una esfera en aquest límit, i va calcular la força coneguda de Stokes, que és la força d'arrossegament que experimenta una esfera en un flux viscos estacionari.

Els fluxos en què la inèrcia, les forces de pressió, i les forces viscoses són significatives tenen lloc a números de Reynolds intermedis. A Reynolds molt baixos, la inèrcia es pot menysprear davant les forces viscoses. A Reynolds elevats, és al contrari.

En aquest tema descriurem com és el flux de fluids reals al voltant d'objectes. Els objectius són els següents:

- ▶ Obtenir l'expressió de la força de Stokes sobre una esfera.
- ▶ Estudiar els diferents règims de flux al voltant d'un cilindre i una esfera, com a exemples representatius.
- ▶ Definir els coeficients d'arrossegament i sustentació (*drag* i *lift*), que s'il·lustraran amb exemples.
- ▶ Descriure i analitzar l'efecte Magnus experimentat per un cos en rotació immers en un flux.
- ▶ Complementàriament, simular amb Fluent exemples de flux estacionari: al voltant d'un cilindre, d'un perfil aerodinàmic i d'una esfera.

Aquest tema es basa en els continguts dels llibres de (Gerhart, Gerhart, i Hochstein, 2016, pp. 483-491, 515-545), (Tritton, 1988, pp. 21-34), (Panton, 2013, pp. 636-641) i (Landau i Lifshitz, 1985, pp. 71-74).

7.2 Flux estacionari al voltant d'una esfera

Com hem dit, les tècniques per a fluxos invíscids produeixen línies de corrent "errònies", en el sentit que no satisfan la condició de contorn de *no-slip*. Per tant, ni la velocitat ni la pressió que proporcionen són realistes.

Considera l'esfera de radi R de la figura. S'escull un sistema de coordenades esfèriques per conveniència, centrat en l'esfera. Ben lluny de l'esfera, el camp de velocitat és uniforme, amb velocitat U . El camp de velocitat al voltant de l'esfera només té components (r, θ) . El component azimuthal v_φ és zero, perquè el flux és axisimètric.

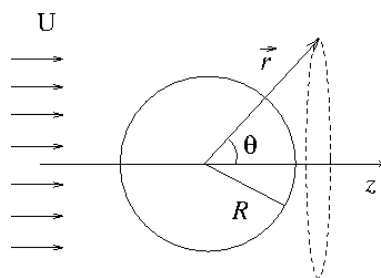


Fig. 1. Esfera de radi R immersa en un flux uniforme (projecció sobre el pla mitjà).

El patró de les línies de corrent que s'obtenen de resoldre les equacions per al flux invíscid estacionari al voltant d'una esfera s'assembla al de la figura

2.

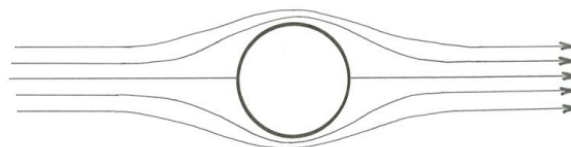


Fig. 2. Línies de corrent al voltant d'una esfera (flux invíscid).

Cal imaginar-se que el flux és axisimètric al voltant de l'eix z que travessa l'esfera. La disposició de les línies de corrent difereix força de la que s'obté

quan el flux és viscos, com veurem de seguida. La simetria és qualitativa-ment la mateixa, però les línies de flux s'ajunten a prop de la secció mitjana de l'esfera, reflectint el fet que el flux accelera en acostar-s'hi, i decelera en allunyar-se, com en l'efecte Venturi. La velocitat varia simètricament respecte al pla mitjà: és zero davant i darrere de l'esfera segons la direcció del flux (punts d'estancament), i màxima al cercle màxim que la divideix en dues meitats. Només als punts d'estancament la velocitat s'anul·la sobre l'esfera, a la resta no. Aigües avall, la velocitat del flux torna a ser de nou la velocitat que tenia aigües amunt, lluny de l'esfera.

Les tècniques per als fluxos ideals ens proporcionen les solucions clàssiques per al flux invíscid. S'obtenen resolent l'equació diferencial per a la funció de corrent en els casos elementals, i després s'aplica el principi de superposició per generar la solució de casos més complexos (són problemes lineals). En el cas d'una esfera, pots consultar el llibre de ([Panton, 2013](#), pp. 515-516) per veure com es resol el problema.

Aquí no obtindrem la funció de corrent (veure els exercicis del final del tema), però sí que examinarem algunes de les seves propietats i la representarem. Tot i que el flux no és pla sinó tridimensional, és axisimètric i per tant una de les coordenades (φ) és irrellevant. Sota aquest supòsit, es pot estendre a 3D el càlcul de la funció de corrent per obtenir el camp de velocitats que satisfà idènticament l'equació de continuïtat $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Anàlisi de la funció de corrent i representació de las línies de corrent amb Matlab (cas invíscid)

Examina la funció de corrent en coordenades esfèriques donada per

$$\psi = \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \quad (1)$$

La divergència en coordenades esfèriques, excloent la component azimuthal v_φ de la velocitat ja que aquesta s'anul·la, és

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta v_\theta}{\partial \theta}, \quad (2)$$

de forma que, si es defineixen

$$v_r \equiv \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

$$v_\theta \equiv -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

se satisfà automàticament $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (comprova-ho). Deriva la funció de corrent per obtenir les components v_r i v_θ ,

$$v_r = U \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right),$$

$$v_\theta = -\frac{U}{2} \sin \theta \left(2 + \frac{R^3}{r^3}\right).$$

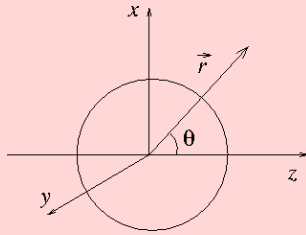
Observa com el flux es recupera després de passar l'esfera (a la mateixa distància r del centre de l'esfera, v_r canvia de signe però v_θ es la mateixa), i que si $r \rightarrow \infty$, les components de la velocitat satisfan $\vec{v} \rightarrow \vec{U}$. També pots comprovar que el flux és irrotacional, $\nabla \times \vec{v} = 0$, utilitzant l'expressió del rotacional en coordenades esfèriques,

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ v_r & r v_\theta & 0 \end{vmatrix} \quad (3)$$

i derivant i substituint les components de la velocitat. Observa a més a més, que

- ▶ En $r = R$, és a dir sobre la superfície de l'esfera, la velocitat NO s'anul·la: s'anul·la la component radial, però $v_\theta \neq 0$ en general.
- ▶ Només s'anul·la els punts on $\sin \theta = 0$, o sigui $\theta = 0, \pi$ (davant i darrera de l'esfera).

Dibuixarem les línies de corrent amb la funció `contour` de MATLAB, projectant sobre el pla mitjà de l'esfera, en 2D (pla $y = 0$ de la figura). També es poden dibuixar en 3D, amb la funció `streamline`, però aquesta utilitza les components de velocitat en lloc de la funció de corrent, i resulta més laboriós fer el canvi de coordenades esfèriques a cartesianes sobre una magnitud vectorial que sobre la funció de corrent ψ , que és un escalar. Si fem el canvi de ψ a coordenades cartesianes,



$$x = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + z^2,$$

(ja que projectem sobre el pla $y = 0$). Aleshores, la funció de corrent en coordenades cartesianes, en el pla $y = 0$ val

$$\psi = \frac{U}{2} x^2 \left(1 - \frac{R^3}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} \right) \quad (4)$$

Ara, introduïu les línies següents a la finestra de comandes de MATLAB per obtenir el dibuix de les línies de corrent. Ves amb compte d'escriure bé tots els punts davant dels operadors a la línia on es defineix la funció de corrent F,

```
>> U = 1
>> R = 1
>> x = -4:0.1:4;
>> z = x;
>> [X,Z] = meshgrid(X,Z);
>> F = U/2 * X.^2 .* (1 - R^3 ./ (sqrt(X.^2 + Z.^2)).^3 );
>> v = 0:0.1:1
>> contour(Z,X,F,v,'showtext','on')
>> axis square
>> grid on
```

La solució de Stokes

Ara examinarem el problema de Stokes, és a dir la solució estacionària de les equacions de Navier-Stokes a Reynolds molt baixos. Les equacions de Navier-Stokes adimensionalitzades (Eq. 21 del Tema 4), en el cas estacionari són

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{v} \end{aligned} \quad (5)$$

L'única escala de longitud rellevant del flux és l'associada amb la dimensió característica de l'esfera, i el nombre de Reynolds es basa per tant en el diàmetre $D = 2R$,

$$Re = \frac{UD\rho}{\mu}$$

on ρ és la densitat del fluid i μ la seva viscositat. Quan el nombre de Reynolds és petit, $Re \ll 1$, el terme inercial $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ es pot menysprear davant del de viscositat, i s'obtenen les equacions per al flux de Stokes o *creeping flow*,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ 0 &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v}.\end{aligned}\tag{6}$$

La darrera equació s'escriu en forma dimensional habitualment també, en la forma

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v},\tag{7}$$

on hem fet servir les mateixes variables \vec{v} , p , ∇ , per denotar la velocitat, la pressió i l'operador ∇ adimensionals, però cal no confondre's: en la primera forma, 6, són magnituds adimensionals, a la segona, 7, no.

En el problema d'una esfera fixa en un flux uniforme amb velocitat \vec{U} lluny del cos, les condicions de contorn són

$$\begin{aligned}\vec{v}(r \rightarrow \infty) &= \vec{U} \\ \vec{v}(r = R) &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

És a dir, lluny de l'esfera la velocitat és la del flux no pertorbat \vec{U} , i sobre la superfície de l'esfera la velocitat és nul·la (condició de no-slip). El sistema d'equacions 6 amb les condicions de contorn 8 constitueixen un problema lineal d'equacions en derivades parcials que no sembla gaire difícil de resoldre. De fet, va ser resolt per Stokes el 1851. Però requereix de força pràctica amb aquest tipus de problemes i el que anomenen *insight* arribar a la solució. Stokes la va deduir integrant la funció de corrent; pots trobar la resolució al llibre de (Panton, 2013, pp. 636-641). Una exposició moderna es pot trobar a internet (Mei, 2007). Una altra solució, obtinguda molt intuïtivament per (Landau i Lifshitz, 1985, pp. 71-74), integra directament el camp de velocitats utilitzant les propietats de simetria de la velocitat i de la vorticitat. Als exercicis obtindrem la solució, pas a pas. **En qualsevol cas, és una solució a $Re \rightarrow 0$.**

Considerem doncs la funció de corrent:

$$\psi = \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{R}{r} \right) \quad (9)$$

que és la solució del problema de Stokes, com veurem als exercicis i comprovarem de seguida. Tenim la mateixa geometria i simetries que en cas invíscid, i utilitzem el mateix sistema de coordenades.

Observa que el tercer terme, de llarg abast, és el que diferencia essencialment la solució de Stokes de la del flux invíscid que hem analitzat anteriorment.

Utilitzant les expressions per a la velocitat v_r i v_θ que satisfan automàticament l'equació de continuïtat $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, donades al problema invíscid a través de les derivades de la funció de corrent, obtindràs

$$v_r = U \cos \theta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{R}{r} \right),$$

$$v_\theta = -U \sin \theta \left(1 - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3} - \frac{3}{4} \frac{R}{r} \right).$$

Observa a més que, ara, \vec{v} s'anul·la sobre l'esfera: en substituir $r = R$ s'anul·len les dues components de la velocitat. Quan $r \rightarrow \infty$, el camp llunyà continua sent $\vec{v} = \vec{U}$. A més, pots comprovar que la vorticitat *no s'anul·la*. Aplicant el rotacional en coordenades esfèriques a \vec{v} , la component azimuthal de la vorticitat (l'única que no és zero), $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} = \Omega_\varphi \hat{\varphi}$, té com a resultat

$$\Omega_\varphi = -\frac{3U}{2} \frac{R \sin \theta}{r^2} \quad (10)$$

Ara pots generar amb `contour` les línies de corrent de la solució de Stokes (equació 9), per a la secció màxima sobre el pla $y = 0$, igual que hem fet abans. Observa-les amb deteniment,

- ▶ veuràs que les línies segueixen sent simètriques pel que fa a la posició del centre de l'esfera, $r = 0$. Això passa realment a la pràctica, però només a $Re \rightarrow 0$. Quan $r \rightarrow \infty$, les línies de corrent són rectes que denoten que el flux és uniforme, mentre que aquestes es defleixen prop de l'esfera.
- ▶ Per a distàncies intermèdies, les línies de corrent queden més separades que les del cas invíscid, indicant que la velocitat del fluid és *menor*

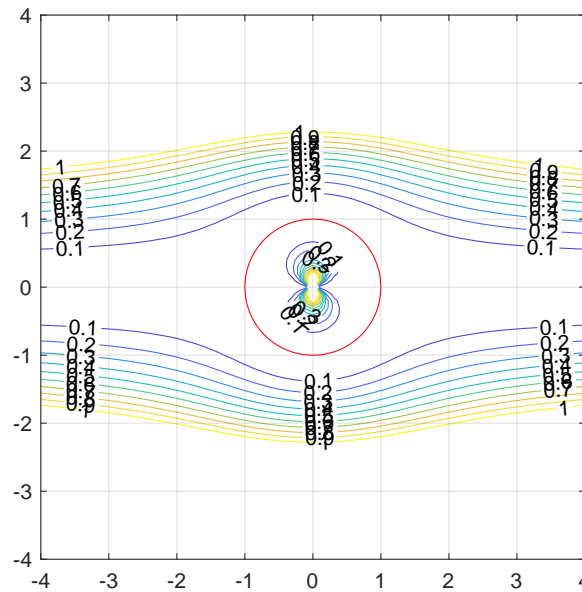


Fig. 3. Línies de corrent del problema de Stokes obtingudes amb la funció `contour` de MATLAB. La línia vermella assenyalava la posició de l'esfera. A l'interior, les línies de corrent que veus dibuixades no representen físicament la solució ja que estan fora del domini del fluid.

que la del flux no pertorbat. L'efecte de la viscositat produeix una “desacceleració” del flux, i un espai entre les línies de corrent que no s'observa en el cas invíscid.

- La velocitat sobre la superfície de l'esfera és zero (condició de *no-slip*) i creix força a poc a poc a mesura que ens n'allunyem, fins i tot als voltants de la secció màxima. A valors baixos del Re , l'efecte retardant de la viscositat se sent a grans distàncies. A la pràctica, aquesta zona s'aprima ràpidament quan augmenta el nombre de Reynolds, aniquila l'efecte desaccelerador, i arriba un punt en què la velocitat als voltants de l'esfera és més gran que la del flux no pertorbat, U , com passa a el cas invíscid.

7.3 Força de Stokes

Si la solució per al camp de velocitats satisfà les condicions de contorn i la condició d'incompressibilitat, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ és la solució del problema. L'equació 6 únicament proporciona la pressió, integrant la laplaciana del camp de velocitat. És a dir, la solució 9 ens dona tota la informació necessària per calcular no només la velocitat, sinó també els esforços i la pressió al fluid, i en particular la força sobre l'objecte. Aquest és, precisament, un

dels resultats més importants.

Per trobar la pressió, cal calcular $\nabla^2 \vec{v}$, encara que és més convenient utilitzar la identitat vectorial

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}$$

que, aplicada a la velocitat, dóna simplement $\nabla^2 \vec{v} = -\nabla \times \nabla \times \vec{v}$ ja que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. És a dir, $\nabla^2 \vec{v} = -\nabla \times \vec{\Omega}$. És a dir, l'equació per a la pressió és

$$\nabla p = -\mu \nabla \times \vec{\Omega}$$

Com que la vorticitat $\vec{\Omega}$ té una única component, donada per l'equació 10, el rotacional de la vorticitat és

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\Omega} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r \sin \theta \Omega_\varphi \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(r \sin \theta \Omega_\varphi)}{\partial \theta} \hat{r} - \frac{\partial(r \sin \theta \Omega_\varphi)}{\partial r} r \hat{\theta} \right] \end{aligned}$$

De l'operador gradient en coordenades esfèriques, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{r \partial \theta}, \frac{1}{r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$, obtenim les equacions següents,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \Omega_\varphi),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \Omega_\varphi).$$

Per exemple, dessenvolupant la primera d'aquestes dues equacions anteriors, trobem

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{3\mu U R \cos \theta}{r^3}$$

la qual, integrada respecte de r ens dona el camp de pressió,

$$p = \int \frac{3\mu U R \cos \theta}{r^3} dr = -\frac{3\mu U R \cos \theta}{2r^2} + f(\theta).$$

La funció $f(\theta)$ és la "constant" d'integració. Prenent el límit $r \rightarrow \infty$, observem que aquest ha de ser precisament la pressió a l'infinit, p_∞ , que no ha de dependre de θ ja que no hi ha objectes que pertorbin el flux allà. D'aquesta

manera,

$$p = p_{\infty} - \frac{3\mu U R \cos \theta}{2r^2}. \quad (11)$$

Aquesta equació il·lustra el fet que la pressió augmenta en apropar-nos a l'esfera ($\theta = \pi$, veure figura 1) proporcionalment a la viscositat del fluid. Sobre l'esfera, la sobrepressió és màxima al punt d'estancament $\theta = \pi$, i es fa negativa per darrere, a $\theta = 0$. Pots representar la pressió en un diagrama polar a MATLAB (figura 4):

```
>> [r,th] = meshgrid(1:.1:4, 0:pi/30:(2*pi));
>> x = r.*cos(th);
>> y = r.*sin(th);
>> p = -cos(th)./r.^2
>> h = polar(x,y);
>> hold on;
>> contourf(x,y,p);
>> set(h,'Visible','off')
>> axis off
>> axis image
```

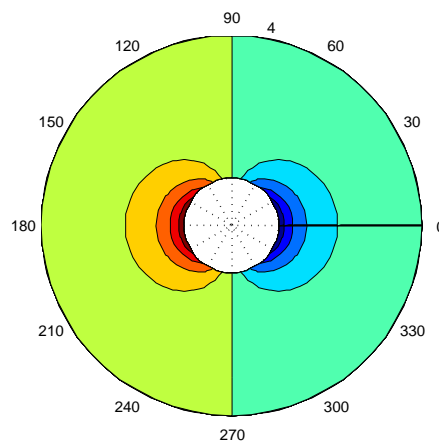


Fig. 4. Diagrama polar de la pressió entorn de l'esfera, màxima quan $\theta = \pi$, mínima quan $\theta = 0$. La pressió en $\theta = \pi/2$ és la del camp llunyà, p_{∞} .

Les sis components del tensor d'esforços en coordenades esfèriques s'escriuen, en funció de les components del gradient de velocitat ([Landau i Lif-](#)

hitz, 1985, p. 38)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
 \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \\
 \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\
 \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \\
 \sigma_{\theta\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \cot \theta}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{12}$$

Les derivades de les components de la velocitat proporcioneu, en aquest cas,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -p - \frac{3\mu U}{R} \cos \theta \left[\left(\frac{R}{r} \right)^4 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] \\
 \sigma_{\theta\theta} &= -p + \frac{3\mu U}{2R} \cos \theta \left[\left(\frac{R}{r} \right)^4 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + \frac{3\mu U}{2R} \cos \theta \left[\left(\frac{R}{r} \right)^4 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] \\
 \sigma_{r\theta} &= -\frac{3\mu U}{2R} \sin \theta \left(\frac{R}{r} \right)^4 \\
 \sigma_{r\varphi} &= 0 \\
 \sigma_{\theta\varphi} &= 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

En qualsevol punt del fluid, el tensor d'esforços ens dóna la força per unitat de superfície, de manera que integrant $d\vec{F} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS$ sobre tots els elements dS de la superfície, ens donarà la força total.

Fixa't que, sobre l'esfera, $r = R$, la contribució de la viscositat es nota en $\sigma_{r\theta}$ i en la pressió ($p = p_\infty - 3\mu U \cos \theta / 2R$). Calcularem la força sobre l'esfera a causa de les forces tangencials a la paret. De p_∞ ens podem oblidar immediatament, perquè en ser uniforme no produeix força neta sobre l'esfera. Notem que la normal a la superfície de l'esfera a cada punt és $\vec{n} = \hat{r}$. Aleshores la projecció del tensor d'esforços viscosos sobre la normal a la superfície esfèrica és

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = (-p \hat{r} + \sigma_{r\theta} \hat{\theta}) \cdot \hat{r} = -p \hat{r} + \sigma_{r\theta} \hat{\theta}$$

I el diferencial de superfície sobre l'esfera és $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Hi ha una simetria clara al problema i és la que marca l'eix z : els esforços, la velocitat, la pressió... tot té simetria de revolució. La força neta sobre l'esfera només es pot dirigir sobre l'eix z . Totes les altres components cancel·len, efectivament, perquè per a cada diferencial de superfície dS sobre l'esfera, n'hi ha un altre, simètric a l'anterior, amb el mateix θ exactament, que cancel·la les components de la força que no tenen la direcció de la velocitat. Per això, projectarem directament la força sobre l'eix z . Els vectors $\hat{r}, \hat{\theta}$ s'expressen en funció dels vectors unitaris cartesianes $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ com

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$$

D'ells només ens interessen les components \vec{k} . Per tant, la integral queda finalment,

$$\begin{aligned} F_z &= \int_S (-p\hat{r} + \sigma_{r\theta}\hat{\theta}) \cdot \vec{k} dS = \\ &= \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{3\mu U}{2R} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta), \end{aligned} \quad (14)$$

Resolent la integral s'obté **la força resultant sobre l'esfera, que és un arrossegament en la direcció de la velocitat U** , i el seu valor és la ben coneguda llei de Stokes,

$$F = 6\pi\mu UR \quad (15)$$

7.4 Flux al voltant d'un cilindre

El flux viscos al voltant d'un cilindre infinit és un problema bidimensional el tractament analític del qual sembla més assequible que el de l'esfera, però això és només en aparença. La dificultat apareix en general a tots els fluxos bidimensionals, per als quals una solució tancada del problema de Stokes es desconeix. Pots llegir les raons al llibre de (Panton, 2013, pp. 642-644), encara que comprendre el problema de la construcció de la funció de corrent mitjançant pertorbacions singulars requereix tècniques més avançades que les plantejades per al nivell d'aquest curs. En general el flux viscos al voltant d'objectes bidimensionals és un problema força complex. A la pràctica això pot semblar poc rellevant, ja que tendim a pensar que

els objectes són sempre tridimensionals. Però això no és cert. Pensa per exemple en un cable submarí, o una xemeneia: el flux de l'aigua, o respectivament de l'aire que els envolta és eminentment bidimensional.

El flux ideal al voltant d'un cilindre sí que és un problema assequible. Pots consultar per exemple el llibre de (White, 2011, pp. 260-261) on es dona la funció de corrent, i pots reconstruir tots els passos que hem seguit en el cas del flux ideal al voltant d'una esfera.

A banda d'aquesta consideració, cal tenir en compte que fins i tot en el problema de l'esfera, apartant-nos del límit $Re \rightarrow 0$, la solució de Stokes deixa de ser vàlida, més com més ens allunyem d'aquest límit. Aleshores, tenint en compte la rellevància d'aquests casos pràctics, es comprèn la importància de poder generar solucions mitjançant CFD. Pots veure com simular el flux viscos al voltant d'un cilindre amb ANSYS Fluent a l'apartat **Resolució numèrica del flux estacionari al voltant d'un cilindre** de la secció **Complements** (al final d'aquest document).

7.5 Coeficients de *Drag* y *Lift*

Drag vol dir arrossegament, i *lift* sustentació. Ara definirem conceptes molt importants, els coeficients de *drag* i *lift*, ja que es coneixen sobretot mitjançant els seus noms en anglès.

Coeficient de *drag*

Fixa't que a la integral que dona la força d'arrossegament en la fórmula de Stokes (equació 15) contribueixen al 50% la pressió, que dona el terme a $\cos^2 \theta$, i el esforç tangencial (el terme a $\sin^2 \theta$). La força d'arrossegament té doncs una única causa, la viscositat del fluid, però dues contribucions:

- ▶ la diferència de pressió que el flux viscos genera davant del cos, entre les parts davantera i posterior del cos,
- ▶ i la fricció, a causa del gradient de velocitat sobre l'esfera que generen els esforços tangencials.

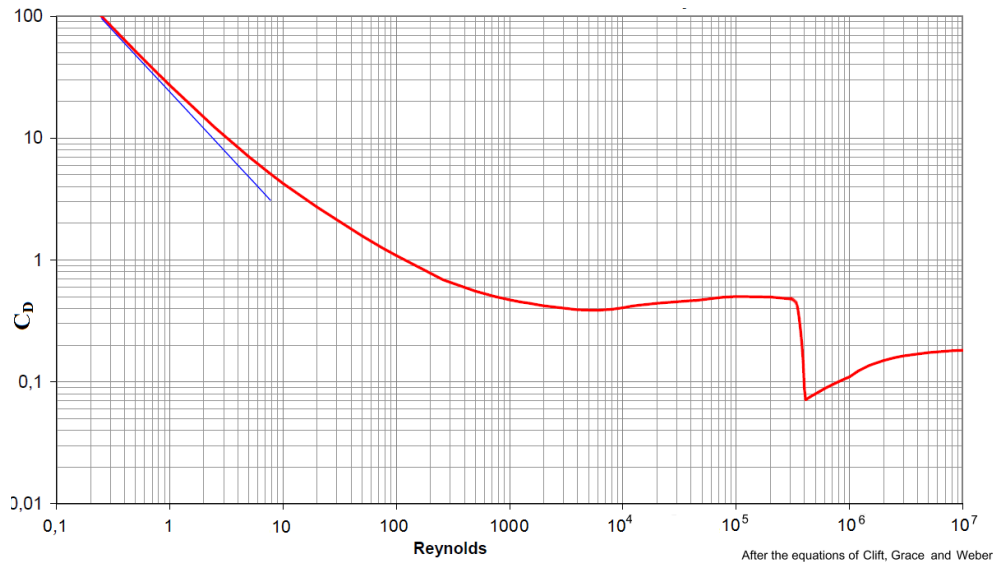


Fig. 5. Coeficient d'arrossegament d'una esfera, segons el nombre de Reynolds (de Go Mars, 2014). La línia blava és $C_D = 24/Re$.

El coeficient de *drag* es defineix como

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \quad (16)$$

on F_D és la força de *drag*, o força d'arrossegament en la direcció del flux, ρ la densitat del fluid, i A l'àrea de referència, que per a objectes roms (com esferes, el·lipsoïdes, cotxes, projectils i similars) és la secció transversal al flux. Per a cossos més aplanats, com ales, l'àrea de referència és la que es veu "des de dalt", i finalment per a embarcacions, A seria la superfície mullada. Fixa't que de la força de Stokes s'obté el coeficient C_D donat per

$$C_D = \frac{6\pi\mu RU}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi R^2} = \frac{24}{Re},$$

és a dir, un coeficient que minva a mesura que augmenta el nombre de Reynolds. Però això no passa així en realitat. Observa la figura 5, que mostra el valor experimental de C_D en funció de Re . Cap a $Re \sim 1$, la força d'arrossegament sobre l'esfera deixa de ser aproximadament proporcional a U , i C_D augmenta relativament respecte a $24/Re$. Cap a valors de $Re \sim 10^3$, C_D és aproximadament constant, indicant que la força d'arrossegament ja no és lineal en U , sinó aproximadament proporcional al quadrat de la velocitat. De fet, el flux al voltant de l'esfera ha anat variant enormement des de Re baixos (figura 6) fins a la "crisi del drag" a $Re \sim 3 \times 10^5$. Això és degut a la *separació de la capa límit*, que tractarem al tema següent.

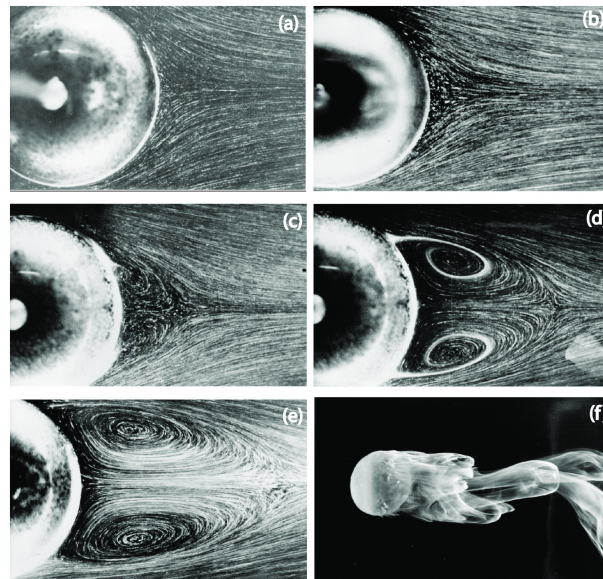


Fig. 6. A Reynolds baixos, $Re = 9.15$ (a), 26.8 (b), 37.7 (c) el flux no s'ha separat, encara que s'observen canvis en les línies de corrent, la deflexió de les quals disminueix per darrere de l'esfera. A $Re = 75.6$ (d) ja ha començat la separació: observa sobre l'esfera els punts de separació, d'on arrenquen dos vòrtexs tancats on el flux queda encapsulat. A $Re = 118$ (e) la zona de separació ha augmentat i els vòrtexs estan a punt de desprendre's, ja que a nombres de Reynolds més elevats (f) els vòrtexs s'inestabilitzen: al principi són emesos amb una freqüència característica del flux, el qual a mesura que Re creix, es torna caòtic (Marshall i Li, 2014).

A banda de la secció de l'objecte exposada al flux, A , la rugositat de la superfície de l'objecte també juga el seu paper al coeficient C_D (figura 7).

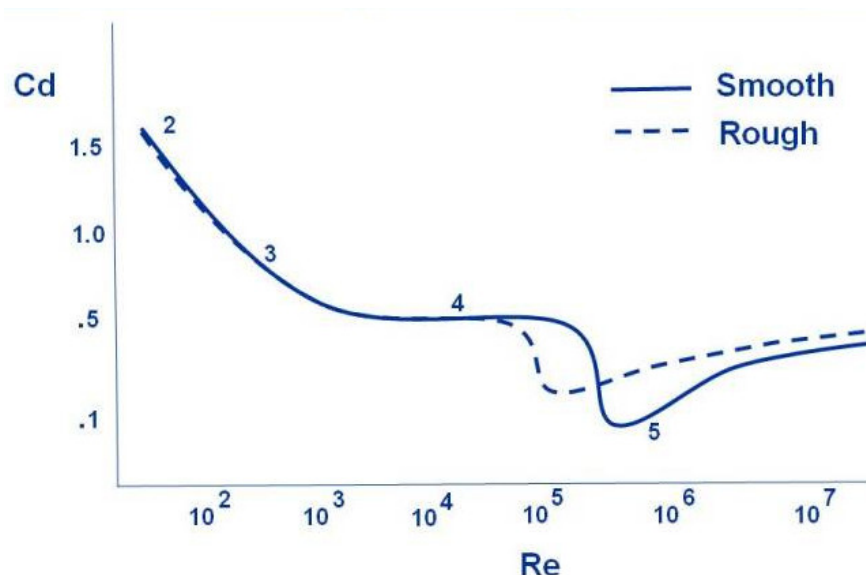


Fig. 7. Efecte de la rugositat de la superfície de l'esfera sobre el coeficient de drag, C_d (www.nasa.gov, 2015). En 2, s'ha format el parell de vòrtexs i el flux és estacionari, a 3 s'emeten vòrtexs (University of Minnesota, 2015) però el flux no és estacionari, encara que periòdic (vòrtexs de Von Kármán). En 5 el flux és turbulent, amb vòrtexs en escales diferents emesos formant una estela turbulenta.

D'altra banda, cossos de geometries diferents també presenten valors de C_D diferents. Al llibre de (White, 2011, pp. 489 i 491) trobaràs valors característics per a una varietat de geometries, en 2 i 3 dimensions.

Un exemple molt paradigmàtic del flux al voltant d'objectes és el flux al voltant d'un cilindre, que resulta més fàcil d'analitzar numèricament i experimentalment, a causa de la seva naturalesa bidimensional. Essencialment, presenta les mateixes característiques que el flux al voltant d'una esfera, encara que les esteles no es poden comparar exactament als mateixos valors de Re , sobretot a Reynolds baixos. Consulta l'apartat de complements d'aquest tema [Flux al voltant d'un cilindre a diferents nombres de Reynolds](#), que fa referència a un recurs interessant que aprofundeix en aquest exemple.

Coeficient de *lift*

Qualsevol asimetria en la forma d'un objecte és capaç de provocar esforços no compensats sobre la seva superfície deguts al flux, i crear una força neta (o moment!) en qualsevol de les direccions de l'espai, com mostra la figura 8. La força de sustentació o de *lift* es genera a partir de la diferència de pressions que origina l'asimetria del flux entre la cara superior i inferior de superfícies amb forma aerodinàmica (Quitney, 2015; Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations, 2017; Learn Engineering, 2016). Té per tant una importància cabdal en aerodinàmica. A diferència de la força d'arrossegament, que s'anul·la idènticament en un flux invíscid, la força de sustentació no s'anul·la: depèn de la geometria de les línies de corrent i el camp de pressions al voltant de l'objecte, per tant de la forma. El coeficient de *lift* es defineix de manera anàloga al coeficient de *drag*,

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

on F_L és la força de sustentació, perpendicular al flux, i A és aquí l'àrea plana de l'objecte, no l'àrea de la secció transversal al flux. A l'esfera del nostre exemple immersa en un flux uniforme, $C_L = 0$. Fins i tot quan el flux no és estacionari, la mitjana temporal de C_L s'anul·la. Però per a objectes que poden variar la seva orientació respecte de l'angle d'incidència del flux (el que s'anomena l'angle d'atac), C_L pot tenir variacions importants. El ma-

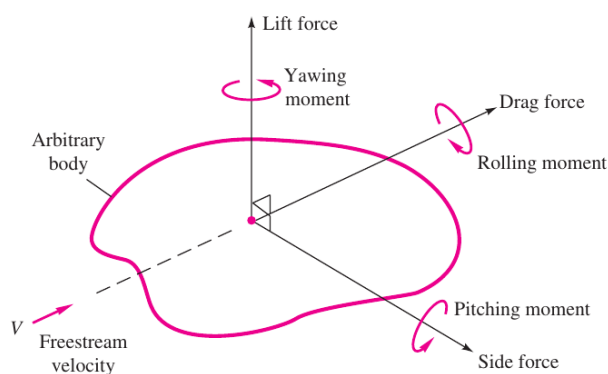


Fig. 8. Forces i moments sobre un cos immers en un flux i la seva nomenclatura: *rolling* o balanceig, *pitching* o capcineig, *yawing* o guinyada (White, 2011, p. 483)

teix li passa a C_D , per cert: com més gran sigui l'angle d'atac, més gran és la sustentació, però més gran és també l'arrossegament, cosa que dificulta el moviment autopropulsat del cos al fluid (Quitney, 2015). A l'apartat de **Complements** trobaràs un recurs, [Flux al voltant d'un perfil aerodinàmic](#), per calcular amb ANSYS Fluent el flux al voltant d'una ala.

7.6 Forces dinàmiques de sustentació: l'efecte Magnus

L'efecte Magnus s'observa en cossos en rotació en un flux. Un cilindre en un flux invíscid uniforme no experimenta ni arrossegament ni sustentació, però si gira sobre si mateix, apareix una força de sustentació perpendicular a la direcció del flux. És remarcable el fet que no cal considerar que el flux sigui viscos, només que el cilindre giri. Per tant, l'anàlisi del flux potencial al voltant d'un cilindre en rotació proporciona la teoria rellevant per donar compte d'aquest efecte (White, 2011, pp. 547-550). No obstant això, els efectes de la viscositat són prou importants perquè l'explicació de l'efecte Magnus sobre la base del flux invíscid sigui només una aproximació, de vegades molt equívoca, sobre la sustentació dinàmica.

A la base de l'explicació de l'efecte Magnus hi ha la diferència de pressió generada per mitjà de la rotació de l'objecte, entre els dos costats oposats, un a favor del flux extern, un altre a la contra. Però l'explicació d'acord amb les línies de corrent que dona la teoria invíscida és totalment insuficient. Observa els vídeos (Linsell, 2014; Veritasium, 2015) i les explicacions corresponents, que aclareixen l'origen de l'efecte Magnus.

La força neta deguda a la rotació del cos, que en realitat pot apuntar en

qualsevol direcció i no només afavorir la sustentació, depèn de l'orientació de l'eix de gir i del sentit de la rotació. Per això en funció de l'efecte amb què un futbolista xuta la pilota, aquesta pot anar a parar a qualsevol costat.

La mesura experimental de les forces sobre cossos en rotació immersos en un flux no és gens evident, ja que cal evitar pertorbar el flux al voltant de l'objecte. Aleshores no hi ha dades experimentals concloents sobre lift dinàmic i fins i tot els resultats de CFD són discrepants (White, 2011, p. 550).

Bibliografia

- de Go Mars, B. (2014). Drag coefficient of a sphere as a function of reynolds number [Computer software manual]. (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Drag_coefficient_of_a_sphere_as_a_function_of_Reynolds_number.png)
- Gerhart, P., Gerhart, A., i Hochstein, J. (2016). *Munson, Young, and Okiishi's Fundamentals of fluid mechanics*. Wiley.
- Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations. (2017). Coanda effect [Computer software manual]. (<https://www.youtube.com/watch?v=NvzXKZNJ7ZU>)
- Landau, L., i Lifshitz, E. (1985). *Mecánica de fluidos*. Reverté.
- Learn Engineering. (2016). Why is the top flow faster over an airfoil? [Computer software manual]. (<https://www.youtube.com/watch?v=VEe7Nx5Vo8>)
- Linsell, R. (2014). The Magnus effect: a curved ball explained [Computer software manual]. (https://www.youtube.com/watch?v=8kVuKAqy_2k)
- Marshall, J. S., i Li, S. (2014). Fluid forces on particles. In *Adhesive particle flow: A discrete-element approach* (p. 130–181). Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139424547.006
- Mei, C. C. (2007). Stokes flow past a sphere [Computer software manual]. (http://web.mit.edu/2.21/www/Lec-notes/chap2_slow/2-5Stokes.pdf)
- Panton, R. (2013). *Incompressible flow*. Wiley.
- Quitney, J. (2015). Aerodynamics: Airfoil camber, flaps, slots-slats & drag: Smoke Lifts circa 1938 NACA langley [Computer software manual]. (https://www.youtube.com/watch?v=q_eMQvDoDWk)

- Tritton, D. J. (1988). *Physical fluid dynamics*. Oxford University Press.
- University of Minnesota. (2015). Flow past a sphere [Computer software manual]. (<https://www.youtube.com/watch?v=PyCaYTf1o7E>)
- Veritasium. (2015). Surprising applications of the Magnus effect [Computer software manual]. (<https://www.youtube.com/watch?v=20SrvzNW9FE>)
- White, F. (2011). *Fluid mechanics*. Mc Graw Hill.
- www.nasa.gov. (2015). Drag of a sphere [Computer software manual]. (<https://www1.grc.nasa.gov/beginners-guide-to-aeronautics/drag-of-a-sphere/>)

Complements formatius

Flux al voltant d'un cilindre a diferents nombres de Reynolds

En aquest video podràs observar un interessant experiment que analitza la separació de la capa límit al voltant d'un cilindre mitjançant la injecció de tinta fluorescent, a diferents nombres de Reynolds.

ESFTV. Physics of Life – The Reynolds Number and Flow Around Objects

https://www.youtube.com/watch?v=0ThQ_nD97hY

Resolució numèrica del flux estacionari al voltant d'un cilindre

A la web d'Ansys <https://courses.ansys.com/index.php/fluids/> trobaràs videos i tutorials per simular numèricament multitud d'exemples introductoris que representen casos i problemes plantejats habitualment a l'enginyeria i a la indústria. En particular, un exemple clàssic és el flux estacionari al voltant d'un cilindre a baix nombre de Re, quan el flux és estacionari (amb pocs canvis, podràs simular també el flux no estacionari).

Bhaskaran, R. Steady Flow Past a Cylinder Using Ansys Workbench.

<https://courses.ansys.com/index.php/courses/steady-flow-past-a-cylinder/>

Flux al voltant d'un perfil aerodinàmic

Un cop resolt amb Fluent el flux al voltant d'un cilindre, segueix un procediment anàleg per reproduir numèricament el camp estacionari de velocitat i de pressió al voltant d'un perfil aerodinàmic.

Bhaskaran, R. Flow over an Airfoil Using Ansys Workbench

<https://courses.ansys.com/index.php/courses/flow-over-an-airfoil/>

Flux al voltant d'una esfera

Aquest tema no estaria complet sense un model numèric de flux tridimensional, que afegeix una certa complexitat degut al mallat 3D. Un cop hagi resolt amb Fluent el flux al voltant d'un cilindre i d'un perfil aerodinàmic, segueix el procediment exposat en aquest document que pots descarregar de moodle, que explica pas a pas com reproduir numèricament el camp estacionari de velocitat i de pressió al voltant d'una esfera a baixos nombres de Re.

Varela, S. i Salueña, C. (2023). Resolució amb ANSYS Fluent del flux estacionari al voltant d'una esfera

https://campusvirtual.urv.cat/pluginfile.php/5182320/mod_resource/content/3/ComplementTema7_Flux_al_voltant_duna_esfera.pdf

Exercicis

1. Suposem una esfera de radi R immersa en un flux incompressible, estacionari i invíscid. Utilitzarem la tècnica de la funció de corrent amb coordenades esfèriques i simetria axial. L'eix de simetria és en la direcció \vec{U} del camp de velocitats no pertorbat (Fig. 1). En aquestes coordenades, el camp de velocitats es pot expressar com $\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}$ i a partir de l'expressió de la divergència en coordenades esfèriques (Eq. 2) l'equació de continuïtat es pot escriure com

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} r v_\theta \sin \theta = 0$$

- Compleix aquest problema amb les condicions perquè existeixi una funció de corrent $\psi(r, \theta)$? Per què?
- Com s'expressen les components de la velocitat en funció de ψ ?
- Lluny de l'esfera, quan $r \rightarrow \infty$, la velocitat és la del camp no pertorbat, que és \vec{U} , uniforme. Descomposant \vec{U} en les seves components r i θ , i prenent el límit per a r grans en v_r , demostra mitjançant integració en θ que

$$\psi(r \rightarrow \infty) \approx \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (17)$$

2. Utilitzant la condició que el flux invíscid és irrotacional, i expressant el rotacional en coordenades esfèriques (Eq. 3), demostra que la funció de corrent en el cas del flux del problema anterior satisfà l'equació en derivades parcials

$$r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (18)$$

3. Vist el resultat de l'apartat c) de l'exercici 1, busquem una solució per a la funció de corrent del problema de l'esfera en la forma

$$\psi = \frac{U}{2} f(r) \sin^2 \theta$$

- Substitueix aquesta forma dins l'equació 18, i obtén la següent

equació per a $f(r)$,

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} - 2f = 0$$

- b) Integra f , observant que satisfà una equació diferencial ordinària *equidimensional*¹.
- c) Observa que no hi ha manera d'imposar que la velocitat sigui \vec{U} a l'infinit i zero sobre l'esfera. Podem imposar $v_r(r = R) = 0$ (condició d'impenetrabilitat), cosa que ens permet fixar la constant que falta per obtenir l'expressió per a la funció de corrent del cas invíscid (Eq. 1). Però no podem exigir que se satisfaci alhora la condició de *no-slip* sobre l'esfera, és a dir $v_\theta(r = R) = 0$.

4. El 1851, George Stokes va resoldre el problema del flux al voltant d'una esfera a $Re \rightarrow 0$. En un flux amb vorticitat, en l'aproximació $Re \rightarrow 0$, el flux estacionari i incompressible ve descrit per les expressions del *creeping flow* (equacions 6).

- a) Demuestra que aplicant el rotacional a l'equació 7, s'obté l'equació

$$0 = \nabla \times \nabla^2 \vec{v}$$

O també,

$$\nabla^2 \vec{\Omega} = 0 \quad (19)$$

- b) A mesura que ens allunyem de l'esfera, el flux s'assemblarà més i més al flux no pertorbat, on el flux invíscid ha de ser una bona aproximació. Per això podem utilitzar alguns dels resultats del cas invíscid, en particular la forma de la funció de corrent, que tornarà a ser de la forma $\psi = \frac{U}{2} f(r) \sin^2 \theta$, on ara $f(r)$ serà diferent. Prenent el rotacional de \vec{v} amb les mateixes components de la velocitat de l'apartat b) del l'exercici 1, demostra primer que la vorticitat té la forma

$$\vec{\Omega} = -\frac{U}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{2f}{r^3} \right) \sin \theta \hat{\phi}.$$

- c) Aplica l'operador laplaciana a la vorticitat $\vec{\Omega}$ (que és un vector amb

¹Una equació diferencial equidimensional és una equació de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

on a_0, \dots, a_n són constants. Les solucions són potències de x : x^m , amb m per determinar.

una única component Ω_φ)², i demostra que l'equació 19 porta a la següent equació per a $f(r)$,

$$\left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr} - 2\right) \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{2f}{r^3}\right) = 0 \quad (21)$$

5. L'equació 21 és de quart ordre, cosa que donarà lloc a una solució general amb quatre constants indeterminades. Per trobar-la, considera

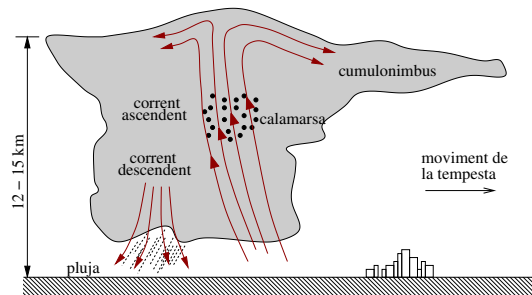
- a) Cadascun dels operadors de segon ordre és equidimensional. Pots assajar una solució de la forma $f \approx r^m$. Demostra que la solució general de l'equació 21 és

$$f(r) = Ar^2 + \frac{B}{r} + Cr^4 + Dr$$

b) Per ajustar les constants indeterminades, aplica les condicions de contorn,

- En el límit $r \rightarrow \infty$, la funció de corrent ha de tenir la mateixa forma que la del problema invíscid, equació 17.
- Sobre l'esfera ($r = R$), les dues components de la velocitat s'anul·len (condicions d'impenetrabilitat i de *no-slip*), per obtenir la funció de corrent de l'equació 9.

6. La calamarsa es produeix per la pujada i baixada repetida de partícules de gel en el corrent ascendent d'una tempesta.



²Si $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}$ és un camp vectorial funció de les coordenades esfèriques (r, θ, φ) , la seva laplaciana és

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} = & \left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\theta \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{r} \\ & + \left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta} \\ & + \left(\nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{\varphi} \end{aligned} \quad (20)$$

mentre que la laplaciana d'un escalar A és

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}$$

Quan aquestes partícules es fan prou grosses, l'arrossegament aerodinàmic del corrent ascendent ja no pot suportar el pes de la calamarsa, i cau del núvol de tempesta. Utilitza el gràfic de C_D en funció de Re per fer una estimació de la velocitat del corrent ascendent necessari per produir una calamarsa de 4 cm de diàmetre.

