

Soluciones de les equacions de Navier-Stokes

Índex

Continguts	2
5.1 Introducció i objectius	2
5.2 Flux entre dues plaques planes paral·leles	2
5.3 Flux incompressible estacionari en una canonada de secció circular	12
5.4 Flux entre dos cilindres concèntrics	14
Bibliografia	18
Complements	20
Exercicis	22

Continguts

5.1 Introducció i objectius

L'objectiu d'aquest tema és presentar algunes solucions **estacionàries** de les equacions de Navier-Stokes, en certes situacions simples. Degut al terme no lineal, $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ existeixen molt poques solucions analítiques d'aquestes equacions, i la majoria d'elles s'obtenen quan, per raons geomètriques, el terme no lineal s'anul·la. Això passa, per exemple, quan el camp de velocitats té la mateixa direcció en tot el domini, i no depèn de la coordenada en la direcció del moviment.

Resumint, es tracta d'obtenir aquestes solucions clàssiques, molt estudiades en mecànica de fluids, que serveixen com a casos de referència en múltiples estudis, per la seva simplicitat.

- ▶ Flux entre dues plaques planes paral·leles
- ▶ Flux de Hele-Shaw¹
- ▶ Flux incompressible estacionari en una canonada de secció circular
- ▶ Flux entre dos cilindres concèntrics

La bibliografia rellevant es basa en els llibres de (White, 2011) i de (Panton, 2013), a part d'altres cites i d'alguns articles que trobaràs a la bibliografia al final del tema.

5.2 Flux entre dues plaques planes paral·leles

Flux de Couette

Considerarem primer un tipus de flux entre dues plaques paral·leles infinites, el flux de Couette. Aquest és un cas paradigmàtic i l'exemple més senzill que podem estudiar. De fet ja l'hem esmentat quan estudiàvem el tensor d'esforços viscosos i la relació entre els esforços de tallant i la viscositat (equacions constitutives d'un fluid viscosos).

¹Aquest apartat presenta nocions un xic més avançades que la resta del contingut del tema

El flux de Couette es genera movent amb una velocitat constant una de les dues plaques respecte de l'altra, V , en una direcció paral·lela a la placa, la qual prendrem com x . No tindrem en compte la gravetat. Com que les plaques són infinites i la velocitat V és constant,

- ▶ no hi haurà dependència en la coordenada z (el flux és translacionalment invariant al llarg d'aquesta coordenada),
- ▶ $v_z = 0$, i per tant en flux té lloc en el pla xy ,
- ▶ el perfil de velocitats no pot dependre de x (per invariància translacional al llarg de la coordenada x ja que V , la velocitat de la placa mòbil, és la mateixa per a totes les partícules de fluid en contacte amb la placa),
- ▶ $v_y = 0$ per l'equació de continuïtat, que imposa

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Com a conseqüència de tot això, $\vec{v} = v_x \vec{i}$, i l'equació de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} - \rho g \vec{j}. \quad (1)$$

per al flux estacionari entre les dues plaques queda reduïda a

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}. \quad (2)$$

Ja que en la component y i sense tenir en compte la gravetat, l'equació és $\partial p / \partial y = 0$ i per tant la pressió només pot dependre de x . Observa que el terme convectiu, $(\vec{v} \cdot \nabla) v_x$ s'anul·la idènticament, ja que v_x només depèn de y , i v_y és zero.

Fixa't que si p només pot dependre de x i v_x és només funció de y , perquè l'equació 2 es pugui satisfer cada terme ha de ser per força constant. Seguidament considerarem $dp/dx = 0$ (el fluid només és impulsat per la placa mòbil, i no es mou per diferència de pressions). La solució de l'equació 2 amb $dp/dx = 0$ és simplement $v_x = C_1 y + C_2$, que depèn de dues constants arbitràries que ajustarem amb les condicions de contorn:

$$v_x(y = 0) = 0, \quad v_x(y = h) = V$$

que no són més que condicions de tipus *no-slip* sobre les parets sòlides

que confinen el flux, esquemàticament representat a la figura 1 La solució

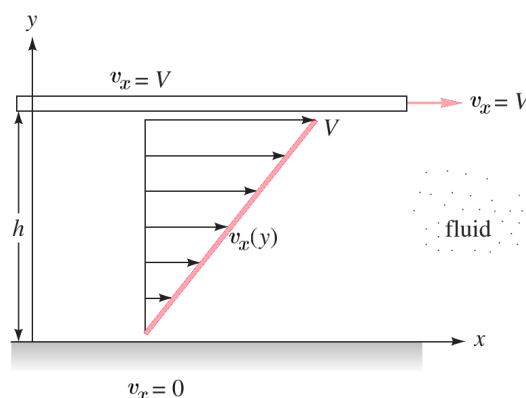


Fig. 1. Flux de Couette

és el clàssic flux de Couette, $\vec{v} = V/h y \vec{i}$, és a dir, un gradient de velocitat constant en la direcció perpendicular al flux.

Per cert, no és que haguem suprimit la influència de la gravetat en l'anàlisi, és que l'equació diferencial en la coordenada y és simplement la d'equilibri:

$$0 = -\frac{dp}{dy} - \rho g$$

ja que no hi ha velocitat en la direcció y . En un problema en què n'hi hagués, i si la làmina d'aigua fos prou profunda, la gravetat faria la seva influència. Pensem per exemple, que calen més que uns quants centímetres d'aigua perquè s'alteri significativament la pressió amb la profunditat.

Flux entre dues plaques paral·leles sota un gradient de pressió longitudinal

Suposem que imposem un gradient de pressió en la direcció del flux, x . Aquest és el cas típic quan s'impulsa líquid mitjançant una bomba, que crea una diferència de pressions Δp entre la capçalera i la sortida del líquid, separades una longitud L ,

$$\left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle = -\frac{\Delta p}{L}.$$

És a dir, quan la bomba impulsa el fluid des de l'esquerra, el gradient de pressió mitjà és negatiu. Això és un flux induït per diferència de pressions.

Aleshores,

- ▶ no hi haurà dependència en la coordenada z ,
- ▶ $v_z = 0$, i per tant en flux té lloc en el pla xy ,
- ▶ el perfil de velocitats no pot dependre de x (per invariància translacional al llarg de la coordenada x : V , la velocitat de la placa mòbil, és la mateixa per a totes les partícules de fluid en contacte amb la placa, i la separació entre les plaques és constant.
- ▶ $v_y = 0$ per l'equació de continuïtat.

Similarment al cas anterior, el flux estacionari entre les dues plaques amb un gradient de pressió al llarg de x queda descrit per l'equació

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}, \quad (3)$$

on novament dp/dx i $d^2 v_x/dy^2$ són termes constants, com hem raonat anteriorment. Integrarem l'equació amb les mateixes condicions de contorn, $v_x(y=0) = 0$, $v_x(y=h) = V$. La solució general de l'equació 3 és

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

i veiem que el flux té un perfil parabòlic. les condicions de contorn proporcionen $C_2 = 0$ i

$$C_1 = \frac{V}{h} - \frac{h}{2\mu} \frac{dp}{dx},$$

i el perfil de velocitats és finalment

$$v_x = -\frac{V}{h} y - \frac{y}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h - y). \quad (4)$$

A la figura 2 es poden veure tots els casos particulars, en funció dels valors del gradient de pressions i de la velocitat de la placa superior. El cas (c) amb $\partial p/\partial x = 0$ és el de la secció anterior, el clàssic flux de Couette. Quan $V = 0$ (cas d) obtenim el flux de Poiseuille pla, amb el seu típic perfil simètric, que és el tipus de perfil que s'observa a l'interior d'una canonada a baixos nombres de Reynolds.

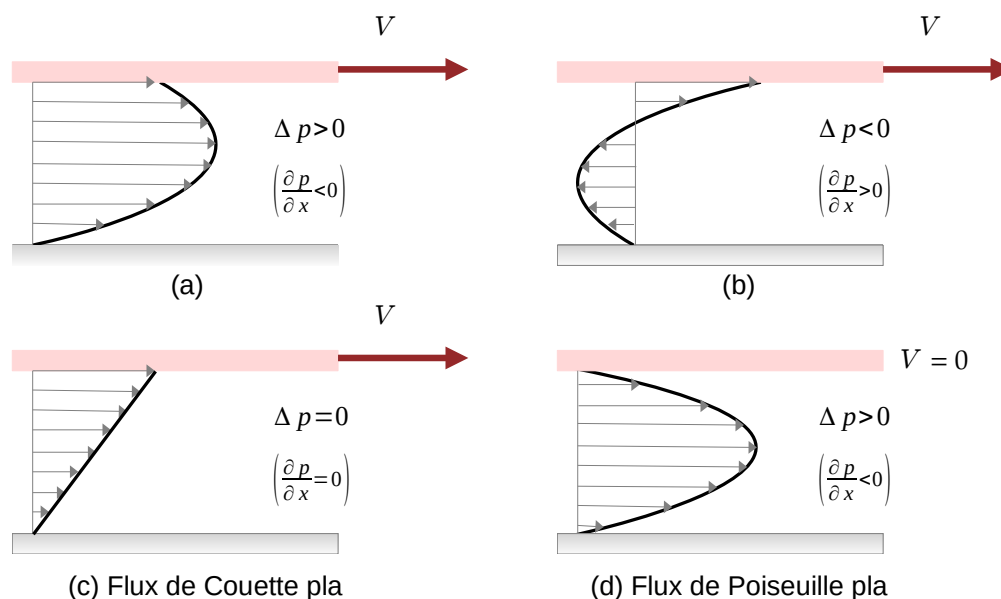


Fig. 2. Diferents casos de flux entre plaques planes paral·leles

Flux de Hele-Shaw²

Un cas particular de flux viscós entre dues plaques paral·leles és el que es desenvolupa en una cambra horitzontal de secció constant, impulsat per gravetat o bé per bombeig des de dalt a través d'un o diversos orificis. En principi, la situació s'assembla molt a la de la secció anterior, però en aquest cas la solució que obtindrem *no és exacta*, ni tan sols considerant la situació estacionària. L'anomenat flux de Hele-Shaw s'utilitza habitualment en tècniques de visualització (fig. 3a). Si dins de la cel·la de Hele-Shaw tenim un fluid viscós i hi injectem un altre fluid de menor viscositat, la interfase entre ambdós fluids és inestable (fig. 3b). Aquesta inestabilitat es coneix amb el nom d'inestabilitat de Saffman-Taylor. Dóna lloc a un fenomen molt important en medis porosos que es coneix com "viscous fingering" (Panton, 2013, p. 667).

El flux en una cel·la de Hele-Shaw només té dues components de velocitat, i tot i que es tracta d'un flux dominat pel terme de viscositat, $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \ll \nu \nabla^2 \vec{v}$, les línies de corrent formen patrons de flux potencial.

Aquest cas és interessant perquè es pot considerar como quasi-bidimensional i perquè és una situació propera a la microfluídica i als problemes de lubri-

²Aquest apartat presenta nocions un xic més avançades que la resta del contingut del tema

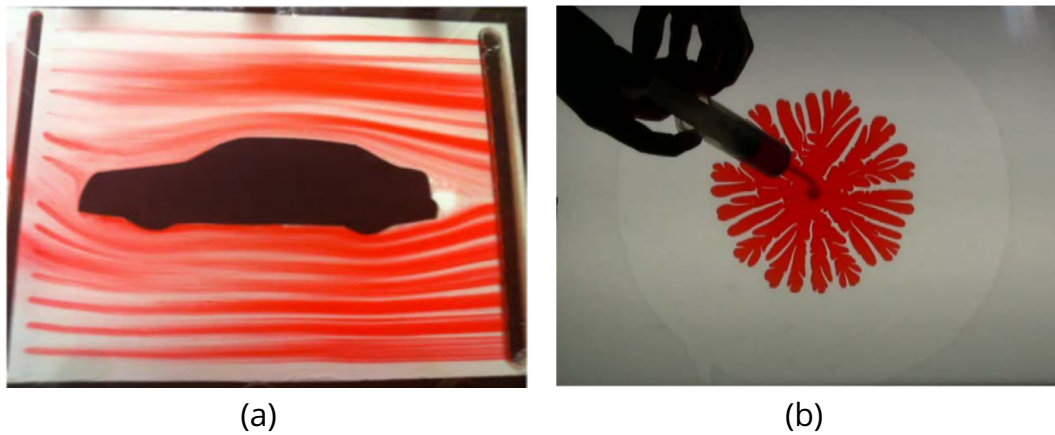


Fig. 3. a) Línies de corrent al voltant del contorn d'un vehicle en un dispositiu de visualització de Hele-Shaw (Hamut et al., 2014). b) Experiment en una cel·la de Hele-Shaw, amb glicerina i aigua colorejada (Nervous System, 2011).

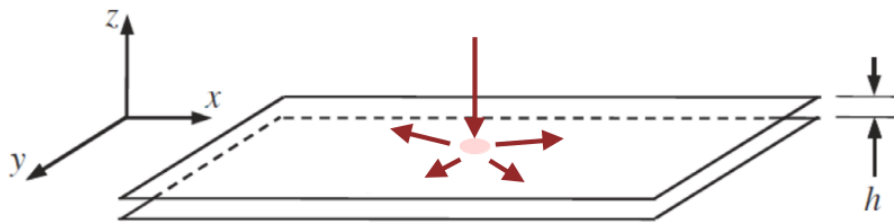


Fig. 4. Un exemple de geometria del flux de Hele-Shaw. La dimensió h és molt menor que la grandària característica de les plaques o la distància típica en el pla horitzontal a la que observem el flux, que anomenarem L .

cació.

La geometria té una escala de longitud característica h , el gruix de la làmina fluida, que es pot considerar molt menor que l'escala de longitud característica en la dimensió horitzontal, L , que pot ser molt superior a h . Per fer l'anàlisi del problema, adimensionalitzarem les coordenades x, y amb L , i z amb h . El paràmetre h/L serà el paràmetre pertorbatiu, tot suposant que $h/L \ll 1$ (Panton, 2013, pp. 664-668).

Definim les coordenades adimensionals en base a les longituds L i h

$$x^* \equiv \frac{x}{L}, \quad y^* \equiv \frac{y}{L}, \quad z^* \equiv \frac{z}{h}$$

amb la qual cosa els gradients en les respectives direccions s'escriuen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y^*}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial z^*}$$

i $v_x = V v_x^*$, $v_y = V v_y^*$ per a la velocitat en el pla xy , on V és una velocitat

característica en el pla horitzontal. Per a la vertical, introduïm una escala α , $v_z = \alpha v_z^*$ per adimensionalitzar l'equació de continuïtat,

$$\frac{V}{L} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{V}{L} \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + \frac{\alpha}{h} \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = 0$$

De manera que

$$\frac{V}{L} \sim \frac{\alpha}{h} \implies \alpha \approx V \frac{h}{L}$$

i per tant l'escala de velocitat vertical és, si $h \ll L$, molt menor que V . Així doncs, $v_z \ll v_x, v_y$.

Per obtenir l'escala rellevant per a la pressió hem de tenir en compte que aquest no és un flux dominat per la inèrcia sinó per la viscositat. Observa que en un flux viscos induït per un gradient de pressió, l'escala de la velocitat és (segon terme de l'Eq. 3)

$$V \sim \frac{\Delta p h^2}{\mu L},$$

és a dir, l'escala apropiada per a p no és ρV^2 (com proposa el nombre d'Euler) sinó

$$p \sim \frac{\mu V L}{h^2} \implies p^* = \frac{p}{\frac{\mu V L}{h^2}}$$

Introduint aquestes escales per a les longituds, les velocitats i la pressió farem l'anàlisi per obtenir els termes rellevants de les equacions que simplifiquen el problema. Farem una *anàlisi pertorbativa* en base al paràmetre $\epsilon \equiv h/L$ i resoldrem les equacions a l'ordre més baix.

Partim de l'equació de Navier-Stokes estacionària,

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}, \quad (5)$$

on hem eliminat l'efecte de la gravetat, ja que en aquesta configuració la làmina de líquid és molt prima i g no juga cap paper. Si considerem la component x en primer lloc, observarem que el terme convectiu de l'equació del transport de moment en la coordenada x^* es transforma, en variables adimensionals, en

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla v_x = \rho \left(\frac{V^2}{L} v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{V^2}{L} v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + \frac{\alpha V}{h} v_z^* \frac{\partial v_x^*}{\partial z^*} \right)$$

Donat que $\alpha = Vh/L$, tots els termes són del mateix ordre, V^2/L .

En segon lloc, el terme de la laplaciana s'escriu, en variables adimensionals com

$$\mu \nabla^2 v_x = \mu \left(\frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} + \frac{V}{h^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial z^{*2}} \right).$$

Sembla evident que dels tres termes, el més important és el darrer, per un factor L^2/h^2 . Aleshores,

$$\mu \nabla^2 v_x \approx \mu \frac{V}{h^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial z^{*2}}$$

Per acabar, el terme en el gradient de pressió es transforma en

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\mu L V}{h^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}.$$

Ja els tenim tots i ara comparem l'ordre dels diferents termes en l'equació 5:

$$\begin{array}{ccccc} \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}_x & = & -\frac{\partial p}{\partial x} & + & \mu \nabla^2 v_x, \\ O\left(\frac{\rho V^2}{L}\right) & & O\left(\frac{\mu V}{h^2}\right) & & O\left(\frac{\mu V}{h^2}\right) \end{array}$$

La lletra O i la quantitat entre parèntesis vol dir *de l'ordre de*. Està clar que els dos termes del segon membre són del mateix ordre, i hem de veure com és el terme convectiu del primer membre respecte d'aquests dos termes del segon membre. Si multipliquem tota l'equació per $L/\rho V^2$, obtenim

$$\begin{array}{ccc} \frac{L}{\rho V^2} (\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}_x) & = & \frac{L}{\rho V^2} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \right), \\ O(1) & & O\left(\frac{\mu}{\rho h V} \frac{L}{h}\right) \end{array}$$

El segon membre es com a mínim d'ordre $1/\epsilon = L/h$, que és superior a l'ordre $O(1)$ del primer membre, tenint en compte a més a més que el paràmetre $\mu/\rho h V$ és l'invers del nombre de Reynolds del flux, i en el flux de Hele-Shaw Re serà petit. El fet que el terme convectiu $\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ es pugui considerar petit respecte del terme difusiu $\mu \nabla^2 \vec{v}$ és precisament el criteri que separa el flux dominat per la viscositat del dominat per la inèrcia.

Quan diem que un flux és dominat per efectes viscosos, volem dir que $\mu \nabla^2 \vec{v} \gg \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$, i a l'inrevés quan diem que el flux és inercial.

Així doncs, per a la coordenada x ens queda (a l'ordre més baix en el parà-

metre ϵ) l'equació

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

Podem fer exactament el mateix per a la coordenada y , i l'equació corresponent quedarà

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

Hem escrit un signe $=$ però ha de quedar clar que aquestes equacions són *aproximades* a l'ordre més baix en el paràmetre d'expansió. Pel que fa a la coordenada z , la diferència respecte de les anteriors és l'escala de velocitat de v_z , que és α . El terme convectiu segueix sent inferior al difusiu, i es pot eliminar de l'equació,

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z, \\ &\quad O\left(\frac{\mu LV}{h^3}\right) \quad O\left(\frac{\mu \alpha}{h^2}\right) \\ &\quad \Downarrow \\ &\quad O\left(\frac{\mu V}{h^2} \frac{L}{h}\right) \quad O\left(\frac{\mu V}{h^2} \frac{h}{L}\right) \end{aligned}$$

És a dir, el gradient de pressions en la direcció z és d'ordre $O(\mu V/h^2)/\epsilon$, mentre que el terme difusiu $\mu \nabla^2 \vec{v}_z$ és d'ordre $O(\mu V/h^2)\epsilon$. Per tant, la component z de l'equació de Navier-Stokes es pot aproximar simplement com

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (8)$$

Aquest és un resultat important: amb molt bona aproximació, la pressió només varia en el pla xy del flux, no en vertical. Per altra banda, tenim

$$v_z \approx 0.$$

Ara només queda resoldre les equacions 6 i 7 amb les condicions de contorn sobre les parets sòlides (*no-slip*):

$$\begin{aligned} v_x(z=0) &= 0, & v_x(z=h) &= 0 \\ v_y(z=0) &= 0, & v_y(z=h) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Integrant obtenim els perfils de velocitat (fixa't que la pressió no depèn de

z en aquest ordre d'aproximació),

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{z}{h} \right) \\ v_y &= \frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{z}{h} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Aquest és un flux essencialment bidimensional, però peculiar en el sentit que el camp de velocitats depèn de la coordenada z . De fet si no, no podríem satisfer les condicions de contorn amb un camp de velocitats no nul. Quedarà per determinar el camp de pressió. Primer remarcuem alguns resultats interessants:

- Les línies de corrent són independents de z :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\partial p / \partial y}{\partial p / \partial x} = f(x, y)$$

Això vol dir que en la direcció z , les línies de corrent se superposen.

- La vorticitat és nul·la en la direcció vertical,

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{h^2}{2\mu} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{z}{h} \right) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

Aquest resultat implica, en un camp de velocitats bidimensional, que el flux és irrotacional. Això no és ben bé així en aquest cas, ja que la vorticitat té components en el pla xy . Però continua sent vàlid que el flux és potencial en les coordenades x, y , és a dir que es pot trobar una funció ϕ que satisfà

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Efectivament, aquesta funció és

$$\phi = \frac{h^2}{2\mu} p(x, y) \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{z}{h} \right).$$

El que no és vàlid és que $v_z = \partial \phi / \partial z$, i la pressió no satisfà l'equació de Bernoulli sobre una línia de corrent, com en un flux potencial (camp conservatiu). Finalment, per l'equació de continuïtat, la pressió satisfà l'equació de Laplace,

$$0 = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

► Tenint en compte que

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

i que les derivades parcials de la pressió s'expressen en funció de v_x i v_y , respectivament, podem triar qualsevol valor de z per especificar les components de la velocitat i integrar la pressió, ja que aquesta no depèn de z . Per exemple, triem $z = h/2$:

$$\begin{aligned} v_{0x} \equiv v_x(z = h/2) &= -\frac{h^2}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \\ v_{0y} \equiv v_y(z = h/2) &= -\frac{h^2}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

Integrant, la pressió serà

$$\begin{aligned} p &= -\int \frac{8\mu}{h^2} v_{0x} dx - \int \frac{8\mu}{h^2} v_{0y} dy \\ &= -\frac{8\mu}{h^2} \int_s v_0 ds \end{aligned}$$

on ds representa un diferencial de longitud al llarg d'una línia de corrent s en el pla $z = h/2$. La constant d'integració s'ajustarà amb el valor de la pressió en el punt de partida sobre la línia de corrent.

5.3 Flux incompressible estacionari en una canonada de secció circular

Considerarem que la canonada és infinita, o a la pràctica, que el flux està completament desenvolupat. No tindrem en compte la gravetat. En condicions de flux laminar, aquest és l'anomenat flux de Poiseuille circular. Utilitzarem coordenades cilíndriques (r, θ, z) , amb z al llarg de l'eix del tub. El camp de velocitat té una única component diferent de zero, la component v_z , que depèn només de r . Ni la pressió, ni la velocitat, depenen de θ . Un esquema de la geometria i del perfil de velocitats es mostra a la figura 5. El perfil de l'esforç $\tau = \mu dv_z/dr$ és lineal.

L'equació de continuïtat $\nabla \cdot \vec{v}$ se satisfà automàticament, el terme convectiu $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ s'anul·la idènticament, i les equacions de transport de moment s'escriuen (apèndix del Tema 4)

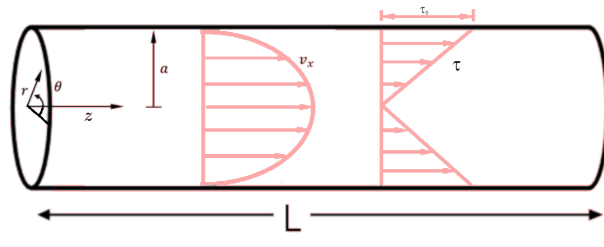


Fig. 5. Geometria i perfil de velocitats del flux de Poiseuille circular.

► Component r :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

► Component θ :

$$0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

► Component z

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (11)$$

La pressió només pot ser, com a molt, funció de z . La condició de contorn per a la velocitat és $v_z(r = a) = 0$ (no-slip sobre la paret de la canonada).

De fet, cadascun del dos termes de l'equació 11 són constants: és l'única manera de satisfer l'equació, ja que el primer terme només pot dependre de z , mentre que el segon només pot dependre de r . Per tant, la pressió és una funció lineal de z (la pressió decau linealment en el sentit del flux), i v_z és una funció quadràtica de r ,

$$v_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) + A \ln r + B \quad (12)$$

La condició "natural" en $r = 0$ és que la velocitat ha de ser finita, per la qual cosa $A = 0$, i B és

$$B = -\frac{a^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right)$$

Amb el valor de B hem obtingut finalment el perfil de velocitats del flux de Poiseuille,

$$v_z(r) = \frac{r^2 - a^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right), \quad (13)$$

i amb ell podem obtenir altres resultats interessants,

- derivant v_z respecte de r calculem **l'esforç tangencial** τ ,

$$\tau = \frac{r}{2} \left(\frac{dp}{dz} \right)$$

que té un perfil lineal i el seu valor màxim sobre la paret,

$$\tau_0 = \frac{a}{2} \left(\frac{dp}{dz} \right),$$

(resultat vàlid també per al règim turbulent).

- El **cabal volumètric** és la integral de la velocitat sobre la secció circular de la canonada,

$$Q = \int_0^a v_z(r) 2\pi r dr = -\frac{\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right),$$

i la velocitat mitjana sobre la secció transversal serà

$$\langle v \rangle \equiv \frac{Q}{\pi a^2} = -\frac{a^2}{8\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right),$$

5.4 Flux entre dos cilindres concèntrics

Un tercer exemple on el terme no lineal $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ s'anul·la és el flux estacionari entre dos cilindres. Aquest és el clàssic flux de Couette circular.

El domini queda esquemàticament representat en la figura 6. El cilindre interior de radi r_1 es mou amb velocitat angular Ω_1 , i l'exterior, de radi r_2 ho fa amb velocitat Ω_2 . Tots dos es poden considerar infinitament llargs, per eliminar els efectes dels extrems.

Utilitzant coordenades cilíndriques, **el camp de velocitats té únicament component v_θ , i aquesta depèn només de r** . L'equació de continuïtat $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ se satisfà automàticament i el transport de moment en les direccions radial i tangencial són

$$\begin{aligned} -\frac{v_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \\ 0 &= \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dr} \right) \end{aligned} \tag{14}$$

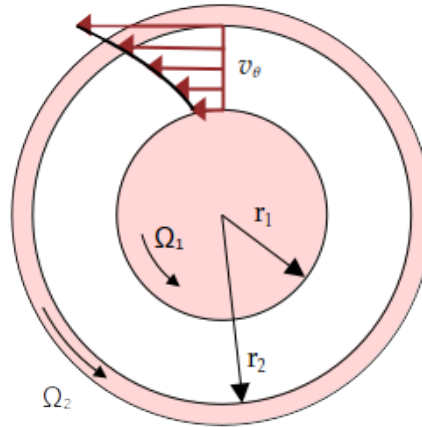


Fig. 6. Sistema de coordenades per a l'estudi del flux incompressible viscós entre dos cilindres concèntrics que en mouen amb velocitats angulars constants i diferents.

La primera d'aquestes equacions mostra que la pressió augmenta radialment de dins cap a fora, degut a l'acceleració centrífuga. Per tant, la distribució de pressió l'obtindrem a partir de v_θ . Integrant dos cops l'equació per a v_θ obtenim,

$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}. \quad (15)$$

Aquesta solució, per cert, la varem examinar al problema 4.2 (Tema 4), anticipant-nos una mica al contingut d'aquesta secció. A la pregunta c) respecte de la interpretació física, s'ha de respondre, per tant, que representa un cas general de flux purament rotatori en una geometria cilíndrica, per exemple entre dos cilindres concèntrics en rotació. Ara fixarem les constants A i B imposant les condicions de contorn del nostre problema, $v_\theta = \Omega_1 r_1$ en $r = r_1$, i $v_\theta = \Omega_2 r_2$ en $r = r_2$,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \\ B &= \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{aligned}$$

El perfil de velocitats serà aleshores,

$$v_\theta(r) = \frac{1}{1 - r_1^2/r_2^2} \left\{ \left[\Omega_2 - \Omega_1 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right] r + \frac{r_1^2}{r} (\Omega_1 - \Omega_2) \right\}, \quad (16)$$

expressat convenientment per poder considerar diferents casos particulars,

- Un primer cas s'obté de considerar $r_1 = 0, \Omega_1 = 0$. Amb això tenim un

cilindre girant amb un fluid viscos al seu interior.

La distribució de velocitats en aquest cas,

$$v_{\theta}(r) = \Omega_2 r \quad (17)$$

mostra que la velocitat tangencial és directament proporcional a r : el fluid es mou com un sòlid rígid (Fig. 7).

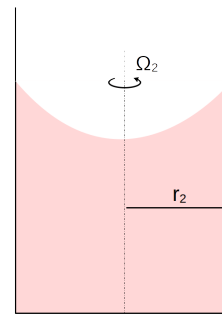


Fig. 7. Rotació estacionària d'un tanc que conté un fluid viscos (sota l'acció de la gravetat) (Kundu et al., 2015).

- Un altre cas és $r_2 \rightarrow \infty$ amb $\Omega_2 = 0$. Aquest és el cas d'un flux limitat pel cilindre interior, i que s'estén fins a l'infinit sense restricció. El perfil de velocitat és

$$v_{\theta}(r) = \frac{\Omega_1 r_1^2}{r} \quad (18)$$

La component z de la vorticitat en coordenades cilíndriques, segons les expressions de l'apèndix del Tema 4, és

$$\Omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_{\theta})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0$$

s'anul·la en aquest cas. Les altres components són també zero òbviament. De fet, la velocitat donada per l'equació 18 té la mateixa forma que la d'un **vòrtex ideal**. Un vòrtex ideal és aquell en què la velocitat és proporcional a $1/r$. Un fluid sota rotació uniforme amb velocitat angular ω constant té una vorticitat $\Omega = 2\omega$ en tot el domini. Com es dedueix de la dependència de la velocitat en $1/r$, un vòrtex ideal té una distribució de vorticitat en forma de delta de Dirac, $\Omega \propto \delta(r)$, que és zero a tot arreu excepte en $r = 0$.

Per aclarir una mica els conceptes, les paraules **vorticitat** i **vòrtex** s'utilitzen amb significats molt diferents en mecànica de fluids. La vorticitat és una propietat local del camp de flux, mentre que la paraula vòrtex s'utilitza per descriure qualsevol tipus de patró de flux en forma de remolí. I de fet, tal com hem dit, la vorticitat és zero a tot arreu en un vòrtex ideal, excepte en $r = 0$ (Panton, 2013, p. 63).

En el cas del cilindre que limita la regió accessible al fluid a $r \geq r_1$, la vorticitat és nul·la en tot el fluid.

L'esforç tangencial es pot calcular també amb les expressions de l'a-

pèndix del Tema 4. L'única component no nul·la és

$$\tau_{r\theta} = \mu \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] = -\frac{2\mu\Omega_1 r_1^2}{r^3}$$

- Finalment, considerem $r_1, r_2 \neq 0$, però amb el cilindre exterior fix, $\Omega_2 = 0$. L'expressió 16 s'escriu en aquest cas particular,

$$v_\theta(r) = \frac{\Omega_1 r_1^2}{1 - r_1^2/r_2^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{r_2^2} \right), \quad (19)$$

Aquesta solució descriu un perfil laminar còncav, bidimensional, com a la figura 8, per a un flux viscos incompressible. La solució és exacta. No obstant això, es torna *inestable* a una velocitat de gir del cilindre

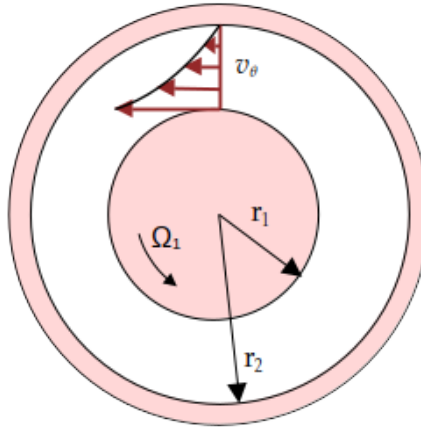


Fig. 8

interior relativament baixa, tal com va mostrar G. I. Taylor en un clàssic article del 1923 (Taylor, 1923). A un valor crític del que actualment s'anomena el nombre adimensional de Taylor, denotat Ta ,

$$Ta_{crit} = r_1 \frac{(r_2 - r_1)^3 \Omega_1^2}{\nu^2} = 1708$$

el sistema es torna inestable. El flux a partir d'aquest valor crític mostra un patró laminar tridimensional que consisteix en files de vòrtexs toroidals on el líquid gira amb signe alternat (Fig. 9).

Per a valors més elevats del nombre de Taylor es presenten diferents estructures de flux amb vòrtexs ondulants (Fig. 10). La presència de patrons no axisimètrics indica el desenvolupament d'inestabilitats secundàries. La inestabilitat primària és la que forma les estructures toroidals.

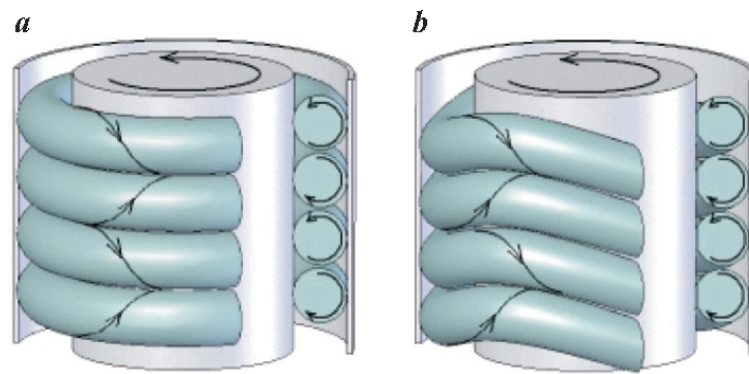


Fig. 9. Inestabilitat de Taylor-Couette. Dos patrons de vòrtexs del flux de Taylor-Couette, indicant la direcció del moviment del cilindre i del fluid: a) vòrtexs axisimètrics, b) vòrtexs ondulants. Font: (Domański, 2006).

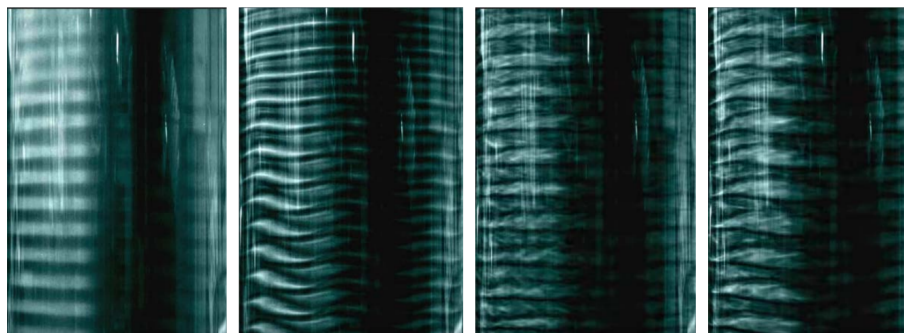


Fig. 10. A mesura que la velocitat del cilindre interior augmenta, s'obtenen diferents patrons de flux (captures de pantalla de (Laminar Co., Ltd., 2016).

Bibliografia

- Domański, J. (2006). Determination of the parameters of fluid motion in taylor-couette flow.. Retrieved from <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:30779578>
- Hamut, H., El-Emam, R. S., Aydin, M., i Dincer, I. (2014). Effects of rear spoilers on ground vehicle aerodynamic drag. *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, 24, 627–642. Retrieved from <https://doi.org/10.1108/HFF-03-2012-0068>
- Kundu, P., Cohen, I., i Dowling, D. (2015). *Fluid mechanics*. Academic Press.
- Laminar Co., Ltd. (2016). *Taylor couette (unstratified) looking at different instabilities*. <https://www.youtube.com/watch?v=ygW630nzDIg>. (Data d'accés: 18/8/2023)
- Landau, L., i Lifshitz, E. (1985). *Mecánica de fluidos*. Reverté.
- Nervous System. (2011). *Hele-shaw cell experiments*. <https://vimeo.com/22212386>. (Data d'accés: 18/8/2023)
- Panton, R. (2013). *Incompressible flow*. Wiley.

- R. Shankar Subramanian. (n.d.). *Boundary conditions in fluid mechanics*. <https://web2.clarkson.edu/projects/subramanian/ch560/notes/Boundary%20Conditions%20in%20Fluid%20Mechanics.pdf>. (Data d'accés: 18/8/2023)
- Taylor, G. I. (1923). Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 223, 289–343.
- White, F. (2011). *Fluid mechanics*. Mc Graw Hill.

Complements

Experiment de Reynolds en una canonada de secció circular

Hem vist en la secció 5.3 que la solució estacionària del flux incompressible viscos en una canonada circular és el flux de Poiseuille. Però aquesta solució no és estable a nombres de $Re \approx 2000$. A partir d'aquest valor el flux entra en un règim transicional, on les fluctuacions són intermitents i posteriorment, cap a $Re \approx 4000$, es torna plenament turbulent. El règim de flux en les aplicacions en enginyeria és gairebé sempre turbulent. En microfluídica, com per exemple en aplicacions mèdiques en dispositius o estructures de petita escala (*stents*, bronquiols, arterioles, etc) és laminar, igual que en aplicacions industrials amb fluids molt viscosos (olis, silicones, etc). En aquest vídeo es pot veure el clàssic experiment de visualització de Reynolds en una canonada circular, on un deixant de tinta permet observar els remolins que es generen a mesura que augmenta la velocitat del flux, és a dir el nombre de Reynolds.

David Naylor. Fluid Matters (2022). The Reynolds Experiment:
Visualization of Flow Transition in a Pipe.

<https://www.youtube.com/watch?v=6A8B05V40zA>

Flux de Poiseuille rectangular

Si et preguntes sobre quin aspecte té i si hi ha una solució exacta per al flux de Poiseuille en una canonada de secció rectangular, la resposta és Sí. Efectivament, es pot resoldre l'equació de Navier-Stokes en un tub rectangular per a $v_x(y, z)$ per separació de variables, ja que l'equació per al transport de moment en la direcció de la canonada, x , és ara una equació en derivades parcials de y i de z . El terme convectiu $\vec{v} \cdot \nabla v_x$ continua sent nul, i l'equació de Poisson que en resulta ens anuncia a crits una solució en termes de sinus i cosinus en una variable, i en funcions trigonomètriques hiperbòliques en l'altra. El desenvolupament és laboriós però el pots seguir al detall al següent video:

Bahga Lab IIT Delhi (2017). Lecture 6: Flow in rectangular cross-section channel.

https://www.youtube.com/watch?v=xIWpU_L1IPE

Inestabilitat de Taylor

El nombre de Taylor es pot definir per al cas general de dos cilindres concèntrics movent-se amb velocitats angulars diferents. En aquest apartat s'estudia aquest cas i a més es mostren fotografies de les diferents estructures que es formen al sistema en funció del valor del nombre de Taylor.

Kundu, P.K., Cohen, I. M., Dowling, D.R. (2002). Fluid Mechanics. United States of America: Academic Press. Pp. 496-502

<https://www-sciencedirect-com.sabidi.urv.cat/science/book/9780123821003>

Inestabilitat del flux de Taylor-Couette en una cel·la experimental operada manualment

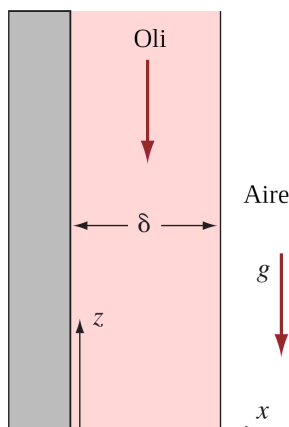
En aquest vídeo s'observa la inestabilitat primària i secundària de Taylor en un dispositiu experimental completament manual. La qual cosa demostra que no són necessàries grans velocitats per a poder veure els canvis a les estructures del flux.

Chirag Kalelkar i Prasun Dey. Fluid Dynamics. (2023). Instability of Taylor-Couette flow with manually driven inner cylinder.

<https://www.youtube.com/watch?v=LLBGn23tNSI>

Exercicis

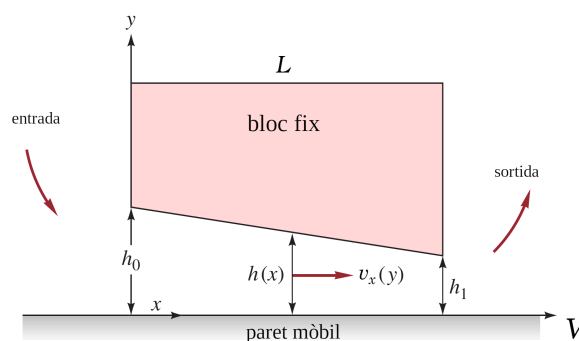
1. Quan hem analitzat el flux entre dos cilindres concèntrics, hem vist que podem associar el terme Ar de la solució general 15 a la del flux que genera la rotació del cilindre exterior en absència del cilindre interior, i a la inversa amb el terme B/r . Si l'equació de Navier-Stokes és no lineal, per què es vàlida la superposició dels dos fluxos, en el cas general?
2. Un oli de densitat ρ i viscositat μ , drena constantment cap avall pel costat d'una placa vertical, com a la figura de sota. Després d'una regió de desenvolupament prop de la part superior de la placa, el gruix de la pel·lícula d'oli esdevé constant i el problema es torna independent de z . Suposem que el perfil de velocitat v_z només depèn de x , i que l'atmosfera no ofereix resistència en contacte amb la superfície de la pel·lícula d'oli.



- a) Escriu i resol l'equació de Navier-Stokes per a $v_z(x)$. Quines condicions de contorn satisfà la velocitat?
- b) En un experiment, es mesuren amb un anemòmetre làser-doppler el gruix δ de la pel·lícula i el gradient de velocitats sobre la paret $[dv_z/dx]_{paret}$. Troba una expressió per a la viscositat μ de l'oli en funció de $(\rho, \delta, g, [dv_z/dx]_{paret})$.

3. En un problema de lubricació s'introdueix una pel·lícula d'oli entre un bloc fix i una paret mòbil en la direcció x amb velocitat V , com mostra la figura més avall. L'oli omple l'escletxa, d'alçada $h(x)$.

Si l'escletxa és prima, $h \ll L$, es pot demostrar que les distribucions de pressió i velocitat són de la forma $p = p(x)$, $v_x = v_x(y)$, $v_y, v_z = 0$:

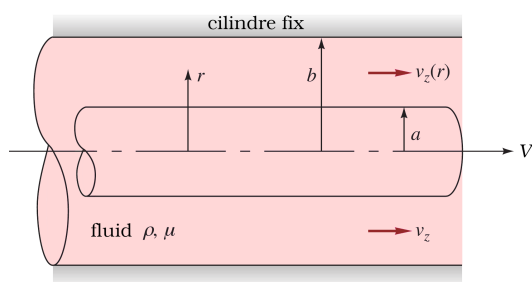


- a) Sense tenir en compte la gravetat, escriu l'equació de Navier-Stokes per a $v_x(y)$. Quines són les condicions apropiades per a $v_x(y)$?
- b) És correcte assumir que dp/dx és constant, com en el flux de Poiseuille en una canonada amb secció constant?
- c) Integra l'equació per a $v_x(x)$ i demostra que

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - yh) + V \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

on $h = h(x)$ és una funció arbitrària, *que varia molt lentament al llarg de L .*

4. Un líquid viscos es posa en moviment mitjançant un cilindre interior concèntric que es mou a la velocitat V constant en la direcció axial dins d'un cilindre exterior fix. Assumint un moviment del fluid purament axial,

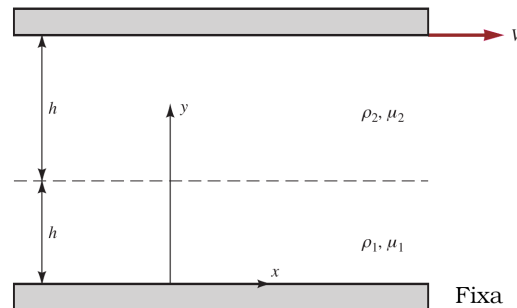


- a) Planteja i resol l'equació de Navier-Stokes per al perfil de velocitat, $v_z(r)$.
- b) Ajusta les constants d'integració amb les condicions de contorn adequades.

5. Una placa plana infinita oscil·la sinusoidalment en el seu propi pla sota un fluid viscos, $V = v_0 \cos \omega t$. Ben lluny de la placa, el fluid està en repòs. Fes les suposicions simplificadores necessàries per establir l'equació diferencial que governa el moviment del fluid. Per trobar la solució, consulta l'epígraf §24 del llibre de (Landau i Lifshitz, 1985).
6. Modifica el problema 4 per tenir en compte el moviment del cilindre exterior. En aquest cas, V_1 serà la velocitat del cilindre interior i V_2 la del cilindre exterior, en el sentit de les z negatives ($v_z(r = b) = -V_2$).
 - a) Troba el perfil de velocitats $v_z(r)$.
 - b) Per a quina velocitat V_2 l'esforç tangencial sobre els dos cilindres serà el mateix?
7. Es troben dos líquids immiscibles d'igual gruix h entre una placa fixa i una en moviment, com mostra la figura. El problema és translacionalment invariant al llarg de la coordenada x , el flux és laminar i constant

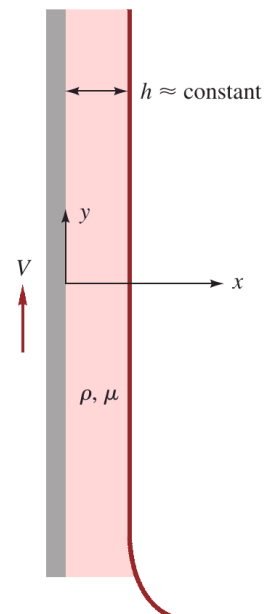
en el temps. No hi ha gradient de pressions extern al llarg de x . Sense tenir en compte la gravetat, planteja i resol l'equació de Navier-Stokes en cadascun dels dos fluids, imposant les condicions de contorn adequades.

- Quant val la velocitat a la interfície entre els dos líquids?
- Quant val l'esforç tangencial a la interfície entre els dos líquids?



Per ajustar les quatre constants d'integració, necessites aplicar condicions de contorn sobre la velocitat i l'esforç a la interfície de separació entre els dos líquids (R. Shankar Subramanian, n.d.).

- Una cinta es mou cap amunt a la velocitat V , arrossegant una pel·lícula de líquid viscos de gruix h , com mostra la figura. A tocar de la cinta, la pel·lícula es mou cap amunt amb la mateixa velocitat V . A la part exterior, la pel·lícula es mou cap avall a causa de la gravetat. Podem suposar que l'única component de la velocitat diferent de zero és $v_y(x)$, amb esforç de tall nul a la vora exterior de la pel·lícula. La pressió és constant al medi exterior, igual a una pressió de referència.



- Obtén una expressió per a $v_y(x)$.
- Calcula la velocitat mitjana $\langle v \rangle$ a la pel·lícula.
- Quina és la velocitat V per a la qual no hi ha flux net ni cap amunt ni cap avall?