UNIVERSITAT
ROVIRA i VIRGILI

Grau Enginyeria Matemàtica i Física

FÍSICA DE FLUIDS

Tema 0. Elements de càlcul vectorial

Clara Salueña

Objectius

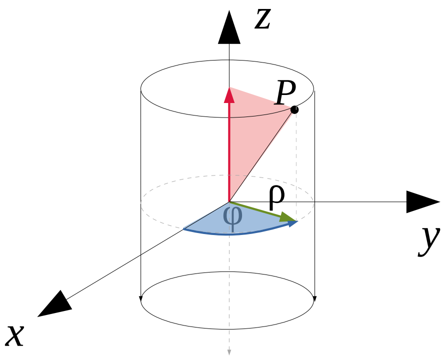
Què necessitarem en aquesta assignatura?

- En coordenades cartesianes, expressar el gradient d'un camp escalar o vectorial
- Expresar la divergència y el rotacional d'un camp vectorial
- Expressar-los en coordenades cilíndriques y esfériques
- Utilitzar aquests operadors i combinar-los
- Els teoremes de Gauss i de Stokes

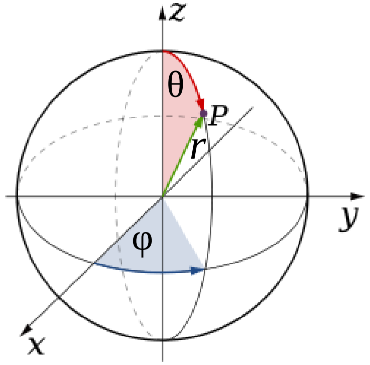
ELEMENTS DE CàLCUL VECTORIAL

Camp escalar $p=p(\vec{r},t)$ → GRADIENT ∇p

Camp vectorial $\vec{v}=\vec{v}(\vec{r},t)$ → GRADIENT $\nabla\vec{v}$ · DIVERGÈNCIA $\nabla\cdot\vec{v}$ · ROTACIONAL $\nabla\times\vec{v}$



COORDENADAS CILÍNDRICAS



COORDENADAS ESFÉRICAS

En MF computacional s'utilitzen també altres sistemes de coordenades

- Coordenades curvilínies, per adaptar la malla computacional a la geometria del problema,
- Sistema σ (sigma) de coordenades, en meteorologia, oceanografia,… basat en el valor de la pressió, per tenir en compte la batimetria i l'orografia del terreny.

Gradient ∇ (o grad)

- Pot aplicar-se a un camp escalar, com la pressió, la densitat (en un medi on la densitat varia punt a punt), la temperatura...

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

... i en aquest cas dona un vector,

(en notació d'Einstein)

- o sobre un camp vectorial, com la velocitat, aplicat sobre cadascuna de les components del vector. El resultat és un tensor de dos índexs, $\nabla\vec{v} = \partial_i v_j \hat{e}_i \hat{e}_j$ en notació tensorial. Aquí hi ha dos sumatoris implícits que no s'escriuen, en i i en j, on i i j recorren els índexs x, y, z. (De fet, no se solen escriure tampoc els vectors unitaris $\hat{e}_i$, $\hat{e}_j$)

$$\nabla\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergència ∇• (o div)

- El puntet darrera de ∇ indica producte escalar
- La divergència es calcula sobre un vector, i dona un escalar,

$$\nabla\cdot\vec{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z} = \partial_i v_i$$

- La divergència té un sentit de font del camp vectorial
- Els operadors diferencials es poden combinar consecutivament. Per exemple, com que ∇p és un vector, li podem aplicar la divergència:

$$\nabla\cdot(\nabla p)=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 p$$

- La divergència del gradient es la Laplaciana, ∇^2
- La divergència d'un rotacional és nul·la, el rotacional d'un gradient també...

Rotacional ∇ x (o rot)

- La creu darrera de ∇ indica el producte vectorial
- El rotacional es calcula sobre un camp vectorial, i dona un altre camp vectorial:

$$\nabla\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix} = \epsilon_{ijk}\partial_j v_k \hat{e}_i$$

on ε_{ijk} es el símbol (o pseudo-tensor) de Levi-Civita,
  - val 0 si dos índexs qualsevol es repeteixen,
  - 1 si ijk és xyz, yzx, o zxy,
  - -1 si és qualsevol de les altres 3 combinacions

- El rotacional té un sentit de rotació. El camp vectorial que resulta de l'operació és perpendicular al camp original
- El rotacional d'un gradient és nul: ∇ x (∇p) = 0

Resumint: En coordenades cartesianes

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{e}_z$$ (gradient)

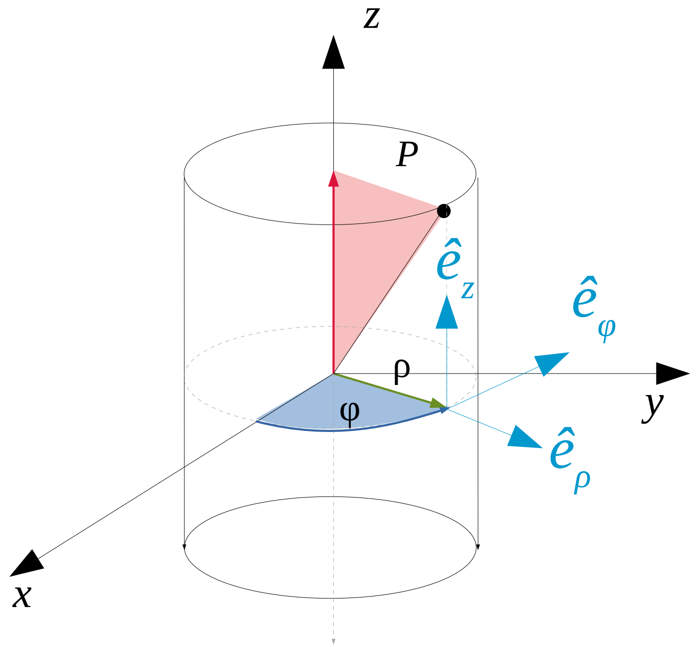
$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$ (divergència)

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$ (laplaciana d'un escalar)

$$\nabla^2 \vec{v} = \nabla^2 v_x \hat{e}_x + \nabla^2 v_y \hat{e}_y + \nabla^2 v_z \hat{e}_z$$ (laplaciana d'un vector)

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z$$ (rotacional)

En coordenades cilíndriques



$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{e}_z$$

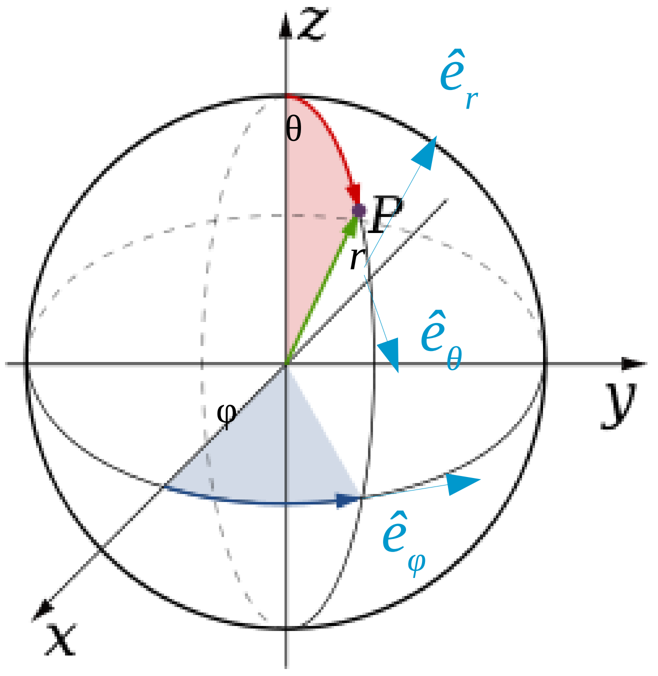
$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\vec{v} = \left(\nabla^2 v_\rho - \frac{v_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_\rho + \left(\nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho}\right)\hat{e}_\varphi + \nabla^2 v_z \hat{e}_z$$

$$\nabla\times\vec{v} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho}\right)\hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_z$$

I en esfèriques...



$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 v_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta \sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}$$

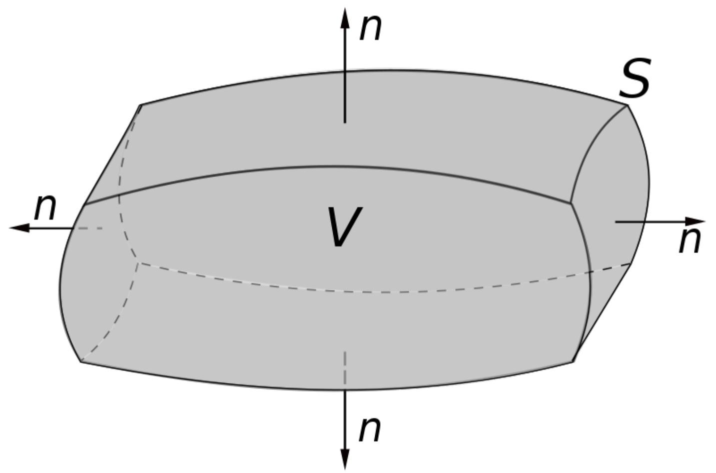
$$\nabla^2\vec{v} = \left(\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_r + \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_\theta$$
$$+ \left(\nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_\varphi$$

$$\nabla\times\vec{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\varphi\sin\theta}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial\left(r v_\varphi\right)}{\partial r}\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r v_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\hat{e}_\varphi$$

Teoremes del càlcul vectorial

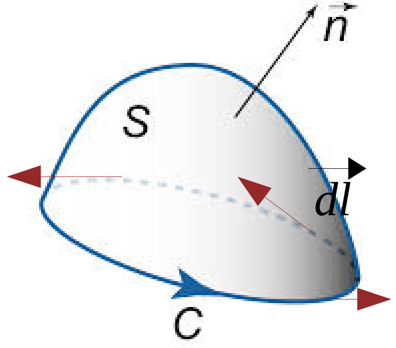
- Els més importants són el teorema de Gauss o de la divergència

$$\oint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \int_V \nabla\cdot\vec{F}\, dV$$



- I el teorema de Stokes, o de la circulació,

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\, dS$$



- Aquests teoremes s'utilitzen en fer els balanços integrals per poder escriure les equacions diferencials per als fluids

Fi de la presentació