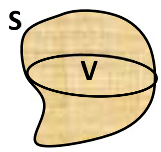
Equacions de Maxwell. Resum final i general.

Ara farem un resum-recordatori de les conclusions finals de l'estudi dels camps elèctric i magnètic que es va fer a Físca 2. Veurem les versions integrals i diferencials d'aquestes.

Versions integrals de les equacions de Maxwell.

N'hi ha de 2 tipus:

A) Definides en una superfície tancada **S** amb un volum intern **V**. En aquestes equacions els camps elèctrics i magnètics apareixen separats els uns dels altres.



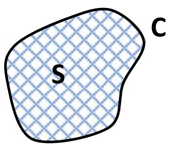
1) $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_f \, dv$: Teorema de Gauss del camp elèctric

3) $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$: Teorema de Gauss del magnetisme o Solenoidabilitat del camp $\vec{B}$

5) $\oint_S \vec{j}_f \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_f \, dv$

Equació de continuïtat o de conservació de la càrrega [1]

B) Definides en una línia tancada **C** amb superfícies internes **S**. Aquestes equacions tenen en compte els anomenats fenòmens d'inducció en els que els camps elèctrics i magnètics apareixen barrejats



2) $\underbrace{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{\varepsilon,\ fem} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}}_{\phi_B, flux\ de\ B}$: Llei de Faraday-Lenz

4) $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{j}_f \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{D} \cdot d\vec{S}$: Teorema d'Ampere-Maxwell

On $\vec{E}$ (V/m), és la *intensitat de camp elèctric*, $\vec{D}$ (C/m^2), és el *camp de desplaçament elèctric*, $\vec{H}$ (A/m), és la *intensitat de camp magnètic* i $\vec{B}$ (T), és la *densitat de flux magnètic*

ρ_f i ρ_p (C/m^3) representen la densitat volúmica de càrrega lliure i de polarització respectivament , σ_f i σ_p (C/m^2) representen la densitat superficial de càrrega lliure i de polarització respectivament.

---

[1] Aquesta equació **5)** és la que estableix la lògica conservació de la càrrega elèctrica malgrat en mogui en els corrents. Seria com una cinquena equació de Maxwell sinó fos perquè es dedueix de les relacions (bulk) de les altres 4, tal com veurem més endavant.

$\vec{j}_f$ i $\vec{j}_m$ (A/m^2) representen la densitat volúmica de corrent lliure i de magnetització respectivament i $\vec{k}_f$ i $\vec{k}_m$ (A/m) representen la densitat superficial de corrent lliure i de magnetització respectivament.

Versions diferencials de les equacions de Maxwell.

Surten de les equacions de la versió integral tot usant el *teorema de la divergència* (en 1, 3 i 5) i el *teorema del rotacional* (en 2 i 4). De cadascuna de les anteriors en surten dues, una és la forma bulk (fora de les interfícies entre medis diferents) + la de continuïtat o discontinuïtat a través de les mateixes interfícies

1. bulk) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$: Teorema de Gauss

1. interfície) $\hat{n} \cdot \left(\vec{D}^+ - \vec{D}^-\right) = \sigma_f$: Discontinuïtat interficial de la component normal de $\vec{D}$

2. bulk) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: Llei de Faraday-Lenz

2. interfície) $\hat{n}\, x\left(\vec{E}^+ - \vec{E}^-\right) = 0$: Continuïtat interficial de la component tangencial de $\vec{E}$

3. bulk) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$: Teorema de Gauss del magnetisme/Solenoidabilitat del camp $\vec{B}$

3. interfície) $\hat{n} \cdot \left(\vec{B}^+ - \vec{B}^-\right) = 0$: Continuïtat interficial de la component normal de $\vec{B}$

4. bulk) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: Teorema d'Ampere-Maxwell

4. interf.) $\hat{n}\, x\left(\vec{H}^+ - \vec{H}^-\right) = \vec{k}_f$: Discontinuïtat interficial de la component tangencial de $\vec{H}$

Equació de continuïtat de la càrrega:

5.bulk) $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Aquesta equació **5)** és la que estableix la lògica conservació de la càrrega elèctrica malgrat en mogui en els corrents. Seria com una cinquena equació de Maxwell sinó fos perquè es dedueix de les relacions (bulk) de les altres 4. En efecte:

1. prenent la divergència a **4.bulk** el primer terme passaria a zero (la divergència d'un rotacional és sempre zero) i per tant, al igualar a zero la divergència del segon surt que $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$.

2. Finalment, usant **1.bulk** ja tenim l'equació **5.** de continuïtat.

També podríem veure que l'equació de continuïtat és equivalent a posar-hi el segon terme del segon membre de 4.bulk, que és justament el que va fer el Maxwell quan la va postular. Així l'equació de continuïtat **5.** és redundant en els dos sentits amb les 4 equacions (bulk) de Maxwell.

Relacions Constitutives, elèctriques i magnètiques. Medis lineals i isòtrops.

S'anomenen ***relacions constitutives elèctriques*** a les relacions que lliguen els tres camps elèctrics:

- $\vec{D}$ camp de desplaçament elèctric
- $\vec{E}$ intensitat de camp elèctric
- $\vec{P}$ densitat de moment dipolar elèctric, camp de polarització dielèctrica o polarització,

juntament amb la propietat de polarització com la permitivitat, ε del medi material on estiguem situats.

En primer lloc tenim la relació (C1) que lliga els tres camps i que fa que no siguin independents entre sí:

(C1) $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Però hi ha la relació que diu quin és el camp de polarització $\vec{P}$ produït en funció de la causa polaritzadora que és el camp $\vec{E}$, En el cas particular d'estar dins en un ***medi lineal i isòtrop*** tindrem una relació de proporcionalitat simple. A través del paràmetre susceptibilitat dielèctrica, $\chi_e > 0$, que depèn del material.

$$\vec{P} = \chi_e\, \varepsilon_0\, \vec{E}$$

Substituint-la a (C1)

(C1') $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

amb $\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0$ anomenada *permitivitat absoluta*, $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ anomenada *permitivitat relativa* i χ_e anomenada *susceptibilitat dielèctrica* del medi material.

Llavors, a partir de $\vec{P}$ obtindríem, si les volguéssim, les densitats volúmica i superficial de càrregues de polarització: $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_p$ $\quad i \quad$ $\vec{P} \cdot \hat{n}_e = \sigma_p$

S'anomenen ***relacions constitutives magnètiques*** a les relacions que lliguen els tres camps magnètics:

- $\vec{B}$ densitat de flux magnètic
- $\vec{H}$ intensitat de camp magnètic
- $\vec{M}$ densitat de moment dipolar magnètic o camp de polarització magnètica o camp de magnetització

juntament amb la propietat de magnetització com la permeabilitat, μ del medi material on estiguem situats.

En primer lloc tenim la relació (C2) que lliga els tres camps i que fa que no siguin independents entre sí:

(C2') $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

Però hi ha la relació que diu quin és el camp de polarització produït en funció de la causa polaritzadora que és el camp $\vec{H}$, relació que depèn exclusivament de les propietats magnètiques del medi material en el qual estem, en el cas d'estar dins en un ***medi lineal i isòtrop*** tindrem una relació de proporcionalitat simple. A través del paràmetre susceptibilitat magnètica, $\chi_m > 0$, que depèn del material.

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

Substituint-la a (C2)

(C2) $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu \vec{H}$

amb $\mu = \mu_r \mu_0$ anomenada *permeabilitat absoluta* i $\mu_r = 1 + \chi_m$ anomenada *permeabilitat relativa* i χ_m anomenada susceptibilitat magnètica del medi material.

Llavors a partir de $\vec{M}$ obtindríem, si els volguéssim, les densitats de corrent volúmics i superficials de magnetització: $\vec{M} \, x \, \hat{n}_e = \vec{k}_m$ i $\vec{\nabla} \, x \, \vec{M} = \vec{j}_m$

Equacions en un medi lineal i isòtrop

Reescrivim com a recordatori les equacions de Maxwell en el bulk:

1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$

2) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$

3) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

4) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$

Si volem la versió de les equacions de Maxwell només en termes dels camps $\vec{E}$ i de $\vec{H}$, caldrà substituir els altres dos camps: $\vec{D}$ i $\vec{B}$ tot usant les relacions constitutives (C1') i (C2') d'un medi lineal i isòtrop:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \;, \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad o\ bé \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \;, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

Amb això obtenim:

$$\mathbf{1'}) \quad \vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \rho_f$$

$$\mathbf{2'}) \quad \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}$$

$$\mathbf{3'}) \quad \vec{\nabla}\cdot\left(\mu\vec{H}\right) = 0$$

$$\mathbf{4'}) \quad \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{H} = \vec{\mathbf{j}}_f + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

Que són les 4 equacions de maxwell en el bulk escrites en termes dels camps

$\vec{E}$ i $\vec{H}$ només. Com a contrapartida ara apareixen les propietats constitutives del material, permitivitats i permeabilitats, que abans [1), 2) 3) i 4)] no hi eren.

Equacions en un medi lineal, isòtrop i a més, uniforme

Un medi es considera uniforme si les propieats físiques son uniformes per tot el volum del medi. En aquest cas considerem que la permitivitat dielèctrica ε i la permeabilitat magnètica són uniformes μ, per tant no els afecten les derivades. En aquest cas podem reescriure les darreres equacions de Maxwell com:

$$\mathbf{1'}) \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

$$\mathbf{2'}) \quad \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}$$

$$\mathbf{3'}) \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$$

$$\mathbf{4'}) \quad \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{H} = \vec{\mathbf{j}}_f + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

Aplicant ara el rotacional a **2')** i **4')**

$$\textbf{E)} \quad \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\left(\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{E}\right) = -\mu\,\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}\right)$$

$$\textbf{H)} \quad \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\left(\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{H}\right) = \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{j}}_f + \varepsilon\,\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)$$

Usant l'expressió matemàtica del rotacional del rotacional per a un vector qualsevol $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla}\,\mathrm{x}(\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$$

$$\textbf{E)}\quad \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\vec{H}$$

$$\textbf{H)}\quad \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}) - \vec{\nabla}^2\vec{H} = \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathrm{j}}_f + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\vec{E}$$

Usant ara les equacions de Maxwell 1') i 3') per a identificar les divergències de $\vec{H}$ i $\vec{E}$ en el primer membre i les equacions de Maxwell 2') i 4') per a identificar els rotacionals de $\vec{H}$ i $\vec{E}$ en el segon membre i reordenant termes:

$$\textbf{E)}\quad \vec{\nabla}^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{j}}_f - \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\left(\rho_f\right) = 0$$

$$\textbf{H)}\quad \vec{\nabla}^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} + \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathrm{j}}_f = 0$$

Això són les anomenades *Equacions d'Ones*, que es dedueixen de les Equacions de Maxwell.

Equacions en un medi lineal, isòtrop, homogeni, i a més sense càrrega, $\rho_f = 0$, i ohmic

Ara considerem que no hi ha càrrega lliure en el medi $\rho_f = 0$

I a més suposem que el medi material on estem és **òhmic** (satisfà molt aproximadament la llei d'Ohm, local):

$$\vec{\mathrm{j}}_f = \sigma\vec{E}$$ [2]

I Per tant la densitat de corrent en cada punt és proporcional a la intensitat de camp elèctric, on la constant de proporcionalitat és la σ o *conductivitat* del material, propietat que també considerarem homogènia.

Substituint a les equacions d'ones (E) i (H) aquesta expressió de $\vec{\mathrm{j}}_f$, obtenim:

$$\textbf{E')}\quad \vec{\nabla}^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0$$

$$\textbf{H')}\quad \vec{\nabla}^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} + \sigma\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{E} = 0$$

[2] Això en realitat seia una relació constitutiva més, igual que les altres dues, ja que relaciona dues magnituds entre sí

Tenint en compte que segons l'equació de Maxwell 2: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$

$$\textbf{E')} \quad \vec{\nabla}^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0$$

$$\textbf{H')} \quad \vec{\nabla}^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} - \sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$$

I tenint en compte també la relació constitutiva $\vec{B} = \mu\vec{H}$, de nou amb μ uniforme:

$$\textbf{E')} \quad \vec{\nabla}^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0$$

$$\textbf{H')} \quad \vec{\nabla}^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = 0$$

Curiosament, així ja hem pogut posar les equacions d'ones anteriors com a dues d'idèntiques i separades: una només per $\vec{E}$ i l'altre per $\vec{H}$.

Anem ara a simplificar-les una mica més tot considerant casos particulars segons el valor de la conductivitat σ :

1. Medi aïllant ($\boldsymbol{\sigma = 0}$)

En el cas de que el medi a més sigui completament **aïllant**, llavors σ és zero, i podem treure els darrers termes de E') i H'). Aquest cas és relativament fàcil que es doni, per exemple, si el medi és el buid, o un material amorf com el vidre o plàstics, que són del tot o gairebé del tot aïllants, i en aquest cas la llum pot passar a través d'ells. Les equacions d'ones d'aquest cas són.

$$\textbf{OE)} \quad \vec{\nabla}^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0$$

$$\textbf{OH)} \quad \vec{\nabla}^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = 0$$

Que és la forma més típica, simple i autèntica de trobar les equacions d'ones. Per a solucionar-les ens hem de mirar primer el següent ANNEX:

ANNEX MATEMÀTIC 1:

Anem a trobar per mètodes matemàtics les solucions generals a equacions diferencials del tipus *equació d'ones*,

considerem de moment que la variable és un escalar $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(\vec{r}, t)$. Llavors l'equació d'ones és llavors així:

$$(1) \quad \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}, t) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(\vec{r}, t) = 0$$

Amb $\mu\varepsilon = \frac{1}{v^2} > 0$, essent $\vec{v}$ la velocitat de propagació de les ones que en seran la solució, tal i com veurem més endavant.

Anem a aplicar el **mètode de separació de variables**, que consisteix en suposar que les solucions $\varphi(\vec{r}, t)$ es poden escriure com el producte de dues funcions R($\vec{r}$) i T(t) que depenen, una només de les 3 variables espacials $\vec{r}$=(x,y,z) i l'altra només de la variable temporal t. És a dir:

$$(2) \quad \varphi(\vec{r}, t) = R(\vec{r}) \cdot T(t)$$

Substituint això a l'equació d'ones:

$$T(t) \cdot \vec{\nabla}^2 R(\vec{r}) = R(\vec{r}) \cdot \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t)$$

Dividint-la ara tota per $\varphi(\vec{r}, t) = R(\vec{r}) \cdot T(t)$

$$(3) \qquad \frac{\vec{\nabla}^2 R(\vec{r})}{R(\vec{r})} = \mu\varepsilon \frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t)}{T(t)}$$

On el primer membre depèn exclusivament de $\vec{r}$ i el segon exclusivament de t, que són variables diferents i independents entre sí, per tant si els dos membres de (3) han de ser iguals entre ells, només ho poden ser si són iguals a una constant que anomenem α.

És a dir:

$$\mu\varepsilon \frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t)}{T(t)} = \alpha \;\; ; \quad \frac{\vec{\nabla}^2 R(\vec{r})}{R(\vec{r})} = \alpha$$

Posem la primera de la forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) - \frac{\alpha}{\mu\varepsilon} T(t) = 0$$

Que és una equació diferencial lineal, homogènia i de primer ordre, la solució de la qual es troba com sabem de forma exponencial

$$\rightarrow \; T(t) = T_0 \cdot exp\left(\pm t \sqrt{\frac{\alpha}{\mu\varepsilon}} \right)$$

Essent T_0 la constant arbitrària. Com que la durada temporal del problema és infinita (no imposem cap límit i la solució pot anar des de t $\rightarrow$ -∞ fins a t $\rightarrow$ +∞), llavors el coeficient del temps dins l'argument de l'exponencial: $\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\mu\varepsilon}}$ no pot ser un nombre real, ni tant sols amb part real, per tant, només pot ser un imaginari pur. Dit d'una altra manera : $\frac{\alpha}{\mu\varepsilon} < 0$ o bé $\alpha < 0$

$$T(t) = T_0 \cdot exp\left(\pm i\, t \sqrt{\frac{-\alpha}{\mu\varepsilon}} \right) = T_0 \left[cos\left(t \sqrt{\frac{-\alpha}{\mu\varepsilon}} \right) + i \cdot sin\left(\pm t \sqrt{\frac{-\alpha}{\mu\varepsilon}} \right) \right]$$

que són solucions oscil·lants. Anomenem:

$$(4) \quad \omega = \sqrt{\frac{-\alpha}{\mu\varepsilon}}$$

Amb això les solucions les podem reescriure com:

$$(5) \quad T(t) = T_0 \cdot exp(+i\omega\, t) = T_0 \cdot cos(\omega\, t) + iT_0 \cdot sin(\omega\, t)$$

Que són solucions oscil·lants de freqüència angular o pulsació: $\omega = 2\pi f$

al ser elcoeficient del temps, ω te dimensions de [rad/s]

També podem definir la k_0 tal que:

$$(6) \quad {k_0}^2 \equiv \mu\varepsilon \cdot \omega^2 = -\alpha > 0$$

Que te dimensions de [rad/m] i s'anomena *nombre d'ones* i més endavant veurem que serà un vector que s'anomenarà *vector d'ones*.

Això és tot el que sabem del terme temporal T(t) de la solució. Però també el membre de la dreta de (3) és igual a la mateixa constant α negativa, posant-la com $-k_0^2$, tenim:

$$(7) \quad \frac{\vec{\nabla}^2 R(\vec{r})}{R(\vec{r})} = \alpha = -\mu\varepsilon \cdot \omega^2 = -{k_0}^2$$

És a dir

$$(7') \qquad \vec{\nabla}^2 R(\vec{r}) + {k_0}^2\, R(\vec{r}) = 0$$

Aquesta és una equació que es deriva de l'equació d'ona si assumim, tal com hem fet, dependència sinusoidal en el temps. La Equació (7') rep el nom d'*Equació de Helmholtz*

Desenvolupant la laplaciana en coordenades cartesianes, :

$$(7'') \quad \frac{\partial^2 R(\vec{r})}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 R(\vec{r})}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 R(\vec{r})}{\partial \mathrm{z}^2} = -{k_0}^2 R(\vec{r})$$

A p'artir d'aquí considerarem diferents casos. En aquest tema només tractarem el primer cas, i deixem els altres 3 pel segon tema de l'assignatura:

Cas 1) x, y i z no tenen límit , el contorn del medi està situat a l'infinit per totes les direccions, això vol dir que estem intentant trobar la solució dins d'un medi uniforme i infinit.

En aquest cas convé provar solucions separades en les tres variables espacials, és a dir:

$$(8) \;\; R(\vec{r}) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Substituint a (7'') i dividint per R.

$$(9) \quad \frac{\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}\mathrm{x}^2}}{X} + \frac{\frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{d}\mathrm{y}^2}}{Y(y)} + \frac{\frac{\mathrm{d}^2 Z(z)}{\mathrm{d}\mathrm{z}^2}}{Z(z)} = -{k_0}^2$$

Cadascun dels 3 termes del membre de l'esquerra de l'equació anterior depenen de variables diferents i per tant han de ser iguals a constants, respectivament: l_x, l_y, l_z.

$$(10) \quad \frac{\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}\mathrm{x}^2}}{X(x)} = l_x \;\; ; \frac{\frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{d}\mathrm{y}^2}}{Y(y)} = l_y \;\; ; \frac{\frac{\mathrm{d}^2 Z(z)}{\mathrm{d}\mathrm{z}^2}}{Z(z)} = l_z$$

tals que segons (9):

$$(11) \quad l_x + l_y + l_z = -{k_0}^2$$

Les solucions de cadascuna d'aquestes tres equacions separades són formalment (anàlogament a com es va trobar la de T(t)):

$$(12)\quad \begin{cases} X(x) = X_0 \cdot exp\left(\pm\sqrt{l_x} \cdot x\right) \\ Y(y) = Y_0 \cdot exp\left(\pm\sqrt{l_y} \cdot y\right) \\ Z(z) = Z_0 \cdot exp\left(\pm\sqrt{l_z} \cdot z\right) \end{cases}$$

De la mateixa manera que passava amb el temps, ara també, les úniques possibilitats per a evitar solucions divergents quan x, y i z → $\pm\infty$ és que totes aquestes constants siguin negatives: $l_x < 0$; $l_y < 0$; $l_z < 0$, de manera que les dues determinacions de la seva arrel quadrada siguin nombres imaginaris, la part imaginària dels quals anomenem, $\pm k_x$, $\pm k_y$ i $\pm k_z$:

$$(13)\quad \sqrt{l_x} = \pm i \cdot k_x \quad ; \quad \sqrt{l_y} = \pm i \cdot k_y \quad ; \quad \sqrt{l_z} = \pm i \cdot k_z$$

De manera que substituint a (12) apareixen són solucions oscil·lants en l'espai:

$$(14)\quad \begin{cases} X(x) = X_0 \cdot \exp(\mp i k_x \cdot x) \\ Y(y) = Y_0 \cdot \exp(\mp i k_y \cdot y) \\ Z(z) = Z_0 \cdot \exp(\mp i k_z \cdot z) \end{cases}$$

I substituint (13) a (11) i d'acord amb (6) obtenim

$$-k_x{}^2 - k_y{}^2 - k_z{}^2 = -k_0{}^2 = -\omega^2 \mu\varepsilon$$

On $(k_x\,,\ k_y\,,\ k_z) \equiv \vec{k}\,\cdot$ és un vector de mòdul $k_0 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ que s'anomena *vector d'ona* com ja hem avisat abans, el seu mòdul és el *nombre d'ones k_0* que ja coneixem També podem posar-lo en forma del seu mòdul pel vector unitari $\hat{s} = (s_x\,, s_y\,, s_z)$ en la direcció i sentit de $\vec{k}$. És a dir:

$$(15)\quad \vec{k} = (k_x\,, k_y\,, k_z) = k_0 \cdot \hat{s}$$

Substituint les solucions parcials en les formes (5) i (14) a la solució sencera (2), obtenim, és a dir multiplicant entre si les 3 solucions de (14) amb la del temps de (5): $exp(+i\omega\, t\,)$: i reduint les 4 constants arbitràries multiplicades a una única

$\varphi_0 = X_0 \cdot Y_0 \cdot Z_0 \cdot T_0$, obtenim

$$(15)\quad \varphi(\vec{r};t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \cdot T(t) = \varphi_0 \cdot exp\left[i\left(\,\omega t \mp\ (k_x x + k_y y + k_z z)\right)\right] =$$

$$= \varphi_0 \cdot exp\left[i(\,\omega t \mp\ \vec{k} \cdot \vec{r})\right] = \varphi_0 \cdot exp\left[i\left(\,\omega t \mp\ k_0(s_x x + s_y y + s_z z)\right)\right]$$

La funció (15), no és ni més ni menys que la funció d'una ona propagant-se en la direcció $\vec{k}\ o\ \hat{s}$ i la velocitat de propagació es troba com es fa sempre a les ones, dividint la freqüència angular pel nombre d'ona:

$$(16) \quad v = \frac{\omega}{k_0}$$

Recordem que segons (6) k_0 i ω estan lligats per la relació: $k_0 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, per tant:

$$(17) \quad v = \frac{\omega}{k_0} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

Que és l'expressió física de la velocitat de propagació de la ona. En concret calculant el primer factor és:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\ x10^{-7}\ \frac{N}{A^2}\ \cdot\ 8{,}8541878176\ \ x10^{-12}\ \frac{C^2}{N \cdot m^2}}} = 299\ 792\ 458\ \frac{m}{s}$$

que és <u>exactament del tot</u>!, la velocitat de propagació de la radiació electromagnètica (o de la llum) en el buit

I el segon factor és:

$$f_v = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} \leq 1$$

és l'anomenat *factor de velocitat* que és adimensional i inferior o igual a la unitat ($f_v \leq 1$). Aquest multiplica a c per a donar la velocitat de propagació real $v \leq c$ en el medi material en el que estem: de permitivitat relativa $\varepsilon_r \geq 1$ i permeabilitat relativa $\mu_r \geq 1$.

En realitat les funcions d'ones sinusoidals (15) no representen la solució més general de la equació d'ones

$$(1) \quad \vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r},t) - \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\vec{r},t) = 0$$

Qualsevol freqüència angular ω, en principi donaria solucions i qualsevol vector d'ona

$$\vec{k} = \left(k_x\,, k_y\,, k_z\right) = k_0 \cdot \hat{s}$$

mentre satisfaci amb la ω la ja explicada condició que els lliga: $k_0 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v}$.

A més per a cada $\vec{k}$, les ones poden ser, o bé progressives (${\varphi_0}^+$, sentit de $\vec{k}$), o bé regressives (${\varphi_0}^-$, sentit oposat a $\vec{k}$)

La qual cosa faria que la solució general de l'equació d'ones sigui la superposició o combinació lineal de totes aquestes possibles solucions:

$$(18)\ \varphi(x,y,z,t) = \sum_{\substack{\omega;\,\vec{k} \\ |\vec{k}|=\frac{\omega}{v}}} \left\{{\varphi_0}^+(\omega;\ \vec{k}) \cdot exp\left[i\left(\omega t -\ \vec{k}\cdot r\right)\right] + {\varphi_0}^-(\omega;\ \vec{k}) \cdot exp\left[i\left(\omega t +\ \vec{k}\cdot r\right)\right]\right\}$$

1. Solucions de les equacions d'ones dels camps $\vec{E}$ i $\vec{H}$ en un medi lineal, isòtrop, homogeni, sense càrregues, aïllant i il·limitat en totes direccions

Estavem intentant trobar la solució de les equacions d'ones dels camps elèctric i magnètic que són:

$$(OE) \quad \vec{\nabla}^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0$$

$$(OH) \quad \vec{\nabla}^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = 0$$

La solució es troba de la mateixa manera que per l'escalar $\varphi(x, y, z, t)$ de l'annex matemàtic anterior.

És a dir Les solucions de (OE) i de (OH) seran del mateix tipus però per a cadascuna de les components dels dos camps:

$$E_x = E_{x0} \cdot exp\left[i\left(\omega_e t - \vec{k}_e \cdot \vec{r}\right)\right]$$
$$E_y = E_{y0} \cdot exp\left[i\left(\omega_e t - \vec{k}_e \cdot \vec{r}\right)\right]$$
$$E_z = E_{z0} \cdot exp\left[i\left(\omega_e t - \vec{k}_e \cdot \vec{r}\right)\right]$$

$$H_x = H_{x0} \cdot exp\left[i\left(\omega_h t - \vec{k}_h \cdot \vec{r}\right)\right]$$
$$H_y = H_{y0} \cdot exp\left[i\left(\omega_h t - \vec{k}_h \cdot \vec{r}\right)\right]$$
$$H_z = H_{z0} \cdot exp\left[\left(\omega_h t - \vec{k}_h \cdot \vec{r}\right)\right]$$

És a dir, compactament:

$$(E) \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot exp\left[i\left(\omega_e t - \vec{k}_e \cdot \vec{r}\right)\right]$$

$$(H) \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \cdot exp\left[i\left(\omega_h t - \vec{k}_h \cdot \vec{r}\right)\right]$$

Com veiem, els paràmetres de freqüència angular i de vector d'ona a l'interior de l'exponencial ($\omega_e, \vec{k}_e \quad i \;\; \omega_h, \vec{k}_h$) no tenen perquè ser els mateixos pels dos camps, ja que s'han extret de forma independent d'equacions diferents (OE) i (OH).

Això són les formes de les solucions de les equacions d'ones, però les equacions d'ones (OE) i (OH) no representen tot el que diuen les equacions de Maxwell sinó només a una part, ja que mai dues equacions diran el mateix que 4. Per tant hem d'especificar més la forma de les solucions, tot aplicant de nou si cal algunes de les 4 equacions de Maxwell, sobre les solucions (E) i (H)

Escrivim de nou les equacions de Maxwell (2) i (4) en un medi lineal, isòtrop, homogeni, sense càrregues i aïllant:

1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

2) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}$

3) $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$

4) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = +\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$

Apliquem ara 2) sobre les solucions (E) i (H)

2) $\vec{\nabla} \mathrm{x} \vec{E}_0 \cdot exp\left[i\left(\omega_e t - \vec{k}_e \cdot \vec{r}\right)\right] = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}_0 \cdot exp\left[i\left(\omega_h t - \vec{k}_h \cdot \vec{r}\right)\right]$ ➔

$$(EH) \quad - i\, \vec{k}_e \mathrm{x} \vec{E}_0 \cdot exp\left[i\left(\omega_e t - \vec{k}_e \cdot \vec{r}\right)\right] = -i\, \mu \omega_h\, \vec{H}_0 \cdot exp\left[i\left(\omega_h t - \vec{k}_h \cdot \vec{r}\right)\right]$$

Amb la qual cosa ja veiem que per tal que els dos membres siguin iguals a qualsevol instant t i posició $\vec{r}$, cal que els arguments de disn les exponencials també ho siguin, la qual cosa fa que les dues freqüències angulars i els dos vectors d'ones siguin idèntics pels dos camps, és a dir:

$$\omega_e = \omega_h = \omega$$

$$\vec{k}_e = \vec{k}_h = \vec{k}$$

Cancel·lant els termes exponencial ja comuns i les $-i$ als dos membres de (EH):

$$(A) \quad \vec{k} \mathrm{x} \vec{E}_0 = \mu \omega\, \vec{H}_0$$

Apliquem ara 4) sobre les solucions (E) i (H)

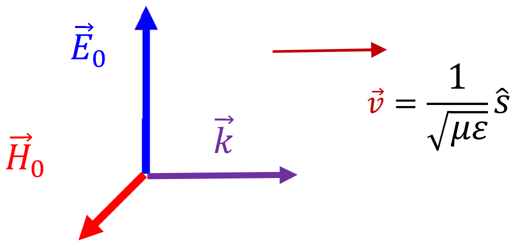
4) $\vec{\nabla} \mathrm{x} \vec{H}_0 \cdot exp\left[i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right] = +\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_0 \cdot eexp\left[i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right]$ ➔

$$(HE) \quad - i\, \vec{k} \mathrm{x} \vec{H}_0 \cdot exp\left[i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right] = i\, \varepsilon \omega\, \vec{E}_0 \cdot exp\left[i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right]$$

Cancel·lant els termes exponencial ja comuns i les $-i$ als dos membres de (HE):

$$(B) \quad - \vec{k} \mathrm{x} \vec{H}_0 = \varepsilon \omega\, \vec{E}_0$$

Les equacions (A) i (B) recent obtingudes donen relacions addicionals per a les amplituds i direccions del camps $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ i el vector d'ona $\vec{k}$, que indica la direcció cap a la que es propaga l'ona (és a dir la mateixa direcció que $\vec{v}$, la velocitat de propagació)



Pel que fa a les direccions (A) i (B) indiquen que si dirigim $\vec{k}$ en la direcció de l'eix z, llavors $\vec{E}_0$ ha d'estar en la direcció x i $\vec{H}_0$ en la direcció y, com en el diagrama adjunt a l'esquerra

Aquest diagrama és el que en direm a partir d'ara la "tríada ortogonal" que han de satisfer les solucions en medis lineals, isòtrops, homogenis, sense càrregues i aïllants.

Però si prenem els mòduls a les relacions (A) i (B) obtenim:

$$\mathbf{(3)} \qquad kE_0 = \omega\mu\, H_0$$

$$\mathbf{(4)} \qquad kH_0 = \varepsilon\omega E_0$$

Dividint-les entre sí:

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{\mu}{\varepsilon}\frac{H_0}{E_0}$$

O el que és el mateix

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_c$$

Aquest quocient te les dimensions de Ω i s'anomena *impedància característica* de la propagació.

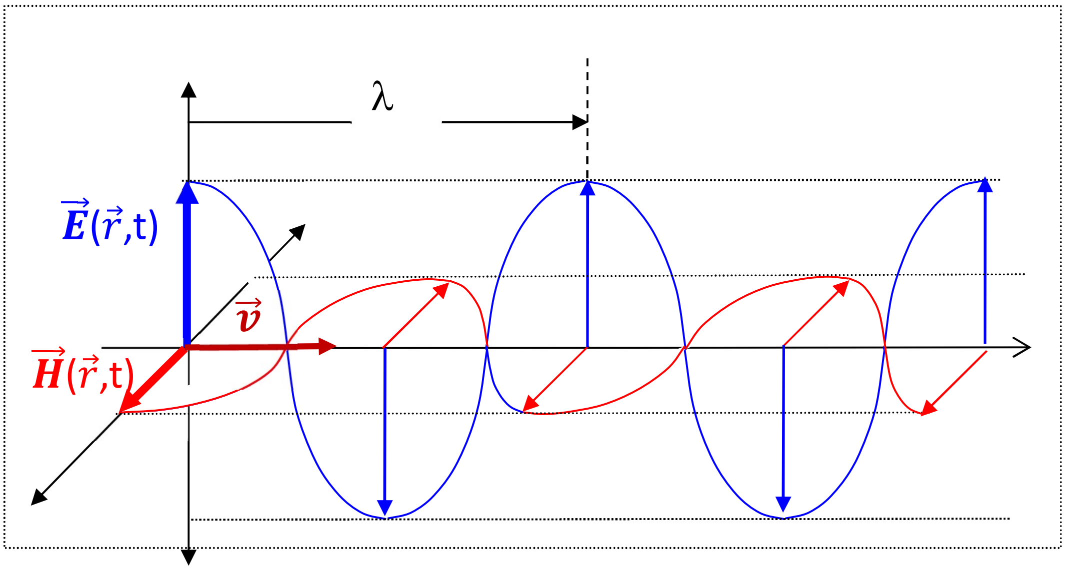
$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = Z_{c,0}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

Calculem la $Z_{C,0}$:

$$Z_{c,0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi\ x10^{-7}\ \frac{N}{A^2}}{8{,}8541878176\ x1\ \ ^{-1}\ \frac{C^2}{N\cdot m^2}}} \approx 377\ \frac{N\cdot m}{C\cdot A} = 377\ \frac{V}{A} = 377\ \Omega$$

Que és la impedància característica de propagació de les ones en el buit

Representant les ones en fase propagant-se en la direcció de $\vec{v}$ per ambdós camps perpendiculars obtenim el següent diagrama:



Això representa les ones electromagnètiques, com per exemple la llum visible (380 nm < λ <780 nm).

La longitud d'ona, com en tota ona és el quocient entre la velocitat i la freqüència. Per tant:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{v}{\frac{\omega}{2\pi}} = 2\pi\frac{v}{\omega} = 2\pi\frac{\frac{\omega}{k}}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$$

I la velocitat de propagació sabem que és: $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$. Podríem calcular-la també:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\cdot\mu_0\cdot\varepsilon_r\cdot\varepsilon_0}} = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}^{c}\overbrace{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}}^{f_v\leq 1} = f_v\cdot c$$

Calculem exactament el primer terme c:

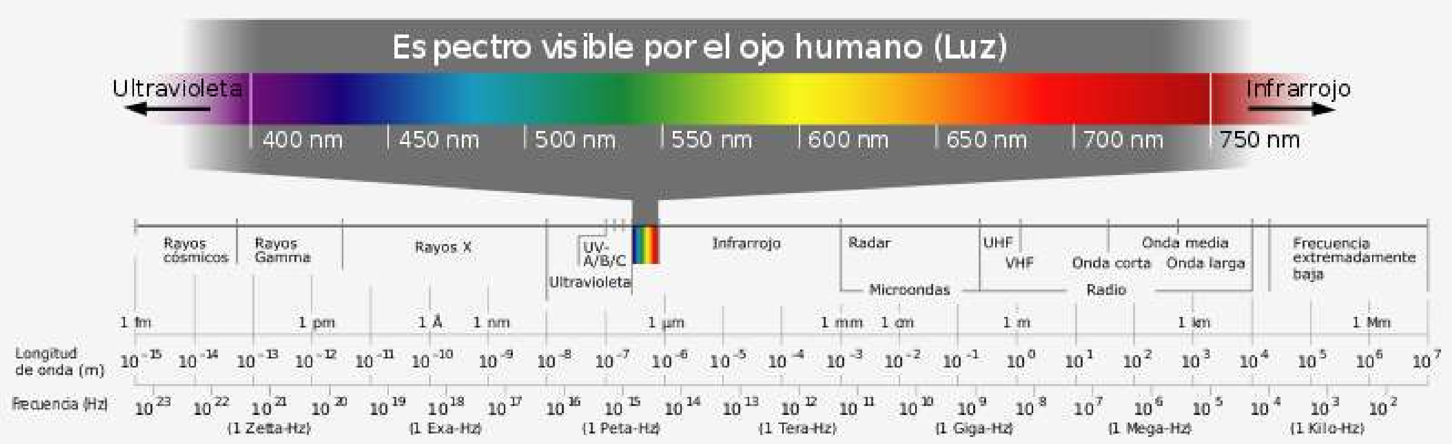
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\cdot\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\ x1\ ^{-7}\ \frac{N}{A^2}\cdot 8{,}8541878176\ \ x10^{-12}\,\frac{C^2}{N\cdot m^2}}} = 299\ 792\ 458\ \frac{m}{s}$$

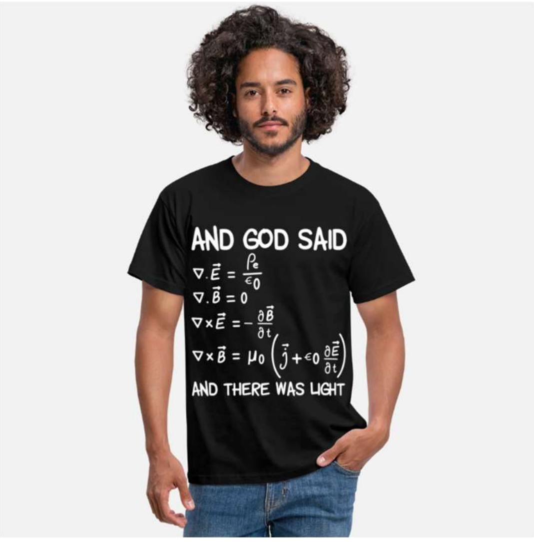
que és <u>exactament del tot</u>!, la velocitat de propagació de la radiació electromagnètica (o de la llum) en el buit

I el segon terme:

$$\boxed{f_v = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\cdot\varepsilon_r}} \leq 1}$$

és l'anomenat *factor de velocitat* que és adimensional ($f_v \leq 1$) i que multiplica a c per a donar la velocitat de propagació real $v \leq c$ en el medi en el que estem de permitivitat relativa $\varepsilon_r \geq 1$ i permeabilitat relativa $\mu_r \geq 1$.





2. Si $\sigma > 0$ (material no aïllant i parcialment conductor),

Recordem de nou les equacions d'ones que teniem quan σ no era nul·la

$$\textbf{Eh)} \quad \vec{\nabla}^2 \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = 0$$

$$\textbf{Hh)} \quad \vec{\nabla}^2 \vec{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = 0$$

Per exemple, pel camp elèctric les solucions són de la mateixa forma que les dels medis aïllants, excepte que canviarem el paràmetre $i\vec{k}$ de dins de l'exponencial per un altre, $\vec{\gamma}$,que contindria a més una part real extra $\vec{\alpha}$:

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + i\vec{k}$$

És a dir:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i\,\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{r})$$

En efecte, substituïm aquest: $\vec{E}(t; \vec{r})$

a l'equació d'ones: $\vec{\nabla}^2\vec{E} \;- \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \;- \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \;= 0$

I obtenim

$$(\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma} \;- (-\omega^2)\,\varepsilon\mu - i\,\mu\sigma\omega\,)\vec{E}_0\,\exp(i\,\omega t \;- \vec{\gamma}\cdot\vec{r}) = 0$$

Per tant per a ser solució cal que:

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma} \quad - (-\omega^2)\,\varepsilon\mu - i\,\mu\sigma\omega = 0$$

Substituint-hi la forma complexa de $\vec{\gamma}$

$$(\vec{\alpha} + i\vec{k})\cdot(\vec{\alpha} + i\vec{k}) \quad + \omega^2\,\varepsilon\mu - i\,\mu\sigma\omega = 0$$

Desenvolupant el producte escalar.

$$|\vec{\alpha}|^2 - |\vec{k}|^2 + \;2i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{k} \quad + \omega^2\,\varepsilon\mu - i\,\mu\sigma\omega = 0$$

Igualant a zero la part real i la imaginària d'aquesta igualtat:

$$\begin{cases} |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{k}|^2 + \;\omega^2\,\varepsilon\mu = 0 \\ 2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{k} \;-\; \mu\sigma\omega = 0 \end{cases}$$

Que és un sistema de dues equacions per a 6 incògnites (3 components de $\vec{\alpha}$ i 3 de $\vec{k}$). Per tant és indeterminat amb 4 graus de llibertat!. Per a poder-lo resoldre, necessitem considerar més condicions. Per tant, considerem el cas que $\vec{\alpha}$ i $\vec{k}$ tenen la mateixa direcció i sentit (serà el sentit de propagació de l'ona que obtindrem). En aquest cas el sistema se simplifica tot usant els mòduls α i k d'aquests dos vectors.

$$\begin{cases} \alpha\cdot k \;=\; \mu\dfrac{\sigma\omega}{2} \;\Rightarrow\; \alpha \;=\; \mu\dfrac{\sigma\omega}{2k} \\ \alpha^2 - k^2 = -\,\omega^2\,\varepsilon\mu \;\Rightarrow\; \left(\mu\dfrac{\sigma\omega}{2k}\right)^2 - k^2 = -\,\omega^2\,\varepsilon\mu \;\Rightarrow\; \left(\mu\dfrac{\sigma\omega}{2}\right)^2 - k^4 + \;\omega^2\,\varepsilon\mu k^2 = 0 \end{cases}$$

La darrera equació és una biquadrada, resolem primer k^2

$$k^2 = \frac{\omega^2\,\varepsilon\mu \pm \sqrt{(\omega^2\,\varepsilon\mu)^2 + 4\left(\mu\dfrac{\sigma\omega}{2}\right)^2}}{2} \geq 0 \quad \textit{només te sentit el signe } + \textit{ de l'arrel}$$

$$\mathrm{k}^2 = \omega^2\frac{\varepsilon\mu}{2} + \sqrt{\left(\omega^2\frac{\varepsilon\mu}{2}\right)^2 + \left(\mu\frac{\sigma\omega}{2}\right)^2} = \omega^2\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2}\right)$$

Prenent ara l'arrel positiva, finalment trobarem k

$$\mathrm{k} = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2}\right)} \quad (1)$$

I a partir d'aquí i de l'equació anterior calcularem α

$$\alpha = \mu\frac{\sigma\omega}{2\mathrm{k}} = \frac{\mu\sigma\cancel{\omega}}{2\cancel{\omega}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2}\right)}} = \sigma\sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2}\right)}} =$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon}}\frac{\sqrt{\left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2}\right)}}{\sqrt{\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2}\right)}\sqrt{\left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2}\right)}} =$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon}}\frac{\sqrt{\left(-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2}\right)}}{\sqrt{\left(-1+1+\left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2\right)}} = \sigma\sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon}}\frac{\sqrt{\left(-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2}\right)}}{\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}}$$ finalment

$$\boxed{\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2}\right)} \quad (2)}$$

llavors $\alpha > 0$ i te dimensions de $\left[\frac{1}{m}\right]$.

La solució pel camp magnètic tindrà la mateixa forma que pel camp elèctric, en un medi òhmic, és a dir, en principi podem escriure la mateixa forma en la solució tant de $\vec{E}(t;\vec{\mathrm{r}})$ com de $\vec{H}(t;\vec{\mathrm{r}})$ ja que la forma de les equacions Eh) i Hh) són les mateixes per ambdós camps. Així:

$$\vec{E}(t;\vec{\mathrm{r}}) = \vec{E}_0\exp(i\,\omega t - \vec{\gamma}\cdot\vec{\mathrm{r}}) = \vec{E}_0 exp\left(i\left(\omega t - \vec{\mathrm{k}}\cdot\vec{\mathrm{r}}\right) - \vec{\alpha}\cdot\vec{\mathrm{r}}\right)$$

$$\vec{H}(t;\vec{\mathrm{r}}) = \vec{H}_0\exp(i\,\omega t - \vec{\gamma}\cdot\vec{\mathrm{r}}) = \vec{H}_0\, exp\left(i\left(\omega t - \vec{\mathrm{k}}\cdot\vec{\mathrm{r}}\right) - \vec{\alpha}\cdot\vec{\mathrm{r}}\right)$$

descomponent en dues exponencials:

$$\vec{E}(t;\vec{\mathrm{r}}) = \vec{E}_0\, exp\left(i\left(\omega t\ -\ \vec{\mathrm{k}}\cdot\vec{\mathrm{r}}\right)\right)\cdot exp(-\vec{\alpha}\ \cdot\vec{\mathrm{r}}) \quad (5)$$

$$\vec{H}(t;\vec{\mathrm{r}}) = \vec{H}_0\, exp\left(i\left(\omega t\ -\ \vec{\mathrm{k}}\cdot\vec{\mathrm{r}}\right)\right)\cdot exp(-\vec{\alpha}\ \cdot\vec{\mathrm{r}}) \quad (6)$$

són solucions ondulatòries, però que ara s'esmorteeixen en una direcció $\vec{\mathrm{r}}'$ paral·lela a $\vec{\alpha}$ per a $\vec{E}$ i $\vec{H}$.

$$exp(-\alpha\ \cdot \mathrm{r}')$$

La mesura del grau d'esmorteïment el dona α , o el que és el mateix la longitud de penetració δ

$$\boxed{\delta \equiv \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\,\varepsilon}\right)^2}\right)}}}$$

Conforme major és la conductivitat σ del material menor serà la longitud de penetració δ . En el cas límit de $\sigma \to \infty$ (conductor ideal), llavors $\delta \to 0$, en el que el camp elèctric i magnètic han de ser zero a dins (cap longitud de penetració)

3. Si $\boldsymbol{\sigma} \to \infty$ (material conductor ideal), I a partir de les equacions d'ones:

Eh) $$\vec{\nabla}^2\vec{E}\ -\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}\ -\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\ = 0$$

Hh) $$\vec{\nabla}^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ \vec{H} - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = 0$$

Ja veiem que el tercer terme seria infinit, a no ser que també sigui zero el terme de la derivada temporal dels camps:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t;\vec{\mathrm{r}}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}(t;\vec{\mathrm{r}}) = 0$$

Per tant, ambdós camps han de ser constants a l'interior del conductor.

Per altra banda donada la llei d'Ohm

$$\vec{\mathrm{j}}_f = \sigma\vec{E}$$

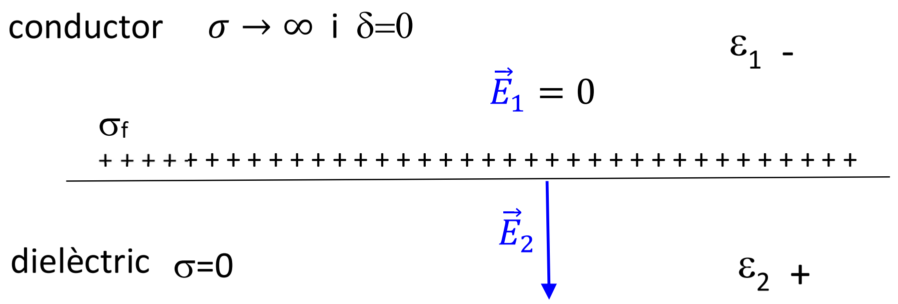
Com que σ és infinit per tal de no tenir també un corrent $\vec{\mathrm{j}}_f$ infinit, és necessari que a més el camp elèctric sigui zero a l'interior d'un conductor ideal:

$$\vec{E} = 0$$

Pel que fa al camp magnètic, $\vec{H}(\vec{r})$ no hi ha cap raó per a decidir que sigui zero, ni tant sols uniforme, a l'interior d'un conductor ideal. L'únic és que ha de ser constant, com s'ha dit abans.

4. Interfície amb un conductor

Si una ona dins d'un material dielèctric incideix sobre una superfície externa que limita amb un conductor ideal $\sigma \to \infty$ l'ona ja no podrà seguir propagant-se pel conductor, ja que, $\vec{E} = 0$, en ell, i per tant si apliquem les condicions de contorn:



1. int. $\hat{n} \cdot \left(\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}\right) =$

$$\hat{n} \cdot \left(\varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_1 \overbrace{\vec{E}_1}^{=0} \right) = \sigma_f$$

2. int. $\hat{n}\, x \left(\vec{E}_2 - \overbrace{\vec{E}_1}^{=0} \right) = 0$

De la **2.int** obtenim $\hat{n}\, x \vec{E}_2 = 0$ és a dir els camp del dielèctric a la interfície no pot tenir cap component tangencial a aquesta $E_{2,t} = 0$, ha de ser del tot perpendicular a la interfície $\vec{E}_2 = \vec{E}_{2,n}$

De la **1.int** obtenim el seu mòdul: $E_{2,n} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_2}$ i $E_{2,t} = 0$

Equacions de Maxwell en medis no homogènis (tema opcional)

Anem a suposar un medi no homogeni, amb la qual cosa ε i μ poden variar punt a punt. En aquest cas no podem negligir les derivades aplicades a aquests dos paràmetres a les equacions:

1') $\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon \vec{E}\right) = \rho_f$

2') $\vec{\nabla}\, \mathrm{x}\, \vec{E} = \quad -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}$

3') $\vec{\nabla} \cdot \left(\mu \vec{H}\right) = 0$

4') $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{\mathbf{j}}_f + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$

Desenvolupant les divergències de 1') i 3') suposant que ε i μ són no necessàriament uniformes.

1') $\varepsilon\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{\nabla}(\varepsilon)\cdot\vec{E} = \rho_f$

2') $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}$

3') $\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{H} + \vec{\nabla}(\mu)\cdot\vec{H} = 0$

4') $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{\mathbf{j}}_f + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$

Per a arribar a les equacions d'ones, com abans, cal prendre el rotacional de 2') i de 4'):

2') $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times(\mu\vec{H})$

4') $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{j}}_f + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times(\varepsilon\vec{E})$

Escrivint l'expressió del rotacional d'un rotacional i desenvolupant els rotacionals dels temes del membre de la dreta, suposant de nou que ε i μ són no necessàriament uniformes.

2') $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}(\mu)\times\vec{H}$

4') $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}) - \vec{\nabla}^2\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{j}}_f + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}(\varepsilon)\,x\,\vec{E}$

Usant de nou 1') i 3') per a identificar les divergències dels membres de l'esquerra:

1') $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}(\varepsilon)\cdot\vec{E} + \frac{1}{\varepsilon}\rho_f$; **3')** $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}(\mu)\cdot\vec{H}$, i substituint a 2') i 4'), obtenim:

2') $\vec{\nabla}\left(-\frac{\vec{\nabla}(\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot\vec{E} + \frac{\rho_f}{\varepsilon}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}(\mu)\times\vec{H} - \mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{H}$

4') $\vec{\nabla}\left(-\frac{\vec{\nabla}(\mu)}{\mu}\cdot\vec{H}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{j}}_f + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}(\varepsilon)\,x\,\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{E}$

Desenvolupant de nou els gradients del membre de l'esquerra:

2') $-\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{\nabla}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\cdot\vec{E} - \frac{\vec{\nabla}(\varepsilon)}{\varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\rho_f - \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\left(\rho_f\right) - \vec{\nabla}(\mu)\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{H}$

4') $-\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{\nabla}(\mu)}{\mu}\right)\cdot\vec{H} - \frac{\vec{\nabla}(\mu)}{\mu}\vec{\nabla}\cdot\vec{H} - \vec{\nabla}^2\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{j}}_f + \vec{\nabla}(\varepsilon)x\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{E}$

Usant novament 2') i 4'): **2')** $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$; **4')** $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{\mathbf{j}}_f + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, per a substituir els rotacionals del membre de la dreta, i els termes $\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ i $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$:

$$2') -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{\nabla}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\cdot\vec{E} \;-\frac{\vec{\nabla}(\varepsilon)}{\varepsilon}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \;-\vec{\nabla}^2\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\rho_f -\frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\left(\rho_f\right) - \mu\frac{\partial\vec{\mathrm{j}}_f}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla}(\mu)}{\mu}\mathrm{x}\left(\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{E}\right) - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$4') -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{\nabla}(\mu)}{\mu}\right)\cdot\vec{H} - \frac{\vec{\nabla}(\mu)}{\mu}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{H} - \vec{\nabla}^2\vec{H} = \quad \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathrm{j}}_f \quad -\frac{\vec{\nabla}(\varepsilon)}{\varepsilon}x\,\frac{\vec{\mathrm{j}}_f}{\varepsilon} \qquad + \frac{\vec{\nabla}(\varepsilon)}{\varepsilon}x\left(\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{H}\right) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

En el cas de tenir càrrega nul·la, $\rho_f = 0$ i comportament aillant, $\vec{\mathrm{j}}_f = 0$

$$2') -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{\nabla}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\cdot\vec{E} \;-\frac{\vec{\nabla}(\varepsilon)}{\varepsilon}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{\vec{\nabla}(\mu)}{\mu}\mathrm{x}\left(\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{E}\right) \;= \vec{\nabla}^2\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$4') -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{\nabla}(\mu)}{\mu}\right)\cdot\vec{H} - \frac{\vec{\nabla}(\mu)}{\mu}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{H} - \frac{\vec{\nabla}(\varepsilon)}{\varepsilon}x\left(\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{H}\right) = \vec{\nabla}^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Que són les equacions d'ones en aquest cas. A causa dels termes variacionals $\frac{\vec{\nabla}(\varepsilon)}{\varepsilon}$ i $\frac{\vec{\nabla}(\mu)}{\mu}$, el membre de la dreta no dóna zero com si que passava quan aquests no varien.

Energia del camp magnètic i del camp elèctric per unitat de volum. Energia de les ones electromagnètiques.

Les densitats d'energia d'un camp magnètic i d'un camp elèctric es calculen com:

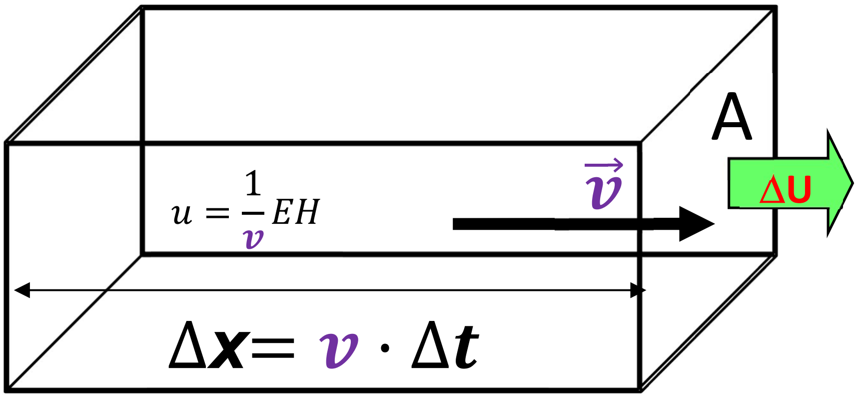
$$u_m = \frac{1}{2}\mu H^2 \quad \text{i} \quad u_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

La densitat d'energia total d'un camp electromagnètic en serà la suma:

$$u = u_m + u_e = \frac{1}{2}\left(\mu H^2 + \varepsilon E^2\right) = \left|\begin{matrix} E = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H \\ H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E \end{matrix}\right| = \mu H^2 = \varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon\mu}\;EH = \frac{1}{v}EH \quad (1)$$

quantitat que també podem anomenar, *densitat d'energia electromagnètica*

Però en el cas de les ones electromagnètiques, els camps, i per tant, l'energia es propaga en la direcció de $\vec{k}$, $\vec{v}$ o el que és el mateix, en la direcció del vector $\vec{S} = \vec{E} \; x \; \vec{H}$



$\vec{S}$ és el que s'anomena Vector de Poynting.

Sigui, per tant, un camp en forma d'ones electromagnètiques que es propaga en la direcció $\vec{v}$ cap a la dreta, tal com es veu a la figura de l'esquerra.

Sigui **ΔU** la quantitat d'energia que travessa l'àrea A perpendicular a $\vec{v}$

durant un interval de temps Δt , aquesta energia és la continguda en un prisma de base A i de llargada $\Delta x = v \cdot \Delta t$ (a l'esquerra de la superfície A). Per a calcular aquesta energia, multipliquem el volum d'aquest prisma A·Δx per la densitat energètica u:

$$\Delta \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A} \cdot \Delta \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} \cdot \Delta\mathrm{t} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{v}} E \cdot H = \boldsymbol{A} \cdot \Delta\mathrm{t} \cdot E \cdot H$$

La quantitat d'energia que travessa per unitat d'àrea A i de temps, és calcularà dividint $\Delta \boldsymbol{U}$ per A i Δt l'anomenem S:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\Delta \boldsymbol{U}}{\boldsymbol{A} \cdot \Delta\mathrm{t}} = E \cdot H$$

Que és justament el mòdul del vector de Poynting.

Així doncs el vector de Poynting

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \; x \; \vec{H} \quad (2)}$$

Dona lloc a la *densitat de corrent d'energia* o *densitat de flux d'energia electromagnètica*, o *densitat de potència electromagnètica* que flueix en sentit perpendicular a una superfície. En efecte, tal com hem vist (2) indica la direcció de propagació $\vec{v}$ d'aquesta energia i també n'indica el seu mòdul.