Exercicis

1.

Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demostrar que existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.
(b) Demostrar que f no es continua en $(0,0)$.

2.

Se considera la función $f(x,y) = (x^3 + y, \log xy, \sqrt{x^2+y^2})$. Demostrar que es diferenciable en $(1,1)$ y hallar su diferencial en este punto.

3.

Sea la función $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

Estudiar
(i) Su continuidad en $a = (0,0)$.
(ii) Existencia de derivadas parciales en $a = (0,0)$.
(iii) Diferenciablilidad en $a = (0,0)$.

4.

Determinar los valores de las constantes a, b y c tales que la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1,2,-1)$ tenga un valor máximo de 64 en una dirección paralela al eje z.

5.

Se consideran las funciones f y g definidas por

$$f(u,v) = \left(\int_1^{u+v} \sin^8 t \, dt, \int_1^{u-v} \cos^6 t \, dt, \int_1^{3u-2v} \cos^3 t \, dt \right),$$

$$g(x,y,z) = \left(\frac{x}{y} \sin z, \ 1 + \frac{y}{z} \cos z \right).$$

Calcular razonadamente $Dg(1,-1,0)$ y $D(f \circ g)(1,-1,0)$.

SOLUCIONS

1.

Solución. (a) Sea $u = (u_1, u_2)$ un vector unitario de $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$D_u f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) + h(u_1,u_2)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu_1, hu_2)}{h}.$$

Para $u_1 = 0$, tenemos

$$D_u f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, hu_2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Si $u_1 \neq 0$ entonces $hu_1 \neq 0$, por tanto

$$D_u f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu_1, hu_2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^3 u_1 u_2^2}{h^2 u_1^2 + h^4 u_2^4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + h^2 u_2^4} = \frac{u_2^2}{u_1}.$$

Existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$ y son finitas.

(b) Consideremos la parábola P de ecuación $x = y^2$. Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in P} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, éste ha de ser $1/2$, que no coincide con $f(0,0)$. En consecuencia f no es continua en $(0,0)$.

2.

Solución. Las funciones componentes de f son

$$f_1(x,y) = x^3 + y, \quad f_2(x,y) = \log xy, \quad f_3(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Las parciales de estas funciones en un abierto A que contiene a $(1,1)$ son

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1}{y},$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Estas parciales son continuas en $(1,1)$, luego f es diferenciable en $(1,1)$. La diferencial en este punto es

$$(Df)(1,1)\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1)) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3h_1 + h_2 \\ h_1 + h_2 \\ h_1/\sqrt{2} + h_2/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

3.

. (i) Usando coordenadas polares, $xy/\sqrt{x^2+y^2} = \rho\cos\theta\sin\theta$. Pero $\rho \to 0$ y $\cos\theta\sin\theta$ está acotado, en consecuencia $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$: la función es continua en $(0,0)$.

(ii) Derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0/\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0/\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(iii) La función puede ser diferenciable en $a = (0,0)$. Si es diferenciable, la única posible diferencial $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es

$$\lambda(h,k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 0.$$

La función será diferenciable en $(0,0)$ si y sólo si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)-f(0,0)-\lambda(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Pero pasando a coordenadas polares tenemos

$$\frac{|f(h,k)-f(0,0)-\lambda(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = |\cos\theta\sin\theta|\,,$$

es decir, los límites según θ varían y como consecuencia no existe límite: f no es diferenciable en $(0,0)$.

4.

Solución. La derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ay^2 + 3cz^2x^2\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2axy + bz\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial z} = by + 2czx^3.$$

Estas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^3$ lo cual asegura que f es diferenciable en $\mathbb{R}^3$ y en particular en el punto dado. Esto asegura la existencia de las derivadas direccionales en tal punto. El gradiente es

$$\nabla f(x,y,z) = (ay^2 + 3cz^2x^2, 2axy + bz, by + 2czx^3).$$

Es decir, $\nabla f(1,2,-1) = (4a+3c, 4a-b, 2b-2c)$. Sabemos que la derivada direccional máxima es el módulo del vector gradiente y se obtiene en un vector unitario paralelo a dicho vector. Los vectores unitarios paralelos al eje z son $(0,0,\alpha)$ con $\alpha = \pm 1$. Por tanto $\|\nabla f(1,2,-1)\| = |\alpha| = 64 \Rightarrow \alpha = \pm 64$. En consecuencia

$$\begin{cases} 4a + 3c = 0 \\ 4a - b = 0 \\ 2b - 2c = \pm 64. \end{cases}$$

Para $\alpha = 64$ obtenemos $(a,b,c) = (6, 24, -8)$ y para $\alpha = 64$, $(a,b,c) = (-6, -24, 8)$.

5.

Solución. Las funciones componentes de g son:

$$g_1(x,y,z) = \frac{x}{y}\sin z\ , \quad g_2(x,y,z) = 1 + \frac{y}{z}\cos z.$$

Usando el teorema fundamental del Cálculo y la regla de la cadena, obtenemos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\sin z}{y},\ \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{-x\sin z}{y^2},\ \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{x\cos z}{y},$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = \frac{-y\cos z}{x^2},\ \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\cos z}{x},\ \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = \frac{-y\sin z}{x}.$$

En un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene al punto $P = (1,-1,0)$ las anteriores derivadas parciales existen y son continuas, lo cual implica que g es diferenciable en ése punto. La correspondiente matriz jacobiana es:

$$g'(1,-1,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(P) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(P) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(P) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(P) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(P) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La diferencial $Dg(1,-1,0) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es por tanto:

$$Dg(1,-1,0)\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_3 \\ h_1 + h_2 \end{bmatrix}.$$

Procediendo de manera análoga con $f = (f_1.f_2, f_3)$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) = \sin^8(u+v),\ \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) = \sin^8(u+v),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) = \cos^6(u-v),\ \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) = -\cos^6(u-v),$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u}(u,v) = 3\cos^3(3u-2v),\ \frac{\partial f_3}{\partial v}(u,v) = -2\cos^3(3u-2v).$$

Tenemos que $g(1,-1,0) = (0,0)$. En un abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene al punto $(0,0)$ las anteriores derivadas parciales existen y son continuas, lo cual implica que f es diferenciable en ése punto. La correspondiente matriz jacobiana es:

$$f'(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(0,0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(0,0) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tenemos pues que g es diferenciable en $(1,-1,0)$ y f lo es en $g(1,-1,0) = (0,0)$. En consecuencia, $f \circ g$ es diferenciable en $(1,-1,0)$ y además:

$$(f\circ g)'(1,-1,0) = f'[g(1,-1,0)]\, g'(1,-1,0) = f'(0,0)\, g'(1,-1,0)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

La diferencial $D(f\circ g)(1,-1,0) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es por tanto:

$$D(f\circ g)(1,-1,0)\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -h_1 - h_2 - h_3 \\ -2h_1 - 2h_2 - 3h_3 \end{bmatrix}.$$