Grau Enginyeria Matemàtica i Física

FÍSICA DE FLUIDS

Tema 5: Solucions de les equacions de Navier-Stokes

Clara Salueña

Objectius

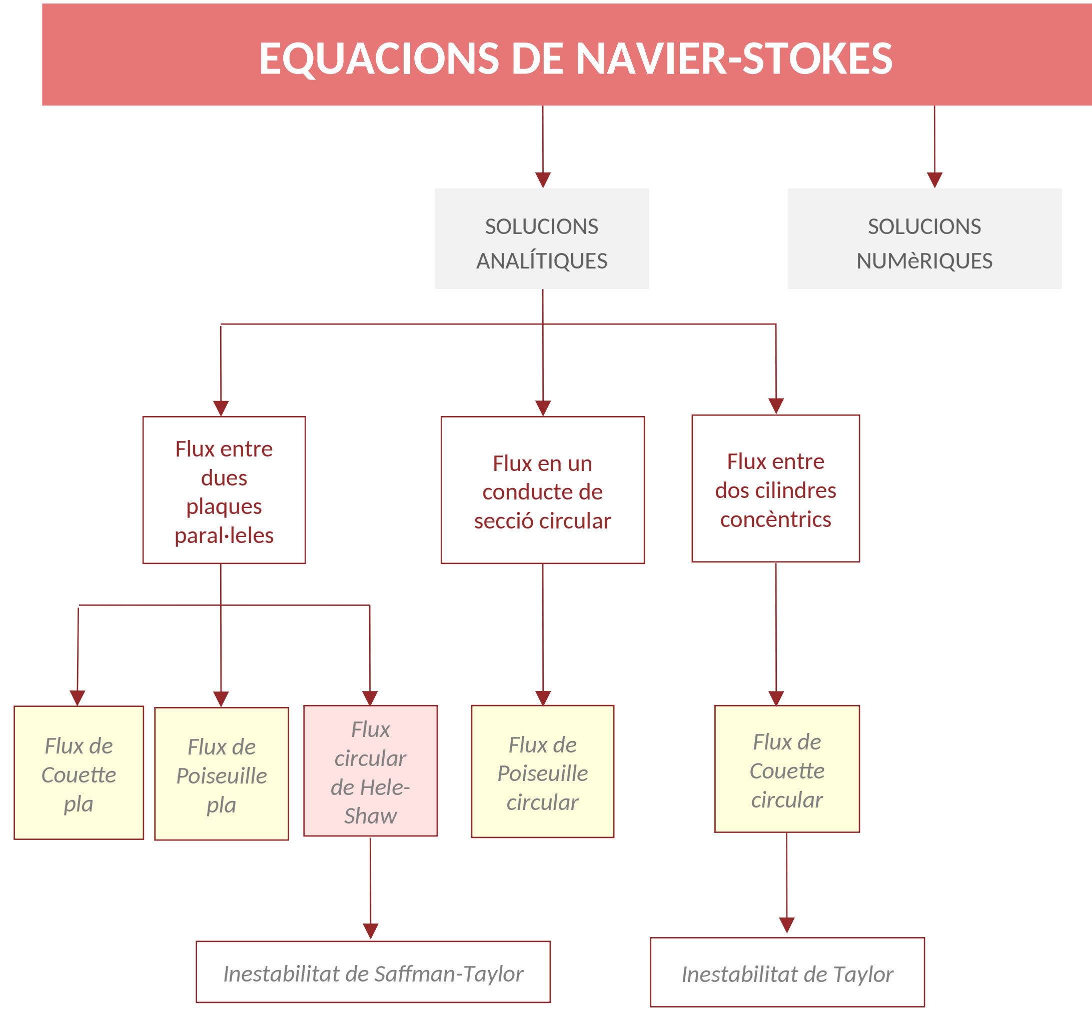
- Presentar algunes solucions estacionàries de les equacions de Navier-Stokes:

  5.1 Flux entre dues plaques paral·leles

  5.2 Flux de Hele-Shaw (solució no exacta)

  5.3 Flux en una canonada de secció circular

  5.4 Flux entre dos cilindres concèntrics

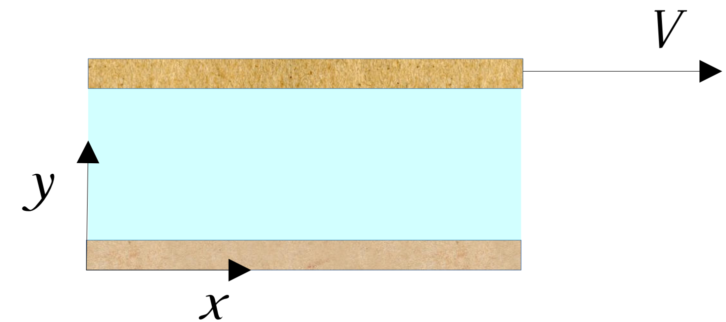


5.1 Flux entre dues plaques planes paral·leles:

i) Flux de Couette

Es genera movent amb una velocitat constant V una de les dues plaques respecte de l'altra en una direcció paral·lela a la placa **(prescindim de g)**.

Com que les plaques són infinites i la velocitat V és constant,



- no hi haurà dependència en la coordenada z (el flux és translacionalment invariant al llarg d'aquesta coordenada),
- $v_z = 0$, i per tant en flux té lloc en el pla xy,
- el perfil de velocitats desenvolupat no dependrà de x
- per l'equació de continuïtat, $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$ $\Rightarrow v_y = 0$

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} \cancel{- \rho g\vec{j}}.$$

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu\frac{d^2 v_x}{dy^2}. \qquad 0 = -\frac{dp}{dy}$$

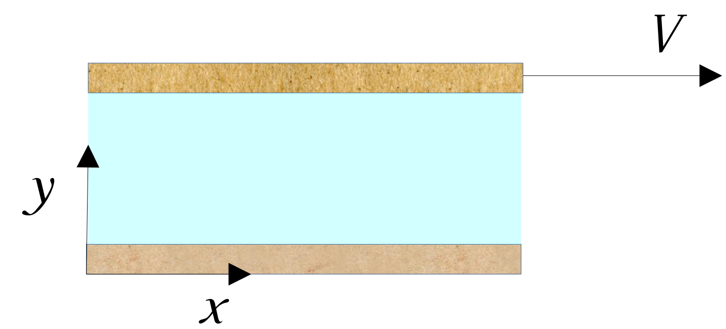
En conseqüència, $\vec{v} = v_x\vec{i}$

5.1 Flux entre dues plaques planes paral·leles:

i) Flux de Couette

Es genera movent amb una velocitat constant V una de les dues plaques respecte de l'altra en una direcció paral·lela a la placa.

Com que les plaques són infinites i la velocitat V és constant,



- no hi haurà dependència en la coordenada z (el flux és translacionalment invariant al llarg d'aquesta coordenada),
- $v_z = 0$, i per tant en flux té lloc en el pla xy,
- el perfil de velocitats desenvolupat no dependrà de x
- per l'equació de continuïtat, $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$ $\Rightarrow v_y = 0$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} - \rho g \vec{j}.$$

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}. \qquad 0 = -\frac{dp}{dy} - \rho g$$

En conseqüència, $\vec{v} = v_x \vec{i}$

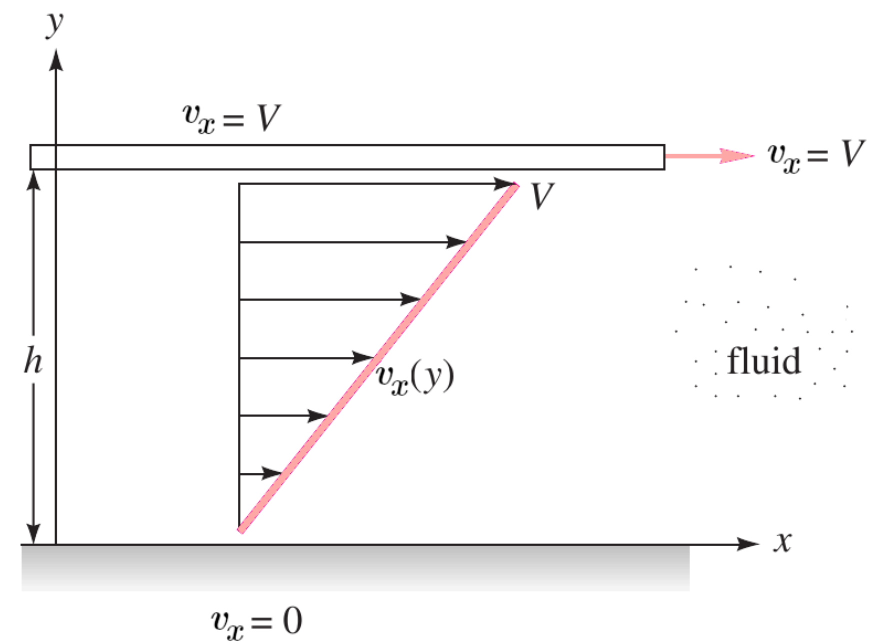
Suposem $\partial p/\partial x = 0$

$$v_x = C_1 y + C_2$$

Condicions de contorn,

$$v_x(y=0) = 0, \qquad v_x(y=h) = V$$

$$v_x = V/h\ y \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{v} = V/h\, y\, \vec{i}}$$



- Si $\partial p/\partial x \neq 0$, es tracta d'un flux impulsat per diferència de pressions (bombeig), a part del moviment de la placa. Aquest és un altre cas. El flux de Couette clàssic és el que s'obté sense gradient de pressions en la direcció del moviment.

Si $\partial p/\partial x \neq 0$

ii) Flux entre dues plaques paral·leles sota un gradient de pressió longitudinal

Similarment al cas anterior,

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{v}-\rho g\vec{j}.\;\Rightarrow\;\left\{\begin{array}{l}0=-\dfrac{dp}{dx}+\mu\dfrac{d^2v_x}{dy^2}\\[2ex]0=-\dfrac{dp}{dy}\end{array}\right.\;\Rightarrow\;\frac{dp}{dx}=cntn$$

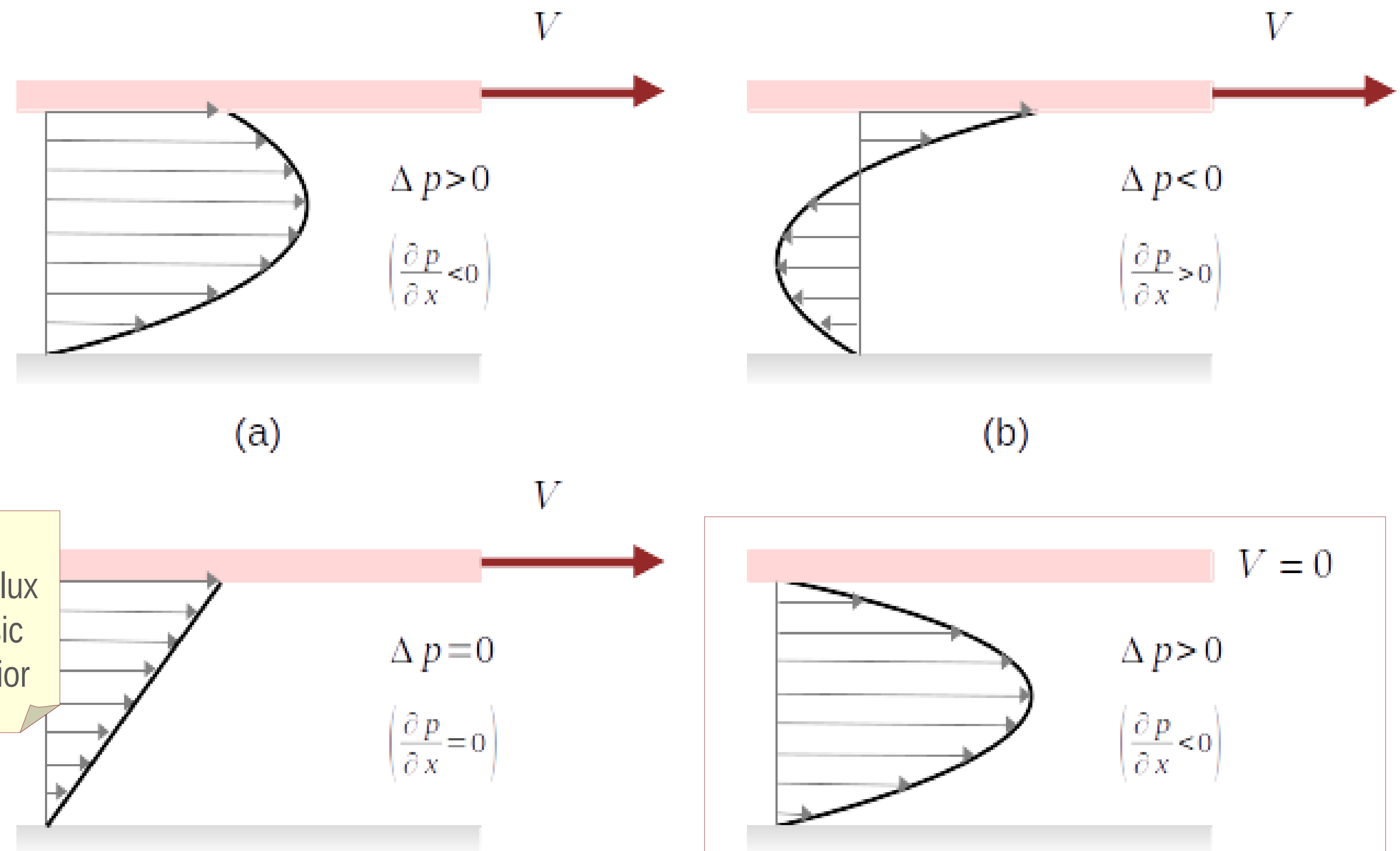
Solució general

$$v_x=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2+C_1y+C_2$$

Condicions de contorn,

$$v_x(y=0)=0,\;\;v_x(y=h)=V$$

$$v_x=-\frac{V}{h}y-\frac{y}{2\mu}\frac{dp}{dx}(h-y)$$



(a)

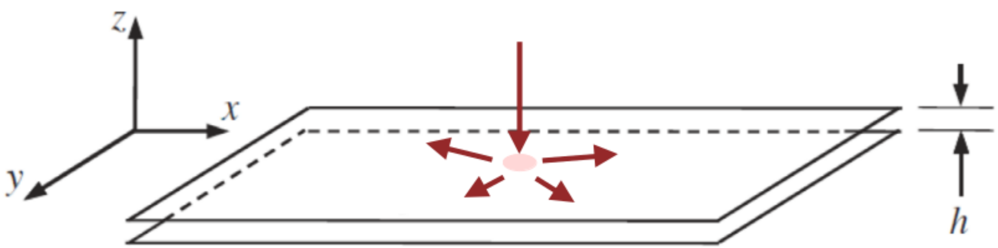
(b)

(c) Flux de Couette pla

(d) Flux de Poiseuille pla

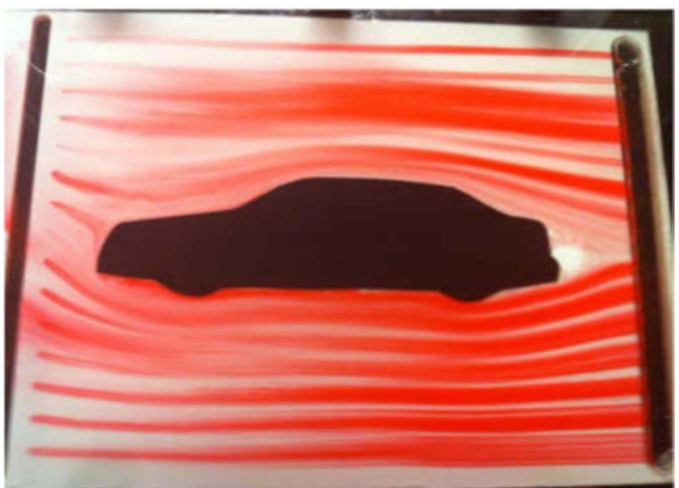
Aquest cas és el flux de Couette clàssic de l'apartat anterior

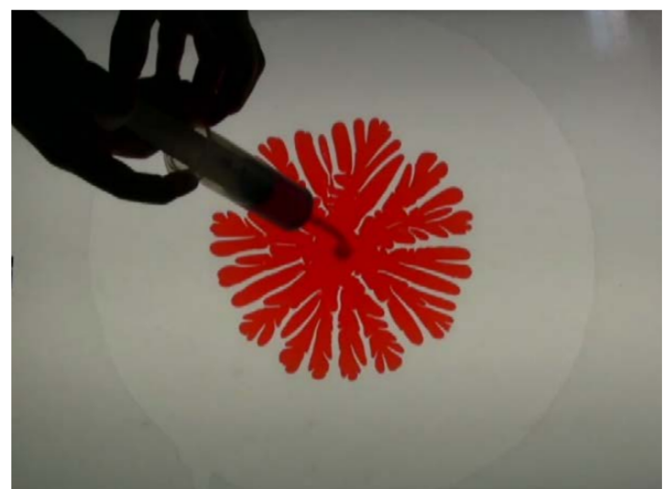
5.2 Flux de Hele-Shaw



Un exemple de geometria del flux de Hele-Shaw. La dimensió h és molt menor que la grandària característica de les plaques, L

- El flux en una cel·la de Hele-Shaw només té **dues components de velocitat**
- Tot i que **es tracta d'un flux dominat pel terme de viscositat**, $v \cdot \nabla v \ll \nu \nabla^2 v$,
- les línies de corrent formen patrons de flux potencial.





s'utilitza habitualment en tècniques de visualització

Si dins la cel·la ocupada per un fluid hi injectem un altre de menor viscositat, a la interfase entre ambdós fluids apareix la inestabilitat de Saffman-Taylor (viscous fingering)

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\cancel{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \cancel{- \rho g \vec{j}}$$

$v \cdot \nabla v << \nu \nabla^2 v$

- Expansió de les equacions de NS utilitzant $h \ll L$
- Aquestes són les equacions que resulten en l'ordre més baix en h/L
- La solució per tant **no serà exacta**

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ 0 = \dfrac{\partial p}{\partial z}, \quad (v_z \approx 0) \end{cases}$$

- Condicions de contorn

$$v_x(z=0) = 0, \quad v_x(z=h) = 0$$

$$v_y(z=0) = 0, \quad v_y(z=h) = 0$$

$$v_x = \frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{z}{h}\right)$$

$$v_y = \frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{z}{h}\right)$$

- Les línies de corrent són independents de z:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\partial p/\partial y}{\partial p/\partial x} = f(x,y)$$

- La vorticitat és nul·la en la direcció vertical,

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{z}{h}\right)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}\right) = 0$$

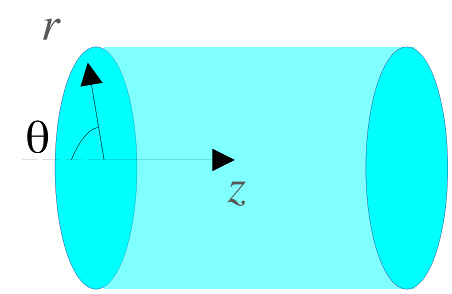
- Per l'equació de continuïtat, la pressió satisfà l'equació de Laplace, $0 = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$,
- $dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy$ i tenint en compte que $\partial p/\partial z = 0$, podem integrar p entre 2 punts d'un pla z=*cntn* qualsevol (z=h/2 per exemple) on la velocitat és coneguda, $v_0 = (v_{0x}, v_{0y})$ per obtenir la pressió:

$$v_{0x} \equiv v_x(z = h/2) = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_{0y} \equiv v_y(z = h/2) = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$p = -\int \frac{8\mu}{h^2} v_{0x} dx - \int \frac{8\mu}{h^2} v_{0y} dy = -\frac{8\mu}{h^2}\int_S v_0 ds$$ (s: línia de corrent)

5.3 Flux incompressible estacionari en una canonada de secció circular (flux de Poiseuille circular)



- La canonada, de radi a, és infinita, que a la pràctica vol dir que el flux està *completament desenvolupat*.
- No tindrem en compte la gravetat.
- Utilitzarem coordenades cilíndriques (r, θ, z) (pags. 28-29, Tema 4)
- Ni la pressió, ni la velocitat, depenen de θ
- Busquem una solució on v_z serà l'única component no nul·la del camp de velocitats
- La qual, per l'equació de continuïtat, només pot ser $v_z(r)$
- El terme convectiu $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ s'anul·la idènticament, i les equacions de transport de moment són

r: $$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

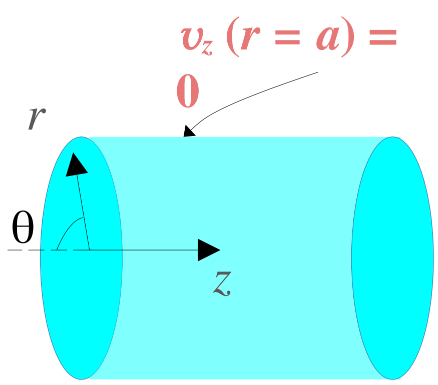
θ: $$0 = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

z: $$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

r: $$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

θ: $$0 = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

z: $$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$



(1) Per les dues primeres equacions de l'esquerra, **la pressió només pot ser**, com a molt, **funció de z.**

(2) La **condició de contorn** per a la velocitat és $v_z\ (r = a) = 0$ (*no-slip* sobre la paret de la canonada)

(3) Cadascun del dos termes de l'equació per a v_z és constant: el primer terme només pot dependre de z, mentre que el segon només pot dependre de r.

(4) El gradient de pressions és constant al llarg de z i la pressió és per tant una funció lineal de z (la pressió decau linealment en el sentit del flux)

(5) La solució general per a $v_z(r)$ és

$$v_z(r) = \frac{r^2}{4\mu}\left(\frac{dp}{dz}\right) + A\ln r + B$$

(6) Si v_z ha de ser finita en r=0, A ha de ser zero, i per la condició (2),

$$\boxed{v_z(r) = \frac{r^2 - a^2}{4\mu}\left(\frac{dp}{dz}\right)}$$

Més resultats...

- L'única **component no nul·la del tensor d'esforços** és

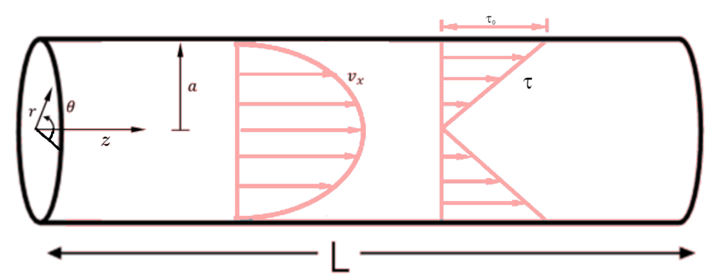
$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \frac{r}{2} \left(\frac{dp}{dz} \right)$$ (pag. 29 Tema 4)

(que és un perfil lineal amb un màxim en $r=a$)

> El flux de Poiseuille circular és un dels més importants. És una solució exacta del flux laminar, que deixa de ser vàlida a Re~2000, quan comença el règim de transició cap a la turbulència

- El **cabal volumètric** és la integral de la velocitat sobre la secció circular de la canonada,

$$Q = \int_0^a v_z(r) 2\pi r \, dr = -\frac{\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right)$$

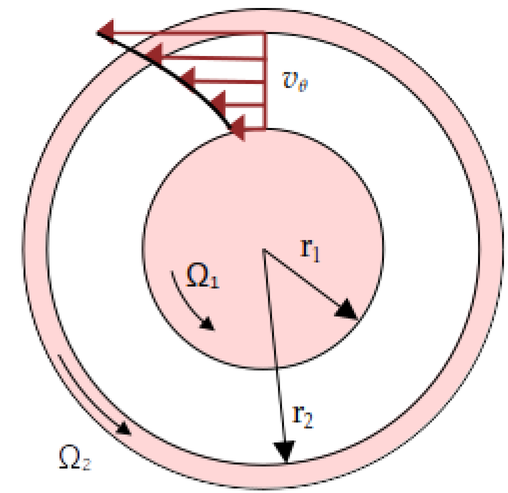


- i la **velocitat mitjana** sobre la secció transversal és

$$< v > \equiv \frac{Q}{\pi a^2} = -\frac{a^2}{8\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right)$$

5.4 Flux estacionari entre dos cilindres concèntrics

- S'anomena flux de Couette circular. El cilindre interior de radi r_1 es mou amb velocitat angular Ω_1; l'exterior (r_2) ho fa amb velocitat Ω_2
- Suposem que els cilindres són infinitament llargs
- El camp de velocitats té únicament component v_θ , que depèn només de r
- El terme no lineal $\vec{v} \cdot \nabla\vec{v}$ s'anul·la.
- L'equació de continuïtat $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ se satisfà automàticament
- Les equacions del transport de moment en les direccions radial i tangencial són



$$r: \quad -\frac{v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}$$

$$\theta: \quad 0 = \mu\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv_\theta)}{dr}\right)$$

$$r: \quad -\frac{v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}$$

$$\theta: \quad 0 = \mu\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv_\theta)}{dr}\right)$$

- Integrant dos cops l'equació per a v_θ obtenim,

$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

- L'equació per a la component r ens donarà la pressió en funció de r

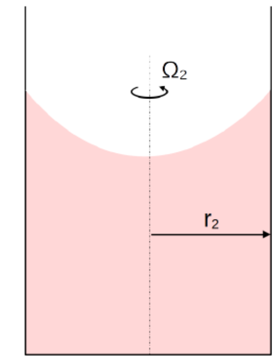
- Les constants A i B les fixem imposant les condicions de contorn del problema,

$$v_\theta\,(r = r_1) = \Omega_1\, r_1 \quad \text{i} \quad v_\theta\,(r = r_2) = \Omega_2\, r_2$$

- Solució:

$$v_\theta(r) = \frac{1}{1 - r_1^2/r_2^2}\left\{\left[\Omega_2 - \Omega_1\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\right] r + \frac{r_1^2}{r}(\Omega_1 - \Omega_2)\right\}$$

$$v_\theta(r) = \frac{1}{1 - r_1^2/r_2^2}\left\{\left[\Omega_2 - \Omega_1\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\right] r + \frac{r_1^2}{r}(\Omega_1 - \Omega_2)\right\}$$



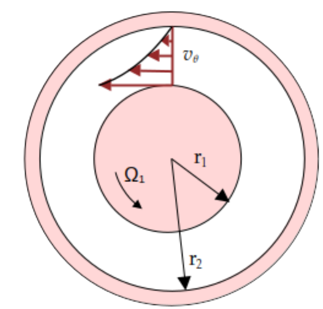
- Cas **r_1 = 0, amb Ω_1 = 0**: un cilindre contenidor que gira amb velocitat Ω_2

$$v_\theta(r) = \Omega_2 r$$

- Cas **$r_2 \to \infty$ amb Ω_2 = 0**: flux extern al voltant d'un cilindre que gira

$$v_\theta(r) = \frac{\Omega_1 r_1^2}{r}$$

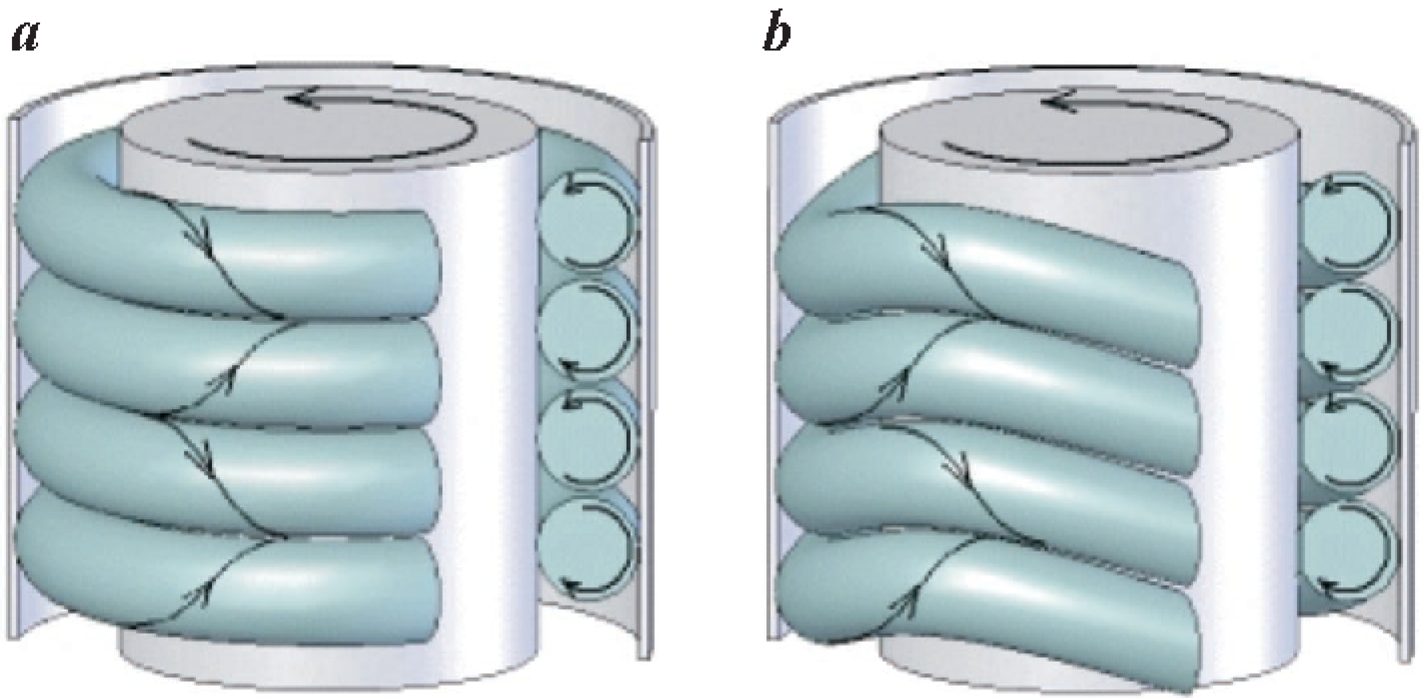
vorticitat Ω_z = 0 (vòrtex ideal)



- Cas **r_1, r_2 ≠ 0**, amb el cilindre exterior fix, **Ω_2 = 0**:

$$v_\theta(r) = \frac{\Omega_1 r_1^2}{1 - r_1^2/r_2^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{r_2^2}\right)$$

Inestabilitat de Taylor-Couette https://www.youtube.com/watch?v=ygW630nzDIg



Inestabilitat de Taylor-Couette. Dos patrons de vòrtexs del flux de Taylor-Couette, indicant la direcció del moviment del cilindre i del fluid: a) vòrtexs axisimètrics, b) vòrtexs ondulants (Domański, 2006).

Fi de la presentació