Grau Enginyeria Matemàtica i Física

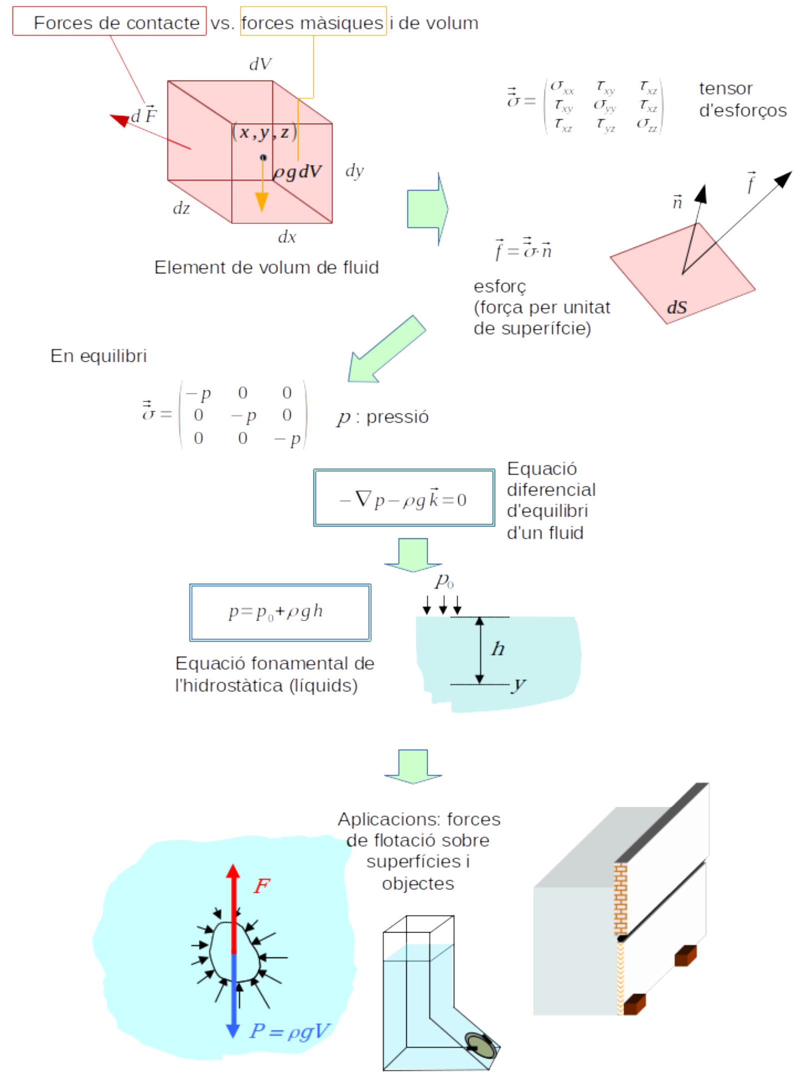
FÍSICA DE FLUIDS

Tema 2. Hidrostàtica

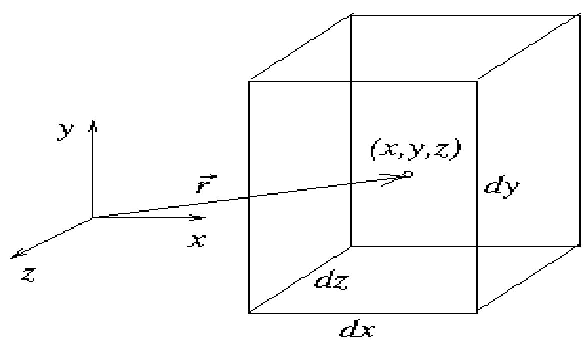
Clara Salueña

Objectius

- Distingir forces de volum y de superfície
- Definir tensor d'esforços i tensor de pressions
- Determinar l'equació fonamental de la hidrostática
- Comprendre les seves conseqüencies (principi de Pascal, d'Arquímedes, paradoxa hidrostàtica...)
- Definir la força de flotació i el centre de pressions, i calcular forces sobre superfícies planes i corbes



Element de volum

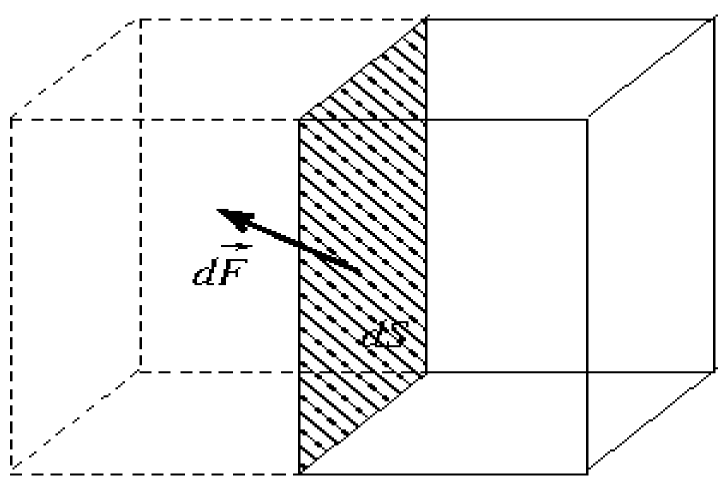


- És infinitesimal: $dV = dx\, dy\, dz$
- Es pot definir en qualsevol sistema de coordenades
- Ens servirà per
  - calcular les forces (els “esforços”) en el fluid
  - escriure els balanços microscòpics de massa, moment i energia

L’element de volum físic ens permet connectar amb la CFD

Forces

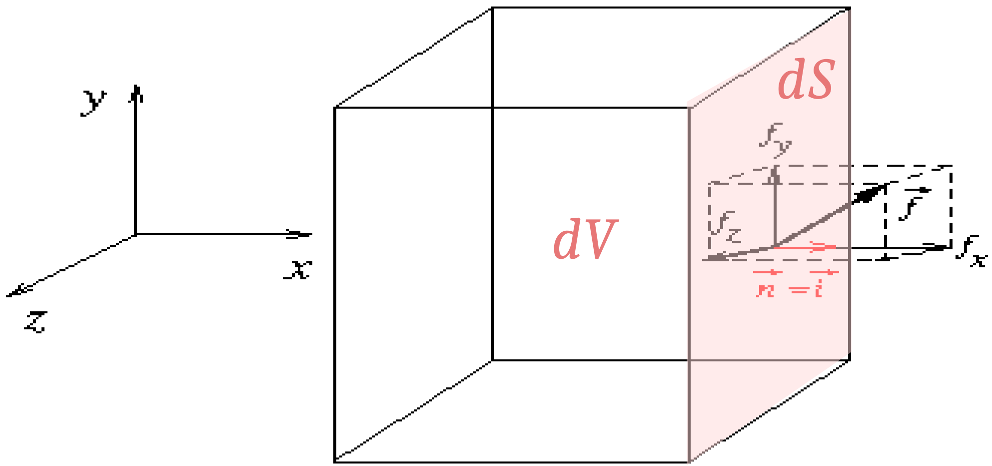
- De volum i màssiques: són forces **a distància**
- De superfície: pressió, fricció. Són forces de **contacte**



dF es la força de contacte que l'element de l'esquerra exerceix sobre el de la dreta a través de la superfície que comparteixen

Tensor d'esforços

$$\frac{d\vec{F}}{dS} \equiv \vec{f}$$



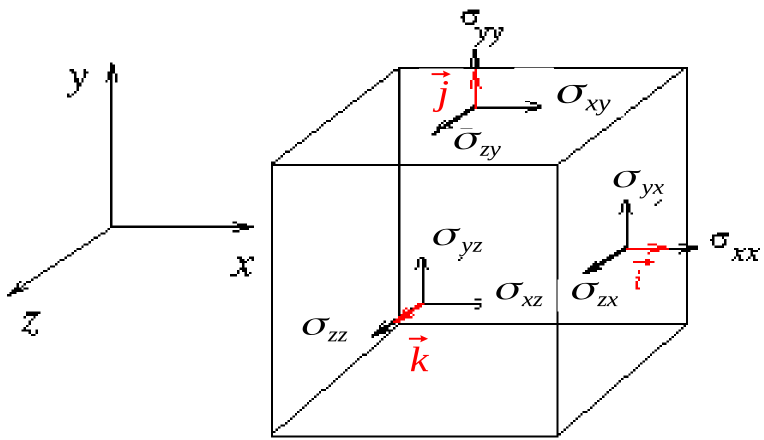
$\vec{f}$: "esforç" o força de contacte per unitat de superfície

$\vec{n} = \vec{i}$: vector normal a la cara $+x$

$\vec{\vec{\sigma}}$: tensor de esforços

El tensor d'esforços té 2 índexs, σ_{ij}:

- *i* referit a la **component** de la força en el sistema de coordenades considerat
- *j* a la **orientació** de la cara de l'element



$\sigma_{xx} \equiv \sigma_x$

$\sigma_{yy} \equiv \sigma_y$ esforços normals → «pressió»

$\sigma_{zz} \equiv \sigma_z$

$\sigma_{xz} \equiv \tau_{xz}$

$\sigma_{yz} \equiv \tau_{yz}$ esforços tangencials

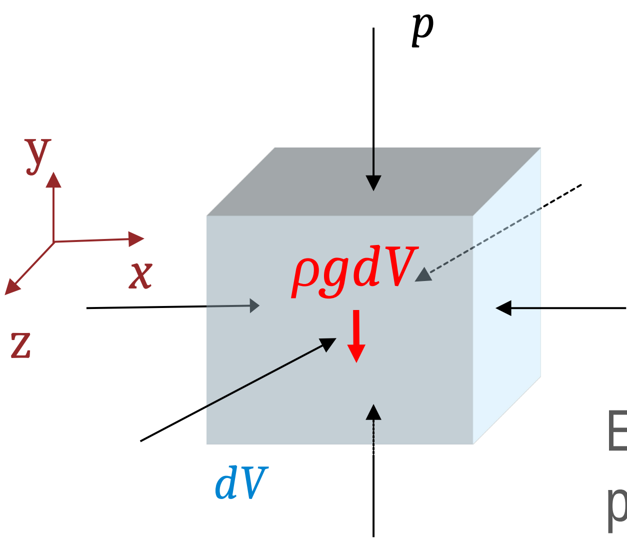
$\sigma_{xy} \equiv \tau_{xy}$

$$\vec{f} = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

el tensor d'esforços es simètric

Equilibri mecànic

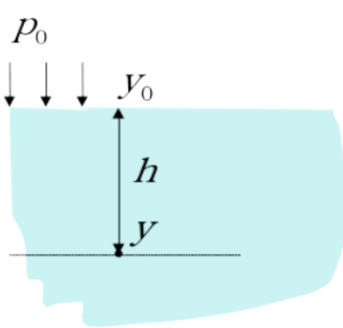


$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Un fluid no pot restar en equilibri sota l'acció d'esforços tangencials!

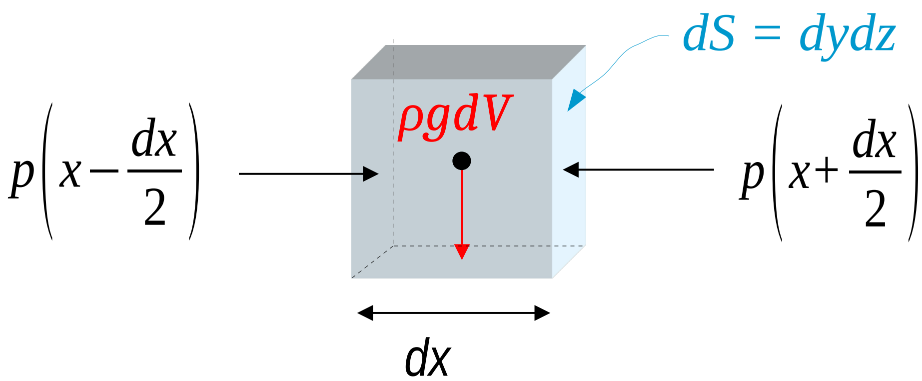
El balanç de forces de pressió i màssiques sobre dV proporciona l'equació diferencial de l'equilibri d'un fluid,

$$-\nabla p - \rho g \vec{j} = 0$$



(la qual, integrada sobre un fluid incompressible (líquid), ens dona l'equació fonamental de la hidrostàtica: $p = p_0 + \rho g h$)

Equlibri en la direcció x:



En equilibri, la suma de forces ha de ser 0:

$$-p\left(x+\frac{dx}{2}\right)dydz + p\left(x-\frac{dx}{2}\right)dydz = 0$$

Desenvolupant en sèrie de Taylor a 1er ordre:

$$-\left(p(x)+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz + \left(p(x)-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz = 0$$

Partint de: $$-\left(p(x)+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz \;+\; \left(p(x)-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz \;=\; 0$$

Operem i simplifiquem: $$-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\,dxdydz \;-\; \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\,dxdydz \;=\; 0$$

És a dir, $-\frac{\partial p}{\partial x}=0$ ens diu que p no depèn de x

En la component z, el resultat és similar: $-\frac{\partial p}{\partial z}=0$

En la component y, però, on cal incloure el pes de l'element de volum, $\rho g\, dxdydz$, obtindrem, fent el balanç

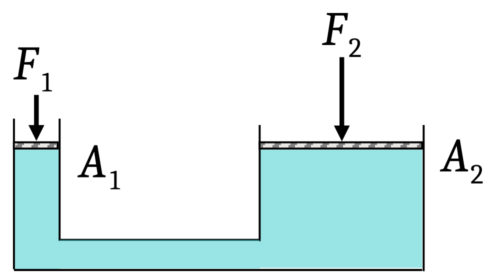
$$-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho g=0$$

El resultat es resumeix en l'equació vectorial $\boxed{-\nabla p-\rho g\vec{j}=0}$

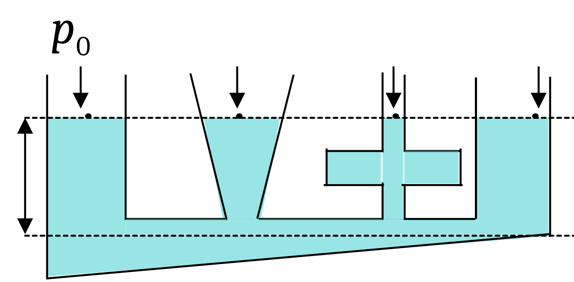
Equació fonamental de la hidrostàtica

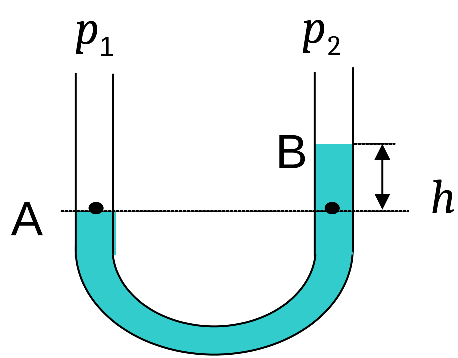
$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}$$

Principi de Pascal



Paradoxa hidrostàtica

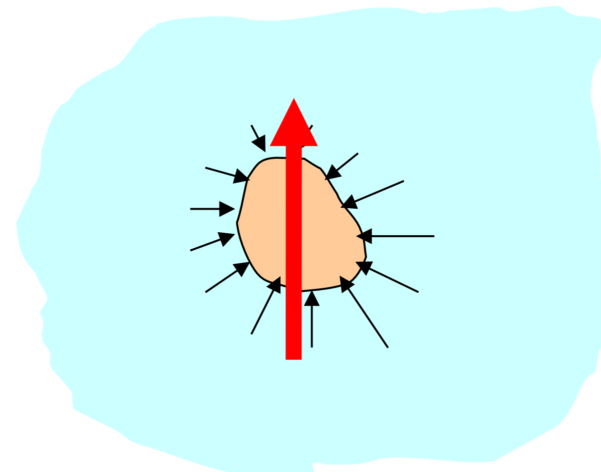


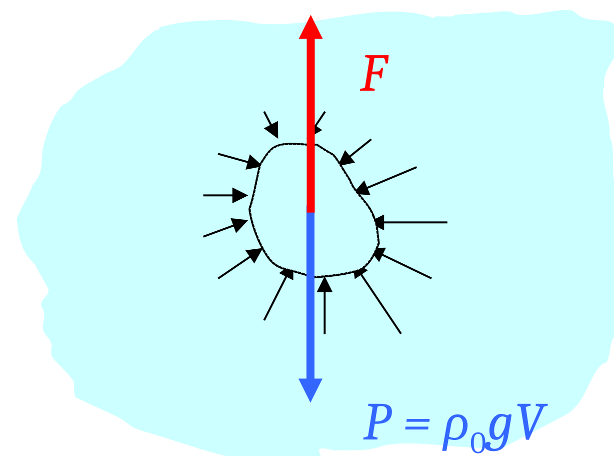


Manometria

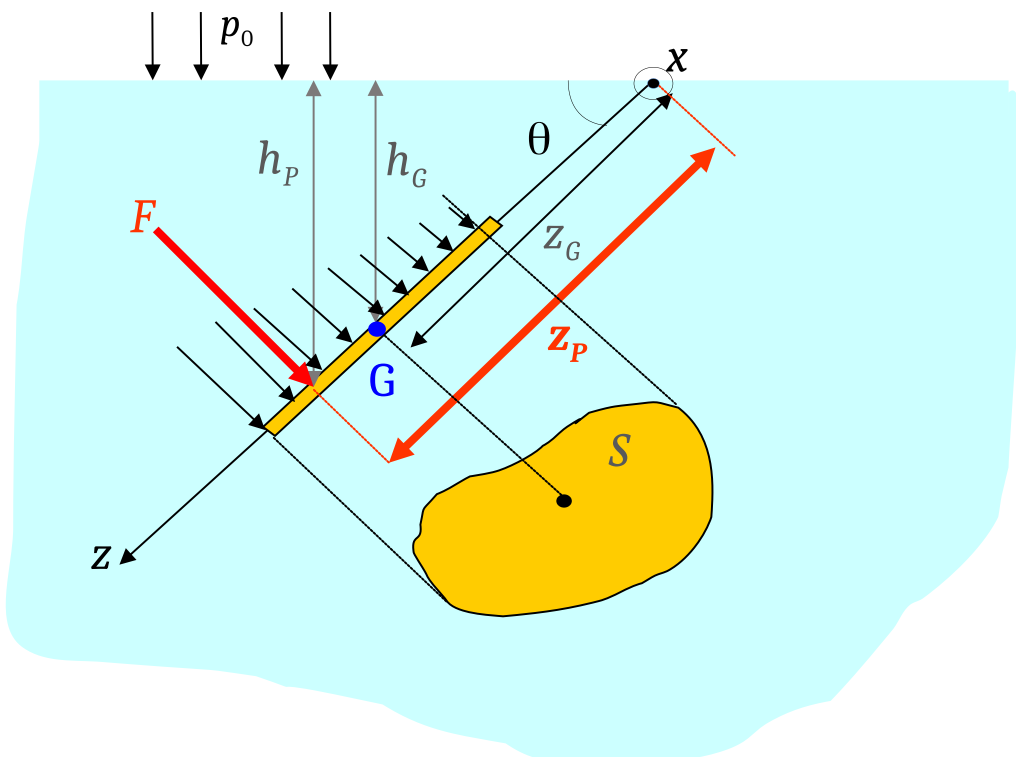
Forces de flotació

- El que Arquímedes va enunciar com un *principi* no és més que el resultat que s'obté de sumar les forces de pressió sobre l'objecte submergit
- Les forces de pressió **no depenen del tipus de superfície** sobre la que actuen, de si és sòlida o de si és només una superfície imaginària que delimita una porció de fluid
- $F = \rho_0 g V$: en equilibri, la força de flotació ha de ser igual al pes de la porció de fluid equivalent al volum V





Forces sobre superfícies planes submergides



Resultant de les forces sobre la superfície S submergida (1 cara)

$$F = \rho g h_G S$$

h_G: profunditat del centroide de la placa, G

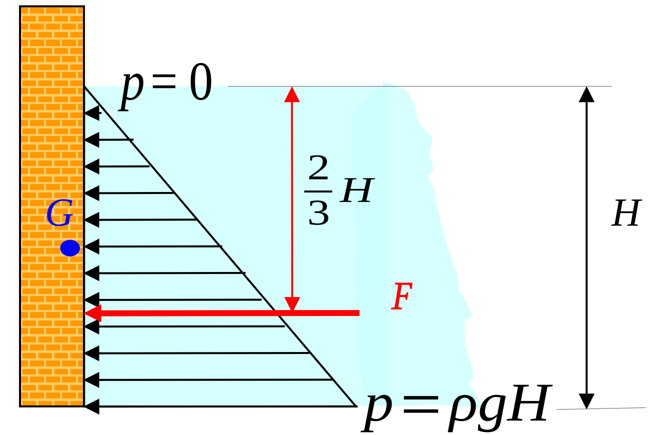
Centre de pressions:

$$h_P = h_G + \frac{\sin^2\theta \; I_{Gx}}{h_G S}$$

I_{Gx}: moment d'inèrcia de la placa entorn d'un eix paral·lel a l'eix x que passa per G

Exemple

Paret vertical rectangular d'ample L, submergida fins a una profunditat H
(la part mullada de la paret és el que compta)



$$F=\rho g h_G S=\frac{1}{2}\rho g H S$$

$$h_P=h_G+\frac{\sin^2\theta\, I_{Gx}}{h_G S}=\frac{H}{2}+\frac{1\times\frac{1}{12}LH^3}{\frac{H}{2}LH}=\frac{2}{3}H$$

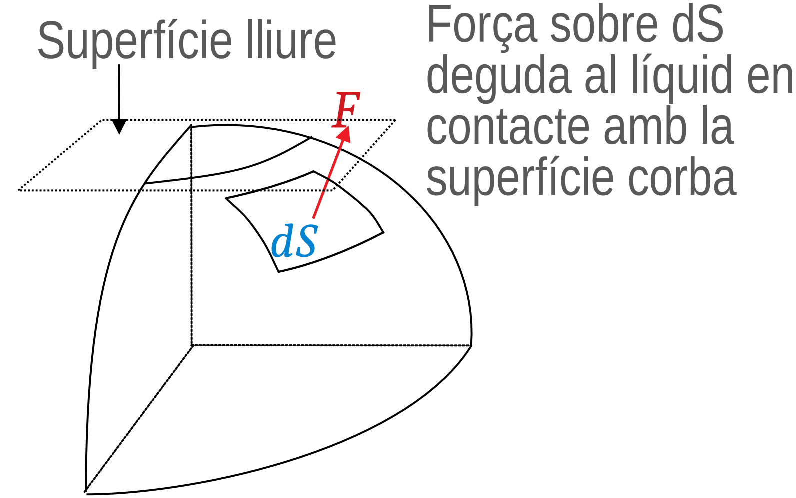
La configuració de les forces de pressió (les degudes al líquid) té secció triangular i la força total de pressió és el volum del prisma triangular.

El centre de pressions es troba al baricentre del triangle

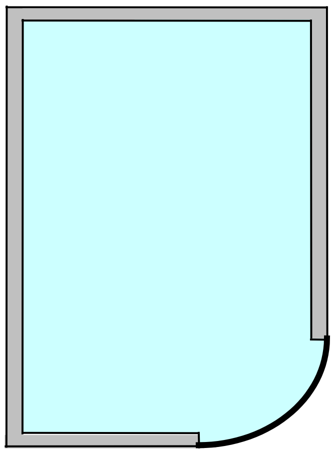
Forces sobre superfícies corbes submergides

En general hi haurà 3 components de la força

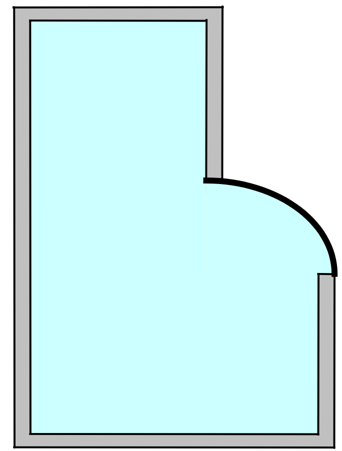
- No concurrents
- Per trobar les 2 components horitzontals de F, es poden fer servir les projeccions sobre els plans verticals
- La component vertical es el pes del volum delimitat pels 3 plans de la figura, més la pròpia superfície (pel principi d'Arquímedes)



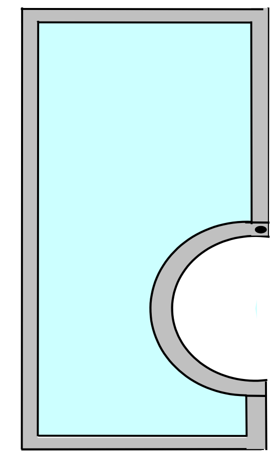
Exemples de superfícies corbes submergides en 2D



Tanc amb finestreta corba d'observació i líquid per sobre



Amb líquid per sota

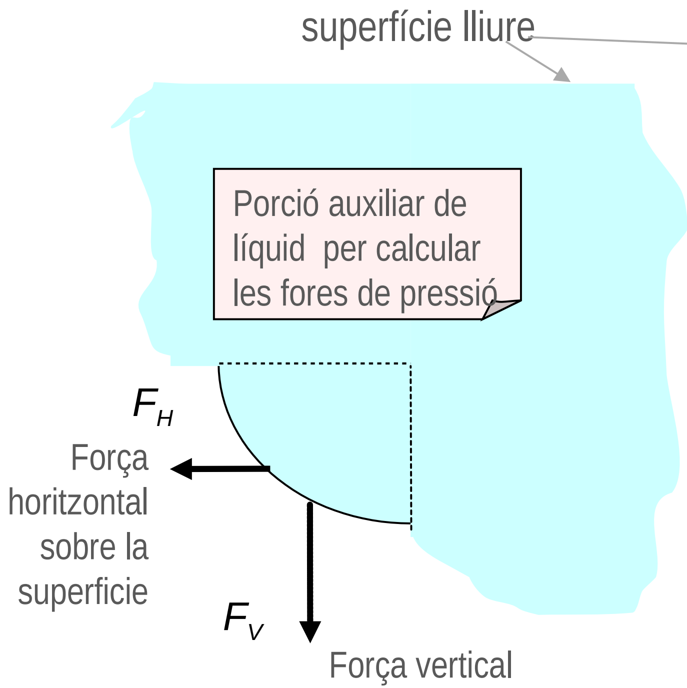


Comporta semicilíndrica amb líquid per sobre i per sota

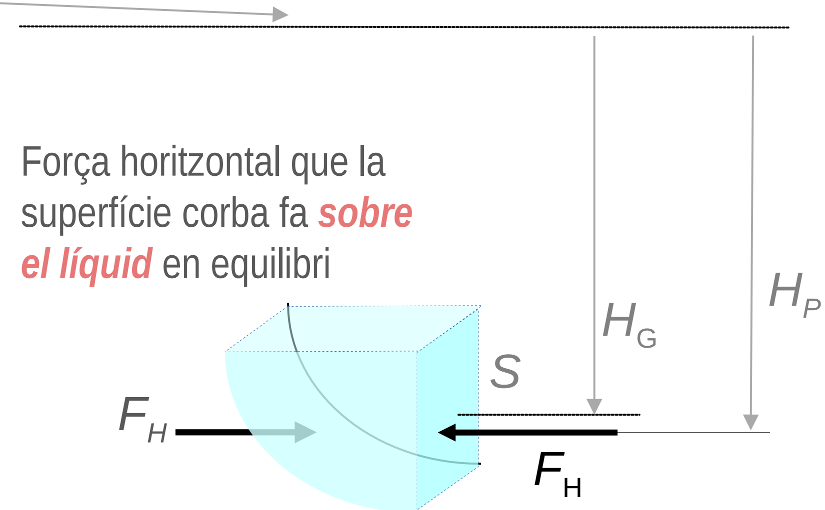
En 2 dimensions, les forces segons les direccions horitzontal i vertical sí són concurrents!

Exemple

Càlcul de la component horitzontal de la força de pressió

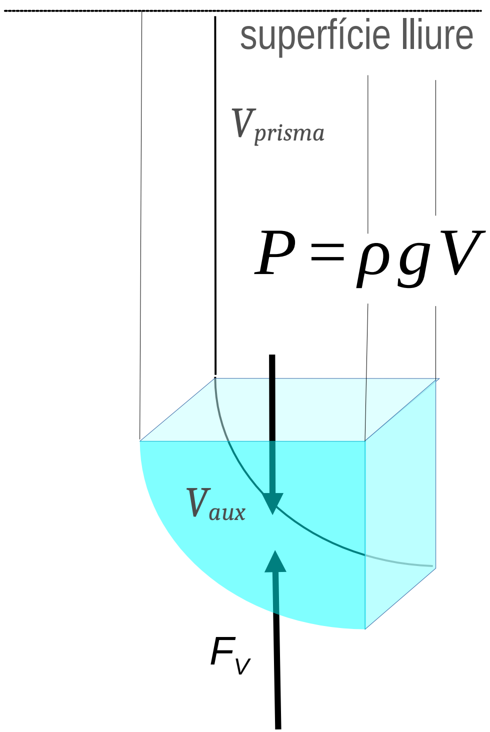


Força horitzontal que la superfície corba fa ***sobre el líquid*** en equilibri



(sobre la superfície es igual en valor, però de sentit contrari)

Càlcul de la component vertical



- Abreujant, la força vertical sobre el líquid ha d'equilibrar el pes del volum de líquid *V*, format pel volum auxiliar de color blau, més el volum del prisma rectangular que hi ha a sobre,

$$V = V_{aux} + V_{prisma}$$

- Per tant, $F_V = P$
- Per calcular F_V cal determinar el volum V_{aux} de la porció auxiliar de líquid que hem utilitzat
- Així que quan la geometria es complicada, no ens estalviarem les integrals de superfície...
- La línia d'acció de F_V ha de tenir, en equilibri, la mateixa línia d'acció que el pes de líquid, P.
- Altres casos es poden resoldre de manera similar

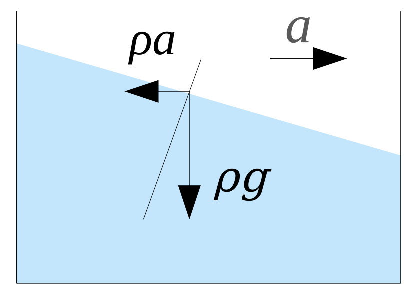
Equilibri sota l'acció de forces inercials

- Les forces d'inèrcia són forces *màssiques*
- Quan el líquid està sotmès a forces d'inèrcia degudes a una acceleració d'arrossegament constant o una rotació rígida, es pot considerar l'equilibri dins el sistema no inercial corresponent
- En el cas d'una **acceleració constant *a***, dirigida al llarg de l'eix x,

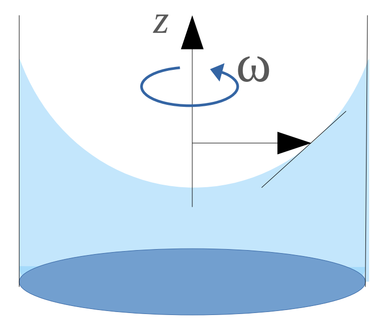
$$-\nabla p - \rho g \vec{j} - \rho a \vec{i} = 0$$

- I en el cas d'un **sistema en rotació rígida amb velocitat angular ω**,

$$-\nabla p - \rho g \vec{k} + \rho \omega^2 \vec{r} = 0$$



Pots trobar la forma de la superfície lliure i del camp de pressió en aquests casos?



Aquí, en coordenades cilíndriques, amb ω en l'eix z

Fi de la presentació