

Anàlisi Matemàtica 1 (AM1) GEMiF

E2.1 Exercicis: Límits de funcions

1. Calcula els següents límits de forma directa o amb pocs càlculs algebraics

15. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4).$

16. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 2x + 1}.$

17. $\lim_{x \rightarrow -3} (|x| - 2).$

18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}.$

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x + 1}.$

20. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{x + 1}.$

21. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2}{x + 1}.$

22. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{3x - 6}.$

23. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{x - 3}.$

24. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}.$

25. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 9}.$

26. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}.$

27. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}.$

28. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}.$

29. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x} \right).$

30. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{1}{x} \right).$

31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 5x^2}{x}.$

32. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{6 - 2x}.$

33. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$

34. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$

35. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x + 1}.$

36. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$

2. Calcula els següents límits de forma directa o amb pocs càlculs algebraics

$$37. \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 1} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1 \\ 3, & x > 1. \end{cases}$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 4} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 4 \\ 0, & x = 4. \end{cases}$$

$$40. \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

$$41. \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 1 + x, & x > 0. \end{cases}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 1} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ x^2 + 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 2} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1 \\ x + 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \text{ rational} \\ -2, & x \text{ irrational.} \end{cases}$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 1} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & x \text{ rational} \\ 2, & x \text{ irrational.} \end{cases}$$

$$47. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}.$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{30}}{x - 5}.$$

$$49. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2x + 2} - 2}.$$

3. Calcula els següents límits de forma directa o amb pocs càlculs algebraics

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1}.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+x)}{2x}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x)}{2x^2}.$
4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{\sqrt{x}+1}.$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x-1}.$
6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{x+1}.$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}.$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}.$
9. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x|}{x}.$
10. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-3}{\sqrt{x}-3}.$
11. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+3}{x^2-7x+12}.$
12. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}.$
13. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x}.$
14. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9-x^2}.$
15. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ if $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ x^2-x, & x > 2. \end{cases}$
16. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ if $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1 \\ x+2, & x > -1. \end{cases}$
17. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ if $f(x) = \begin{cases} 3, & x \text{ an integer} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$
18. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ if $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 3 \\ 7, & x = 3 \\ 2x+3, & x > 3. \end{cases}$
19. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ if $f(x) = \begin{cases} 3, & x \text{ an integer} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$
20. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ if $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 5x, & x > 1. \end{cases}$

4. Troba la δ més gran que “funciona” per a les ϵ donades

23. $\lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2; \epsilon = 0.1.$
24. $\lim_{x \rightarrow 4} 5x = 20; \epsilon = 0.5.$
25. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2}x = 1; \epsilon = 0.01.$
26. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{5}x = \frac{2}{5}; \epsilon = 0.1.$

5. Troba demostracions ε, δ pels següents límits

37. $\lim_{x \rightarrow 3} (6x - 7) = 11.$

38. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5x) = 2.$

39. $\lim_{x \rightarrow 2} |1 - 3x| = 5.$

40. $\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2| = 0.$

50. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$

51. $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1.$

52. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 1} = 2.$

53. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3 - x} = 0.$

6. Sigui f una funció per a la qual

si $0 < |x - 3| < 1$ aleshores $|f(x) - 5| < 0.1$

Quines de les següents afirmacions són necessàriament certes?

(a) If $|x - 3| < 1$, then $|f(x) - 5| < 0.1$.

(b) If $|x - 2.5| < 0.3$, then $|f(x) - 5| < 0.1$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.

(d) If $0 < |x - 3| < 2$, then $|f(x) - 5| < 0.1$.

(e) If $0 < |x - 3| < 0.5$, then $|f(x) - 5| < 0.1$.

(f) If $0 < |x - 3| < \frac{1}{4}$, then $|f(x) - 5| < \frac{1}{4}(0.1)$.

(g) If $0 < |x - 3| < 1$, then $|f(x) - 5| < 0.2$.

(h) If $0 < |x - 3| < 1$, then $|f(x) - 4.95| < 0.05$.

(i) If $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = L$, then $4.9 \leq L \leq 5.1$.

7. Demosta que per a la *funció de Dirichlet*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rational} \\ 0, & x \text{ irrational} \end{cases}$$

el $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ no existeix per a cap valor de c

8. Demuestra que el límite de la següent funció, definida a l'interval $(0, 1)$, és zero per a tot número de l'interval

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional}, 0 < x < 1 \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracció irreducible}, 0 < x < 1 \end{cases}$$

