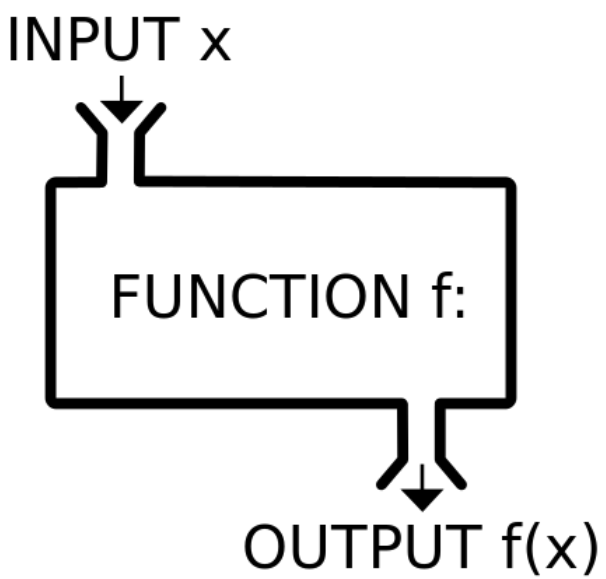
Límits de funcions

Àlex Arenas, Sergio Gómez

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

- Funcions
  - Una funció relaciona cada entrada amb una única sortida



  - En aquest curs, només tractem funcions en què l'entrada és un nombre real i la sortida també és un nombre real → **Funcions reals de variable real**

- Idea intuïtiva de límit
  - Suposem que la funció f està definida a prop de $x = a$ (però no necessàriament a $x = a$). Diem que $f(x)$ s’acosta al límit L, per tot x tendint a a, si $f(x)$ és arbitràriament proper a L per a tots els x prou propers a a. Ho expressem així:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

  - Exemples

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- Definició formal de límit
  - Siguin $a, L \in \mathbb{R}$ i un interval obert I amb $a \in I$. Sigui f una funció definida a I excepte possiblement al punt a.
  - El ***límit*** de $f(x)$ quan x s'apropa a a és L sii

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Definició formal de límit

- Siguin $a, L \in \mathbb{R}$ i un interval obert I amb $a \in I$. Sigui f una funció definida a I excepte possiblement al punt a.
- El ***límit*** de $f(x)$ quan x s'apropa a a és L sii

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

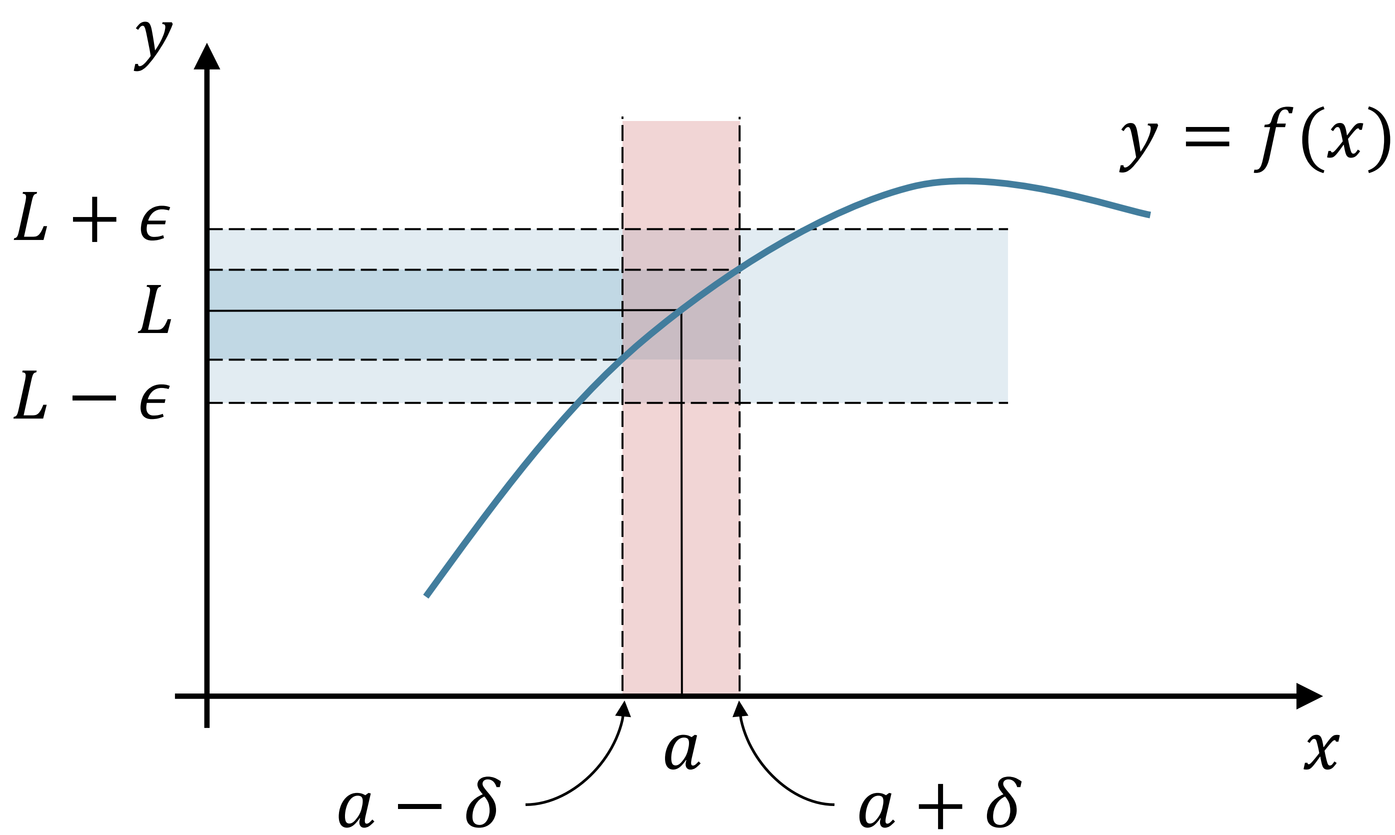
- Alternativament

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

- Definició formal de límit

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$



- Exemples
  - Donada $f(x) = x$, demostrar, utilitzant la definició de límit, que
$$\lim_{x \to 1} x = 1$$
  - Solució:
    - Donada $\epsilon > 0$ volem que es compleixi
$$|f(x) - 1| < \epsilon$$
    - Com $f(x) = x$, aleshores
$$|f(x) - 1| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - 1| < \epsilon$$
    - Per tant, seleccionant $\delta = \epsilon$, es compleix que
$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - 1| = |x - 1| < \delta = \epsilon$$

- Exemples
  - Demostrar, utilitzant la definició de límit, que

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

  - Solució:
    - Donada $\epsilon > 0$ volem que es compleixi $\left|x^2 - 4\right| < \epsilon$
    - Sabem $\left|x^2 - 4\right| = |x-2|\,|x+2|$
    - Suposem que tenim una $\delta > 0$ petita, i $|x-2| < \delta$
    - Per tant

$$|x-2| < \delta \Leftrightarrow 2-\delta < x < 2+\delta \Leftrightarrow 4-\delta < x+2 < 4+\delta$$

    - Com δ ha de ser petita, podem suposar que $\delta \leq 1$, i queda

$$|x-2| < \delta \Leftrightarrow 4-\delta < x+2 < 4+\delta \Longrightarrow 3 < x+2 < 5$$

    - Tenim $|x-2| < \delta$ i també $x+2 = |x+2| < 5$
    - Aleshores, podem prendre $\delta = \min(1, \epsilon/5)$, de manera que

$$|x-2| < \delta \Longrightarrow \left|x^2 - 4\right| = |x-2|\,|x+2| < \frac{\epsilon}{5}\cdot 5 = \epsilon \quad \blacksquare$$

- Exemples
  - Demostrar, utilitzant la definició de límit, que no existeix

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

  - Solució:
    - Suposem que el límit existeix i val L, i seleccionem $\epsilon = 1/2$
    - Segons la definició de límit, existeix un $\delta > 0$ tal que

$$0 < x < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| = |1 - L| < \epsilon = 1/2$$

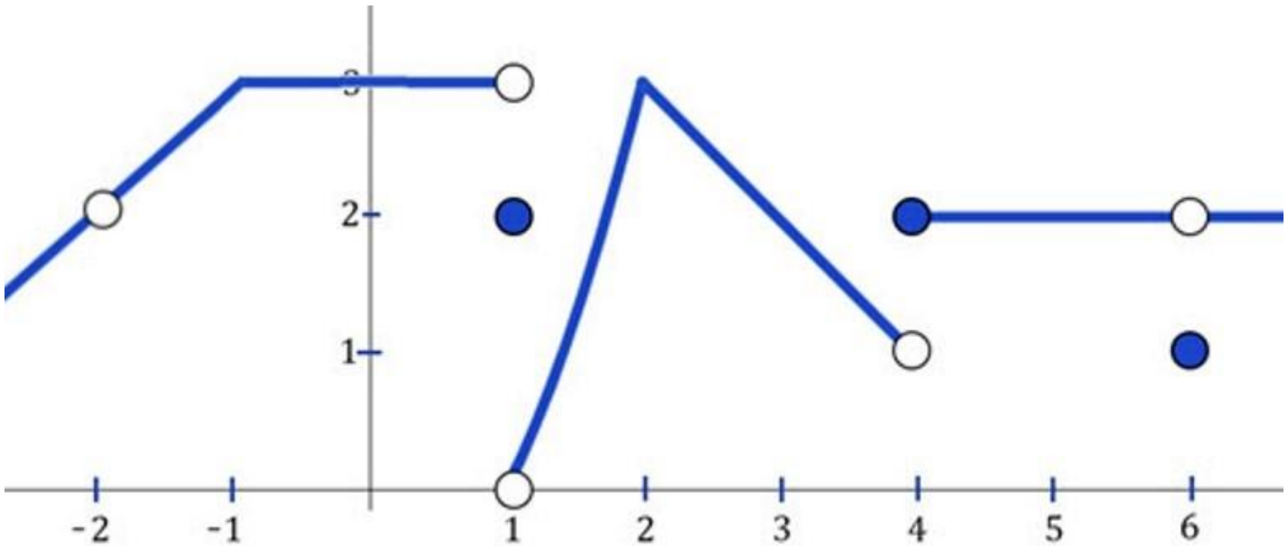
$$-\delta < x < 0 \Longrightarrow |f(x) - L| = |-1 - L| = |1 + L| < \epsilon = 1/2$$

      Observa que en la primera $x > 0$ i en la segona $x < 0$
    - Aleshores

$$2 = |(1 + L) + (1 - L)| \leq |1 + L| + |1 - L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ !!!}$$

    - Com això és impossible, la hipòtesi d'existència del límit queda descartada

- Exemples
  - Considereu $f(x)$ una funció definida per parts



$$\lim_{x \to -2} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3$$

$$\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

$$\nexists \lim_{x \to 4} f(x)$$

$$\lim_{x \to 6} f(x) = 2$$

- Definició de ***límits a l'infinit***
  - Sigui f una funció definida a l'interval $(c, +\infty)$
  - Definim el límit de $f(x)$ quan x s'apropa a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists M > c : \forall x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

- Definició de ***límits a l'infinit***
  - Sigui f una funció definida a l'interval $(c, +\infty)$
  - Definim el límit de $f(x)$ quan x s'apropa a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M > c : \forall x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

  - Sigui f una funció definida a l'interval $(-\infty, d)$
  - Definim el límit de $f(x)$ quan x s'apropa a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M < d : \forall x < M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

- Exemple
  - Demostrar, utilitzant la definició de límit, que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

  - Solució:
    - Donada $\epsilon > 0$ volem que es compleixi

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon \iff \frac{1}{|x|} < \epsilon \iff |x| > \frac{1}{\epsilon}$$

    - Prenent $M = 1/\epsilon$ tenim

$$x > M \implies |x| > M = \frac{1}{\epsilon} \iff \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon \qquad \blacksquare$$

- Definició de ***límits laterals***
  - Siguin $a, L \in \mathbb{R}$ i f una funció definida a l'interval (c, d)
  - Límit lateral de $f(x)$ quan x s'apropa a a per la dreta

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

- Definició de ***límits laterals***
  - Siguin $a, L \in \mathbb{R}$ i f una funció definida a l'interval (c, d)
  - Límit lateral de $f(x)$ quan x s'apropa a a per la dreta

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

  - Límit lateral de $f(x)$ quan x s'apropa a a per l'esquerra

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a) \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

- Definició de ***límits infinits***

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall P > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > P$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall P < 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < P$$

- Definició de ***límits laterals infinits***

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall P > 0 \;\; \exists\delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) \implies f(x) > P$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall P > 0 \;\; \exists\delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a) \implies f(x) > P$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall P < 0 \;\; \exists\delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) \implies f(x) < P$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall P < 0 \;\; \exists\delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a) \implies f(x) < P$$

- Definició de ***límits infinits a l'infinit***

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff$$
$$\forall P > 0 \ \exists M > 0 : \forall x > M \implies f(x) > P$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff$$
$$\forall P > 0 \ \exists M < 0 : \forall x < M \implies f(x) > P$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff$$
$$\forall P < 0 \ \exists M > 0 : \forall x > M \implies f(x) < P$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff$$
$$\forall P < 0 \ \exists M < 0 : \forall x < M \implies f(x) < P$$

- Propietats dels límits
  - **Unicitat**
    - El límit d’una funció, si existeix, és únic
  - Igualtat de límits laterals

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

    - Això també és cert si el límit és infinit

Propietats dels límits

Aritmètiques

- Siguin

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

- Aleshores

$$\lim_{x \to a} \big(\lambda\, f(x)\big) = \lambda\, L_1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = L_1 L_2$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \qquad L_2 \neq 0$$

- Propietats dels límits
  - ***Comparació***
    - Siguin

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

    - Es compleix

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in I \setminus \{a\} \implies L_1 \leq L_2$$

- Propietats dels límits
  - ***Compressió*** o ***del sandvitx***
    - Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in I \setminus \{a\}$$

aleshores

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

- Propietats dels límits
  - Altres
    - Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

$g(x)$ funció fitada

aleshores

$$\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = 0$$

Propietats dels límits

Relació entre límits de funcions i de successions

- Es compleix

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

sii

$$\forall\{a_n\}\colon \lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$$

- Observació: Aquest teorema és útil per a demostrar que el límit de la funció no existeix, de dues maneres diferents
  - Trobant una successió a_n que tendeix a a on el límit de $f(a_n)$ no existeix
  - Trobant dues successions a_n i b_n que tendeixen a a on els límits $f(a_n)$ i $f(b_n)$ valen diferent

- Fites de funcions
  - Una funció f és ***fitada per dalt*** si existeix $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, per tot x del domini de la funció
  - Una funció f és ***fitada per baix*** si existeix $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$, per tot x del domini de la funció
  - Una funció f és ***fitada*** si existeix $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$, per tot x del domini de la funció

- Creixement i monotonia de funcions
  - Sigui f una funció de domini D
  - f és ***creixent*** si
    $\forall x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \leq g(x)$
  - f és ***decreixent*** si
    $\forall x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \geq g(x)$
  - f és ***estrictament creixent*** si
    $\forall x, y \in D, x < y \implies f(x) < g(x)$
  - f és ***estrictament decreixent*** si
    $\forall x, y \in D, x < y \implies f(x) > g(x)$
  - f és ***monòtona*** si és creixent o decreixent
  - f és ***estríctament monòtona*** si és estrictament creixent o estrictament decreixent