Aplicaciones afines

Definición

Sean $\mathcal{A} = (A,V)$ y $\mathcal{B} = (B,W)$ dos espacios afines. Una aplicación $\psi : A \longrightarrow B$ es afín si existe un punto $o \in A$ y una aplicación lineal $\overrightarrow{\psi} : V \longrightarrow W$ tal que

$$\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} \quad \text{para todo } a \in A.$$

Definición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos espacios afines. Una aplicación $\psi : A \longrightarrow B$ es afín si existe un punto $o \in A$ y una aplicación lineal $\overrightarrow{\psi} : V \longrightarrow W$ tal que

$$\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} \quad \text{para todo } a \in A.$$

Ejemplo

¿Cómo serán las aplicaciones lineales asociadas a las aplicaciones afines constantes?

Definición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos espacios afines. Una aplicación $\psi : A \longrightarrow B$ es afín si existe un punto $o \in A$ y una aplicación lineal $\overrightarrow{\psi} : V \longrightarrow W$ tal que

$$\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} \quad \text{para todo } a \in A.$$

Ejemplo

¿Cómo serán las aplicaciones lineales asociadas a las aplicaciones afines constantes?

Toda aplicación afín constante tiene asociada la aplicación lineal idénticamente nula.

Ejemplo

¿Cómo serán las aplicaciones afines de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

Ejemplo

¿Cómo serán las aplicaciones afines de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

- ¿Cómo son las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

Ejemplo

¿Cómo serán las aplicaciones afines de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

- ¿Cómo son las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?
- Las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son de la forma $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = m\overrightarrow{v}$.

Ejemplo

¿Cómo serán las aplicaciones afines de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

- ¿Cómo son las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?
- Las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son de la forma $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = m\overrightarrow{v}$.
- Si $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es afín y pasa por el punto $(x_0, \psi(x_0))$, entonces $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{x_0x}) = \overrightarrow{\psi(x_0)\psi(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

¿Cómo serán las aplicaciones afines de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

- ¿Cómo son las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?
- Las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son de la forma $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = m\overrightarrow{v}$.
- Si $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es afín y pasa por el punto $(x_0, \psi(x_0))$, entonces $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{x_0x}) = \overrightarrow{\psi(x_0)\psi(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Por lo tanto, una aplicación afín $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que pasa por el punto $(x_0, \psi(x_0))$ tiene la forma $\psi(x) - \psi(x_0) = m(x - x_0)$.

Ejercicio

Determina si la aplicación $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\psi(x,y) = (x-y+3, x+y+1)$, es afín.

Ejercicio

Determina si la aplicación $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\psi(x,y) = (x-y+3, x+y+1)$, es afín.

Solución

La imagen del punto $o = (0,0)$ es $\psi(o) = (3,1)$. Para todo punto $a = (x,y)$ y la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi}(x,y) = (x-y, x+y)$ tenemos

$$\overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}).$$

Ejercicio

Determina si la aplicación $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\psi(x,y) = (x-y+3, x+y+1)$, es afín.

Solución

La imagen del punto $o = (0,0)$ es $\psi(o) = (3,1)$. Para todo punto $a = (x,y)$ y la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi}(x,y) = (x-y, x+y)$ tenemos

$$\overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}).$$

Por lo tanto, ψ es afín y tiene asociada la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}$. $\square$

Ejercicio

Determina si la aplicación $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\psi(x,y) = (x-y+3, x+y+1)$, es afín.

Solución

La imagen del punto $o = (0,0)$ es $\psi(o) = (3,1)$. Para todo punto $a = (x,y)$ y la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi}(x,y) = (x-y, x+y)$ tenemos

$$\overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}).$$

Por lo tanto, ψ es afín y tiene asociada la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}$. $\square$

Observación

Para $o' = (1,1)$ tenemos $\psi(o') = (3,3)$. En ese caso, tomando la misma aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}(x,y) = (x-y, x+y)$ también obtenemos $\overrightarrow{\psi(o')\psi(a)} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{o'a})$. Por lo tanto, la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}$ asociada a ψ es la misma para los puntos o y o'.

Ejercicio

Demuestra que la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}$ asociada a una aplicación afín ψ no depende de la elección del punto o que cumple $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)}$ para todo $a \in A$.

Ejercicio

Demuestra que la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}$ asociada a una aplicación afín ψ no depende de la elección del punto o que cumple $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)}$ para todo $a \in A$.

Demostración

Solo hay que observar que si $x \in A \setminus \{o\}$, entonces $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{xa}) = \overrightarrow{\psi(x)\psi(a)}$ para todo $a \in A$,

Ejercicio

Demuestra que la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}$ asociada a una aplicación afín ψ no depende de la elección del punto o que cumple $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)}$ para todo $a \in A$.

Demostración

Solo hay que observar que si $x \in A \setminus \{o\}$, entonces $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{xa}) = \overrightarrow{\psi(x)\psi(a)}$ para todo $a \in A$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{xa}) &= \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{xo} + \overrightarrow{oa}) \\
&= \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{xo}) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) \\
&= \overrightarrow{\psi}(-(\overrightarrow{ox})) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) \\
&= -\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ox}) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa}) \\
&= -\left(\overrightarrow{\psi(o)\psi(x)}\right) + \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} \\
&= \overrightarrow{\psi(x)\psi(o)} + \overrightarrow{\psi(o)\psi(a)} \\
&= \overrightarrow{\psi(x)\psi(a)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Conclusión

Son equivalentes:

- $\psi : A \longrightarrow B$ es afín.
- $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{\psi(a)\psi(b)}$ para todo $a, b \in A$.
- $\psi(b) = \psi(a) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ab})$ para todo $a, b \in A$.

Observación

Si conocemos el valor de $\psi(a)$, para un punto arbitrario $a \in A$, entonces $\psi(x) = \psi(a) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax})$ para todo $x \in A$. Por lo tanto, podemos aplicar el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\overrightarrow{\psi}"] \arrow[d, "\varphi_a"'] & W \arrow[d, "\varphi_{\psi(a)}"] \\ A \arrow[r, "\psi"] & B \end{tikzcd}$$

Observación

Si conocemos el valor de $\psi(a)$, para un punto arbitrario $a \in A$, entonces $\psi(x) = \psi(a) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax})$ para todo $x \in A$. Por lo tanto, podemos aplicar el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\overrightarrow{\psi}"] \arrow[d, "\varphi_a"'] & W \arrow[d, "\varphi_{\psi(a)}"] \\ A \arrow[r, "\psi"] & B \end{tikzcd}$$

Es decir, para todo $\overrightarrow{v} \in V$,

$$\varphi_{\psi(a)}(\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v})) = \psi(\varphi_a(\overrightarrow{v})).$$

Observación

Si conocemos el valor de $\psi(a)$, para un punto arbitrario $a \in A$, entonces $\psi(x) = \psi(a) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax})$ para todo $x \in A$. Por lo tanto, podemos aplicar el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\overrightarrow{\psi}} & W \\ {\scriptstyle \varphi_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\psi(a)}} \\ A & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

Es decir, para todo $\overrightarrow{v} \in V$,

$$\varphi_{\psi(a)}(\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v})) = \psi(\varphi_a(\overrightarrow{v})).$$

Además, como φ_a es biyectiva, para todo $x \in A$ se cumple que

$$\psi(x) = \varphi_{\psi(a)}\left(\overrightarrow{\psi}\left(\varphi_a^{-1}(x)\right)\right).$$

Proposición

La imagen de un subespacio afín por una aplicación afín es un subespacio afín.

Proposición

La imagen de un subespacio afín por una aplicación afín es un subespacio afín.

Demostración

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos espacios afines. Sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín, $\mathcal{A}' = (A', V')$ un subespacio afín de $\mathcal{A}$ y $a \in A'$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\overrightarrow{\psi}} & W \\ {\scriptstyle \varphi_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\psi(a)}} \\ A & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

Proposición

La imagen de un subespacio afín por una aplicación afín es un subespacio afín.

Demostración

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos espacios afines. Sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín, $\mathcal{A}' = (A', V')$ un subespacio afín de $\mathcal{A}$ y $a \in A'$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\overrightarrow{\psi}} & W \\ \varphi_a \big\downarrow & & \big\downarrow \varphi_{\psi(a)} \\ A & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

Como φ_a es biyectiva, $\psi(A') = \varphi_{\psi(a)}(\overrightarrow{\psi}(\varphi_a^{-1}(A'))) = \varphi_{\psi(a)}(\overrightarrow{\psi}(V'))$.

Proposición

La imagen de un subespacio afín por una aplicación afín es un subespacio afín.

Demostración

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos espacios afines. Sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín, $\mathcal{A}' = (A', V')$ un subespacio afín de $\mathcal{A}$ y $a \in A'$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\overrightarrow{\psi}} & W \\ {\scriptstyle \varphi_a}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{\psi(a)}} \\ A & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

Como φ_a es biyectiva, $\psi(A') = \varphi_{\psi(a)}(\overrightarrow{\psi}(\varphi_a^{-1}(A'))) = \varphi_{\psi(a)}(\overrightarrow{\psi}(V'))$.
Y como $\overrightarrow{\psi}(V')$ es un subespacio vectorial de W, concluimos que $(\psi(A'), \overrightarrow{\psi}(V'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{B}$. $\square$

Proposición

La imagen de un subespacio afín por una aplicación afín es un subespacio afín.

Otra vía de demostración

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos espacios afines. Sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín, $\mathcal{A}' = (A', V')$ un subespacio afín de $\mathcal{A}$ y $a \in A'$.

Proposición

La imagen de un subespacio afín por una aplicación afín es un subespacio afín.

Otra vía de demostración

Sean $\mathcal{A}=(A,V)$ y $\mathcal{B}=(B,W)$ dos espacios afines. Sea $\psi:A\longrightarrow B$ una aplicación afín, $\mathcal{A}'=(A',V')$ un subespacio afín de $\mathcal{A}$ y $a\in A'$.

Para todo $x\in A'$ existe un único $\overrightarrow{v}\in V'$ tal que $x=a+\overrightarrow{v}$. Como ψ es afín, $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax})=\overrightarrow{\psi(a)\psi(x)}$, lo que implica $\psi(x)=\psi(a)+\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v})$.

Proposición

La imagen de un subespacio afín por una aplicación afín es un subespacio afín.

Otra vía de demostración

Sean $\mathcal{A}=(A,V)$ y $\mathcal{B}=(B,W)$ dos espacios afines. Sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín, $\mathcal{A}'=(A',V')$ un subespacio afín de $\mathcal{A}$ y $a\in A'$.

Para todo $x\in A'$ existe un único $\overrightarrow{v}\in V'$ tal que $x=a+\overrightarrow{v}$. Como ψ es afín, $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax})=\overrightarrow{\psi(a)\psi(x)}$, lo que implica $\psi(x)=\psi(a)+\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v})$.

Por lo tanto,

$$\psi(A')=\{\psi(x):\ x\in A'\}=\{\psi(a)+\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}):\ \overrightarrow{v}\in V'\}=\psi(a)+\overrightarrow{\psi}(V').$$

Como $\overrightarrow{\psi}(V')$ es un subespacio vectorial de W, concluimos que $(\psi(A'),\overrightarrow{\psi}(V'))$ es un subespacio afín de $\mathcal{B}$. $\square$

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ espacios afines. Sea $\psi : A \longrightarrow B$ afín y $\mathcal{B}' = (B', W')$ un subespacio afín de $\mathcal{B}$. Sea $V' = \{\overrightarrow{u} \in V : \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{u}) \in W'\}$ y $A' = \{x \in A : \psi(x) \in B'\}$. Si $B' \cap Im(\psi) \neq \varnothing$, entonces (A', V') es un subespacio afín de $\mathcal{A}$.

Demostración

Si $B' \cap Im(\psi) \neq \varnothing$, entonces $A' \neq \varnothing$. Sea $a \in A'$ y veamos que $\varphi_a(V') = A'$.

Demostración

Si $B' \cap Im(\psi) \neq \emptyset$, entonces $A' \neq \emptyset$. Sea $a \in A'$ y veamos que $\varphi_a(V') = A'$.

$\varphi_a(V') \subseteq A'$?

Demostración

Si $B' \cap Im(\psi) \neq \emptyset$, entonces $A' \neq \emptyset$. Sea $a \in A'$ y veamos que $\varphi_a(V') = A'$.

$\varphi_a(V') \subseteq A'$?

Sea $\overrightarrow{v} \in V'$. Como existe $\overrightarrow{w} \in W'$ tal que $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$ y existe $x \in A$ tal que $x = a + \overrightarrow{v}$, tenemos que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{\psi(a)\psi(x)}$.

Demostración

Si $B' \cap Im(\psi) \neq \emptyset$, entonces $A' \neq \emptyset$. Sea $a \in A'$ y veamos que $\varphi_a(V') = A'$.

$\varphi_a(V') \subseteq A'$?

Sea $\overrightarrow{v} \in V'$. Como existe $\overrightarrow{w} \in W'$ tal que $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$ y existe $x \in A$ tal que $x = a + \overrightarrow{v}$, tenemos que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{\psi(a)\psi(x)}$.
Tenemos $\psi(a) \in B'$, $\overrightarrow{w} \in W'$ y $\psi(x) = \psi(a) + \overrightarrow{w}$, por lo que $\psi(x) \in B'$, y eso implica que $x \in A'$. Ahora bien, como $\varphi_a(\overrightarrow{v}) = x \in A'$, concluimos que $\varphi_a(V') \subseteq A'$.

Demostración

Si $B' \cap Im(\psi) \neq \emptyset$, entonces $A' \neq \emptyset$. Sea $a \in A'$ y veamos que $\varphi_a(V') = A'$.

$\varphi_a(V') \subseteq A'$?

Sea $\overrightarrow{v} \in V'$. Como existe $\overrightarrow{w} \in W'$ tal que $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$ y existe $x \in A$ tal que $x = a + \overrightarrow{v}$, tenemos que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{\psi(a)\psi(x)}$.
Tenemos $\psi(a) \in B'$, $\overrightarrow{w} \in W'$ y $\psi(x) = \psi(a) + \overrightarrow{w}$, por lo que $\psi(x) \in B'$, y eso implica que $x \in A'$. Ahora bien, como $\varphi_a(\overrightarrow{v}) = x \in A'$, concluimos que $\varphi_a(V') \subseteq A'$.

$A' \subseteq \varphi_a(V')$?

Demostración

Si $B' \cap Im(\psi) \neq \emptyset$, entonces $A' \neq \emptyset$. Sea $a \in A'$ y veamos que $\varphi_a(V') = A'$.

$\varphi_a(V') \subseteq A'$?

Sea $\overrightarrow{v} \in V'$. Como existe $\overrightarrow{w} \in W'$ tal que $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$ y existe $x \in A$ tal que $x = a + \overrightarrow{v}$, tenemos que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{\psi(a)\psi(x)}$.
Tenemos $\psi(a) \in B'$, $\overrightarrow{w} \in W'$ y $\psi(x) = \psi(a) + \overrightarrow{w}$, por lo que $\psi(x) \in B'$, y eso implica que $x \in A'$. Ahora bien, como $\varphi_a(\overrightarrow{v}) = x \in A'$, concluimos que $\varphi_a(V') \subseteq A'$.

$A' \subseteq \varphi_a(V')$?

Sea $x \in A'$. Tomando $\overrightarrow{v} \in V$ tal que $\varphi_a(\overrightarrow{v}) = x$ obtenemos

$$\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{\psi(a)\psi(x)} \in W'.$$

Así, $\overrightarrow{v} \in V'$ y como $x = \varphi_a(\overrightarrow{v})$, concluimos que $x \in \varphi_a(V')$. Por lo tanto, $A' \subseteq \varphi_a(V')$.

Demostración

Si $B' \cap Im(\psi) \neq \emptyset$, entonces $A' \neq \emptyset$. Sea $a \in A'$ y veamos que $\varphi_a(V') = A'$.

$\varphi_a(V') \subseteq A'$?

Sea $\overrightarrow{v} \in V'$. Como existe $\overrightarrow{w} \in W'$ tal que $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$ y existe $x \in A$ tal que $x = a + \overrightarrow{v}$, tenemos que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{\psi(a)\psi(x)}$.

Tenemos $\psi(a) \in B'$, $\overrightarrow{w} \in W'$ y $\psi(x) = \psi(a) + \overrightarrow{w}$, por lo que $\psi(x) \in B'$, y eso implica que $x \in A'$. Ahora bien, como $\varphi_a(\overrightarrow{v}) = x \in A'$, concluimos que $\varphi_a(V') \subseteq A'$.

$A' \subseteq \varphi_a(V')$?

Sea $x \in A'$. Tomando $\overrightarrow{v} \in V$ tal que $\varphi_a(\overrightarrow{v}) = x$ obtenemos

$$\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{\psi(a)\psi(x)} \in W'.$$

Así, $\overrightarrow{v} \in V'$ y como $x = \varphi_a(\overrightarrow{v})$, concluimos que $x \in \varphi_a(V')$. Por lo tanto, $A' \subseteq \varphi_a(V')$.

Tenemos que $A' = \varphi_a(V')$, y como V' es un subespacio vectorial de V, podemos concluir que (A', V') es un subespacio afín de $\mathcal{A}$. $\square$

Proposición

La imagen de un segmento por una aplicación afín es un segmento o un punto. Además, la imagen de una recta por una aplicación afín es una recta o un punto.

Proposición

La imagen de un segmento por una aplicación afín es un segmento o un punto. Además, la imagen de una recta por una aplicación afín es una recta o un punto.

Demostración

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ espacios afines y $\psi : A \longrightarrow B$ afín. Para todo $a, b, x \in A$ y todo escalar λ tal que $\overrightarrow{ax} = \lambda \overrightarrow{ab}$ tenemos

Proposición

La imagen de un segmento por una aplicación afín es un segmento o un punto. Además, la imagen de una recta por una aplicación afín es una recta o un punto.

Demostración

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ espacios afines y $\psi : A \longrightarrow B$ afín. Para todo $a, b, x \in A$ y todo escalar λ tal que $\overrightarrow{ax} = \lambda \overrightarrow{ab}$ tenemos

$$\overrightarrow{\psi(a)\psi(x)} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \lambda \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ab}) = \lambda \overrightarrow{\psi(a)\psi(b)}.$$

Proposición

La imagen de un segmento por una aplicación afín es un segmento o un punto. Además, la imagen de una recta por una aplicación afín es una recta o un punto.

Demostración

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ espacios afines y $\psi : A \longrightarrow B$ afín. Para todo $a, b, x \in A$ y todo escalar λ tal que $\overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{ab}$ tenemos

$$\overrightarrow{\psi(a)\psi(x)} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \lambda\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ab}) = \lambda\overrightarrow{\psi(a)\psi(b)}.$$

Es decir, $\psi(x) = \psi(a) + \lambda\overrightarrow{\psi(a)\psi(b)}$. De ahí se deduce que $\psi(\overline{ab}) = \overline{\psi(a)\psi(b)}$.
(Completa los detalles)

Proposición

La imagen de un segmento por una aplicación afín es un segmento o un punto. Además, la imagen de una recta por una aplicación afín es una recta o un punto.

Demostración

Sean $\mathcal{A} = (A,V)$ y $\mathcal{B} = (B,W)$ espacios afines y $\psi : A \longrightarrow B$ afín. Para todo $a,b,x \in A$ y todo escalar λ tal que $\overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{ab}$ tenemos

$$\overrightarrow{\psi(a)\psi(x)} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \lambda\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ab}) = \lambda\overrightarrow{\psi(a)\psi(b)}.$$

Es decir, $\psi(x) = \psi(a) + \lambda\overrightarrow{\psi(a)\psi(b)}$. De ahí se deduce que $\psi(\overline{ab}) = \overline{\psi(a)\psi(b)}$.
(Completa los detalles)
Obviamente, si $\psi(a) = \psi(b)$, entonces $\psi(\overline{ab})$ es un punto.

Proposición

La imagen de un segmento por una aplicación afín es un segmento o un punto. Además, la imagen de una recta por una aplicación afín es una recta o un punto.

Demostración

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ espacios afines y $\psi : A \longrightarrow B$ afín. Para todo $a, b, x \in A$ y todo escalar λ tal que $\overrightarrow{ax} = \lambda \overrightarrow{ab}$ tenemos

$$\overrightarrow{\psi(a)\psi(x)} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ax}) = \lambda \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ab}) = \lambda \overrightarrow{\psi(a)\psi(b)}.$$

Es decir, $\psi(x) = \psi(a) + \lambda \overrightarrow{\psi(a)\psi(b)}$. De ahí se deduce que $\psi(\overline{ab}) = \overline{\psi(a)\psi(b)}$.
(Completa los detalles)
Obviamente, si $\psi(a) = \psi(b)$, entonces $\psi(\overline{ab})$ es un punto.
El mismo razonamiento funciona para la imagen de una recta.

Ejercicio

Demuestra que toda aplicación afín está determinada de manera única por la imagen de una referencia afín.

Ejercicio

Demuestra que toda aplicación afín está determinada de manera única por la imagen de una referencia afín.

Solución

- Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos espacios afines y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Sea $R = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ una referencia afín de $\mathcal{A}$.

Ejercicio

Demuestra que toda aplicación afín está determinada de manera única por la imagen de una referencia afín.

Solución

- Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos espacios afines y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Sea $R = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ una referencia afín de $\mathcal{A}$.
- Por un lado, la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}$, asociada a ψ, está determinada de manera única por la imagen de la base $(\overrightarrow{a_0 a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0 a_k})$.

Ejercicio

Demuestra que toda aplicación afín está determinada de manera única por la imagen de una referencia afín.

Solución

- Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos espacios afines y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Sea $R = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ una referencia afín de $\mathcal{A}$.
- Por un lado, la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}$, asociada a ψ, está determinada de manera única por la imagen de la base $(\overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_k})$.
- Por otro lado, $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{a_0x}) = \overrightarrow{\psi(a_0)\psi(x)}$, para todo $x \in A$.

Ejercicio

Demuestra que toda aplicación afín está determinada de manera única por la imagen de una referencia afín.

Solución

- Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos espacios afines y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Sea $R = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ una referencia afín de $\mathcal{A}$.
- Por un lado, la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}$, asociada a ψ, está determinada de manera única por la imagen de la base $(\overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_k})$.
- Por otro lado, $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{a_0x}) = \overrightarrow{\psi(a_0)\psi(x)}$, para todo $x \in A$.
- Es decir, $\psi(x) = \psi(a_0) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{a_0x})$, para todo $x \in A$.

Ejercicio

Demuestra que toda aplicación afín está determinada de manera única por la imagen de una referencia afín.

Solución

- Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos espacios afines y sea $\psi : A \longrightarrow B$ una aplicación afín. Sea $R = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ una referencia afín de $\mathcal{A}$.
- Por un lado, la aplicación lineal $\overrightarrow{\psi}$, asociada a ψ, está determinada de manera única por la imagen de la base $(\overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_k})$.
- Por otro lado, $\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{a_0x}) = \overrightarrow{\psi(a_0)\psi(x)}$, para todo $x \in A$.
- Es decir, $\psi(x) = \psi(a_0) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{a_0x})$, para todo $x \in A$.
- Por lo tanto, ψ está determinada de manera única por la imagen de de la referencia afín R. $\square$

Ejercicio

Prueba que en un espacio afín de dimensión n, la única aplicación afín que fija $n+1$ puntos independientes es la identidad.

Solución

Sea $\mathcal{A} = (A,V)$ un espacio afín de dimensión n y sea ψ una aplicación afín que fija los puntos independientes $o, a_1, \ldots, a_n$. Como $(\overrightarrow{oa_1}, \overrightarrow{oa_1}, \ldots, \overrightarrow{oa_n})$ es una base de V, tenemos que para todo $x \in A$, existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que $\overrightarrow{ox} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{oa_i}$.

Por lo tanto,

Solución

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín de dimensión n y sea ψ una aplicación afín que fija los puntos independientes $o, a_1, \ldots, a_n$. Como $(\overrightarrow{oa_1}, \overrightarrow{oa_1}, \ldots, \overrightarrow{oa_n})$ es una base de V, tenemos que para todo $x \in A$, existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que $\overrightarrow{ox} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{oa_i}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{o\psi(x)} = \overrightarrow{\psi(o)\psi(x)} &= \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{ox}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{oa_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda \overrightarrow{\psi(o)\psi(a_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{oa_i} = \overrightarrow{ox}.
\end{aligned}$$

Es decir, $\psi(x) = x$ para todo $x \in A$. $\square$

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{A}' = (A', V')$ dos espacios afines reales de dimensión $n \geq 2$. Sea $\psi : A \longrightarrow A'$ una biyección. Si ψ transforma puntos colineales $a, b, c \in A$ en puntos colineales $\psi(a), \psi(b), \psi(c) \in A'$, entonces ψ es afín.

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A,V)$ y $\mathcal{A}' = (A',V')$ dos espacios afines reales de dimensión $n \geq 2$. Sea $\psi : A \longrightarrow A'$ una biyección. Si ψ transforma puntos colineales $a,b,c \in A$ en puntos colineales $\psi(a), \psi(b), \psi(c) \in A'$, entonces ψ es afín.

Sobre la prueba

La prueba es un poco larga, por ahora la omitimos. Los pasos a seguir se pueden consultar en el siguiente libro:
M. Audin, Geometry, 2003, Springer Verlag. ISBN: 3540434984

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{A}' = (A', V')$ dos espacios afines reales de dimensión $n \geq 2$. Sea $\psi : A \longrightarrow A'$ una biyección. Si ψ transforma puntos colineales $a, b, c \in A$ en puntos colineales $\psi(a), \psi(b), \psi(c) \in A'$, entonces ψ es afín.

Sobre la prueba

La prueba es un poco larga, por ahora la omitimos. Los pasos a seguir se pueden consultar en el siguiente libro:
M. Audin, Geometry, 2003, Springer Verlag. ISBN: 3540434984

Algunos autores llaman a este resultado, Teorema fundamental de la geometría afín.