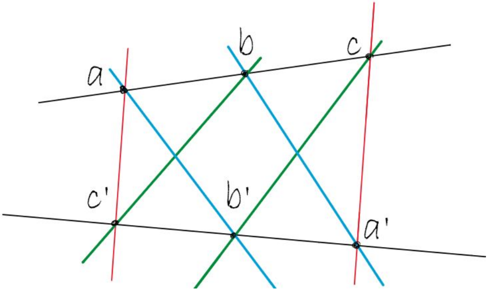
Teoremas de Papus y Desargues

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

Teorema de Pappus en geometría afín

En un plano afín, sean a, b, c tres puntos de una recta $\mathbb{L}_1$ y $a', b'c'$ tres puntos de una recta $\mathbb{L}_2$ distinta de $\mathbb{L}_1$. Si $\mathbb{L}_{ab'} // \mathbb{L}_{ba'}$ y $\mathbb{L}_{bc'} // \mathbb{L}_{cb'}$, entonces $\mathbb{L}_{ac'} // \mathbb{L}_{ca'}$.

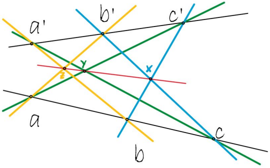


Teorema de Papus en geometría proyectiva

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas diferentes en un plano proyectivo. Dados 6 puntos $a,b,c \in \mathcal{L}_1$ y $a',b',c' \in \mathcal{L}_2$, los puntos x,y,z de intersección de las rectas $\mathcal{L}_{bc'}$ y $\mathcal{L}_{cb'}$, $\mathcal{L}_{ac'}$ y $\mathcal{L}_{ca'}$, y $\mathcal{L}_{ab'}$ y $\mathcal{L}_{ba'}$, respectivamente, son colineales.

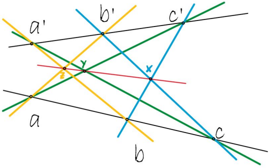
Teorema de Papus en geometría proyectiva

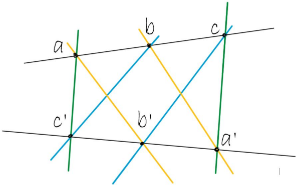
Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas diferentes en un plano proyectivo. Dados 6 puntos $a,b,c \in \mathcal{L}_1$ y $a',b',c' \in \mathcal{L}_2$, los puntos x,y,z de intersección de las rectas $\mathcal{L}_{bc'}$ y $\mathcal{L}_{cb'}$, $\mathcal{L}_{ac'}$ y $\mathcal{L}_{ca'}$, y $\mathcal{L}_{ab'}$ y $\mathcal{L}_{ba'}$, respectivamente, son colineales.



Teorema de Papus en geometría proyectiva

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas diferentes en un plano proyectivo. Dados 6 puntos $a, b, c \in \mathcal{L}_1$ y $a', b', c' \in \mathcal{L}_2$, los puntos x, y, z de intersección de las rectas $\mathcal{L}_{bc'}$ y $\mathcal{L}_{cb'}$, $\mathcal{L}_{ac'}$ y $\mathcal{L}_{ca'}$, y $\mathcal{L}_{ab'}$ y $\mathcal{L}_{ba'}$, respectivamente, son colineales.



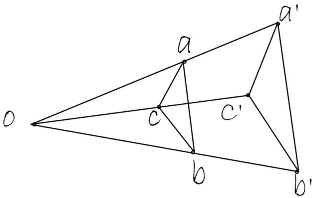


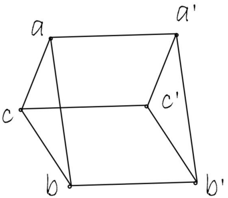
Demostración

Sea $\mathcal{L}_{xz}$ la recta proyectiva del infinito. En el plano afín que se obtiene de eliminar esta recta tenemos que $\mathcal{L}_{bc'} // \mathcal{L}_{cb'}$ y $\mathcal{L}_{ab'} // \mathcal{L}_{ba'}$, ya que estas rectas se cortan en el infinito. Por el teorema de Papus de la geometría afín, $\mathcal{L}_{ac'} // \mathcal{L}_{ca'}$. De ahí que $\mathcal{L}_{ac'}$ y $\mathcal{L}_{ca'}$ se cortan en el infinito. Es decir, x, y, z son colineales. $\square$

Teorema de Desargues en geometría afín

Sea $\mathcal{P}$ un plano afín. Si abc y $a'b'c'$ son dos triángulos en $\mathcal{P}$, sin vértices comunes, cuyos lados son respectivamente paralelos, entonces las rectas $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ y $\mathbb{L}_{cc'}$ son paralelas o concurrentes.



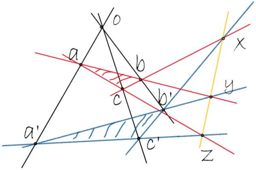


Teorema de Desargues en geometría proyectiva

Sean a, b, c y a', b', c' dos triángulos en un plano proyectivo. Sean x, y, z los puntos de intersección de las rectas $\mathcal{L}_{bc}$ y $\mathcal{L}_{b'c'}$, $\mathcal{L}_{ab}$ y $\mathcal{L}_{a'b'}$, y $\mathcal{L}_{ac}$ y $\mathcal{L}_{a'c'}$, respectivamente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) Los puntos x, y, z son colineales.

(b) Las rectas $\mathcal{L}_{aa'}$, $\mathcal{L}_{bb'}$ y $\mathcal{L}_{cc'}$ son concurrentes.

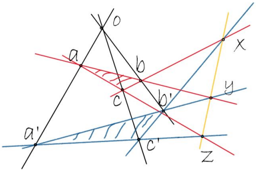


Teorema de Desargues en geometría proyectiva

Sean a, b, c y a', b', c' dos triángulos en un plano proyectivo. Sean x, y, z los puntos de intersección de las rectas $\mathcal{L}_{bc}$ y $\mathcal{L}_{b'c'}$, $\mathcal{L}_{ab}$ y $\mathcal{L}_{a'b'}$, y $\mathcal{L}_{ac}$ y $\mathcal{L}_{a'c'}$, respectivamente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) Los puntos x, y, z son colineales.

(b) Las rectas $\mathcal{L}_{aa'}$, $\mathcal{L}_{bb'}$ y $\mathcal{L}_{cc'}$ son concurrentes.

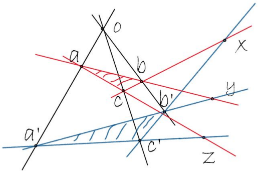


Demostración: (a) implica (b)

Asumiremos que x, y, z son colineales y están en la recta del infinito. En el plano afín obtenido eliminando esta recta, $\mathcal{L}_{bc} // \mathcal{L}_{b'c'}$, $\mathcal{L}_{ac} // \mathcal{L}_{a'c'}$, y $\mathcal{L}_{ab} // \mathcal{L}_{a'b'}$. Por la versión afín de este teorema concluimos que las rectas $\mathcal{L}_{aa'}$, $\mathcal{L}_{bb'}$ y $\mathcal{L}_{cc'}$ son concurrentes en el plano proyectivo.

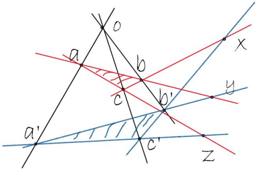
Demostración: (b) implica (a)

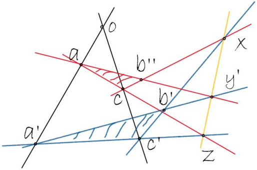
Vamos a asumir que o es el punto de intersección de las rectas $\mathcal{L}_{aa'}$, $\mathcal{L}_{bb'}$ y $\mathcal{L}_{cc'}$ (figura de la izquierda). Supongamos que el punto y no pertenece a la recta $\mathcal{L}_{xz}$.



Demostración: (b) implica (a)

Vamos a asumir que o es el punto de intersección de las rectas $\mathcal{L}_{aa'}$, $\mathcal{L}_{bb'}$ y $\mathcal{L}_{cc'}$ (figura de la izquierda). Supongamos que el punto y no pertenece a la recta $\mathcal{L}_{xz}$.

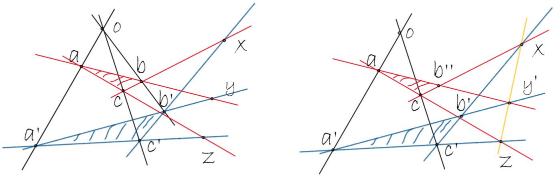




Sea y' el punto de intersección de $\mathcal{L}_{xz}$ y $\mathcal{L}_{a'b'}$. Sea b'' el punto de intersección de $\mathcal{L}_{ay'}$ y $\mathcal{L}_{cx}$ (figura de la derecha). Nótese que $b'' \neq b$.

Demostración: (b) implica (a)

Vamos a asumir que o es el punto de intersección de las rectas $\mathcal{L}_{aa'}$, $\mathcal{L}_{bb'}$ y $\mathcal{L}_{cc'}$ (figura de la izquierda). Supongamos que el punto y no pertenece a la recta $\mathcal{L}_{xz}$.



Sea y' el punto de intersección de $\mathcal{L}_{xz}$ y $\mathcal{L}_{a'b'}$. Sea b'' el punto de intersección de $\mathcal{L}_{ay'}$ y $\mathcal{L}_{cx}$ (figura de la derecha). Nótese que $b'' \neq b$.

Por la primera parte de este teorema, la recta $\mathcal{L}_{b'b''}$ pasa por o, y por eso b y b'' son los puntos de intersección de las rectas $\mathcal{L}_{ob'}$ y $\mathcal{L}_{cx}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, x, y y z son colineales. $\square$