3.1

Analizar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.

a) $A = \{(2x, x, -7x)/x \in \mathbb{R}\}$
b) $A = \{(x, y, z)/xy = 1\}$
c) $A = \{(x, y, z)/x = y \text{ ó } x = z\}$
d) $A = \{(x, y, z)/x + y + z = 0 \text{ y } x - y - z = 0\}$

3.2

Analizar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) $A = \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})/det(M) = 0\}$.
b) $A = \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})/det(M) \neq 0\}$
c) $A = \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})/tr(M) = 0\}$.

3.3

Consider the vector space of polynomials of the form $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Are the following subspaces? Explain briefly in a way that we are sure you understand subspaces.

A) Those $p(x)$ for which $p(1) = 0$.

B) Those $p(x)$ for which $p(0) = 1$.

C) Those $p(x)$ for which $a + b = c + d$.

D) Those $p(x)$ for which $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

3.4

Which are of the following sets of vectors are vector subspaces of $\mathbb{R}^3$? Explain your answer.

(a) All vectors $(x, y, z)^T$ such that $10x + y + 2014z = 0$

(b) All vectors $(x, y, z)^T$ such that $x + y + z \leq 2014$.

(c) All vectors $(x, y, z)^T$ such that $x + y + z = 0$ AND $x + 2y + 3z = 0$.

(d) All vectors $(x, y, z)^T$ such that $x + y + z = 0$ OR $x + 2y + 3z = 0$.

(e) All vectors $(b_1, b_2, b_3)^T$ such that $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x = (b_1, b_2, b_3)^T$ has a solution.

3.5

Sigui *V* l'espai vectorial de les funcions reals de variable real sobre el cos dels reals. Donats tres vectors linealment independents *f*(*x*-), *g*(*x*), *h*(*x*) $\in$ *V*, determineu si els vectors resultants de sumar-los de dos en dos *f*(*x*) + *g*(*x*), *f*(*x*) + *h*(*x*), *g*(*x*) + *h*(*x*) també ho són.

3.6

Determinar, en cada caso, si los vectores que se dan son una base de $\mathbb{R}^4$.

a) $\{(2, 1, 0, -1), (1, 2, 1, 0)\}$.

b) $\{(0, 1, 2, -1), (1, 0, 1, -1), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 1, 2)\}$.

c) $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 1), (2, 1, 1, 0), (1, -1, 2, -1)\}$.

Si ahora llamamos V_1, V_2, V_3 a los subespacios vectoriales generados, respectivamente, por los vectores de a), b), c), determinar : $dim(V_i)$, $i = 1, 2, 3$; $dim(V_i \cap V_j)$, $i \neq j$ y ecuaciones de la intersección; $dim(V_i + V_j)$, $i \neq j$ y ecuaciones de $V_i + V_j$ ¿En qué casos $\mathbb{R}^4 = V_i \oplus V_j$?

3.7

Sean U, V, W, los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(a,b,c)/a+b+c=0\}, \quad V = \{(a,b,c)/a=c\}, \quad W = \{(0,0,c)/c \in \mathbb{R}\}$$

Mostrar que:

a) $\mathbb{R}^3 = U + V$.
b) $\mathbb{R}^3 = U + W$.
c) $\mathbb{R}^3 = V + W$.

¿En qué casos es directa la suma?

3.8

En el espacio vectorial real $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})/a+b+c+d=0 \right\}$$

$$W_2 = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Calcular una base, ecuaciones implícitas y paramétricas de W_1, W_2, $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

3.9

En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$B_1 = \{(1,0,1), (-1,1,1), (1,-1,0)\} \text{ y } B_2 = \{(2,1,1), (1,1,1), (1,-1,1)\}$$

a) Calcular la matriz de cambio de base de B_2 a B_1.
b) Calcular las coordenadas en la base B_1 del vector cuyas coordenadas en B_2 son $(3,-2,2)$.

3.10

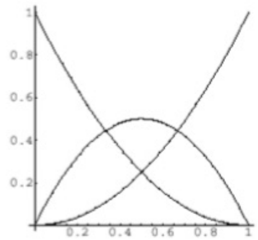
Considereu el subespai definit com:

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Re^5 \,\middle|\, x_3 = 2x_1 + 3x_2 - x_4;\ x_5 = 2x_2 - 3x_1 \right\}.$$

Trobeu una base d'aquest subespai i completeu-la fins a obtenir una base de $\Re^5$.

3.11

Els dissenyadors de peces de cotxes o d'avions utilitzen freqüentment un conjunt de polinomis anomenat ***polinomis de Bernstein***. Aquests polinomis, convenientment combinats, donen lloc a corbes suaus que s'utilitzen per crear peces mecàniques per ordinador.
Els polinomis de Bernstein són els següents (dibuixats a l'esquerra i expressats a la dreta):



$$B = \begin{Bmatrix} p_1(x) = 1 - 2x + x^2 \\ p_2(x) = 2x - 2x^2 \\ p_3(x) = x^2 \end{Bmatrix}.$$

Són, per tant, una base de funcions de l'espai vectorial $P_2(x)$ amb coeficients reals i cos commutatiu $\Re$.

a) Quines són les components del polinomi $p(x) = 5x + 10x^2$ respecte de B?
b) La següent matriu M_c és la matriu de canvi de base de la base B a una altra base anomenada D.

$$M_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deduïu quins són els polinomis que integren la base D.

c) Una altra família de polinomis semblants als de Bernstein és el ***conjunt de Lagrange***:

$$E = \begin{Bmatrix} p_1(x) = 2(x-0.5)(x-1) \\ p_2(x) = -ax(x-1) \\ p_3(x) = 2x(x-0.5) \end{Bmatrix}.$$

Quin valor ha de tenir a perquè siguin una base?

3.12

Sigui V l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients i variable real de grau ≤ 3, definim un subconjunt de V de la forma següent:

$$W_1 = \left\{ p(x) \in V \,/\, p(1) = 0 \;\; i \;\; \left.\frac{d\,p(x)}{d\,x}\right|_{x=1} = 0 \right\}.$$

a) Comproveu si W_1 és o no és un subespai vectorial de V.
b) Trobeu una base i la dimensió de W_1.
c) Doneu una base de W_1 que contingui el polinomi $e_1(x) = 2 - 4x + 2x^2$.

3.13

Sigui M_{2x2} l'espai vectorial sobre $\Re$ de les matrius de dues files i dues columnes i siguin:

$$F = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} > \text{ subespai vectorial de } M_{2x2}.$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad a \in \Re.$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } M_{2x2}.$$

a) Trobeu una base i la dimensió de *F*.

b) Valors de *a* per als quals B_1 és una base de M_{2x2}.

Per a *a* = 1 resoleu els següents apartats:

c) Calculeu la matriu de canvi de base de B_2 a B_1.

d) Sigui $A \in M_{2x2}$ amb components respecte de B_1: $A\big|_{B_1} = (-2,-7,8,-1)$. Trobeu les components de *A* respecte de la base B_2. Podeu afirmar que $A \in F$? (Justifiqueu la resposta).

3.14

Tenim tres matrius $A, B, C,$ relacionades per la igualdat $AB = C$. Suposem que els vectors columna que formen la matriu B són linealment dependents.

1) Demostreu que aleshores els vectors columna de C també són linealment dependents.
2) Utilitzant el resultat anterior demostreu que si A és una matriu $5x3$ i B és una matriu $3x5$ aleshores és impossible que $AB = I$ (on I és la matriu Identitat $5x5$).

3.15

Sea V un espacio vectorial que tiene un sistema generador formado por 2018 vectores. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) V tiene un sistema de 2018 vectores linealmente independientes.

(ii) $dim(V) \geq 2018$.

(iii) $dim(V) \leq 2018$.

(iv) Cualquier subconjunto de V formado por 2019 vectores es un sistema de vectores linealmente dependientes.

3.16

Sigui V un K espai vectorial; siguin $x, y \in V$ vectors. Construim els vectors $u \equiv \alpha x + \beta y$, $v \equiv \delta x + \gamma y$, amb $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$. Demostreu que u, v són linealment independents si i solament si $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$. Si es compleix aquesta condició, podem afirmar que $\{x, y, u, v\}$ formen un sistema de vectors linealment independents?

$\boxed{3.17}$

True or false (check addition in each case by an example):

(a) The symmetric matrices in $\mathbf{M}$ (with $A^{\mathrm{T}} = A$) form a subspace.

(b) The anti-symmetric matrices in $\mathbf{M}$ (with $A^{\mathrm{T}} = -A$) form a subspace.

(c) The unsymmetric matrices in $\mathbf{M}$ (with $A^{\mathrm{T}} \neq A$) form a subspace.

$\boxed{3.18}$

Sigui V un K espai vectorial i S un subconjunt finit de V. Sigui $Gen(S)$ (sovint també representat per $< S >$ o $Lin(S)$) el conjunt de totes les combinacions lineals dels vectors de S. Demostreu:

1) $Gen(S)$ és el menor subespai vectorial que conté a S (és a dir que si hi ha un altre subespai vectorial que conté a S també conté a $Gen(S)$)
2) $Gen(S)$ és la intersecció de tots els subespais vectorials que contenen a S.

$\boxed{3.19}$

Sigui V un K espai vectorial i S un subconjunt finit de V. Definim com a "Canvis Elementals" en el conjunt S qualsevol de les tres següents accions en els elements de S (que donen origen a nous conjunts S'):

a) Intercanviar l'ordre dels elements de S
b) Substituir un element qualsevol de S per ún múltiple d'aquest element (l'element multiplicat per un escalar diferent de 0)
c) Substituir un element qualsevol de S per l'element sumant-li una combinació lineal dels altres

Demostreu que en tots tres cassos $Gen(S) = Gen(S')$ (és a dir, el subespai engendrat per S i S' és el mateix)