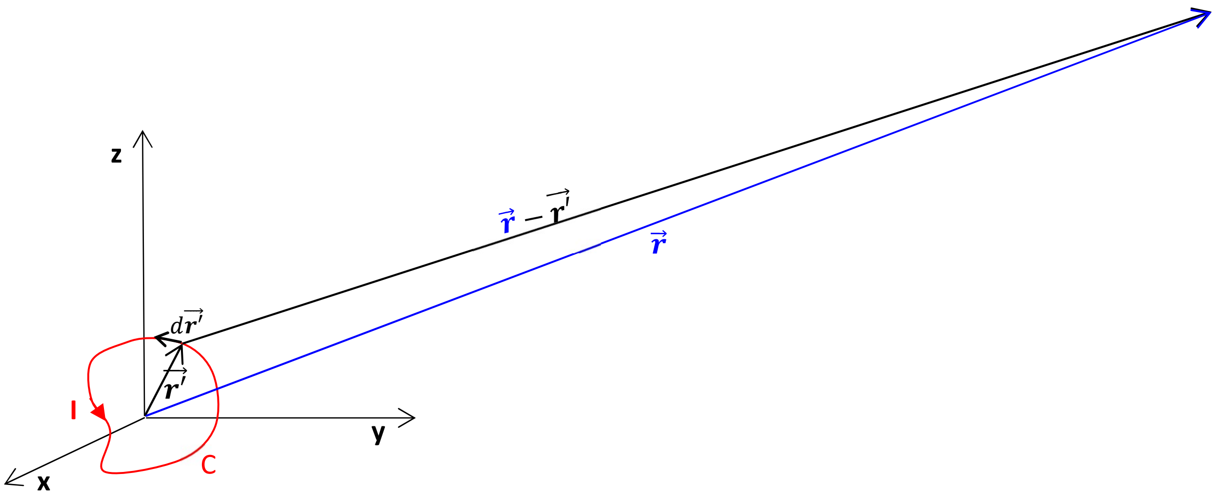
Camp magnètic d'un dipol magnètic a la llunyania.

Sigui una espira o dipol magnètic com C, la de la figura, per la qual hi passa un corrent **I**. Posem l'origen de coordenades un punt qualsevol a l'interior de l'espira (no molt lluny del seu suposat centre). Considerem $\overrightarrow{\boldsymbol{r}'}$ les posicions dels punts de l'espira respecte aquest origen. Siguin $d\overrightarrow{\boldsymbol{r}'}$ els vectorets diferencial de $\overrightarrow{\boldsymbol{r}'}$ que segueixen el camí de l'espira C en el sentit del corrent **I**.

Sigui $\vec{\boldsymbol{r}}$ la posició del punt on volem calcular el camp magnètic produït per l'espira. Considerem aquest punt situat **molt lluny** de l'espira (i.e. $|\vec{\boldsymbol{r}}| >> \left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}'}\right|$ o **r** >> **r'**)



A $\vec{\boldsymbol{r}}$ hi volem, calcular el camp $\vec{B}(\vec{\boldsymbol{r}})$, però de moment hi calcularem el potencial vector $\vec{A}(\vec{\boldsymbol{r}})$ que també dona informació del camp i és més fàcil de calcular.

Per a calcular el potencial vector que aquesta espira fa sobre un punt, $\vec{r}$, situat molt lluny d'aquesta (r>>r'), usarem l'expressió del potencial vector, creat per una distribució de densitats de corrent $\vec{J}(\vec{r}') \cdot dv'$, com la que vam deduir en el document anterior titulat "resum de la magnetostàtica en el buit"; però ara l'hem de traduir a una espira de corrent I, i per a fer-ho, només hem de canviar els elements de corrent d'una distribució: $\vec{J}(\vec{r}') \cdot dv'$, pels d'un fil o espira: $I \cdot d\overrightarrow{r'}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I \cdot d\overrightarrow{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad (1)$$

Fem el càlcul previ de:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|} = \frac{1}{[(\vec{r}-\vec{r}\prime)\cdot(\vec{r}-\vec{r}\prime)]^{1/2}} = \frac{1}{\left[r^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}\prime+r'^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{r\left[1-2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\prime}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}\right]^{1/2}}$$

On $x \equiv -\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \left(\frac{r\prime}{r}\right)^2$ és molt petit degut a la llunyania del punt $\vec{r}$. Usant llavors el desenvolupament en sèrie de Taylor de

$$\frac{1}{(1+x)^n} = 1 - \frac{n}{1!}x - \frac{n(-n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(-n-1)(-n-2)}{3!}x^3 - \cdots$$

Per n=1/2, i quedant-nos fins a ordre 1 en x ↑ , obtenim:

$$\frac{1}{(1+x)^{1/2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

Entrant això dins de l'expressió del potencial vector (1).

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C I\cdot d\vec{r'}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C d\vec{r'}\,\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\left(-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)\right)$$

$$= \left| \begin{array}{c} novament\ negligint\ els\ termes\ d'ordre \\ superior\ a\ grau\ 1, per\ a\ \dfrac{r'}{r} \end{array} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r}\oint_C d\vec{r'}\left(1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r}\oint_C d\vec{r'}}_{\substack{0,\ \ ja\ que \\ el\ vector\ d\vec{r'} \\ dona\ el\ tomb\ a\ una\ espira}} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r}\oint_C d\vec{r'}\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r}\oint_C d\vec{r'}\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}\oint_C d\vec{r'}(\vec{r}\cdot\vec{r}')$$

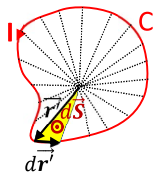
Al final del document demostrarem que:

$$\oint_C d\vec{r'}(\vec{r}\cdot\vec{r}') = \left(\oint_C \frac{\vec{r}'\ x\ d\vec{r}'}{2}\right) x\ \vec{r}$$

Essent:

$$\vec{S} \equiv \oint_C \frac{\vec{r}'\ x\ d\vec{r}'}{2}$$

el vector de superfície de l'espira, composat com l'integral dels vectors superfícies dels petits trianglets $d\vec{S} = \frac{\vec{r}'\ x\ d\vec{r}'}{2}$ (amb vèrtex a l'origen) que recorren l'àrea de l'espira al mateix temps que $d\vec{r}'$ i $\vec{r}'$ recorren el perímetre de l'espira



Per tant

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}\oint_C d\vec{r'}(\vec{r}\cdot\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}\left(\frac{1}{2}\oint_C (\vec{r}'\ x\ d\vec{r}')\right) x\ \vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}\vec{S}\ x\ \vec{r}$$

O el que és el mateix:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\ x\ \vec{r}}{r^3}$$

On $\vec{m} = I\cdot\vec{S}$ és el vector moment dipolar de l'espira.

Compareu aquesta expressió del potencial vector a la llunyania d'una espira (dipol magnètic), amb la del potencial electrostàtic $V(\vec{r})$ a la llunyania d'un dipol elèctric de moment dipolar $\vec{p}$, que vam veure que era:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

Demostració de que:

$$\oint_C d\overrightarrow{r'}(\vec{r}\cdot\vec{r}') = \left(\oint_C \frac{\vec{r}'\,x\,d\vec{r}'}{2}\right)x\,\vec{r}$$

Calculem el segon membre i anem a transformar-lo fins a identificar-lo amb el primer:

$$\left(\oint_C \frac{\vec{r}'\,x\,d\vec{r}'}{2}\right)x\,\vec{r} = \frac{1}{2}\oint_C (\vec{r}'\,x\,d\vec{r}')x\,\vec{r} = -\frac{1}{2}\oint_C \vec{r}\,x\,(\vec{r}'\,x\,d\vec{r}') = -\frac{1}{2}\oint_C \left((\vec{r}\cdot d\vec{r}')\vec{r}' - (\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{r}'\right)$$

$$= \frac{1}{2}\oint_C (\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{r}' - \frac{1}{2}\oint_C (\vec{r}\cdot d\vec{r}')\vec{r}' = \left|\begin{array}{c} descomponent\ per\ parts\ l'integrand\ del\ segon\ terme \\ (\vec{r}\cdot d\vec{r}')\vec{r}' = d'\left((\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{r}'\right) - (\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{r}' \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\oint_C (\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{r}' - \frac{1}{2}\left[\underbrace{\oint_C d'\left((\vec{r}\cdot d\vec{r}')\vec{r}'\right)}_{\substack{0,\ \ ja\ que \\ el\ diferencial\ total\ d(\ ) \\ dona\ el\ tomb\ a\ una\ espira}} - \oint_C (\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{r}'\right] = \frac{1}{2}\oint_C (\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{r}' + \frac{1}{2}\oint_C (\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{r}'$$

$$= \oint_C (\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{r}'$$

Amb la qual cosa queda demostrada aquella igualtat que hem aplicat en un pas anterior, durant el càlcul de $\vec{A}(\vec{r})$.