

Anàlisi Matemàtica 2 (AM2) GEMiF

E2.7: Optimització i multiplicadors de Lagrange

1. Trobeu els punts crítics de:

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2$
- b) $f(x, y) = x^2 - y^2$
- c) $f(x, y) = x^2y + y^2x$
- d) $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

2. Analitzeu els punts crítics de:

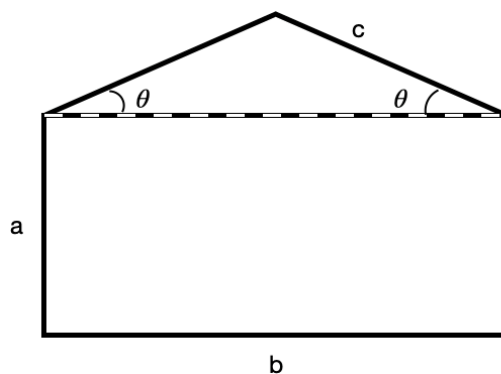
- a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$
- b) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$
- c) $f(x, y) = x^5y + xy^5 + xy$

3. Analitzeu la funció

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$$

en els punts $(0,0,0)$ i $(-1,1,1)$

4. Un pentàgon es forma col·locant un triangle isòsceles sobre un rectangle, tal com es mostra al diagrama. Si el perímetre del pentàgon és de 10 centímetres, troba les longituds dels costats del pentàgon que maximitzaran l'àrea del pentàgon.



5. La distribució de Boltzmann és una distribució de probabilitat de gran interès a la mecànica estadística, la branca de la Física que permet descriure les propietats macroscòpiques de sistemes formats per moltes partícules a partir de les propietats dels seus components individuals. Suposem que el nostre sistema macroscòpic admet n estats diferents, cadascun dels quals amb una probabilitat p_i i una energia E_i , per $i \in \{1, \dots, n\}$. Calcula les probabilitats que maximitzen l'entropia

$$S = -k_B \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$

on k_B és la constant de Boltzmann, i sabem que la suma de probabilitats és 1, i que el valor esperat de l'energia està fixat a un cert valor $\langle E \rangle$

$$\langle E \rangle = \sum_{i=1}^n p_i E_i$$

Observació: un dels multiplicadors de Lagrange no es pot calcular explícitament, però es pot donar una equació que ha de satisfer. Aquest multiplicador és igual a $1/T$, on T és la temperatura.