Equacions de Maxwell. Resum final i general.

Per convenció i suposant que de moment no escrivim les càrregues de polarització ni els corrents de magnetització traiem per comoditat, el subíndex **ll** (de lliure) a les distribucions de càrrega i de corrent lliures. És a dir, posarem: ρ enlloc de ρ_{ll} , σ enlloc de σ_{ll} , $\vec{\mathrm{j}}$ enlloc de $\vec{\mathrm{j}}_{ll}$ i $\vec{\mathrm{k}}$ enlloc de $\vec{\mathrm{k}}_{ll}$

1. bulk) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: Llei de Faraday-Lenz

1. interfície) $\hat{n}\, x\left(\vec{E}^{+} - \vec{E}^{-}\right) = 0$: Continuïtat interficial de la component tangencial de $\vec{E}$.

2. bulk) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$: Teorema de Gauss

2. interfície) $\hat{n} \cdot \left(\vec{D}^{+} - \vec{D}^{-}\right) = \sigma$: Discontinuïtat interficial de la component normal de $\vec{D}$

3. bulk) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: Teorema d'Ampere-Maxwell

3. interfície) $\hat{n}\, x\left(\vec{H}^{+} - \vec{H}^{-}\right) = \vec{\mathrm{k}}$: Discontinuïtat interficial de la component tangencial de $\vec{H}$

4. bulk) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$: Teorema de Gauss del magnetisme/Solenoidabilitat del camp $\vec{B}$

4. interfície) $\hat{n} \cdot \left(\vec{B}^{+} - \vec{B}^{-}\right) = 0$: Continuïtat interficial de la component normal de $\vec{B}$

En fons groc, hem destacat els dos termes nous d'inducció que apareixen a causa de la variació temporal dels camps

Equació de continuïtat de la càrrega:

És la equació que estableix la lògica conservació de la càrrega elèctrica malgrat en mogui en els corrents. Seria com una cinquena equació de Maxwell sinó fos perquè es dedueix de les relacions (bulk) de les altres 4

5.bulk) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{j}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

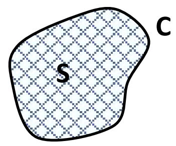
En efecte: prenent la divergència a **3.bulk** el primer terme passaria a zero (la divergència d'un rotacional és sempre zero) i per tant, al igualar a zero la divergència del segon surt que $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$. Finalment, usant **2.bulk** ja tenim l'equació **5.** de continuïtat.

També podríem veure que l'equació de continuïtat és equivalent a posar-hi el segon terme del segon membre de 3.bulk, que és justament el que va fer el Maxwell quan la va postular. Així l'equació de continuïtat **5.** és redundant en els dos sentits amb les 4 equacions (bulk) de Maxwell.

Versions integrals de les equacions de Maxwell.

Cadascuna d'elles inclou ja la forma diferencial bulk + la continuïtat/discontinuïtat interficial. N'hi ha de 2 tipus:

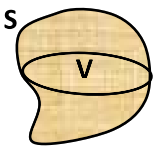
A) Definides en una línia tancada **C** amb superfícies internes **S**.



1) $\underbrace{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\varepsilon,\ fem} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_S \vec{\mathrm{B}}\cdot d\vec{S}}_{\phi_B, flux\ de\ B}$: Llei de Faraday-Lenz

3) $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\mathbf{j}}\cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{\mathrm{D}}\cdot d\vec{S}$: Teorema d'ampere-Maxwell

B) Definides en una superfície tancada **C** amb un volum intern **V**.



2) $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dv$: Teorema de Gauss

4) $\oint_C \vec{\mathrm{B}}\cdot d\vec{l} = 0$: Teorema de Gauss del magnetisme/Solenoidabilitat del camp $\vec{B}$

5) $\oint_C \vec{\mathbf{j}}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dv$ Equació de continuïtat o de conservació de la càrrega

Relacions Constitutives

S'anomenen relacions constitutives a.

1. Les relacions entre els tres camps de l'apartat elèctric:

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ i en polarització lineal: $\vec{P} = \chi_e\, \varepsilon_0\, \vec{E} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{D}} = \varepsilon\vec{\boldsymbol{E}}$ amb $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ i $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$

On ε o ε_r depèn de la propietat polaritzadora del material en el que estem

I llavors a partir de $\vec{P}$ obtindríem, si les volguéssim, les càrregues de polarització:

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \rho_P \qquad i \qquad \vec{P}\cdot\hat{n}_e = \sigma_P$$

2. Les relacions entre els tres camps de l'apartat magnètic:

$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ i en magnetització lineal: $\vec{M} = \chi_m\vec{H} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{B}} = \mu\vec{\boldsymbol{H}}$ amb $\mu_r = 1 + \chi_m$ i $\mu = \mu_r\mu_0$

On μ o μ_r depèn de la propietat magnetitzadora del material en el que estem

I llavors a partir de $\vec{M}$ obtindríem, si els volguéssim, els corrents de magnetització:

$$\vec{M}\ x\ \hat{n}_e = \vec{\mathbf{k}}_m \qquad i \qquad \vec{\nabla}\ x\ \vec{M} = \vec{\mathbf{j}}_m$$

Formes de les equacions usant només els camps principals: $\vec{E}$ i $\vec{B}$

En les formes fins aquí posades **1. 2. 3.** i **4.** , hem usat tots 4 camps $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ i $\vec{H}$ principals i secundaris. D'aquesta forma no ha calgut posar-hi les constants ε i μ que depenen del material.

Però si ara hi substituïm, les relacions constitutives: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ i $\vec{B} = \mu\vec{H}$ i suposant materials homogenis (ε i μ uniformes en ells), obtenim una versió només pels dos camps principals $\vec{E}$ i $\vec{B}$, però ara com a contrapartida, sí que hi apareixen ε i μ

1. bulk) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: Llei de Faraday-Lenz

1. interf) $\hat{n} \times (\vec{E}^{+} - \vec{E}^{-}) = 0$: Continuïtat interficial de la component tangencial de $\vec{E}$.

2. bulk) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$: Teorema de Gauss

2. interf) $\hat{n} \cdot (\vec{E}^{+} - \vec{E}^{-}) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$: Discontinuïtat interficial de la component normal de $\vec{E}$

3. bulk) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\vec{j} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$: Teorema d'Ampere-Maxwell

3. interf) $\hat{n} \times (\vec{B}^{+} - \vec{B}^{-}) = \mu\vec{k}$: Discontinuïtat interficial de la component tangencial de $\vec{B}$

4. bulk) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$: Teorema de Gauss del magnetisme/Solenoidabilitat del camp $\vec{B}$

4. interf) $\hat{n} \cdot (\vec{B}^{+} - \vec{B}^{-}) = 0$: Continuïtat interficial de la component normal de $\vec{B}$

Propagació dels camps electromagnètics en un medi il·limitat homogeni, sense càrregues ni corrents

Com a exemple, considerem un medi il·limitat, homogeni i en el qual no hi hagi ni càrrega ni corrent enlloc. En no haver-hi interfícies, les equacions interficials no cal que les escrivim. Pel que fa a les equacions del bulk, hi fem com hem dit: $\rho = \vec{j} = \mathbf{0}$

Llavors les 4 equacions se simplifiquen així:

1) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ **2)** $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ **3)** $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ **4)** $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Anem a trobar una solució d'elles, pels camps $\vec{E}$ i $\vec{B}$

1a part de la determinació de la solució

Prenent el rotacional de **1)** i de **3)**

1') $\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\big(\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{E}\big) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathrm{B}}$ **3')** $\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\big(\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{B}\big) = \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathrm{E}}$

Usant la igualtat del rotacional d'un rotacional: $\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\big(\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{A}\big) = \vec{\nabla}\,\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\big) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$, per als primers termes de **1')** i **3')**.

Usant de nou **1)** i **3)** per a identificar el que hi ha dins les derivades dels segons termes de **1')** i **3')**:

1'') $\vec{\nabla}\,\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\big) - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$ **3'')** $\vec{\nabla}\,\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\big) - \vec{\nabla}^2\vec{B} = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}$

Usant ara **2)** i **4)** per a negligir les dues divergències, obtenim una mateixa equació tant per a $\vec{E}$ com per a $\vec{B}$:

1''') $\vec{\nabla}^2\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0$ **3''')** $\vec{\nabla}^2\vec{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = 0$

Recordem que $\vec{\nabla}^2(\quad)$ és l'operador laplaciana $\vec{\nabla}^2(\quad) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\quad)$

La forma de les equacions **1''')** i **3''')** és la d'una *equació d'ones*, equació molt típica en la física. Les solució són sempre ones en l'espai (l'únic paràmetre d'aquesta equació, $\mu\varepsilon$, que ja veurem que és).

Una de les formes de les ones, i per tant, una de les solucions de **1''')** i **3''')**, són les ones sinusoïdals:

a) $\vec{E}(\vec{r};t) = \vec{E}_0 sin\big(\vec{k}_1\cdot\vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1\big)$

b) $\vec{B}(\vec{r};t) = \vec{B}_0 sin\big(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2\big)$

On $\vec{k}_1$ i $\vec{k}_2$ són precisament els anomenats *vectors d'ona* que indiquen la direcció de propagació de l'ona; també ω_1 i ω_2 són les anomenades *freqüències angulars* o *pulsacions* i φ_1 i φ_2 les *fases inicials* de les ones.

En substituir aquestes dues solucions a **1''')** i a **3''')**, ja veiem que surt:

$$\left(\vec{k}_1^{\;2} - \mu\varepsilon\,\omega_1^{\;2}\right)\vec{E}_0 sin\big(\vec{k}_1\cdot\vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1\big) = 0$$

$$\left(\vec{k}_2^{\;2} - \mu\varepsilon\,\omega_2^{\;2}\right)\vec{B}_0 sin\big(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2\big) = 0$$

que demostra que a) i b) són realment solucions de **1''')** i de **3''')** sempre i quant els dos parèntesis dels factors inicials donin zero:

$$k_1{}^2 - \mu\varepsilon\,\omega_1{}^2 \quad \text{i} \quad k_2{}^2 - \mu\varepsilon\,\omega_2{}^2$$

És a dir:

a') $k_1 = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega_1$ i **b')** $k_2 = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega_2$ o bé

Recordem que les velocitat de propagació d'una ona és sempre igual a la pulsació dividida pel mòdul del vector d'ona, així respectivament les velocitats de a) i de b) són $v_1 = \frac{\omega_1}{k_1}$ i $v_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$

Tenint en compte **a')** i **b')** ja veiem que ambdues velocitats són idèntiques i iguales a $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

2a part de la determinació de la solució

Ara ja sabem que els camps elèctrics i magnètics són respectivament dues ones de la mateixa velocitat de propagació:

a) $\vec{E}(\vec{r};t) = \vec{E}_0 sin\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1\right)$ i **b)** $\vec{B}(\vec{r};t) = \vec{B}_0 sin\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2\right)$

Ara anem a demostrar que els vectors d'ona, les pulsacions i fins i tot les fases inicials són idèntiques pel dos camps. Per a fer-ho apliquem les equacions de Maxwell inicials **1)** i **3)** directament a aquestes solucions. Les recordem quines eren:

1) $\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{B}}$ **3)** $\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$

Llavors aplicant **1)** sobre **a)** i **b)**

a') $-\vec{E}_0 x \vec{k}_1 cos\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1\right) = -(-\omega_1)\vec{B}_0 cos\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2\right)$

Igualment aplicant **2)** sobre **a)** i **b)**

b') $-\vec{B}_0 x \vec{k}_2 cos\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2\right) = \mu\varepsilon(-\omega_1)\vec{E}_0 cos\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1\right)$

Llegint a') i b') veiem que els arguments d'ambdós cosinus han de coincidir en tot moment i lloc, per la qual cosa no queda més remei que $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 \equiv \vec{k}$,que $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ i que $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv \varphi$

És a dir les dues ones tenen el mateix vector d'ones, la mateixa pulsació i la mateixa fase inicial, és a dir, <u>estan en fase tothora i a tot arreu</u> !! . I són:

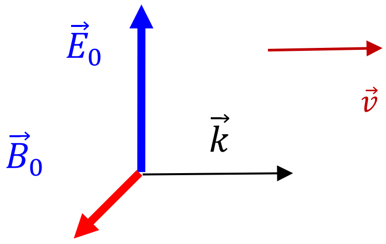
a) $\vec{E}(\vec{r};t) = \vec{E}_0 sin\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi\right)$ i **b)** $\vec{B}(\vec{r};t) = \vec{B}_0 sin\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi\right)$

Simplificant llavors els cos( ) a ambdós membres de **a')** i de **b')** :

a'') $\vec{k}\ x\ \vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0$

$$\textbf{b'')} \quad \vec{B}_0 x\, \vec{k} = \mu\varepsilon\, \omega \vec{E}_0$$

I aquestes dues relacions indiquen que $\vec{B}_0$, $\vec{E}_0$ i $\vec{k}$ són perpendiculars dos a dos entre ells i per tant formen un tríada ortogonal que segons les lleis de la ma dreta o tirabuixó seia com en el dibuix següent:



$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\hat{k}$$

Per altra banda prenent els mòduls de a'') i de b'') i tenint en compte la perpendicularitat mútua dels 3 vectors:

$$\textbf{a''')} \quad k \cdot E_0 = \omega B_0$$

$$\textbf{b''')} \quad k \cdot B_0 = \mu\varepsilon \cdot \omega E_0$$

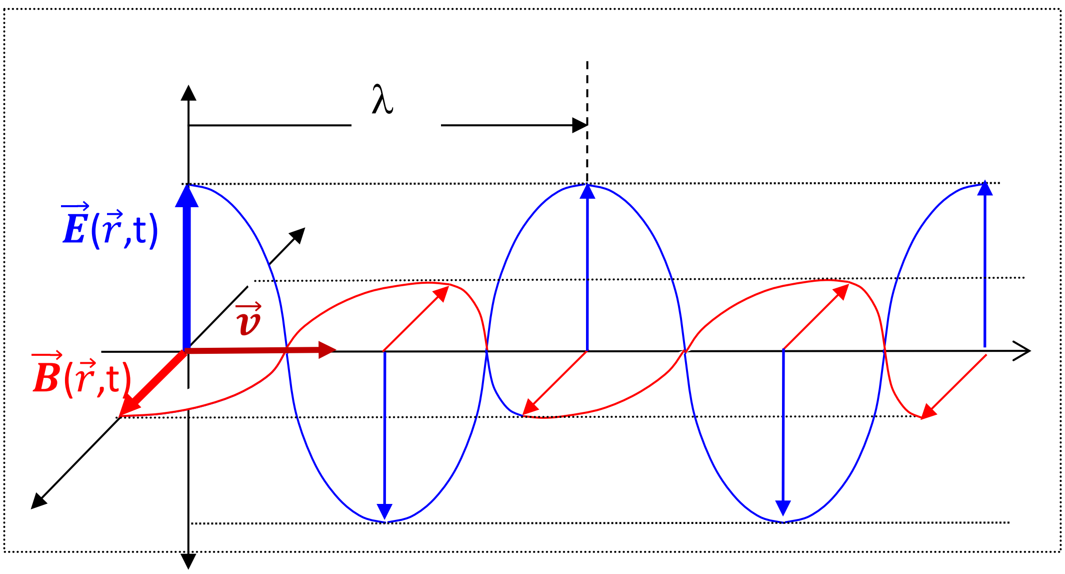
Dividint **b''')** entre **a'''):**

$$\frac{B_0}{E_0} = \mu\varepsilon \frac{E_0}{B_0}$$

O el que és el mateix

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v$$

Recollint tot plegat



La solució son les ones electromagnètiques, com per exemple la llum visible (380 nm < λ <780 nm).

La longitud d'ona, com en tota ona és:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{v}{\frac{\omega}{2\pi}} = 2\pi\frac{v}{\omega} = 2\pi\frac{\frac{\omega}{k}}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$$

I la velocitat de propagació és

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$$

El segon terme és

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\ x10^{-7}\ \frac{N}{A^2} \cdot 8{,}8541878176\ \ x10^{-12}\ \frac{C^2}{N \cdot m^2}}} = 299\ 792\ \ 458\ \frac{m}{s}$$

exactament del tot, la velocitat de propagació de la radiació electromagnètica (o de la llum) en el buit

I el primer terme:

$$f_v = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} \leq 1$$

És el factor de velocitat que li hem d'aplicar a c per a trobar la menor velocitat de propagació de la radiació o llum en un medi de permitivitat relativa $\varepsilon_r \geq 1$ i permeabilitat relativa $\mu_r \geq 1$. També sabem:

$$\frac{E_0}{B_0} = c \cdot f_v$$


AND GOD SAID
$\nabla . \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$
$\nabla . \vec{B} = 0$
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$
AND THERE WAS LIGHT