Anàlisi Matemàtica 1 (AM1)
GEMiF

E3.3 Exercicis: Derivació

1. Solucions:

(a)

Distància per sobre de l'aigua: $\sqrt{36+x^2}$
Distància per sobre de terra: $12-x$
Energia total:
$E(x)=W\sqrt{36+x^2}+L(12-x)$ amb $0\leq x\leq 12$

(b)

Ens diuen:
$W=\frac{3}{2}L$
Queda:
$E(x)=L\left(\frac{3}{2}\sqrt{36+x^2}+12-x\right)$
Derivem i igualem a zero per a trobar els punts crítics:
$E'(x)=L\left(\frac{6x}{4\sqrt{36+x^2}}-1\right)=0$
Resolem l'equació:
$3x=2\sqrt{36+x^2}$
$9x^2=4(36+x^2)$
$5x^2=144$
$x=\pm\frac{12}{\sqrt{5}}$
La solució "física" és:
$x=\frac{12}{\sqrt{5}}\approx 5{,}36$ km
Manca comprovar si és mínim. En l'interval $[0,12]$ la funció $E'(x)$ és contínua, només canvia de signe al punt esmentat, i veiem que $E'(0)<0$ i $E'(12)>0$. Per tant, queda demostrat que $x\approx 5{,}36$ km és un mínim relatiu, i a més és un mínim absolut.

(c)

Ens diuen: $W = k\,L$, amb $k > 1$

$E(x) = L\left(k\sqrt{36+x^2} + 12 - x\right)$

Derivem i igualem a zero per a trobar els punts crítics:

$$E'(x) = L\left(\frac{k\,x}{\sqrt{36+x^2}} - 1\right) = 0$$

Resolem l'equació:

$k^2x^2 = 36 + x^2$

$$x = \frac{6}{\sqrt{k^2-1}}$$

Amb el mateix raonament d'abans, i veient que encara es compleix $E'(0) < 0$ i $E'(12) > 0$, tenim que aquesta x és un mínim absolut.

Per a què el vol directe sigui l'opció de mínim energia s'ha de complir

$$12 = \frac{6}{\sqrt{k^2-1}}$$

$4(k^2-1) = 1$

és a dir

$$k = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$$

Per a què $x = 0$ fos l'opció de mínima energia s'ha de complir

$$0 = \frac{6}{\sqrt{k^2-1}}$$

que no té solució, per tant la resposta és que no és possible.

2. Solució

El cost per n plantes és

$C(n) = 5\cdot 10^6 + n\cdot 10^6 + 10^5\big(0+1+2+\cdots+(n-1)\big)$

$$C(n) = 5\cdot 10^6 + n\cdot 10^6 + 10^5\,\frac{n(n-1)}{2}$$

Els ingressos per lloguer de les n plantes és

$I(n) = 2n\cdot 10^5$

Per tant, el retorn és

$$R(n) = \frac{I(n)}{C(n)} = \frac{2n}{50 + 10n + \frac{n(n-1)}{2}} = \frac{4n}{100 + 20n + n(n-1)}$$

$$R(n) = \frac{4n}{n^2 + 19n + 100}$$

Suposem que n és una variable real x, derivem i igualem a zero

$$R'(x) = \frac{4(100 - x^2)}{(x^2+19x+100)^2} = 0$$

Queda $x = 10$

Per $x \geq 0$ la funció $R'(x)$ és contínua, l'únic canvi de signe és a $x = 10$, i a més tenim que $R'(10^-) > 0$ i $R'(10^+) < 0$. Per tant, $x = 10$ és un màxim absolut, i el nombre òptim de plantes és $n = 10$

3. Solució:

Tenim

$$I(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(s-x)^2}$$

Derivem i igualem a zero

$$I'(x) = -\frac{2a}{x^3} + \frac{2b}{(s-x)^3} = 0$$

$$2a(s-x)^3 = 2bx^3$$

$$\sqrt[3]{a}(s-x) = \sqrt[3]{b}\,x$$

Queda

$$x = \frac{\sqrt[3]{a}\,s}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$$

4. Solució:

Posant els eixos al punt on es dispara el projectil

$$x(t) = v_{0x}\,t$$

$$y(t) = v_{0y}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

Eliminant el temps ens queda l'equació de la trajectòria

$$y(t) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\,x(t) - \frac{g}{2\,v_{0x}^2}\,x(t)^2$$

La velocitat inicial és

$$v_{0x} = v\cos(\alpha+\theta)$$

$$v_{0y} = v\sin(\alpha+\theta)$$

Per simplificar, anomenem $\beta = \alpha + \theta$

$$v_{0x} = v\cos\beta$$

$$v_{0y} = v\sin\beta$$

D'altra banda, el punt d'impacte en temps t_I satisfà

$$\tan\alpha = \frac{y(t_I)}{x(t_I)}$$

Substituint a l'equació de la trajectòria queda

$$x(t_I)\tan\alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\,x(t_I) - \frac{g}{2\,v_{0x}^2}\,x(t_I)^2$$

La solució $x = 0$ correspon a $t = 0$, busquem l'altra solució

$$\tan\alpha = \tan\beta\ - \frac{g}{2\,v^2\cos^2\beta}\,x(t_I)$$

Per tant

$$x(\theta) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{g}\,2\,v^2\cos^2\beta$$

$$x(\theta) = \frac{2v^2\cos\beta}{g}\,[\sin\beta - \tan\alpha\cos\beta]$$

$$x(\theta) = \frac{2v^2\cos\beta}{g\cos\alpha}\,[\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta]$$

$$x(\theta) = \frac{2v^2 \cos\beta \sin(\beta - \alpha)}{g\cos\alpha} = \frac{2v^2 \cos(\alpha + \theta) \sin\theta}{g\cos\alpha}$$

L'abast és igual a

$$R(\theta) = \frac{x(\theta)}{\cos\alpha} = \frac{2v^2 \cos(\alpha + \theta) \sin\theta}{g\cos^2\alpha}$$

Derivem

$$R'(\theta) = \frac{2v^2}{g\ \cos^2\alpha}\ [-\sin(\alpha + \theta)\sin\theta + \cos(\alpha + \theta)\cos\theta]$$

$$R'(\theta) = \frac{2v^2}{g\ \cos^2\alpha}\ \cos(2\theta + \alpha)$$

Igualem a zero

$\cos(2\theta + \alpha) = 0$

Per tant la solució és

$$2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$