Árboles

Definición

Un **árbol** es un grafo conexo sin ciclos. Si eliminamos la condición de conectividad, obtenemos un **bosque**, es decir, un bosque es un grafo acíclico.

Teorema

Si $T = (V, E)$ es un grafo de orden n y medida m, entonces las propiedades siguientes son equivalentes:

1. T es un árbol.
2. Entre cada pareja de vértices de T existe un único camino.
3. T es conexo y $m = n - 1$.
4. T es acíclico y $m = n - 1$.

Definición

Una **hoja** de un árbol es un vértice de grado 1.

Definición

Una **hoja** de un árbol es un vértice de grado 1.

Proposición

Todo árbol con un mínimo de dos vértices tiene un mínimo de dos hojas.

Definición

Una **hoja** de un árbol es un vértice de grado 1.

Proposición

Todo árbol con un mínimo de dos vértices tiene un mínimo de dos hojas.

Demostración

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden n, y sea H el conjunto de las hojas.

Definición

Una **hoja** de un árbol es un vértice de grado 1.

Proposición

Todo árbol con un mínimo de dos vértices tiene un mínimo de dos hojas.

Demostración

Sea $T = (V,E)$ un árbol de orden n, y sea H el conjunto de las hojas. Como $m = n-1$, por la fórmula de los grados podemos escribir:

Definición

Una **hoja** de un árbol es un vértice de grado 1.

Proposición

Todo árbol con un mínimo de dos vértices tiene un mínimo de dos hojas.

Demostración

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden n, y sea H el conjunto de las hojas. Como $m=n-1$, por la fórmula de los grados podemos escribir:

$$\begin{aligned} 2(n-1) &= 2|E| = \sum_{v\in V}\delta(v) = \sum_{v\in H}\delta(v) + \sum_{v\notin H}\delta(v) = \\ &= \sum_{v\in H} 1 + \sum_{v\notin H}\delta(v) \end{aligned}$$

Definición

Una **hoja** de un árbol es un vértice de grado 1.

Proposición

Todo árbol con un mínimo de dos vértices tiene un mínimo de dos hojas.

Demostración

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden n, y sea H el conjunto de las hojas. Como $m=n-1$, por la fórmula de los grados podemos escribir:

$$\begin{aligned} 2(n-1) &= 2|E| = \sum_{v\in V}\delta(v) = \sum_{v\in H}\delta(v) + \sum_{v\notin H}\delta(v) = \\ &= \sum_{v\in H} 1 + \sum_{v\notin H}\delta(v) \geq |H| + \sum_{v\notin H} 2 = |H| + 2(n-|H|). \end{aligned}$$

Definición

Una **hoja** de un árbol es un vértice de grado 1.

Proposición

Todo árbol con un mínimo de dos vértices tiene un mínimo de dos hojas.

Demostración

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden n, y sea H el conjunto de las hojas. Como $m=n-1$, por la fórmula de los grados podemos escribir:

$$\begin{aligned} 2(n-1) &= 2|E| = \sum_{v\in V}\delta(v) = \sum_{v\in H}\delta(v) + \sum_{v\notin H}\delta(v) = \\ &= \sum_{v\in H} 1 + \sum_{v\notin H}\delta(v) \geq |H| + \sum_{v\notin H} 2 = |H| + 2(n-|H|). \end{aligned}$$

Así, de la desigualdad anterior se deriva $|H|\geq 2$.

Ejercicio

Demuestra que un bosque de orden n formado por k árboles tiene medida $n-k$.

Ejercicio

Demuestra que un bosque de orden n formado por k árboles tiene medida $n-k$.

Solución

En efecto, el bosque $G=(V,E)$ será la unión de las componentes conexas $T_1,\ldots,T_k$, que también son árboles.

Ejercicio

Demuestra que un bosque de orden n formado por k árboles tiene medida $n-k$.

Solución

En efecto, el bosque $G=(V,E)$ será la unión de las componentes conexas $T_1,\ldots,T_k$, que también son árboles. A cada una de ellas se les puede aplicar el resultado $m(T_i)=n(T_i)-1$. Por lo tanto,

Ejercicio

Demuestra que un bosque de orden n formado por k árboles tiene medida $n-k$.

Solución

En efecto, el bosque $G=(V,E)$ será la unión de las componentes conexas $T_1,\ldots,T_k$, que también son árboles. A cada una de ellas se les puede aplicar el resultado $m(T_i)=n(T_i)-1$. Por lo tanto,

$$|E|=\sum_{i=1}^{k} m(T_i)=\sum_{i=1}^{k}(n(T_i)-1)=\left(\sum_{i=1}^{k} n(T_i)\right)-k=n-k.$$

Ejercicio

Calcula el número de hojas de un árbol que tiene un vértice de grado 3, tres vértices de grado 2 y el resto vértices de grado 1.

Ejercicio

Calcula el número de hojas de un árbol que tiene un vértice de grado 3, tres vértices de grado 2 y el resto vértices de grado 1.

Solución

Recordemos que si $T=(V,E)$ es un árbol, entonces $m=n-1$, siendo n el orden y m la medida de T. Si x es el número de hojas, se cumple $n=x+3+1$, y si se aplica la fórmula de los grados se tiene:

Ejercicio

Calcula el número de hojas de un árbol que tiene un vértice de grado 3, tres vértices de grado 2 y el resto vértices de grado 1.

Solución

Recordemos que si $T = (V, E)$ es un árbol, entonces $m = n - 1$, siendo n el orden y m la medida de T. Si x es el número de hojas, se cumple $n = x + 3 + 1$, y si se aplica la fórmula de los grados se tiene:

$$x + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = \sum_{v \in V} \delta(v) = 2(n-1) = 2(x+3+1-1) = 2x+6,$$

así, $x = 3$.

Ejercicio

Calcula el número de hojas de un árbol que tiene un vértice de grado 3, tres vértices de grado 2 y el resto vértices de grado 1.

Solución

Recordemos que si $T=(V,E)$ es un árbol, entonces $m=n-1$, siendo n el orden y m la medida de T. Si x es el número de hojas, se cumple $n=x+3+1$, y si se aplica la fórmula de los grados se tiene:

$$x+3\cdot 2+1\cdot 3=\sum_{v\in V}\delta(v)=2(n-1)=2(x+3+1-1)=2x+6,$$

así, $x=3$.
La secuencia de grados es $3,2,2,2,1,1,1$.

Ejercicio

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden $n=9$, que tiene tres vértices de grado 3, ¿cuál es la secuencia completa de grados?

Ejercicio

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden $n=9$, que tiene tres vértices de grado 3, ¿cuál es la secuencia completa de grados?

Supongamos que $V=\{v_1,\ldots,v_9\}$ y que $x_i=\delta(v_i)$ son los grados, $i=1,\ldots,9$.

Ejercicio

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden $n=9$, que tiene tres vértices de grado 3, ¿cuál es la secuencia completa de grados?

Supongamos que $V=\{v_1,\ldots,v_9\}$ y que $x_i=\delta(v_i)$ son los grados, $i=1,\ldots,9$. La secuencia de grados es

$$x_1,x_2,x_3,x_4,1,1,3,3,3.$$

Ejercicio

Sea $T = (V, E)$ un árbol de orden $n = 9$, que tiene tres vértices de grado 3, ¿cuál es la secuencia completa de grados?

Supongamos que $V = \{v_1, \ldots, v_9\}$ y que $x_i = \delta(v_i)$ son los grados, $i = 1, \ldots, 9$. La secuencia de grados es

$$x_1, x_2, x_3, x_4, 1, 1, 3, 3, 3.$$

Según la fórmula de los grados:

Ejercicio

Sea $T = (V,E)$ un árbol de orden $n = 9$, que tiene tres vértices de grado 3, ¿cuál es la secuencia completa de grados?

Supongamos que $V = \{v_1, \ldots, v_9\}$ y que $x_i = \delta(v_i)$ son los grados, $i = 1, \ldots, 9$. La secuencia de grados es

$$x_1, x_2, x_3, x_4, 1, 1, 3, 3, 3.$$

Según la fórmula de los grados:

$$16 = 2(n-1) = \sum_{v \in V} \delta(v) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3$$

De ahí que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$.

Ejercicio

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden $n=9$, que tiene tres vértices de grado 3, ¿cuál es la secuencia completa de grados?

Supongamos que $V=\{v_1,\dots,v_9\}$ y que $x_i=\delta(v_i)$ son los grados, $i=1,\dots,9$. La secuencia de grados es

$$x_1,x_2,x_3,x_4,1,1,3,3,3.$$

Según la fórmula de los grados:

$$16=2(n-1)=\sum_{v\in V}\delta(v)=x_1+x_2+x_3+x_4+1+1+3+3+3$$

De ahí que $x_1+x_2+x_3+x_4=5$.
Puesto que no hay vértices de grado 0, la secuencia completa es

$$3,3,3,2,1,1,1,1,1.$$

Ejercicio

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden $n \geq 2$. Si todos los vértices de T, que no son hojas, son de grado 4. Prueba que el número de hojas es $2x_4+2$, siendo x_4 el número de vértices de grado 4.

Ejercicio

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden $n\geq 2$. Si todos los vértices de T, que no son hojas, son de grado 4. Prueba que el número de hojas es $2x_4+2$, siendo x_4 el número de vértices de grado 4.

Sea x_1 el número de hojas de T. Según la fórmula de los grados $2(n-1)=x_1+4x_4$. Como $n=x_1+x_4$, obtenemos $x_1=2x_4+2$.

Ejercicio

Sea T un árbol tal que los grados de los vértices pertenecen al conjunto $\{1,2,4,5\}$. Sea $x_i(T)$ el número de vértices de grado i, donde $x_4(T) = 8$ y $x_5(T) = 5$.

(a) Calcula $x_1(T)$.

(b) Si no hay adyacencias entre vértices de grado dos, cuál es el máximo número de vértices que puede tener T?

Ejercicio

Sea T un árbol tal que los grados de los vértices pertenecen al conjunto $\{1,2,4,5\}$. Sea $x_i(T)$ el número de vértices de grado i, donde $x_4(T)=8$ y $x_5(T)=5$.

(a) Calcula $x_1(T)$.

(b) Si no hay adyacencias entre vértices de grado dos, cuál es el máximo número de vértices que puede tener T?

Solución

Como $m(T)=n(T)-1$ y por la fórmula de los grados,

$$2(x_1(T)+x_2(T)+x_4(T)+x_5(T)-1)=x_1(T)+2x_2(T)+4x_4(T)+5x_5(T).$$

De ahí que , $x_1(T)=2+2x_4(T)+3x_5(T)=33.$

Ejercicio

Sea T un árbol tal que los grados de los vértices pertenecen al conjunto $\{1,2,4,5\}$. Sea $x_i(T)$ el número de vértices de grado i, donde $x_4(T)=8$ y $x_5(T)=5$.

(a) Calcula $x_1(T)$.

(b) Si no hay adyacencias entre vértices de grado dos, cuál es el máximo número de vértices que puede tener T?

Solución

Como $m(T)=n(T)-1$ y por la fórmula de los grados,

$$2(x_1(T)+x_2(T)+x_4(T)+x_5(T)-1)=x_1(T)+2x_2(T)+4x_4(T)+5x_5(T).$$

De ahí que , $x_1(T)=2+2x_4(T)+3x_5(T)=33$.
Si T_0 es un árbol que satisface las restricciones del problema con $x_2(T_0)=0$ y T_{max} es el árbol que satisface las condiciones del apartado (b), entonces $x_1(T_{max})=x_1(T_0)=33$, $x_2(T_{max})=m(T_0)=n(T_0)-1=45$, $x_4(T_{max})=x_4(T_0)=8$ y $x_5(T_{max})=x_5(T_0)=5$. Por lo tanto, $n(T_{max})=91$. □

Ejercicio

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden $n\geq 2$. Prueba que el número de hojas es $2+\displaystyle\sum_{\delta(v)\geq 3}(\delta(v)-2)$

Ejercicio

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden $n\geq 2$. Prueba que el número de hojas es $2+\sum_{\delta(v)\geq 3}(\delta(v)-2)$

$x_1 =$ número de hojas de T; $x_2 =$ número de vértices de grado 2;
$x_3 =$ número de vértice de grado mayor o igual que 3.

Ejercicio

Sea $T = (V, E)$ un árbol de orden $n \geq 2$. Prueba que el número de hojas es $2 + \sum_{\delta(v) \geq 3} (\delta(v) - 2)$

$x_1 =$ número de hojas de T; $x_2 =$ número de vértices de grado 2;
$x_3 =$ número de vértice de grado mayor o igual que 3.
Fórmula de los grados:

Ejercicio

Sea $T = (V,E)$ un árbol de orden $n \geq 2$. Prueba que el número de hojas es $2 + \sum_{\delta(v) \geq 3} (\delta(v) - 2)$

$x_1 =$ número de hojas de T; $x_2 =$ número de vértices de grado 2;
$x_3 =$ número de vértice de grado mayor o igual que 3.
Fórmula de los grados:

$$2(n-1) = \sum_{v \in V} \delta(v)$$

Ejercicio

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden $n\geq 2$. Prueba que el número de hojas es $2+\sum\limits_{\delta(v)\geq 3}(\delta(v)-2)$

$x_1 =$ número de hojas de T; $x_2 =$ número de vértices de grado 2;
$x_3 =$ número de vértice de grado mayor o igual que 3.
Fórmula de los grados:

$$2(n-1)=\sum_{v\in V}\delta(v)$$

$$2(x_1+x_2+x_3-1)=x_1+2x_2+\sum_{\delta(v)\geq 3}\delta(v)$$

Ejercicio

Sea $T = (V, E)$ un árbol de orden $n \geq 2$. Prueba que el número de hojas es $2 + \sum_{\delta(v)\geq 3} (\delta(v) - 2)$

$x_1 =$ número de hojas de T; $x_2 =$ número de vértices de grado 2;
$x_3 =$ número de vértice de grado mayor o igual que 3.
Fórmula de los grados:

$$
\begin{aligned}
2(n-1) &= \sum_{v\in V} \delta(v) \\
2(x_1 + x_2 + x_3 - 1) &= x_1 + 2x_2 + \sum_{\delta(v)\geq 3} \delta(v) \\
x_1 &= 2 - 2x_3 + \sum_{\delta(v)\geq 3} \delta(v)
\end{aligned}
$$

Ejercicio

Sea $T=(V,E)$ un árbol de orden $n\geq 2$. Prueba que el número de hojas es $2+\sum_{\delta(v)\geq 3}(\delta(v)-2)$

$x_1 =$ número de hojas de T; $x_2 =$ número de vértices de grado 2; $x_3 =$ número de vértice de grado mayor o igual que 3.
Fórmula de los grados:

$$\begin{aligned} 2(n-1) &= \sum_{v\in V}\delta(v) \\ 2(x_1+x_2+x_3-1) &= x_1+2x_2+\sum_{\delta(v)\geq 3}\delta(v) \\ x_1 &= 2-2x_3+\sum_{\delta(v)\geq 3}\delta(v) \\ x_1 &= 2+\sum_{\delta(v)\geq 3}(\delta(v)-2). \end{aligned}$$

Árbol generador de peso mínimo

Definición

Dado un grafo ponderado (G,w) y un árbol generador T de G definimos el **peso del árbol** T como

$$w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e).$$

Árbol generador de peso mínimo

Definición

Dado un grafo ponderado (G,w) y un árbol generador T de G definimos el **peso del árbol** T como

$$w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e).$$

Un **árbol generador mínimo** (minimum spanning tree) de G es un árbol generador T de G de peso $w(T)$ mínimo.
Si G no es conexo, entonces podemos hablar de un **bosque generador mínimo** de G como uno que tiene peso mínimo entre todos los bosques generadores de G.

Árbol generador de peso mínimo

Definición

Dado un grafo ponderado (G,w) y un árbol generador T de G definimos el **peso del árbol** T como

$$w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e).$$

Un **árbol generador mínimo** (minimum spanning tree) de G es un árbol generador T de G de peso $w(T)$ mínimo.
Si G no es conexo, entonces podemos hablar de un **bosque generador mínimo** de G como uno que tiene peso mínimo entre todos los bosques generadores de G.

A continuación veremos dos algoritmos voraces (greedy algorithms) que nos permiten determinar el árbol generador de peso mínimo de un grafo conexo.

Algoritmo de Kruskal:

Entrada: Grafo ponderado
Salida: Árbol generador mínimo T.

inicio
 $k \leftarrow 1$, $T = (V, E')$, $E' = \emptyset$
 mientras $k \leq n-1$
  Elegir la arista $e \in E$ de peso mínimo, no escogida anteriormente de manera que el subgrafo $T = (V, E' \cup e)$ sea acíclico.
  Añadir e a E'.
  $k \leftarrow k+1$
 finmientras
 retorno(T)
fin.

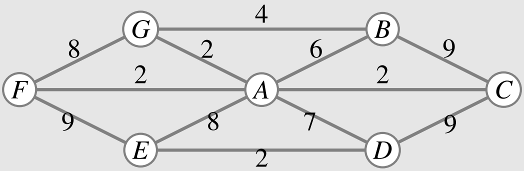
Algoritmo de Prim:

Entrada: Grafo ponderado
Salida: Árbol generador mínimo T.

inicio
$v_0 \in V$, $T = (V, E')$, $E' = \emptyset$, $A = V \setminus \{v_0\}$
mientras $A \neq \emptyset$
Elegir la arista $uv \in E$ de peso mínimo tal que $u \in V \setminus A$ y $v \in A$
Añadir a a E'.
Eliminar v de A
finmientras
retorno(T)
fin.

Ejemplo

Aplica el algoritmo de Prim para determinar un árbol generador mínimo del grafo partiendo del vértice B.



Solución

Si se elige como vértice inicial el vértice B, se obtiene la siguiente tabla:

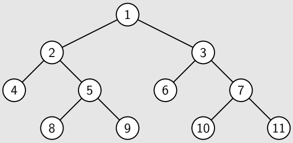
A	B	C	D	E	F	G
(∞,B)	(0,B)	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)
(6,B)	(0,B)*	(9,B)	(∞,B)	(∞,B)	(∞,B)	(4,B)
(2,G)	(0,B)	(9,B)	(∞,B)	(∞,B)	(8,G)	(4,B)*
(2,G)*	(0,B)	(2,A)	(7,A)	(8,A)	(2,A)	(4,B)
(2,G)	(0,B)	(2,A)*	(7,A)	(8,A)	(2,A)	(4,B)
(2,G)	(0,B)	(2,A)	(7,A)	(8,A)	(2,A)*	(4,B)
(2,G)	(0,B)	(2,A)	(7,A)*	(2,D)	(2,A)	(4,B)
(2,G)	(0,B)	(2,A)	(7,A)	(2,D)*	(2,A)	(4,B)

Expresamos el árbol generador en el siguiente formato: arista=peso: $\{G,A\}=2$, $\{A,C\}=2$, $\{A,D\}=7$, $\{D,E\}=2$, $\{A,F\}=2$ y $\{B,G\}=4$. Por lo tanto, el árbol generador tiene peso 19.

Exploración de árboles binarios

Ejemplo

El árbol de la figura es un árbol binario.

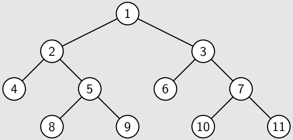


La raíz es el vértice etiquetado con un 1. La raíz tiene dos hijos, con etiquetas 2 y 3.

Exploración de árboles binarios

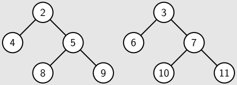
Ejemplo

El árbol de la figura es un árbol binario.



La raíz es el vértice etiquetado con un 1. La raíz tiene dos hijos, con etiquetas 2 y 3.

Además, 2 y 3 son raíces de dos subárboles:



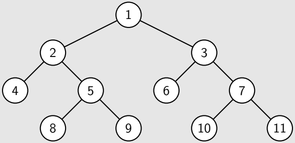
Recorrido en preorden de T

1. Explorar la raíz r.
2. Explorar el subárbol T_1 en preorden.
3. Explorar el subárbol T_2 en preorden.

Recorrido en preorden de T

1. Explorar la raíz r.
2. Explorar el subárbol T_1 en preorden.
3. Explorar el subárbol T_2 en preorden.

Ejemplo



Recorrido en preorden: $1, 2, 4, 5, 8, 9, 3, 6, 7, 10, 11$

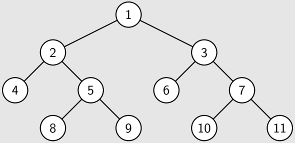
Recorrido en inorden de T

1. Explorar el subárbol T_1 en inorden.
2. Explorar la raíz r.
3. Explorar el subárbol T_2 en inorden.

Recorrido en inorden de T

1. Explorar el subárbol T_1 en inorden.
2. Explorar la raíz r.
3. Explorar el subárbol T_2 en inorden.

Ejemplo



Recorrido en inorden: $4, 2, 8, 5, 9, 1, 6, 3, 10, 7, 11$.

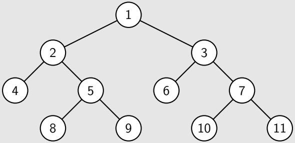
Recorrido en postorden de T

1. Explorar el subárbol T_1 en postorden.
2. Explorar el subárbol T_2 en postorden.
3. Explorar la raíz r.

Recorrido en postorden de T

1. Explorar el subárbol T_1 en postorden.
2. Explorar el subárbol T_2 en postorden.
3. Explorar la raíz r.

Ejemplo



Recorrido en postorden: $4, 8, 9, 5, 2, 6, 10, 11, 7, 3, 1$.

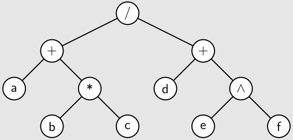
Ejercicio

Encontrar los recorridos en preorden, inorden y postorden del árbol de la expresión aritmética $(a+b*c)/(d+e\hat{}f)$.

Ejercicio

Encontrar los recorridos en preorden, inorden y postorden del árbol de la expresión aritmética $(a+b*c)/(d+e\hat{}f)$.

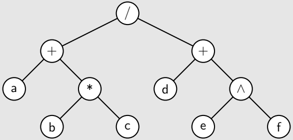
Árbol de la expresión aritmética



Ejercicio

Encontrar los recorridos en preorden, inorden y postorden del árbol de la expresión aritmética $(a+b*c)/(d+e\hat{}f)$.

Árbol de la expresión aritmética

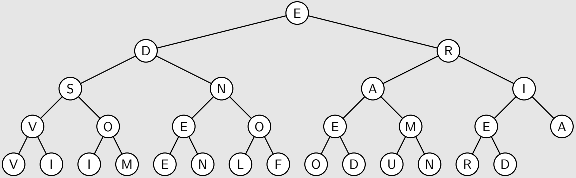


Solución

Preorden: $/ \ + \ a \ * \ b \ c \ + \ d \ \hat{} \ e \ f$
Inorden: $a \ + \ b \ * \ c \ / \ d \ + \ e \ \hat{} \ f$
Postorden: $a \ b \ c \ * \ + \ d \ e \ f \ \hat{} \ + \ /$
¿Cómo se podría calcular una expresión aritmética?

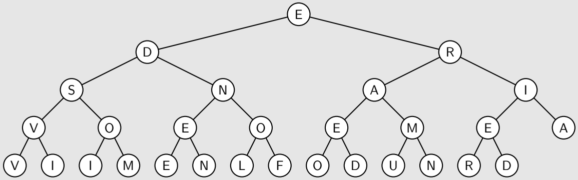
Ejercicio

En el etiquetado de los vértices del siguiente árbol aparece una frase. Para identificarla has de usar un recorrido de exploración de árboles binarios. ¿Cuál es la frase? ¿Qué recorrido has usado para determinarla?



Ejercicio

En el etiquetado de los vértices del siguiente árbol aparece una frase. Para identificarla has de usar un recorrido de exploración de árboles binarios. ¿Cuál es la frase? ¿Qué recorrido has usado para determinarla?

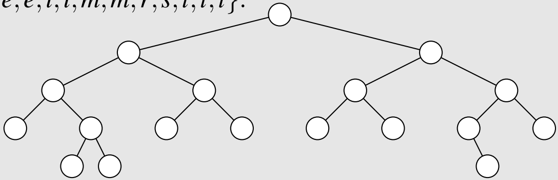


Solución

Recorrido postorden: VIVIMOS EN EL FONDO DE UN MAR DE AIRE

Ejercicio

Las etiquetas de los vértices del árbol de la figura son las de esta lista $\{a,a,a,a,c,c,d,e,e,i,i,m,m,r,s,t,t,t\}$.



Determina la disposición de las etiquetas en el árbol si:

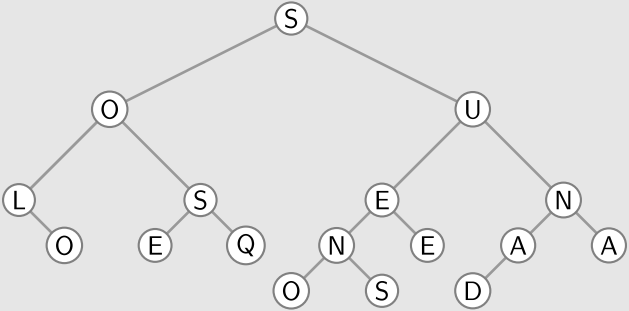
(a) Si el recorrido del árbol en preorden es $m,a,t,e,m,a,t,i,c,a,d,i,s,c,r,e,t,a$.

(b) Si el recorrido del árbol en inorden es $m,a,t,e,m,a,t,i,c,a,d,i,s,c,r,e,t,a$.

(c) Si el recorrido del árbol en postorden es $m,a,t,e,m,a,t,i,c,a,d,i,s,c,r,e,t,a$.

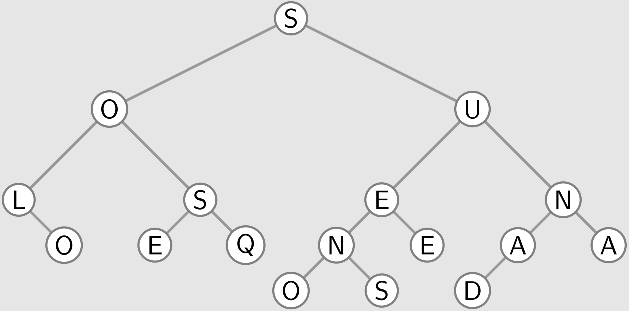
Ejercicio

Determina la frase que se obtiene al recorrer el árbol en alguno de los recorridos de árboles binarios estudiados en clase.



Ejercicio

Determina la frase que se obtiene al recorrer el árbol en alguno de los recorridos de árboles binarios estudiados en clase.



Solución

La frase es SOLO SE QUE NO SE NADA y el recorrido es en preorden.

Si la gente no cree que las matemáticas son simples, es sólo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida.

John Louis von Neumann