

Exercicis amb Vectors

6. Sobre un cos actuen dues forces en el pla xy de mòduls: $F_1 = 5 \text{ N}$ i $F_2 = 7 \text{ N}$, que formen amb l'eix de les x un angle de 60° i -30° respectivament. Determineu la força resultant (o força neta), el seu mòdul i l'angle que forma amb l'eix x .
7. Un cos està sotmès a l'acció de tres forces en el pla xy de mòduls 6 N , 3 N i 4 N , que formen uns angles de 45° , 30° i 60° respecte l'eix de les x . Calculeu el mòdul de la resultant i l'angle que forma respecte l'eix x .
8. En el pla xy el vector \mathbf{A} , de mòdul 30 , forma un angle de 30° , en el sentit positiu de l'eix x . El vector $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, de mòdul $30\sqrt{3}$, forma un angle de 60° en el mateix sentit. Trobeu \mathbf{B} .
9. Les coordenades cartesianes de la posició d'un cos són $x = 2 \text{ m}$, $y = 3 \text{ m}$, $z = 1 \text{ m}$.
a) Escriviu el seu vector posició en les diferents notacions que conegueu.
b) Quina és la distància a l'origen?
10. Sigui el vector $\mathbf{A} = \mathbf{i} + m\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Calculeu m per tal que el seu mòdul sigui 3 .
11. Expresseu $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ com una combinació lineal de $\mathbf{B} = \mathbf{i}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ i $\mathbf{D} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
12. Calculeu el producte escalar d'una força $(5, 3, 4) \text{ N}$ i un desplaçament $(6, -1, 2) \text{ m}$. Quin angle formen aquests dos vectors?
13. Feu el producte escalar de $(4, 8, -2)$ i $(6, -2, 4)$. Que podeu dir d'aquests dos vectors?
14. Feu els productes escalars $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$.
15. S'anomenen angles directors d'un vector als angles α , β , γ que forma amb els eixos x , y i z , respectivament. Quins són els angles directors del vector $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$? Comproveu que la suma dels quadrats dels 3 cosinus directors és igual a la unitat. Quin és el vector unitari en la direcció i sentit de \mathbf{A} ?
16. La suma dels vectors \mathbf{A} i \mathbf{B} és un vector \mathbf{C} de mòdul 24 i cosinus directors, $1/3$, $-2/3$, i $2/3$. A més a més, les components del vector $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ són $(7, 9, 3)$. Quines són les components de \mathbf{A} i \mathbf{B} ?

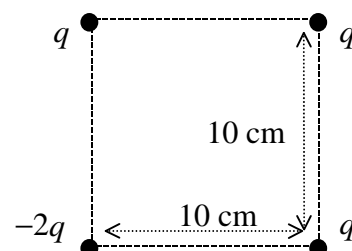
17. Calculeu la projecció de $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ en la direcció de $\mathbf{C} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ i en la de $\mathbf{D} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
18. Descomponeu $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ en les direccions paral·lela i perpendicular al vector unitari $\mathbf{u} = 0.8\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j}$.
19. Determineu x , y i z perquè $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ i $\mathbf{C} = \mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ siguin mútuament perpendiculars.
20. Considereu els vectors $\mathbf{a} = (-4, 3, 2)$, $\mathbf{b} = (6, 2, -3)$ i $\mathbf{c} = (2, -2, 0)$, i els escalars $l = 2$ i $m = 3$, i comproveu se satisfan les següents propietats distributives
- a) $l(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = l\mathbf{a} + l\mathbf{b}$; b) $(l + m)\mathbf{a} = l\mathbf{a} + m\mathbf{a}$; c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- d) Raoneu per què no té cap sentit escriure $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$
21. Demostreu que si $\mathbf{A} \perp (\mathbf{B} - \mathbf{C})$ i $\mathbf{B} \perp (\mathbf{C} - \mathbf{A})$ aleshores també $\mathbf{C} \perp (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.
22. La llei de Coulomb estableix que la força elèctrica que fa una càrrega puntual q_1 sobre una càrrega puntual q_2 ve donada per

$$\mathbf{F}_{12} = k_C \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

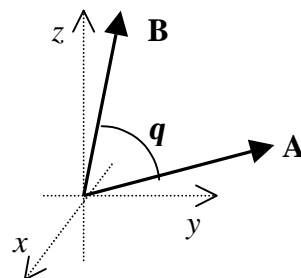
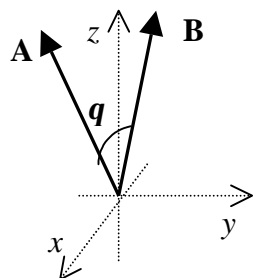
on $k_C = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ és la constant de Coulomb, r_{12} és el mòdul del vector $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ que va de la posició \mathbf{r}_1 de q_1 a la \mathbf{r}_2 de q_2 , i $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{r}_{12} / r_{12}$ és el vector unitari en la direcció i sentit de \mathbf{r}_{12} .

- a) Quina força fa una càrrega de 5 nC que està en el punt (3 m, 6 m) sobre una segona càrrega de 6 nC situada en el punt (6 m, 2 m)?
- b) Quina força fa una càrrega de -5 nC que està en el punt (3 m, 6 m, 5 m) sobre una segona càrrega de 6 nC situada en el punt (6 m, 2 m, 1 m)?

23. En els vèrtexs d'un quadrat de 10 cm de costat hi ha tres càrregues elèctriques puntuals. Les càrregues situades en els vèrtexs oposats són positives i tenen el mateix valor absolut $q = 5 \mu\text{C}$. L'altra és negativa i de valor absolut $2q$. Si en el vèrtex restant hi col·loquem una nova càrrega puntual $+q$, a quina força estarà sotmesa? Apliqueu el principi de superposició: la força \mathbf{F}_i que actua sobre una càrrega q_i és $\mathbf{F}_i = \sum \mathbf{F}_{ji}$, on \mathbf{F}_{ji} ve donada per la llei de Coulomb (enunciada en el problema anterior).



24. Calculeu el producte vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ per als vectors $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ i $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$? Quin angle formen aquests dos vectors? Quin és el producte vectorial $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$?
25. a) Els dos vectors \mathbf{A} i \mathbf{B} de la figura de l'esquerra estan en el pla xz . Si el mòdul dels dos és 5 i formen un angle de 30° , quant val $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$?
- b) Els dos vectors \mathbf{A} i \mathbf{B} de la figura de la dreta estan en el pla yz . Si el mòdul dels dos és 5 i formen un angle de 60° , quant val $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$?



26. Calculeu els productes vectorials $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$; $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$; $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$; $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$; $\mathbf{j} \times \mathbf{j}$; $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$.

27. Quin és el producte vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ dels vectors $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ i $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$? Calculeu els dos vectors de mòdul 6 perpendiculars al pla format per \mathbf{A} i \mathbf{B} .
28. Quins són els dos vectors unitaris perpendiculars a $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ i $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$?
29. Comproveu que el producte vectorial satisfà la propietat distributiva, és a dir, que $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}$. Considereu $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ i $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.
30. Són coplanaris els vectors $\mathbf{A} = (3, 4, 1)$, $\mathbf{B} = (5, -1, 3)$ i $\mathbf{C} = (8, 5, 7)$?
31. La força magnètica \mathbf{F} que actua sobre una càrrega q que es mou amb una velocitat \mathbf{v} en presència d'un camp magnètic \mathbf{B} és $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. ($q_p = e$; $q_e = -e$; $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C).
- a) Quina força actua sobre un protó (q_p) amb una velocitat $(2 \times 10^6 \text{ m/s})\mathbf{i}$ en una regió de l'espai on hi ha un camp magnètic uniforme igual a $\mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})10^{-5}$ T.
- b) Quina seria la força magnètica si en comptes d'un protó és tractés d'un electró (q_e)?
- c) Quina força actuaria sobre del protó si és moguéssim en el sentit negatiu de l'eix de les x ?
32. Siguin $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ i $\mathbf{B} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Calculeu:
- a) el producte escalar,
- b) el producte vectorial,
- c) l'angle que formen,
- d) els vectors de mòdul $\sqrt{34}$ perpendiculars al pla determinat per \mathbf{A} i \mathbf{B} ,
- e) la descomposició de \mathbf{A} en un vector paral·lel i un altre perpendicular a \mathbf{B} ,
- f) el valor de \mathbf{a} per tal que el vector $\mathbf{C} = -3\mathbf{i} + \mathbf{a}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ sigui coplanari amb \mathbf{A} i \mathbf{B} .
33. Demostreu que l'àrea d'un triangle determinat per tres punts O , P i Q és igual a $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|/2$, on \mathbf{A} és el vector que va de O a P i \mathbf{B} el que va de O a B (Recordeu que l'àrea d'un triangle és un mig de la base per l'alçada.)
34. Quin angle formen dues diagonals interiors d'un cub?
35. Es pot demostrar que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$.
- a) Comproveu-ho amb els vectors $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$ i $\mathbf{C} = (C_1, C_2, 0)$.
- b) A partir de la relació anterior, demostreu que per a qualsevol vector unitari \mathbf{e} se satisfà la relació $\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + \mathbf{e} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{e})$. Què signifiquen els dos termes de la dreta?
36. Siguin els vectors $\mathbf{A} = 4t\mathbf{i} + 5t^2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ i $\mathbf{B} = 5t\mathbf{i} + \mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$.
- a) Calculeu $d\mathbf{A}/dt$ i $d\mathbf{B}/dt$.
- b) Comproveu que $d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})/dt = (d\mathbf{A}/dt) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{B}/dt)$.
- c) Comproveu que $d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})/dt = (d\mathbf{A}/dt) \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times (d\mathbf{B}/dt)$.
- d) Calculeu $\int_0^t \mathbf{A}(t')dt'$ i $\int_0^t (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})dt'$.

Solucions

1. $(8.56\mathbf{i} + 0.83\mathbf{j})$ N, 8.6 N, 0.097 rad

7. 12.76 N, 0.805 rad
8. $30\mathbf{j}$
9. a) $\mathbf{r} = (2, 3, 1) \text{ m} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \text{ m}$; b) $\sqrt{14} \text{ m} = 3.74 \text{ m}$
10. $m = \pm 2$
11. $\mathbf{A} = -\mathbf{B} - \mathbf{C} + 3\mathbf{D}$
12. $35 \text{ Nm} = 35 \text{ J}$, 39.4°
13. El producte escalar és 0 i, per tant, els dos vectors són perpendiculars
14. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$
15. $\mathbf{a} = 103.63^\circ$, $\mathbf{b} = 19.47^\circ$ i $\mathbf{g} = 76.37^\circ$, $-0.236\mathbf{i} + 0.943\mathbf{j} + 0.236\mathbf{k}$
16. $\mathbf{A} = (23/5, -23/5, 7)$ i $\mathbf{B} = (17/5, -57/5, 9)$
17. $7/5 \mathbf{i} - 6/\sqrt{13}$
18. $\mathbf{A}_{\parallel} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{A}_{\perp} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
19. $x = 52$, $y = 8$, $z = -34$
20. a) $\mathbf{l}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{l}\mathbf{a} + \mathbf{l}\mathbf{b} = (4, 10, -2)$; b) $(\mathbf{l} + \mathbf{m})\mathbf{a} = \mathbf{l}\mathbf{a} + \mathbf{m}\mathbf{a} = (-20, 15, 10)$;
c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = -38$; d) $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ és un vector i $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ és un escalar
21. Si $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{C}) = 0$ i $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{A}) = 0$, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{C}) + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0$
22. a) $(6.48 \times 10^{-9} \text{ N})\mathbf{i} - (8.64 \times 10^{-9} \text{ N})\mathbf{j}$; b) $(-3.085, 4.114, 4.114) \text{ nN}$
23. $6.6 \text{ N } \mathbf{i} + 6.6 \text{ N } \mathbf{j}$
24. $-28\mathbf{k}$, 83.88° , $28\mathbf{k}$
25. a) $-12.5\mathbf{j}$; b) $21.65\mathbf{i}$
26. $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$; $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$; $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$; $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$; $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$; $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$
27. $-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\pm (2.45\mathbf{i} + 2.45\mathbf{j} + 4.9\mathbf{k})$
28. $\pm \frac{1}{\sqrt{6}} (-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$
29. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{j}) = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
 $\mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (-3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
30. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq 0$, per tant \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} no són coplanaris
31. a) $(9.6 \times 10^{-18} \text{ N})\mathbf{k}$; b) $-(9.6 \times 10^{-18} \text{ N})\mathbf{k}$; c) $-(9.6 \times 10^{-18} \text{ N})\mathbf{k}$
32. a) 9 ; b) $-12\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$; c) $68.9^\circ = 1.2 \text{ rad}$; d) $\pm (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$;
e) $\mathbf{A}_{\parallel} = 1.08\mathbf{j} - 1.44\mathbf{k}$ i $\mathbf{A}_{\perp} = 4\mathbf{i} + 1.92\mathbf{j} + 1.44\mathbf{k}$; f) $\mathbf{a} = -4.5$
- 33.
34. $\arccos(1/3) = 70.53^\circ = 70^\circ 32'$
35. a) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (A_2 C_2 B)\mathbf{i} - (A_1 B C_2)\mathbf{j} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
36. a) $4\mathbf{i} + 10t\mathbf{j}$, $5\mathbf{i} - 2t\mathbf{k}$; b) $62t$; c) $-20t^3\mathbf{i} + (12t^2 - 30)\mathbf{j} + (4 - 75t^2)\mathbf{k}$; d) $2t^2\mathbf{i} + (5/3)t^3\mathbf{j} - 6t\mathbf{k}$, $(31/3)t^3$