Anàlisi Matemàtica 2 (AM2)
GEMiF

E2.7: Optimització i multiplicadors de Lagrange

1. Trobeu els punts crítics de:

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$
   b) $f(x,y) = x^2 - y^2$
   c) $f(x,y) = x^2y + y^2x$
   d) $f(x,y) = 2(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Solucions

a) Tenim $f(x,y) = x^2 + y^2$, per tant

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Com la funció és diferenciable en tot el domini, l'únic punt crític és el que fa que el gradient sigui 0, és dir, l'origen $(0,0)$

Com $f(x,y) \geq 0$, i a més $f(0,0) = 0$, deduïm que aquest punt crític és a més un *mínim absolut*

b) Tenim $f(x,y) = x^2 - y^2$, per

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Com la funció és diferenciable en tot el domini, l'únic punt crític és el que fa que el gradient sigui 0, és dir, l'origen $(0,0)$

Observem que
$$f(x,0) = x^2 \geq f(0,0) = 0$$
mentre que
$$f(0,y) = -y^2 \leq f(0,0) = 0$$
Per tant, el punt crític ha de ser un *punt de sella*.

c) Tenim $f(x,y) = x^2y + y^2x$, per tant

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2$$

Com la funció és diferenciable en tot el domini, l'únic punt crític és el que fa que el gradient sigui 0:

$$2xy + y^2 = 0, \qquad 2xy + x^2 = 0$$

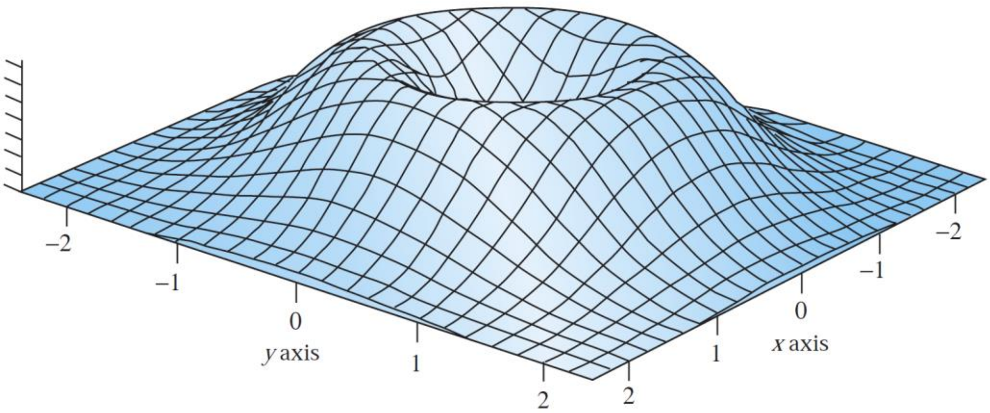
Queda $x = \pm y$. Substituint resulta que l'unica solució és l'origen $(0,0)$

Quan $x = y$ tenim $f(x,y) = 2x^3$, que té tant valor positius com negatius al voltant de l'origen, per tant aquest punt crític és a més un *mínim absolut*

d) Tenim $f(x,y) = 2(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, per tant

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(1 - x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(1 - x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

El gradient s'anul.la si $x = y = 0$, i també si $x^2 + y^2 = 1$. El primer és un mínim local, i els segons formen un cercle de màxims locals (i globals)



2. Analitzeu els punts crítics de:

   a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$
   b) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$
   c) $f(x,y) = x^5y + xy^5 + xy$

Solucions

b) Tenim $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$, per tant

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2 + 2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

L'únic punt crític és l'origin, $(0,0)$. La Hessiana a l'origen val

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

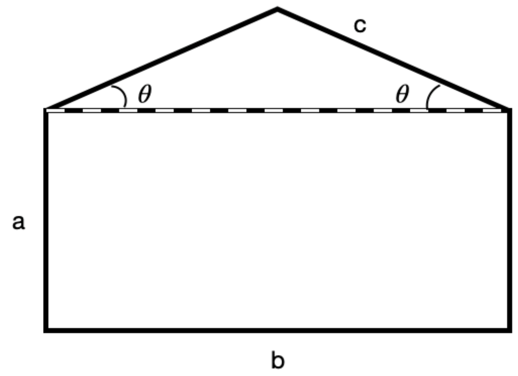
Com $D_1 = 2 > 0$ i $D_2 = 4 > 0$, queda que f té un mínim relatiu a l'origen.

3. Analitzeu la funció

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$$

en els punts $(0,0,0)$ i $(-1,1,1)$

4. Un pentàgon es forma col·locant un triangle isòsceles sobre un rectangle, tal com es mostra al diagrama. Si el perímetre del pentàgon és P, troba les longituds dels costats del pentàgon que maximitzaran l'àrea del pentàgon.



Solució:

Solucionarem el problema utilitzant com a variables a, b, θ. També es podria fer utilitzant a, b, c. La relació entre totes dues ve donada per

$$c = \frac{b}{2\cos\theta}$$

L'àrea que volem optimitzar es pot expressar com

$$\text{Àrea} = ab + \frac{1}{2}b\sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}} = ab + \frac{1}{4}b\sqrt{4c^2 - b^2}$$
$$\text{Àrea} = ab + \frac{1}{2}b\,c\sin\theta = ab + \frac{1}{4}b^2\tan\theta$$

i el perímetre ha de ser

$$\text{Perímetre} = 2a + b + 2c = P$$

La funció Lagrangiana del problema d'optimització serà

$$L(a, b, \theta; \lambda) = ab + \frac{1}{4}b^2\tan\theta - \lambda\left(2a + b + \frac{b}{\cos\theta} - P\right)$$

Fem les derivades parcials

$$\frac{\partial L}{\partial a} = b - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = a + \frac{1}{2} b \tan\theta - \lambda\left(1 - \frac{1}{\cos\theta}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{4} b^2 \frac{1}{\cos^2\theta} - \lambda \frac{b}{\cos^2\theta} \sin\theta = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2a + b + \frac{b}{\cos\theta} - P = 0$$

De la primera equació obtenim

$$\lambda = \frac{b}{2}$$

Substituint a la tercera, tenint en compte que $\cos\theta > 0$ i $b \neq 0$, queda

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

Queda el sistema

$$2a + b\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = P$$
$$a = \frac{b}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)$$

La solució final és

$$a = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$b = P\left(2 - \sqrt{3}\right)$$
$$c = P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)$$

5. La distribució de Boltzmann és una distribució de probabilitat de gran interès a la mecànica estadística, la branca de la Física que permet descriure les propietats macroscòpiques de sistemes formats per moltes partícules a partir de les propietats dels seus components individuals. Suposem que el nostre sistema macroscòpic admet n estats diferents, cadascun dels quals amb una probabilitat p_i i una energia E_i, per $i \in \{1, \dots, n\}$. Calcula les probabilitats que maximitzen l'entropia

$$S = -k_B \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

on k_B és la constant de Boltzmann, i sabem que la suma de probabilitats és 1, i que el valor esperat de l'energia està fixat a un cert valor $\langle E \rangle$

$$\langle E \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i E_i$$

Observació: un dels multiplicadors de Lagrange no es pot calcular explícitament, però es pot donar una equació que ha de satisfer. Aquest multiplicador és igual a $1/T$, on T és la temperatura.

Solucions

La funció Lagrangiana del problema d'optimització és

$$L(p_1, \dots, p_n; \alpha, \beta) = -k_B \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i - \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1 \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^{n} p_i E_i - \langle E \rangle \right)$$

Les derivades parcials respecte els p_k, $\forall k$, valen

$$\frac{\partial L}{\partial p_k} = -k_B \ln p_k - k_B p_k \frac{1}{p_k} - \alpha - \beta\, E_k = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln p_k = -1 - \frac{\alpha}{k_B} - \frac{\beta\, E_k}{k_B} \quad \Rightarrow \quad p_k = e^{-1-\frac{\alpha}{k_B}}\, e^{-\frac{\beta\, E_k}{k_B}} = C\, e^{-\frac{\beta\, E_k}{k_B}}$$

on s'ha definit

$$C = e^{-1-\frac{\alpha}{k_B}}$$

Les parcials respecte els multiplicadors de Lagrange α i β recuperen els dos lligams. El primer lligam permet obtenir el valor de C:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = C \sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{\beta\, E_i}{k_B}} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \left(\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{\beta\, E_i}{k_B}} \right)^{-1} = \frac{1}{Z}$$

on

$$Z = \sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{\beta\, E_i}{k_B}}$$

s'anomena la funció de partició. Per tant, les probabilitats corresponents a la distribució de Boltzmann són:

$$p_k = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\beta\, E_i}{k_B}} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

on s'ha definit

$$\beta = \frac{1}{T}$$

Aquest multiplicador de Lagrange β (o equivalentment, la temperatura T) no es pot determinar explícitament però sabem que ha de complir aquesta equació:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{i=1}^{n} E_i \, e^{-\frac{\beta\, E_i}{k_B}}$$