Grau Enginyeria Matemàtica i Física

FÍSICA DE FLUIDS

Tema 3: Lleis de conservació

Clara Salueña

Objectius

- Introduir el punt de vista Lagrangià i Eulerià en la cinemàtica dels fluids
- Introduir la derivada material,
- Els conceptes de línies de corrent i trajectòries de les partícules fluides,
- Definir vorticidad i circulació
- Obtenir les equacions de transport
- Formular l'equació d'Euler per al flux invíscid.
- Enunciar la condició de flux incompressible

Leonhard Euler (BASILEA, 1707, † SANT PETERSBURG, 1783)

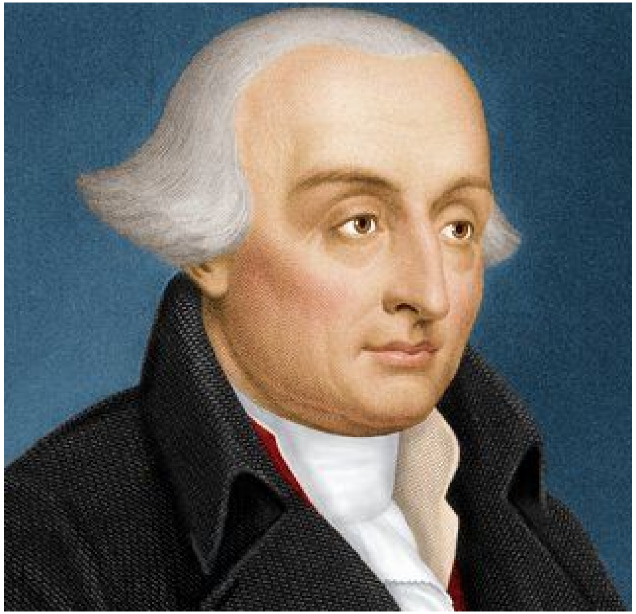
- Va establir les bases de la mecànica de fluids:
  - l'equació de continuitat,
  - el potencial de velocitat,
  - les equacions d'Euler per al flux invíscid

- *"Per molt sublims que siguin les investigacions sobre fluids que devem als senyors Bernoulli, Clairaut i d'Alembert, flueixen tan naturalment de les meves dues fórmules generals que no es pot admirar suficientment aquest acord de les seves profundes meditacions amb la simplicitat dels principis a partir dels que jo he obtingut les meves dues equacions"*

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Euler.html

Joseph-Louis Lagrange (TORÍ, 1736, † PARÍS 1813)

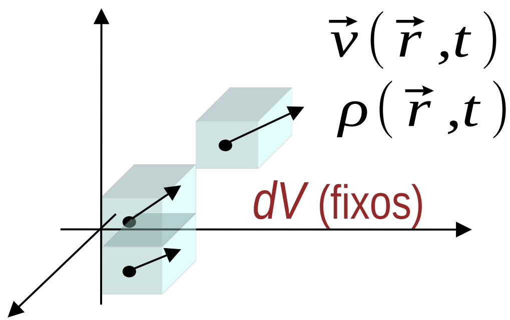
(Giuseppe Lodovico Lagrangia)

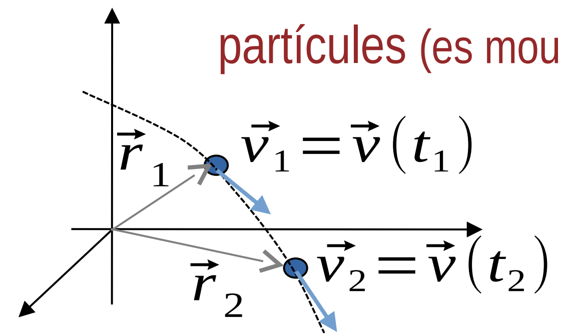


- Va estudiar la integració d'equacions diferencials en general,
- En la seva obra *Mécanique analytique,* que compila tots els resultats de la mecànica newtoniana, transforma la mecànica clàssica en una branca de l'anàlisi matemática.
- "*Ningú no trobarà figures en aquesta obra. Els mètodes que exposo no requereixen ni construccions, ni arguments geomètrics o mecànics, sinó únicament operacions algebraiques, subjectes a curs regular i uniforme*"

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lagrange.html

Descripció Euleriana vs Lagrangiana



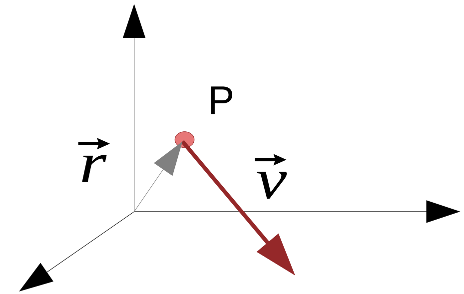


- la velocitat $\vec{v}(\vec{r},t)$ és una magnitud de camp, com la densitat, $\rho(\vec{r},t)$ i la pressió
- és la més utilitzada als *solvers* de CFD

- el fluid es considera com un sistema de partícules que evolucionen en el temps
- en CFD, se simulen partícules lagrangia-nes amb certes dinàmiques

Quan hi ha fases sòlides, en CFD se solen combinar ambdues. Això pel que fa a les descripcions macroscòpiques, perquè les descripcions micro- i mesoscòpiques dels fluids solen utilitzar la versió Lagrangiana (és més natural pensar en «partícules»)

Derivada material



$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$(\vec{a}=\vec{F}/m)$$

$$\vec{a}=\vec{a}(\vec{r},t)$$

- P punt del espai
- *q* qualsevol magnitud física (la velocitat de la partícula lagrangiana, per exemple)
- Com s'expressa la seva derivada en la descripció euleriana?
- Coneixem $\vec{v}=\vec{v}(\vec{r},t)$ (camp de velocitat)

Lagrange $\rightarrow$ $$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial q}{\partial t}+\underbrace{\frac{\partial q}{\partial x_P}\frac{\partial x_P}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial y_P}\frac{\partial y_P}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial z_P}\frac{\partial z_P}{\partial t}}_{\frac{\partial q}{\partial x_P}v_x+\frac{\partial q}{\partial y_P}v_y+\frac{\partial q}{\partial z_P}v_z}=$$

$$=\frac{\partial q}{\partial t}+\nabla q\cdot\vec{v}$$ $\rightarrow$ Euler

Exemple

- Calcula l'acceleració al camp de velocitat bidimensional

$$\vec{v} = x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$$

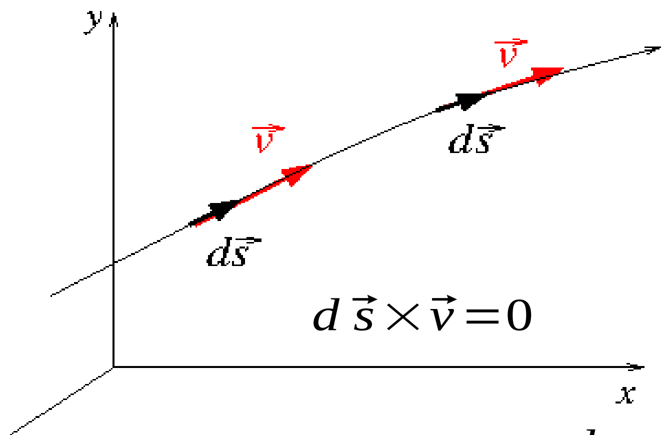
(observa que es *estacionari!*)

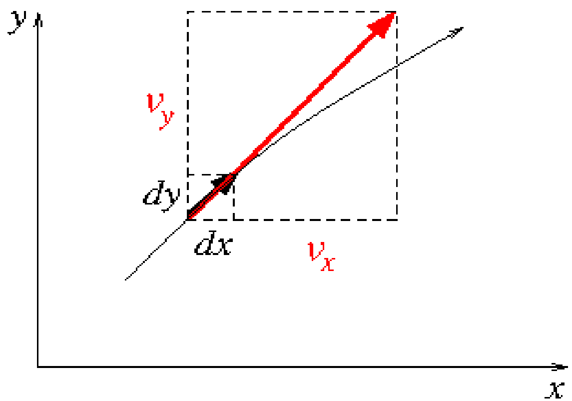
$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \vec{v}) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

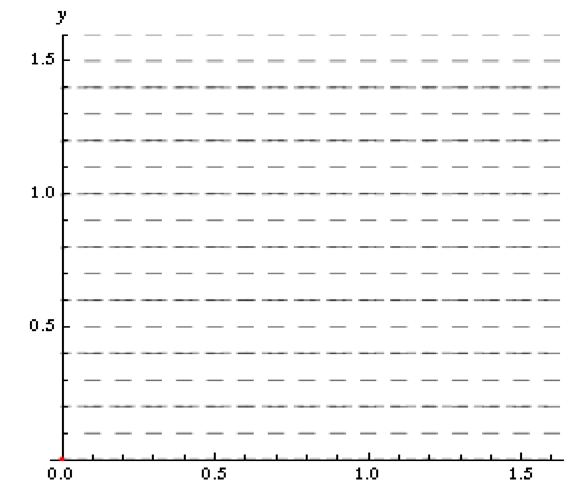
A partir d'ara treballarem en la descripció Euleriana

Línies de corrent, de traça i trajectòries



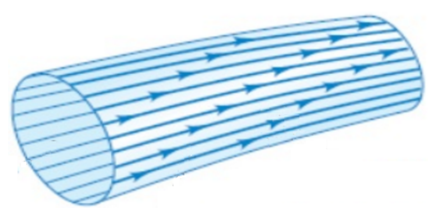


$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}$$



Línies de corrent (gris)
Línea de traça (blau)
Trajectòria (vermell)

- Concepte:
  tub de corrent



https://www.youtube.com/watch?v=PtWz4p-WnL8

Exemple: línies de corrent

$$\vec{v} = x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \ln x = -\ln y + \text{ctnt}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{C}{x}$$

- Obre Matlab
- A la finestra de comandes introdueix les instruccions del requadre de la dreta
- Observa el resultat

```
>> x = 1:10
>> y = 1:10
>> [X,Y] = meshgrid(x,y)
>> vx = X
>> vy = -Y
>> quiver(vx,vy)
>> hold on
>> contour(X.*Y)
```

Exemple: línies de corrent

$$\vec{v} = x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$$

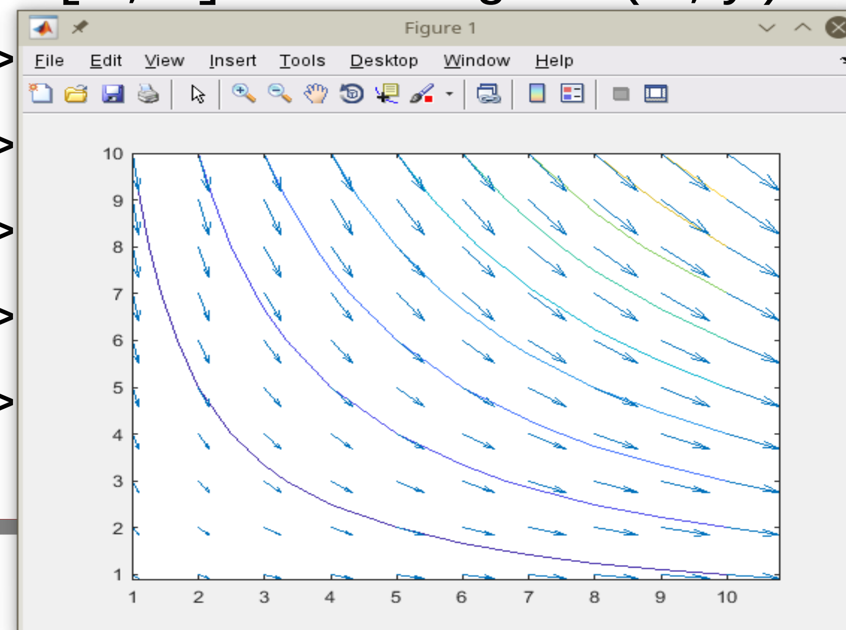
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \ln x = -\ln y + \mathrm{ctnt}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{C}{x}$$

- Obre Matlab
- A la finestra de comandes introdueix les instruccions del requadre de la dreta
- Observa el resultat

```
>> x = 1:10
>> y = 1:10
>> [X,Y] = meshgrid(x,y)
>>
>>
>>
>>
>>
```



Exemple: trajectòries

$$\vec{v}=x\,\vec{i}-y\,\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dt}=v_x \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dx}{dt}=x \quad\Rightarrow\quad \ln x=t+C_1\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=v_y \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{dt}=-y \quad\Rightarrow\quad -\ln y=t+C_2\end{array}\right\}\quad \ln x+\ln y=C_1-C_2$$

$$\Downarrow$$

$$x\,y=\text{ctnt}$$

- Però... què passa si $\vec{v}=x(1+2t)\,\vec{i}+y\,\vec{j}$?
- Les línies de corrent són les corbes de la família

$$x^{\frac{1}{1+2t}}\,y=C$$

- Les trajectòries són en canvi les corbes de la família $x\,y=C\,\mathrm{e}^{t^2}$

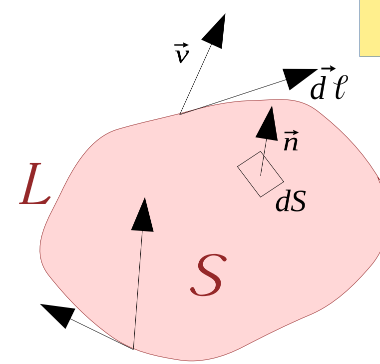
Les línies de corrent i les trajectòries (també les línies de traça) coincideixen si el camp de velocitat és estacionari

Vorticitat, Ω

$$\vec{\Omega}=\nabla\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}$$

- Indica la rotació en torn d'un punt
- Si un flux es irrotacional: $\nabla\times\vec{v}=0$
- Si Ω = 0, es compleix (teorema de Stokes)

$$\oint_L \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\,dS = 0$$



- Es defineixen: línies de vòrtex i tub de vòrtex
- Un huracà o cicló és un exemple de tub de vòrtex
- En un tub de vòrtex, el flux de la vorticitat es conserva ✸

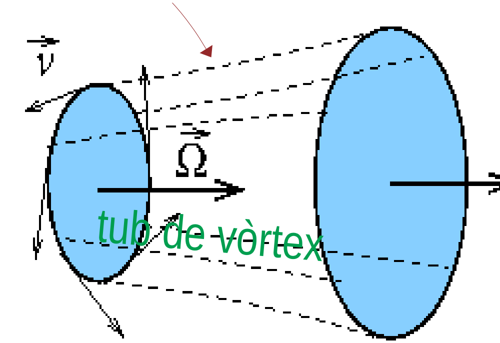
✸Tingues en compte:

Si A és qualsevol vector, satisfà $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$

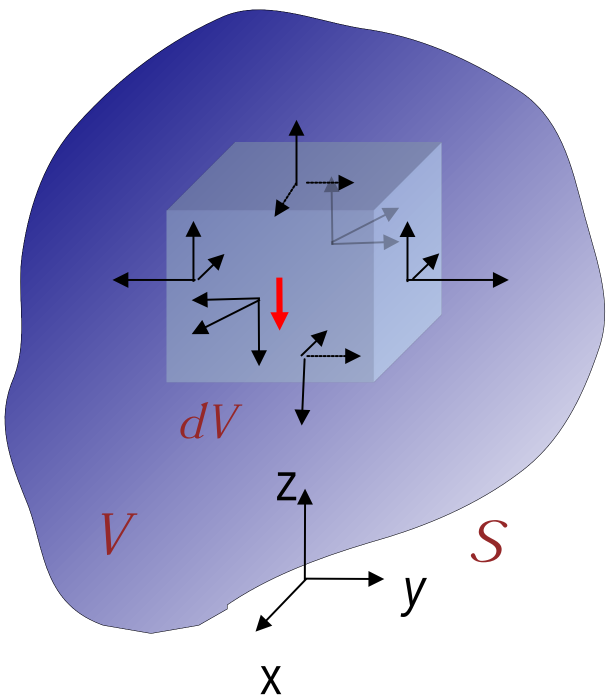
Si definim, $\vec{B}\equiv\nabla\times\vec{A}$

Substituint al teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS=\int_V \nabla\cdot\vec{B}\,dV=0$$



Lleis de conservació

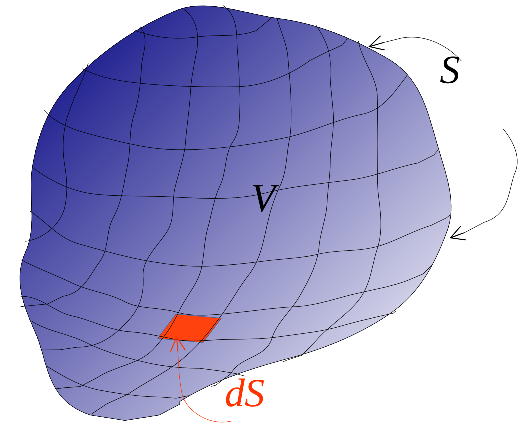


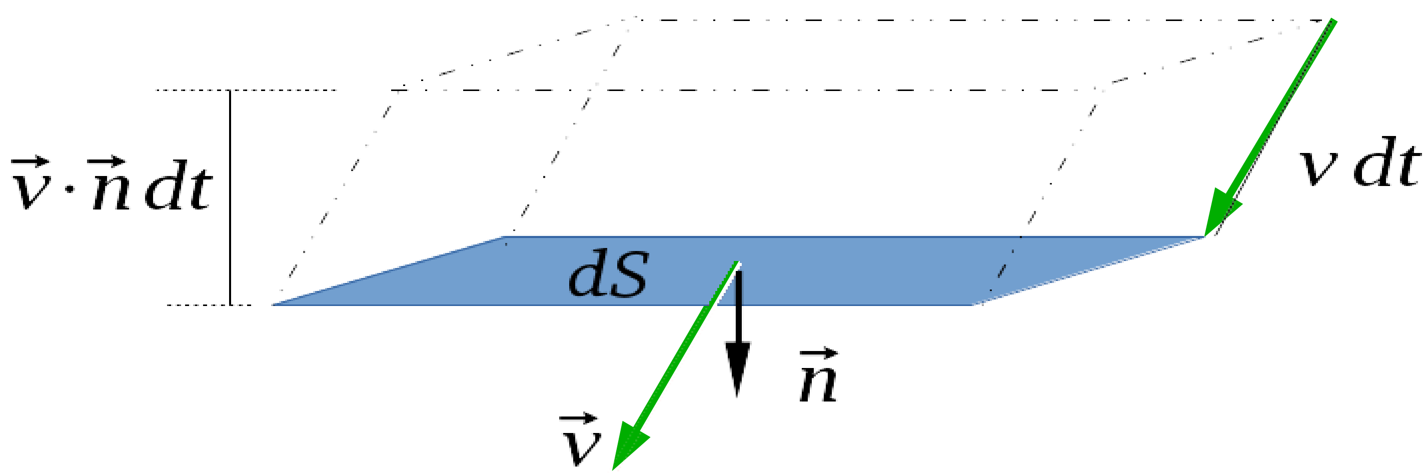
En V,

- La massa es conserva $\int_V \rho dV$
- El moment se conserva si no actuen forces externes (el pes és una força externa) $\int_V \rho\vec{v} dV$
- L'energia es conserva si no hi ha forces viscoses ni fenòmens tèrmics $\int_V \varepsilon dV$

Flux convectiu d'una magnitud

Flux convectiu de ϕ a través de S = $\int_S \phi\, \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS$





Balanços integrals

- Conservació de la massa

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\oint_S \rho\, \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS$$

- Balanç de moment

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{v}\, dV = -\oint_S \rho\vec{v}\,\vec{v}\cdot\vec{n}\, dS + \oint_S \vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{n}\, dS - \int_V \rho g\,\vec{j}\, dV$$

- Balanç d'energia

$$\frac{d}{dt}\int_V \epsilon\, dV = -\oint_S \epsilon\,\vec{v}\cdot\vec{n}\, dS + \oint_S \vec{v}\cdot\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{n}\, dS - \int_V \rho g\,\vec{j}\cdot\vec{v}\, dV + \int_V \dot{Q}\, dV$$

Sistema d'equacions diferencials

- Per convertir els balanços integrals en equacions diferencials, hem de fer servir el teorema de la divergència

$$\oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV$$

- Per exemple, partint de l'equació integral per a la conservació de la massa,

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,dV = -\oint_S \rho\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,dV = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV \qquad -\oint_S \rho\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = -\int_v \nabla\cdot(\rho\,\vec{v})\,dV$$

ja que fem servir la descripció Euleriana, i els dV són fixos en l'espai

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\,\vec{v} = 0$$

Sistema d'equacions diferencials

- La resta d'equacions s'obtenen de forma similar (veure el desenvolupament al pdf del tema)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} - \rho g \vec{j}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \vec{v}) = \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\vec{\sigma}}) - \rho g \vec{j} \cdot \vec{v} + \dot{Q}$$

Equacions de Euler per al flux incompressible

- Les equacions de Euler s'obtenen particularitzant les equacions anteriors per a flux **invíscid**, on el tensor d'esforços **pren la forma que té en equilibri**,

$$\vec{\vec{\sigma}}_{inv}=\begin{pmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{pmatrix}$$

- En un flux **incompressible ⇒ ρ=ctnt**
- Si el flux és **incompressible**, sovint tenim únicament fenòmens mecànics, on **T=ctnt i no hi ha trasferència de calor**. Aleshores podem prescindir de l'equació per a l'energia.
- Usant algunes identitats vectorials, obtenim les equacions de Euler per al flux incompressible

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\,\vec{v}=0 \;\Rightarrow\; \nabla\cdot\vec{v}=0$$

Conservació de la massa

$$\frac{\partial(\rho\,\vec{v})}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\,\vec{v}\,\vec{v}=\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}-\rho\,g\,\vec{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\,\vec{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}-g\,\vec{j}$$

Transport de moment

Una mica més en detall...

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\,\vec{v}=0 \xrightarrow{\rho=\text{ctnt}} \nabla\cdot\vec{v}=0$$

$$\frac{\partial(\rho\,\vec{v})}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\,\vec{v}\,\vec{v}=\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}-\rho\,g\,\vec{j} \xrightarrow{\rho=\text{ctnt}} \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\nabla\cdot\vec{v}\,\vec{v} = \nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}-\rho\,g\,\vec{j}$$

Una mica més en detall...

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\vec{v}=0 \xrightarrow{\rho=\text{ctnt}} \nabla\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

o bé: $\equiv \quad \partial_i v_i=0 \quad (i=x,y,z)$ (els índexs repetits se sumen: notació de Einstein)

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\vec{v}\vec{v}=\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}-\rho g\vec{j} \xrightarrow{\rho=\text{ctnt}} \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\nabla\cdot\vec{v}\vec{v} = \nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}-\rho g\vec{j}$$

Una mica més en detall...

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\vec{v}=0 \xrightarrow{\rho=\text{ctnt}} \nabla\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

o bé: $\equiv \quad \partial_i v_i=0 \quad (i=x,y,z)$

(els índexs repetits se sumen: notació de Einstein)

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\vec{v}\,\vec{v}=\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}-\rho g\vec{j} \xrightarrow{\rho=\text{ctnt}} \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\nabla\cdot\vec{v}\,\vec{v} = \nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}-\rho g\vec{j}$$

$$\nabla\cdot\vec{v}\,\vec{v} = \partial_i v_i v_j\,\hat{e}_j = (\partial_i v_i)v_j\,\hat{e}_j + v_i\partial_i v_j\,\hat{e}_j$$

$$= \vec{v}\,\underbrace{\nabla\cdot\vec{v}}_{0} + \vec{v}\cdot\nabla\,\vec{v}$$

Una mica més en detall...

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\vec{v}=0 \xrightarrow{\rho=\text{ctnt}} \nabla\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

o bé: $\equiv \quad \partial_i v_i=0 \quad (i=x,y,z)$

(els índexs repetits se sumen: notació de Einstein)

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\vec{v}\vec{v}=\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}-\rho g\vec{j} \xrightarrow{\rho=\text{ctnt}} \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\,\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla p-\rho g\vec{j}$$

$$\nabla\cdot\vec{v}\vec{v} = \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$$

$$\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\begin{pmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\partial p/\partial x\\ \partial p/\partial y\\ \partial p/\partial z\end{pmatrix} = -\nabla p$$

Equacions de Euler per a flux incompressible

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$ Conservació de la massa

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - g\,\vec{j}$$ Transport de moment

- Les equacions de Euler són un sistema d'equacions diferencials en derivades parcials, de primer ordre en el temps i en l'espai, que expressen la conservació de la matèria i el transport de moment.
- En ser equacions conservatives (no hi ha fricció) tenen una *integral primera*
- Aquesta **integral primera**, en el cas estacionari, és **l'equació de Bernoulli**, que junt amb l'equació per a la conservació del cabal, té multitud d'aplicacions

Equació de Bernoulli

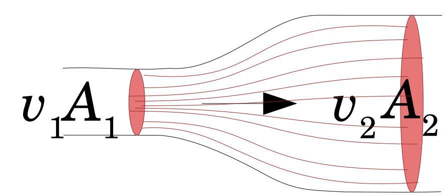
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\,\vec{v}=-\frac{\nabla\,p}{\rho}-g\,\vec{j}\;\Rightarrow\qquad \boxed{\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+g\,y=\text{cte}}$$

- Flux incompressible
- Estacionari
- Efectes viscosos menyspreables
- Vàlid al llarg d'una línia de corrent

Equació de continuïtat

$$\nabla\cdot\vec{v}=0\;\Rightarrow\; v\,A=\text{Cte}$$

- Flux incompressible
- «El que entra ha de sortir»
- Integrant sobre el volum d'un tub de corrent,



$$\int_V \nabla\cdot\vec{v}\,dV=0\;\Rightarrow\;\oint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=0\;\Rightarrow\; v\,A=\text{Ctnt}$$

Funció de corrent ψ i potencial de velocitat ϕ

Si un flux és incompressible i 2D, existeix la funció de corrent, ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y$$

Aquesta elecció de ψ fa que se satisfaci automàticament la condició $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Si un flux és irrotacional, existeix el potencial de velocitat, tal que $\nabla\phi = \vec{v}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Flux incompressible } (\nabla \cdot \vec{v} = 0) \\ \text{Flux irrotacional } (\nabla \times \vec{v} = 0)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{Flux ideal}$$

Els fluxos ideals en 2D es poden estudiar a partir del potencial complex, F

$$F = \phi + i\psi$$

En un flux ideal, el potencial de velocitat i la funció de corrent satisfan l'equació de Laplace (comprova-ho)

Velocitat complexa $W \equiv dF/dz$

En cartesianes,

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

la velocitat complexa és

$$\boxed{W = v_x - iv_y}$$

En coordenades polars: $z = x + iy = re^{i\theta}$

i amb les igualtats

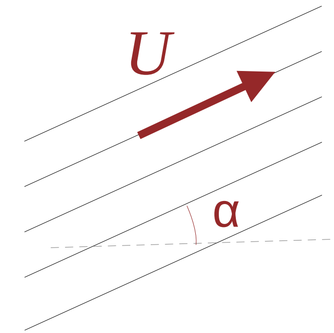
$$\begin{cases} v_x = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta \\ v_y = v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta \end{cases}$$

$$\boxed{W = [v_r(r,\theta) - iv_\theta(r,\theta)]e^{-i\theta}}$$

Alguns fluxos ideals plans

- Flux uniforme

$$F = [U e^{-i\alpha}] z \qquad W = \frac{dF}{dz} = U e^{-i\alpha} = U \cos\alpha - i U \sin\alpha$$

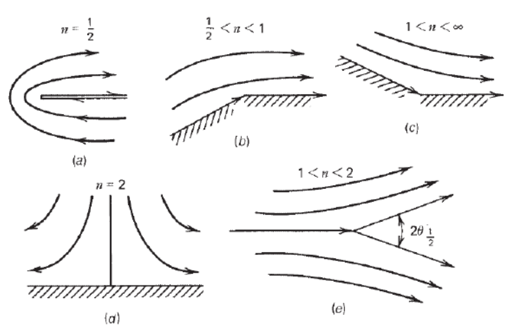


- Flux de cantonada

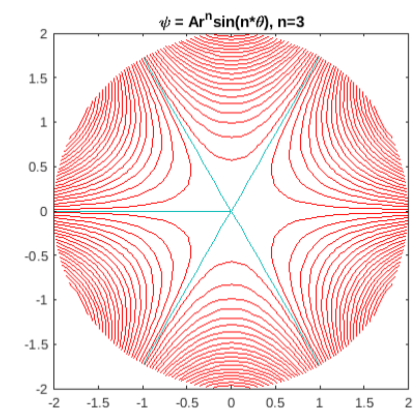
$$F = A z^n \quad (A, n \in \mathbb{R}) \qquad W = \frac{dF}{dz} = nAz^{n-1} = nAr^{n-1}(\cos n\theta + i \sin n\theta) e^{-i\theta}$$

$$\phi = Ar^n \cos n\theta$$

$$\psi = Ar^n \sin n\theta$$




```
R = 0:0.2:2;
Th = 0:pi/100:2*pi;
[r,th] = meshgrid(R,Th);
x=r.*cos(th);
y=r.*sin(th);
A=1; n=3;
f_corr = A*r.^n.*sin(n*th);
contour(x,y,f_corr,40,'r'), hold on
contour(x,y,f_corr,[0 0]), hold off
```



- Línia de fonts

$$F = \frac{m}{2\pi}\ln(z - z_0) \quad (m \in \mathbb{R})$$

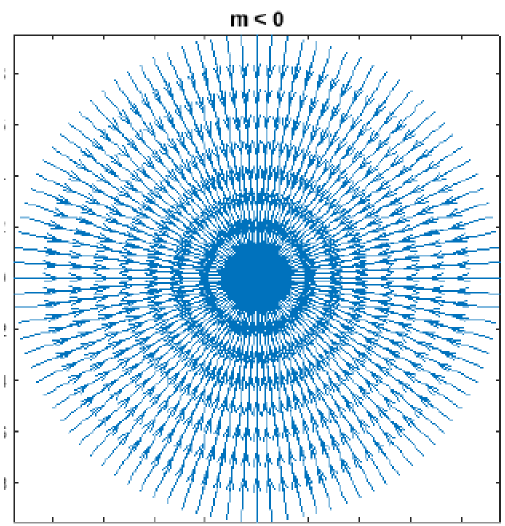
fent $z_0 = 0$ i en polars,

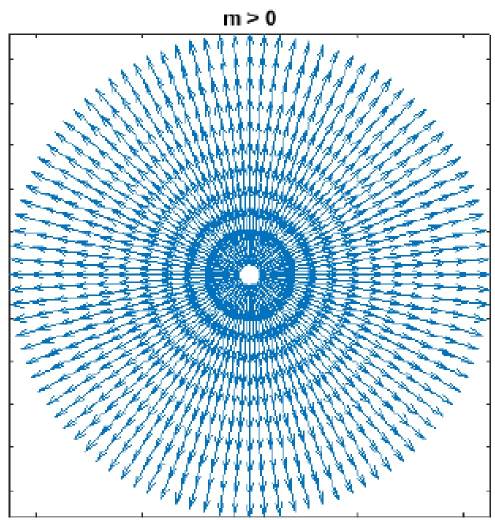
$$F = \frac{m}{2\pi}(\ln r + i\theta)$$

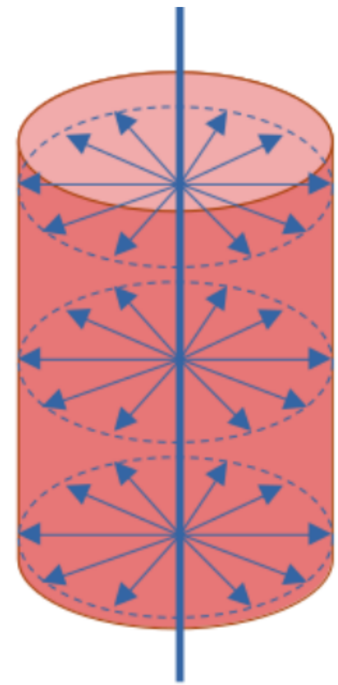
$$\begin{cases} \phi = \dfrac{m}{2\pi}\ln r \\ \psi = \dfrac{m}{2\pi}\theta \end{cases}$$

$$W = \frac{dF}{dz} = \frac{m}{2\pi z} = \frac{m}{2\pi r}e^{-i\theta}$$

$$v_r = \frac{m}{2\pi r}, \quad v_\theta = 0$$







línia de fonts positives al llarg de r=0

- Línia de vòrtexs

$$F = -i\,\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z - z_0) \quad (\Gamma \in \mathbb{R})$$

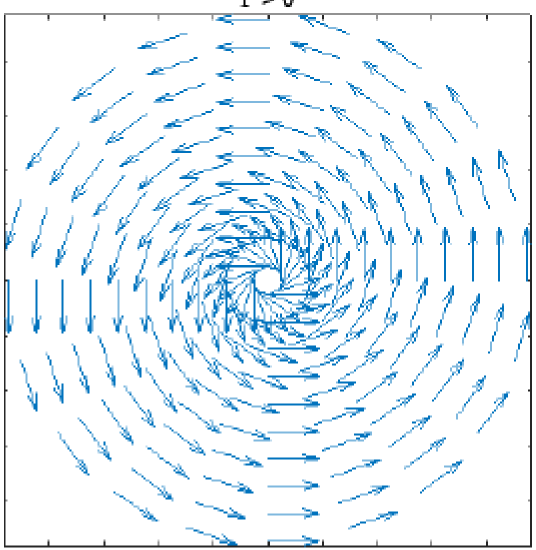
fent $z_0 = 0$ i en polars,

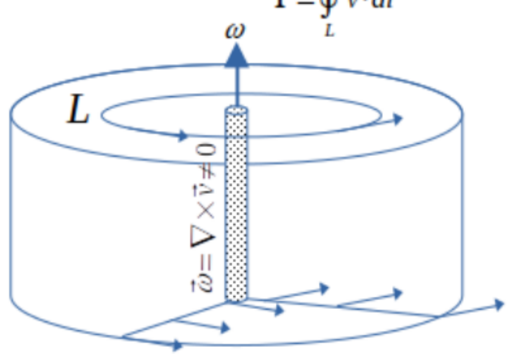
$$F = \frac{\Gamma}{2\pi}(\theta - i\ln r)$$

$$\begin{cases} \phi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta \\ \psi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r \end{cases}$$

$$W = \frac{dF}{dz} = -i\frac{\Gamma}{2\pi z} = -i\frac{\Gamma}{2\pi r}e^{-i\theta}$$

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$





línia de vòrtexs al llarg de r=0

$$\Gamma_L = \oint_L \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \int_L v_\theta d\ell$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi r}\int_L d\ell = \frac{\Gamma}{2\pi r}2\pi r$$

$$= \Gamma$$

Fi de la presentació