# Reflexió en dobles superfícies paral·leles molt acostades.

Tenim tres medis d´índexos: $n_1$, $n_2$ i $n_3$ posats com a la figura amb interfícies planes i paralel·les. Suposem $n_1 < n_2$ , $n_3 > n_2$ Representa que la franja d'índex $n_2$ del mig és una capa prima de gruix **d** molt petit.

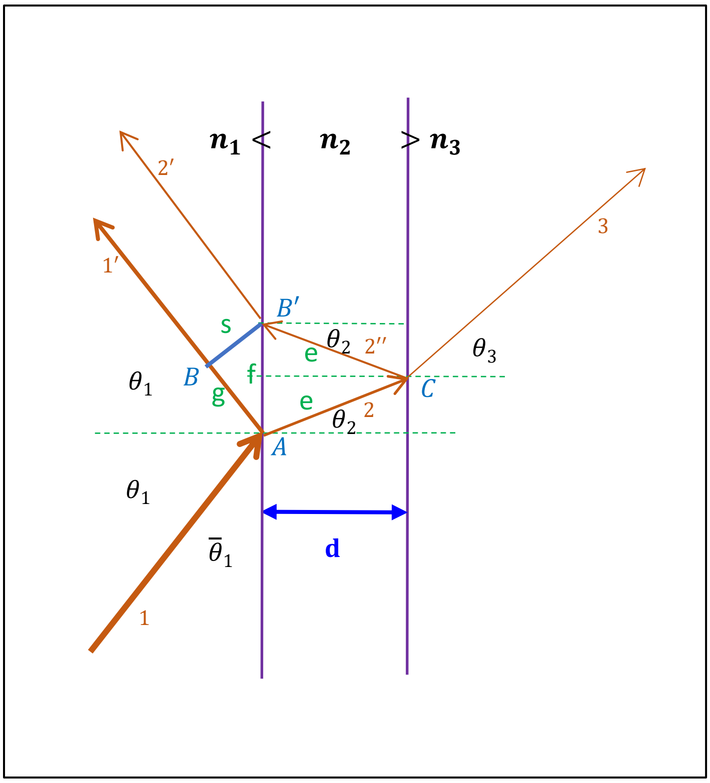
Suposem que tenim un raig incideix des de el medi 1 sobre la interfície entre el 1 i el 2 amb un angle $\theta_1$ la incidència és en el punt A. Suposem polarització s, el raig incident te el camp elèctric seguint la següent funció d'ona:

$$\vec{E}_{1,s} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} \quad (1)$$

A partir d'aquí ocorreran diferents fenòmens de rajos emergents:

1. Reflexió a la interfície 1-2: raig 1' amb un angle $\theta_1$ cap a l'altre costat

$$\vec{E'}_1 = r_{1,2} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k'}_1 \cdot \vec{r})}$$




2. Refracció al medi 2:
   raig 2 amb un angle $\theta_2$

$$\vec{E}_2 = t_{1,2} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k'}_2 \cdot \vec{r})}$$

3. Refracció al medi 3
   raig 3 amb un angle $\theta_3$

$$\vec{E}_3 = t_{2,3} t_{1,2} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_3 \cdot \vec{r})}$$

4. Reflexió a la interfície 2-3:
   raig 2'' amb un angle $\theta_2$ cap a l'altre costat

$$\vec{E''}_2 = r_{2,3} t_{1,2} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k''}_2 \cdot \vec{r})}$$

5. Refracció al medi 1:
   raig 2' amb un angle $\theta_1$ cap a l'altre costat

$$\vec{E'}_2 = t_{2,1} r_{2,3} t_{1,2} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k'}_2 \cdot \vec{r})}$$

Al final 1' i 2' es propaguen de forma paral·lela cap al medi 1, i per tant formen un front d'ona pla, el primer dels plans del front d'ona és el segment B-B'.

Les distàncies en verd són significatives pel que vindrà a continuació i cal calcular-les:

$$e = \frac{\mathbf{d}}{cos\theta_2} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{f} = 2\boldsymbol{e}\ sin\theta_2 = 2\mathbf{d}\frac{sin\theta_2}{cos\theta_2} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}\cos\bar{\theta}_1 = \boldsymbol{f}\sin\theta_1 = 2\mathbf{d}\frac{sin\theta_2}{cos\theta_2}\sin\theta_1 \quad (4)$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{f}\sin\bar{\theta}_1 = \boldsymbol{f}\cos\theta_1 = 2\mathbf{d}\frac{sin\theta_2}{cos\theta_2}\cos\theta_1 \quad (5)$$

Anem a veure les funcions d'ona de 1' i de 2' un cop arribats a aquest front d'ona B-B'. Cal tenir en compte que a causa del paral·lelisme, i la coincidència al medi 1 $\overrightarrow{k'}_1 = \overrightarrow{k'}_2$ ( ja que $\overrightarrow{k'}_1 = \frac{\omega}{v_1}\widehat{k'}_1 = \frac{2\pi f}{c}n_1\widehat{k'}_1 = \frac{2\pi f}{c}n_1\widehat{k'}_2 = \overrightarrow{k'}_2$ i per tant en mòdul

també seran iguals: $k'_1=k'_2$ . Igualment pels 2 rajos en el medi 2 en mútua reflexió: $k_2=k''_2$

$$\overrightarrow{E'}_1(B) = r_{1,2}\vec{E}_0 e^{i(\omega t - k'_1\cdot g)}$$

$$\overrightarrow{E'}_{2'}(B') = t_{2,1}r_{2,3}t_{1,2}\vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_2\cdot e - k_2\cdot e)}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{\overrightarrow{E'}_{2'}(B')}{\overrightarrow{E'}_1(B)} = \frac{t_{2,1}}{r_{1,2}}r_{2,3}t_{1,2}\ e^{-i(k_2\cdot 2e - k'_1\cdot g)}$$

Per tant la interferència entre els dos rajos en el front d'ona B-B' és:

$$\overrightarrow{E'}_1(B) + \overrightarrow{E'}_{2'}(B') = \left(1 + \frac{t_{2,1}}{r_{1,2}}r_{2,3}t_{1,2}\ e^{-i(k_2\cdot 2e - k'_1\cdot g)}\right)\overrightarrow{E'}_1(B)$$

Que serà constructiva si:

$$e^{-i(k_2\cdot 2e - k'_1\cdot g)} = 1 \quad (6)$$

I destructiva si:

$$e^{-i(k_2\cdot 2e - k'_1\cdot g)} = -1 \quad (7)$$

Per això, destructiva ho serà quan, l'angle de l'exponencial imaginària sigui un nombre semi-sencer de voltes: $(k_2\cdot 2e - k'_1\cdot g) = \left(m + \frac{1}{2}\right)2\pi$ , amb m sencer

$$2\pi\frac{f}{c}(n_2\cdot 2e - n_1\cdot g) = \left(m+\frac{1}{2}\right)2\pi$$

$$(n_2\cdot 2e - n_1\cdot g) = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{f}$$

$$2\left(n_2\frac{1}{cos\theta_2} - n_1\frac{sin\theta_2}{cos\theta_2}\sin\theta_1\right)\mathbf{d} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{f}$$

La condició de disseny de la **d** per tal que això passi és:

$$\mathbf{d} = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{f}}{2\left(n_2\frac{1}{cos\theta_2} - n_1\frac{sin\theta_2}{cos\theta_2}\sin\theta_1\right)} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{2f}\frac{cos\theta_2}{n_2 - n_1 sin\theta_2\sin\theta_1}$$

$$= \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{2f}\frac{\sqrt{1-sin^2\theta_2}}{n_2 - \frac{1}{n_2}n_2 sin\theta_2 n_1\sin\theta_1} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{2f}\frac{\sqrt{{n_2}^2 - {n_2}^2 sin^2\theta_2}}{{n_2}^2 - n_2 sin\theta_2 n_1\sin\theta_1}$$

$$= \left|\begin{matrix} usant\ la\ llei\ d'Snell \\ n_2 sin\theta_2 = n_1\sin\theta_1\end{matrix}\right| = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{2f}\frac{\sqrt{{n_2}^2 - {n_1}^2 sin^2\theta_1}}{{n_2}^2 - {n_1}^2 sin^2\theta_1}$$

$$= \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{2f}\frac{1}{\sqrt{{n_2}^2 - {n_1}^2 sin^2\theta_1}} \qquad (8)$$

Amb aquesta darrera expressió la d ha quedat només en funció de l'angle d'incidència $\theta_1$

Pel cas d'incidència normal $(\theta_1 = 0)$

$$\mathbf{d} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{2fn_2} \qquad (9)$$

Aquesta és la condició que ha de satisfer d per tal de tenir interferència destructiva (Suposem que el que volem és una *capa antireflectant*, i que reflecteixi el mínim)

L'amplitud de la suma destructiva serà:

$$\left(1+\frac{t_{2,1}}{r_{1,2}}r_{2,3}t_{1,2}\ \underbrace{e^{-i(k_2\cdot 2e - k\prime_1\cdot g)}}_{-1}\right)\overrightarrow{E'}_1(B) = \left(1-\frac{t_{2,1}}{r_{1,2}}r_{2,3}t_{1,2}\right)\overrightarrow{E'}_1(B)$$

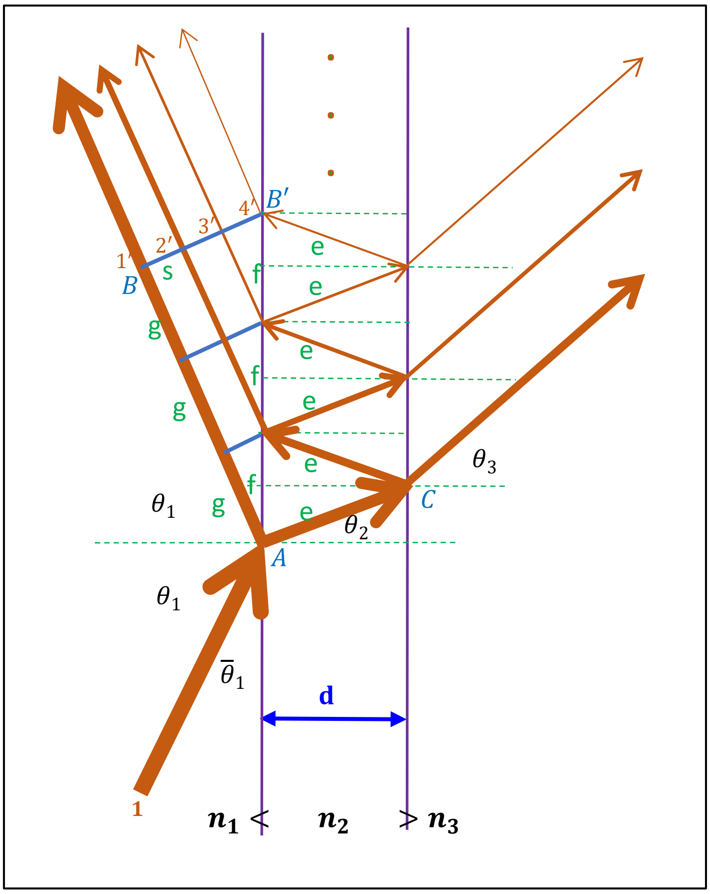
El factor:

$$p = \left(1-\frac{t_{2,1}}{r_{1,2}}r_{2,3}t_{1,2}\right) \qquad (10)$$

serà amb el que s'haurà reduït el raig reflectit $\overrightarrow{E'}_1(B)$ i com veiem és <1

## Reflexions i refraccions múltiples entre les dues cares

En realitat el raig 1 encara segueix fent més coses que no les que es veuen a la figura anterior, se segueix reflectint diverses vegades dins del medi 2 en les dues cares d'aquest, i una fracció de cada reflexió surt pel medi 1:




Factors entre rajos:

1→1': $h_{1,1'} = r_{1,2}e^{-i3k_1 g}$

1→2':

$$h_{1,2'} = t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}e^{-i2k_1 g - ik_2 2e} = \frac{h_{1,1'}}{r_{1,2}} t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}e^{i(k_1 g - k_2 2e)}$$

1→3':

$$h_{1,3'} = t_{1,2}r_{2,3}\left(r_{2,1}r_{2,3}\right)t_{2,1}e^{-ik_1 g - 2ik_2 2e} = \frac{h_{1,1'}}{r_{1,2}}\left(t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}\right)\left(r_{2,1}r_{2,3}\right)e^{i2(k_1 g - k_2 2e)}$$

1→4':

$$h_{1,4'} = t_{1,2}r_{2,3}\left(r_{2,1}r_{2,3}\right)^2 t_{2,1}e^{-i0k_1 g - 3ik_2 2e} = \frac{h_{1,1'}}{r_{1,2}}\left(t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}\right)\left(r_{2,1}r_{2,3}\right)^2 e^{i3(k_1 g - k_2 2e)}$$

....

I així successivament amb més rajos cada cop més dèbils

La suma final al front d'ona B-B' és:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= h_{1,1'} + h_{1,2'} + h_{1,3'} + h_{1,4'} + \cdots \\
&= h_{1,1'}\left(1 + \frac{t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}}{r_{1,2}} e^{i(k_1 g - k_2 2e)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(r_{2,1}r_{2,3}\right)^m e^{im(k_1 g - k_2 2e)}\right) \\
&= h_{1,1'}\left(1 + \frac{t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}}{r_{1,2}} e^{i(k_1 g - k_2 2e)} \left[\frac{1}{1 - r_{2,1}r_{2,3}e^{i(k_1 g - k_2 2e)}}\right]\right) = \\
&= h_{1,1'}\left(1 + \frac{t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}}{r_{1,2}} \frac{e^{i(k_1 g - k_2 2e)}}{1 - r_{2,1}r_{2,3}e^{i(k_1 g - k_2 2e)}}\right)
\end{aligned}
$$

$$h_1 = h_{1,1'}\left(1 + \underbrace{\frac{t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}}{r_{1,2}}\frac{1}{e^{-i(k_1 g - k_2 2e)} - r_{2,1}r_{2,3}}}_{\alpha}\right) = h_{1,1'}(1+\alpha) \quad (11)$$

El terme $\alpha$ és el que se suma al raig reflectit 1' (factor $h_{1,1'}$) degut a la interferència dels altres rajos (2', 3', 4', ...). Aquest terme serà el més negatiu possible (interferència destructiva quan

$$e^{-i(k_1 g - k_2 2e)} = -1$$

que és la mateixa condició d'interferència destructiva (7) anterior per a la suma de dos rajos només; per tant, implicarà la mateixa condició per a d que (8)

$$\mathbf{d} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{c}{2f}\frac{1}{\sqrt{{n_2}^2 - {n_1}^2 sin^2\theta_1}}$$

Però ara la suma final és diferent amb la interferència destructiva:

$$h_1 = h_{1,1'}\left(1 + \frac{t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}}{r_{1,2}}\frac{1}{\underbrace{e^{-i(k_1 g - k_2 2e)}}_{-1} - r_{2,1}r_{2,3}}\right) = h_{1,1'}\left(1 + \frac{t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}}{r_{1,2}}\frac{1}{-1 - r_{2,1}r_{2,3}}\right)$$

$$h_1 = h_{1,1'}\left(1 - \frac{t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}}{r_{1,2}(1 + r_{2,1}r_{2,3})}\right) \qquad (12)$$

Recordem els coeficients de Fresnell:

$$r_{s,1,2} = \frac{n_1 cos\theta_1 - n_2 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2} \quad ; \quad r_{p,1,2} = \frac{n_2 cos\theta_1 - n_1 cos\theta_2}{n_2 cos\theta_1 + n_1 cos\theta_2}$$

$$t_{s,1,2} = \frac{2n_1 cos\theta_1}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2} = 1 + r_{s,1,2} \quad ; \quad t_{p,1,2} = \frac{2n_2 cos\theta_1}{n_2 cos\theta_1 + n_1 cos\theta_2} = 1 + r_{p,1,2}$$

Per tant invertint els índexs 1 i 2:

$$r_{s,2,1} = \frac{n_2 cos\theta_2 - n_1 cos\theta_1}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2} = -r_{s,1,2} \quad ; \quad r_{p,2,1} = \frac{n_1 cos\theta_2 - n_2 cos\theta_1}{n_1 cos\theta_2 + n_2 cos\theta_1} = -r_{p,1,2}$$

$$t_{s,2,1} = \frac{2n_2 cos\theta_2}{n_2 cos\theta_2 + n_1 cos\theta_1} = 1 - r_{s,1,2} \quad ; \quad t_{p,2,1} = \frac{2n_1 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_2 + n_2 cos\theta_1} = 1 - r_{p,1,2}$$

En general, per a qualsevol polarització, a l'invertir els medis, les relacions són:

$$r_{2,1} = -r_{1,2} \quad ; \; r_{2,1} = -r_{1,2}$$

$$t_{2,1} = 1 - r_{1,2} \quad ; \; t_{2,1} = 1 - r_{1,2}$$

De manera que:

$$h_1 = h_{1,1'}\left(1 - \frac{t_{1,2}r_{2,3}t_{2,1}}{r_{1,2}\left(1 + r_{2,1}r_{2,3}\right)}\right) = h_{1,1'}\left(1 - \frac{\left(1 + r_{1,2}\right)r_{2,3}\left(1 - r_{1,2}\right)}{r_{1,2}\left(1 - r_{1,2}r_{2,3}\right)}\right) \qquad (13)$$

Comparem-lo amb la mateixa expressió tenint en compte només els 2 primers rajos 1’ i 2’:

$$h_1 = h_{1,1'}\left(1 - \frac{t_{2,1}r_{2,3}t_{1,2}}{r_{1,2}}\right) = h_{1,1'}\left(1 - \frac{\left(1 + r_{1,2}\right)r_{2,3}\left(1 - r_{1,2}\right)}{r_{1,2}}\right) \qquad (10)$$

Ara en canvi (13), la reducció destructiva és una mica major que (10) a causa del factor $\left(1 - r_{1,2}r_{2,3}\right)$ enlloc de l’ 1 al denominador

En el cas d’incidència normal ($\theta_1 = 0$):

$$r_{1,2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad ; \quad r_{2,3} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$$

$$h_1 = h_{1,1'}\left(1 - \frac{\left(1 + r_{1,2}\right)r_{2,3}\left(1 - r_{1,2}\right)}{r_{1,2}\left(1 - r_{1,2}r_{2,3}\right)}\right) = h_{1,1'}\left(1 - \frac{\left(1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2\right)\frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}}{\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\left(1 - \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}\right)}\right) =$$

$$= h_{1,1'}\left(1 - \frac{\left[(n_1 + n_2)^2 - (n_1 - n_2)^2\right](n_2 - n_3)}{(n_1 - n_2)\left[(n_1 + n_2)^2(n_2 - n_3) - (n_1 - n_2)(n_2 - n_3)\right]}\right)$$

$$= h_{1,1'}\left(1 - \frac{\left[4n_1n_2\right](n_2 - n_3)}{(n_1 - n_2)\left[(n_1 + n_2)(n_2 + n_3) - (n_1 - n_2)(n_2 - n_3)\right]}\right)$$

$$= h_{1,1'}\left(1 - \frac{2n_1n_2(n_2 - n_3)}{(n_1 - n_2)(n_1n_3 + n_2{}^2)}\right) \qquad (14)$$

Suposant $n_1$=1 (raig ve de l’aire) donat $n_3$ (materials de les ulleres) podríem dissenyar l’índex $n_2$ (el de la capa prima antireflectant que hi posem com a recobriment) per tal de que $h_1$ s’acosti el més possible a zero i evitar reflexes, amb la incidència normal, a les ulleres.