Límits de successions

Àlex Arenas, Sergio Gómez

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

Límits de successions

- Definicions
  - Límit de successió, monotonia, successions de Cauchy
- Propietats
  - Unicitat, aritmètiques, comparació, compressió, etc.
- Proposicions i teoremes
  - Stolz-Cesàro, Bolzano-Weierstrass
- Número e

- Límits de successions
  - Definició
    - a és el límit d'una successió a_n

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

sii

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Límits de successions

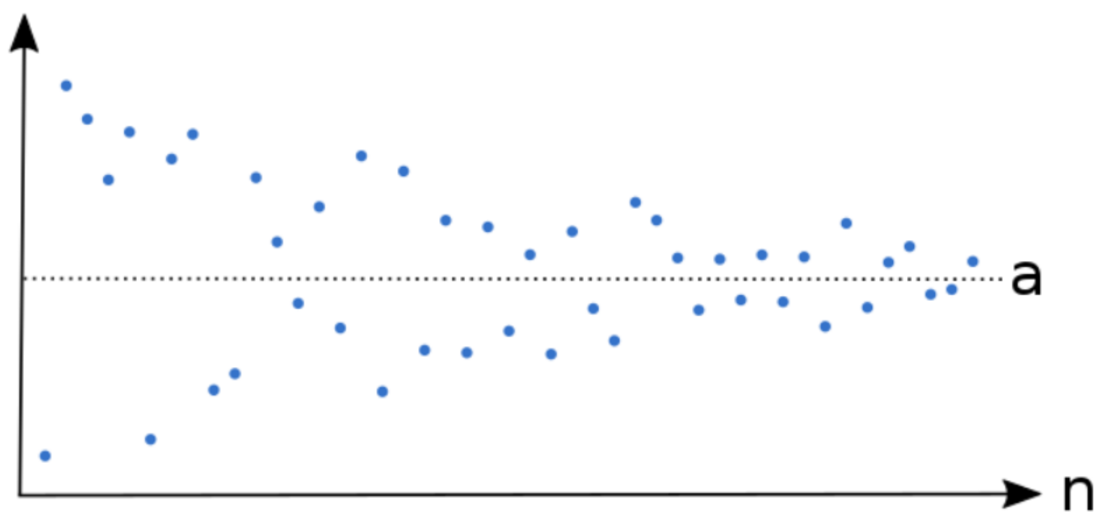
Definició

- a és el límit d'una successió a_n

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

sii

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

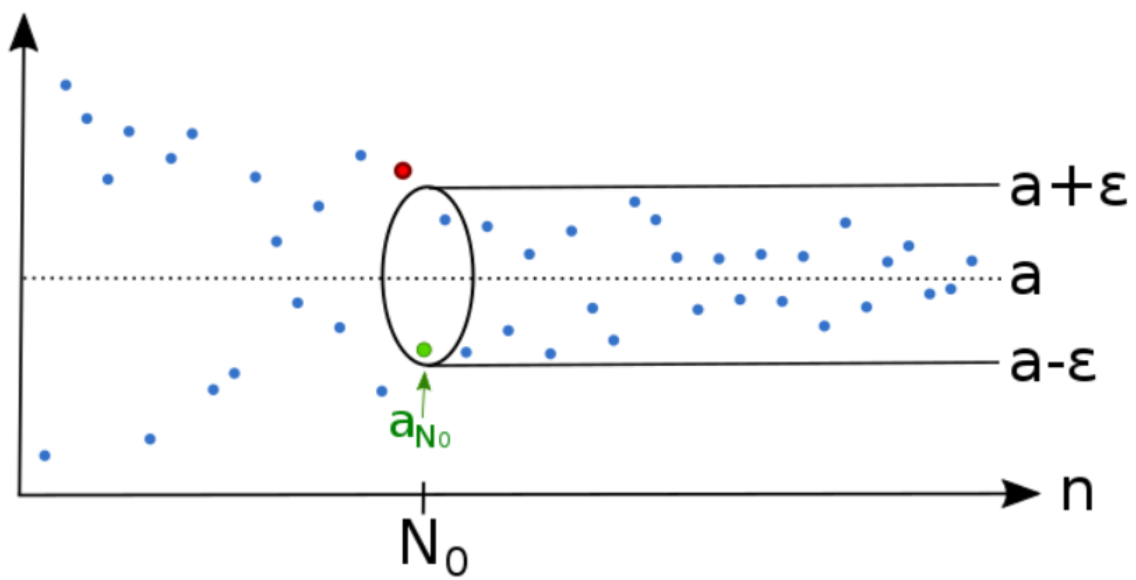


- Límits de successions
  - Definició
    - a és el límit d'una successió a_n

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

sii

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$



Límits de successions

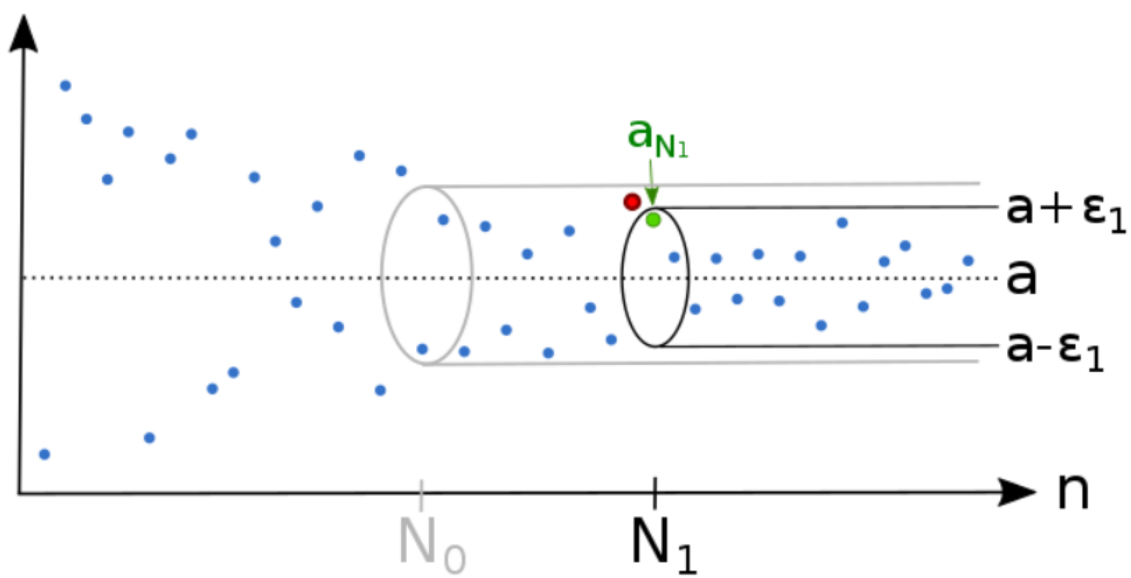
Definició

- a és el límit d'una successió a_n

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

sii

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

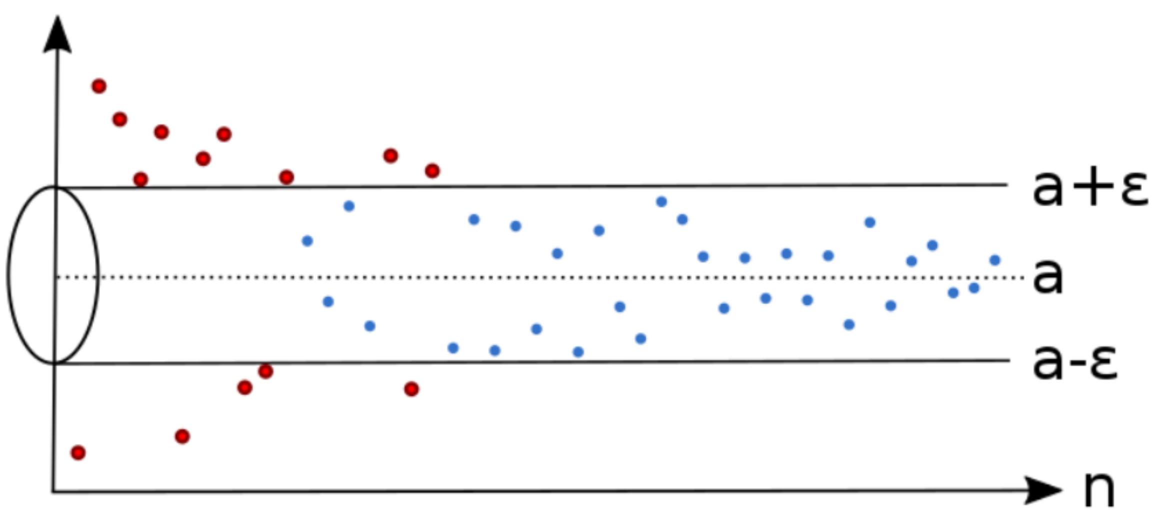


- Límits de successions
  - Definició
    - a és el límit d'una successió a_n

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

sii

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \;\; \forall n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$



- Límits de successions
  - Definició
    - a és el límit d'una successió a_n

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

sii

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n \geqslant N \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

    - Una seqüència amb límit es diu convergent

- Exemple
  - Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

- Exemple
  - Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

    - Sigui un $\varepsilon > 0$ arbitrari

Exemple

- Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

  - Sigui un $\varepsilon > 0$ arbitrari
  - Apliquem la propietat arquimediana dels reals (A16) als números positius ε i 1

$$\exists N \in \mathbb{N} : \; N\varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Exemple

- Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

  - Sigui un $\varepsilon > 0$ arbitrari
  - Apliquem la propietat arquimediana dels reals (A16) als números positius ε i 1

$$\exists N \in \mathbb{N}: \; N\varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N} < \varepsilon$$

  - Per tant

$$\forall n > N, \; |a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad \square$$

Definició

- El límit d'una successió a_n és infinit positiu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

sii

$$\forall K > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n \geqslant N \Longrightarrow a_n > K$$

- El límit d'una successió a_n és infinit negatiu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

sii

$$\forall K < 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n \geqslant N \Longrightarrow a_n < K$$

- Propietats dels límits de successions
  - Unicitat
    - El límit d'una successió, si existeix, és únic

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \\ \lim_{n\to\infty} a_n = L_2\end{array}\right. \Longrightarrow \quad L_1 = L_2$$

Demostració de la unicitat del límit

- Suposem $L_1 \neq L_2 \qquad (L_1 > L_2)$
- Seleccionem $\varepsilon < \dfrac{|L_1 - L_2|}{2} \qquad (L_2 < L_1 - 2\varepsilon)$
- Sabem
$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N_1 \ \Rightarrow \ |a_n - L_1| < \varepsilon$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N_2 \ \Rightarrow \ |a_n - L_2| < \varepsilon$$
- Seleccionem $N = \max(N_1, N_2)$
- Aleshores $\forall n \geqslant N$

$$L_1 - \varepsilon < a_n < L_1 + \varepsilon \ \Rightarrow \ a_n \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$$
$$L_2 - \varepsilon < a_n < L_2 + \varepsilon \ \Rightarrow \ a_n \in (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$$

- Arribem a una contradicció ja que els intervals són disjunts

$$a_n < L_2 + \varepsilon < (L_1 - 2\varepsilon) + \varepsilon = L_1 - \varepsilon < a_n \qquad \square$$

Propietats aritmètiques

- Si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

- Aleshores

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b \qquad \lim_{n\to\infty} (c\, b_n) = c\, b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = a\, b \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n)^p = a^p$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}\,, \quad \text{si } b \neq 0$$

Càlcul de límits

- Sovint només cal substituir n per $+\infty$ per a obtenir el resultat, utilitzant les propietats habituals

$$a \pm \infty = \pm\infty \qquad a^{\infty} = 0 \ \text{ si } 0 < a < 1 \qquad \frac{a}{\infty} = 0$$

$$\infty + \infty = +\infty \qquad a^{\infty} = +\infty \ \text{ si } a > 1$$

$$a \cdot \infty = +\infty \ \text{ si } a > 0 \qquad \infty^{a} = +\infty \ \text{ si } a > 0$$

$$a \cdot \infty = -\infty \ \text{ si } a < 0 \qquad \infty^{a} = 0 \ \text{ si } a < 0$$

- Compte! Aquestes expressions són un abús de llenguatge: només tenen sentit en el límit, però en cap cas representen operacions aritmètiques reals

Indeterminacions

- Quan en el càlcul d'un límit surt alguna de les següents expressions, el resultat del límit encara és indeterminat, i cal buscar transformacions que les eliminin

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

- No confondre indeterminació amb inexistència del límit

- Propietat de comparació
  - Si

$$a_n \leqslant b_n, \ \forall n > N$$

Aleshores

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$$

  - Demostració
    - Siguin $L_a = \lim a_n$ i $L_b = \lim b_n$
    - Suposem $L_b < L_a$, i seleccionem $\epsilon = \frac{L_a - L_b}{2}$
    - Per la definició de límit

$$\exists N_a : \forall n \geq N_a : |a_n - L_a| < \epsilon \quad \exists N_b : \forall n \geq N_b : |b_n - L_b| < \epsilon$$

    - Aleshores $\forall n \geq \max(N_a, N_b) : b_n < L_b + \epsilon = L_a - \epsilon < a_n$ que contradiu $a_n \leq b_n$ $\blacksquare$

- Propietat de compressió o del sandvitx
  - Si

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, \ \forall n > N$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Aleshores

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

  - Demostració
    - Per la propietat de comparació $L = L_a \leq L_c \leq L_b = L$, per tant només pot ser $L_c = L$

Teorema de Stolz-Cesàro

- Si

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \quad \text{or} \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\cdot}{\infty}$$

- Aleshores

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

- És similar a la regla de L'Hôpital dels límits de funcions

Definicions

- Una successió és monòtona creixent si

$$\forall n : \ a_{n+1} \geqslant a_n$$

- Una successió és monòtona decreixent si

$$\forall n : \ a_{n+1} \leqslant a_n$$

- La monotonia és estricta si no es dona la igualtat

Proposicions

- Tota successió convergent és fitada

- Demostració
  - Com és convergent, $\exists L = \lim a_n$
  - Prenem $\epsilon = 1$. Aleshores $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < 1$
  - $\forall n \geq N \Rightarrow |a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$
  - Sigui $M = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |L|)$
  - Aleshores es compleix que $\forall n \geq 1$: $|a_n| \leq M$ ∎

Proposicions

- Tota successió monòtona i fitada és convergent

- Demostració
  - Suposem que la successió $\{a_n\}$ és monòtona creixent
  - Sigui $A = \{a_n\} \subset \mathbb{R}$ el conjunt que conté tots els elements de la successió
  - Per l'axioma de completesa (A18), sabem que $\exists \alpha = \sup A$
  - Vegem que $\lim a_n = \alpha$
    - Sigui $\epsilon > 0$
    - Com α és el suprem, $\exists N\colon a_N \in (\alpha - \epsilon, \alpha]$
    - Com la successió és creixent i α és el suprem, aleshores $\forall n \geq N : a_n \in (\alpha - \epsilon, \alpha] \subset (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ ■
  - Si fos monòtona decreixent es faria el mateix però amb l'ínfim

Número *e*

- La successió següent

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

és monòtona creixent i fitada, per tant té límit

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 2.71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,47093\,69995\ldots$$

- Monotonia (veure milefoot.com)

We will first consider the ratio of the two terms.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1}$$

$$=\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Since $-1<\frac{-1}{(n+1)^2}<0$ whenever n is a positive integer, then Bernoulli's Inequality implies $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}>1+(n+1)\left(\frac{-1}{(n+1)^2}\right)$.

Therefore $\frac{a_{n+1}}{a_n}>\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)=1.$

Since $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1,$ and every term is a positive term, then $a_{n+1}>a_n.$

- Monotonia (veure milefoot.com)

We will first consider the ratio of the two terms.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1}$$

$$=\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\boxed{\text{if } r\geqslant 1 \text{ and } a\geqslant -1:\ \ (1+a)^r\geqslant 1+r\,a}$$

Since $-1<\dfrac{-1}{(n+1)^2}<0$ whenever n is a positive integer, then Bernoulli's Inequality implies $\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}>1+(n+1)\left(\dfrac{-1}{(n+1)^2}\right)$.

Therefore $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=1.$

Since $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1,$ and every term is a positive term, then $a_{n+1}>a_n$.

- Monotonia (demostració alternativa amb Binomi de Newton)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n!}\,\frac{1}{n^n}$$

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

- Monotonia (demostració alternativa amb Binomi de Newton)

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Comparant termes equivalents, tots els de a_{n+1} són més grans que els de a_n, i a més hi ha un terme addicional (positiu), per tant $a_{n+1} > a_n$

- Fitada inferiorment

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \geqslant 1+n\,\frac{1}{n}=2 \quad \Rightarrow \quad a_n \geqslant 2$$

- Fitada superiorment

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>a_n$$

és monòtona decreixent (demostració equivalent)

per tant $a_n < b_n < b_1 = 4$

- Totes dues tenen límit ja que són monòtones i fitades

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} b_n = L_2$$

- Totes dues sèries tenen el mateix límit

Considering the difference of the two sequences, we have

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{1}{n}a_n$$

But $a_n < b_1$ for every n, therefore $0 < b_n - a_n < \frac{1}{n}b_1 = \frac{4}{n}$.

Thus, by the Sandwich Theorem, we have $0 \le \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \le \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n} = 0$, which implies $L_1 = L_2$.

- Teorema
  - Una successió és convergent sii tota subseqüència és convergent

  - Esquema de la demostració
    - La necessitat ($\Longrightarrow$) és immediata
      - Si $\forall n \geq N : |a_n - L| < \epsilon$, aleshores això també es compleix per a tots els elements de qualsevol subseqüència a partir de la posició N
    - La suficiència ($\Longleftarrow$) requereix
      - Comprovar que totes les subseqüències han de convergir al mateix límit; en cas contrari, crear una subseqüència que no té límit (e.g., elements alterns de cadascuna)
      - Considerar una subseqüència i la seva complementària (e.g., la dels termes parells, i la dels termes senars); a partir d'elles es veu que tots els elements de la successió original compleixen la definició de límit

- Teorema
  - Tota successió té una subseqüència monòtona
  - Esquema de la demostració
    - Es defineixen els “pics” com els elements de la successió tals que tot element posterior és més petit que ell
    - Si hi ha infinits pics, per definició, formen subseqüència monòtona decreixent
    - Si hi ha un nombre finit de pics, agafar el primer element després del darrer pic
    - Buscar l’element que fa que no sigui un pic, i afegir-ho a la subseqüència
    - Repetir el procés, formant així una subseqüència monòtona creixent
    - Si en lloc de pics s’utilitzen “valls”, la monotonia de les subseqüències s’inverteix

- Teorema de Bolzano-Weierstrass
  - Tota successió fitada té una subseqüència convergent
  - Demostració:
    - La successió té una subseqüència monòtona
    - Com la successió és fitada, la subseqüència també
    - Recordar que tota seqüencia monòtona fitada és convergent

- Successions de Cauchy
  - Definició
    - Una successió és de Cauchy sii

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall m, n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

  - Lemes
    - Tota successió convergent és de Cauchy
    - Les successions de Cauchy estan fitades
  - Criteri de convergència de Cauchy
    - Una successió és convergent sii és de Cauchy
  - Observació
    - Per a demostrar que és de Cauchy no cal conèixer el límit