Física II. Problemes. Sessió 1 tema Camp Elèctric 1.
Càrregues puntuals, distribucions contínues de càrrega i concepte de potencial elèctric.

1) Tres càrregues puntuals Q_1, Q_2 i Q_3 estan fixades en tres dels vèrtex d'un quadrat de costat $2\cdot c=1$ m.

Q_1 és de 3 μC i està a la posició (c,- c) m.
Q_2 és de -5 μC i es troba a la posició (-c, c) m i
Q_3 és de 7 μC i es troba a la posició (-c,- c) m.

a) Trobeu el camp elèctric (components x i y i mòdul) al punt (c,c) m.

Per trobar aquest camp elèctric cal aplicar el teorema de superposició i sumar els camps elèctrics creats per cadascuna de les càrregues:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} k_e \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Per això cal identificar primer els $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ i $\mathbf{r}$:

$\mathbf{r_1}$=(c,-c), $\mathbf{r_2}$=(-c,c), $\mathbf{r_3}$=(-c,- c) i $\mathbf{r}$=(c,c),

D'aquí es poden trobar els radis vectors i els seus mòduls necessaris:

$\mathbf{r}$-$\mathbf{r_1}$=(0, 2c) , $\mathbf{r}$-$\mathbf{r_2}$=(2c, 0) , $\mathbf{r}$-$\mathbf{r_3}$=(2c, 2c),
|$\mathbf{r}$-$\mathbf{r_1}$|=2c , |$\mathbf{r}$-$\mathbf{r_2}$|=2c , |$\mathbf{r}$-$\mathbf{r_3}$|=$2\sqrt{2}$ c,

I substituir a l'equació:

$$\vec{E} = k_e \frac{Q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + k_e \frac{Q_2(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} + k_e \frac{Q_3(\vec{r}-\vec{r}_3)}{|\vec{r}-\vec{r}_3|^3}$$

$$\vec{E} = k_e \frac{Q_1(0,2c)}{(2c)^3} + k_e \frac{Q_2(2c,0)}{(2c)^3} + k_e \frac{Q_3(2c,2c)}{(2\sqrt{2}c)^3} = k_e \frac{Q_1}{4c^2}(0,1) + k_e \frac{Q_2}{4c^2}(1,0) + +k_e \frac{Q_3}{8\sqrt{2}c^2}(1,1) =$$

$$= \frac{k_e}{4c^2}\left(Q_2 + \frac{Q_3}{2\sqrt{2}}, Q_1 + \frac{Q_3}{2\sqrt{2}}\right)$$

D'aquí, substituint els valors de l'enunciat es poden obtenir els resultats que es demanen:

$$E_x = \frac{k_e}{4c^2}\left(Q_2 + \frac{Q_3}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{9x10^9\ N{\cdot}m^2/C^2}{(1\ m)^2}\left(-5\ \mu C + \frac{7\ \mu C}{2\sqrt{2}}\right) = -22{,}73\ kN/C$$

$$E_y = \frac{k_e}{L^2}\left(Q_1 + \frac{Q_3}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{9x10^9\ N{\cdot}m^2/C^2}{(1\ m)^2}\left(3\ \mu C + \frac{7\ \mu C}{2\sqrt{2}}\right) = 49{,}27\ kN/C$$

on els valors estan expressats en unitats de SI (C per les càrregues, m per les distàncies). D'aquesta manera el resultat final també és en unitats del SI (N/C).

El mòdul del camp elèctric és: $|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 54{,}26\ kN/C$

b) Trobeu el potencial al punt (c, c)

Per trobar el potencial cal aplicar també el teorema de superposició i substituir els valors adequats:

$$V(c,c)=\sum_{i=1}^{N} k_e \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}=k_e\frac{Q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+k_e\frac{Q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}+k_e\frac{Q_3}{|\vec{r}-\vec{r}_3|}=k_e\left(\frac{Q_1}{2c}+\frac{Q_2}{2c}+\frac{Q_3}{2\sqrt{2}c}\right)$$

$$V=\frac{k_e}{2c}\left(Q_1+Q_2+\frac{Q_3}{\sqrt{2}}\right)=\frac{9x10^9\ N{\cdot}m^2/C^2}{1m}\left(3\,\mu C-5\,\mu C+\frac{7\,\mu C}{\sqrt{2}}\right)=26{,}55\ k\,V$$

c) Trobeu el potencial a l'origen (0,0).

Per trobar el potencial a l'origen cal canviar la posició del punt **r** : enlloc de **r=**(c,c) com fins aquí, ara tindrem tenim **r=**(0,0). Per tant també canvien els radis vectors **r-r**$_{\mathbf{i}}$ i els seus mòduls.

r-r$_{\mathbf{1}}$=(-c, c) , **r-r**$_{\mathbf{2}}$=(c, -c) , **r-r**$_{\mathbf{3}}$=(c, c),
|**r-r**$_{\mathbf{1}}$|=√2·c , |**r-r**$_{\mathbf{2}}$|=√2·c , |**r-r**$_{\mathbf{3}}$|=√2·c

per tant, substituint:

$$V(0,0)=\sum_{i=1}^{N} k_e \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}=k_e\left(\frac{Q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+k_e\frac{Q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}+k_e\frac{Q_3}{|\vec{r}-\vec{r}_3|}\right)=k_e\left(\frac{Q_1}{\sqrt{2}c}+k_e\frac{Q_2}{\sqrt{2}c}+k_e\frac{Q_3}{\sqrt{2}c}\right)$$

$$V=\frac{k_e}{\sqrt{2}c}\left(Q_1+Q_2+Q_3\right)=63{,}64\ kV$$

d) Trobeu la força (components x i y, i mòdul) que Q_1, Q_2 i Q_3 farien sobre una quarta càrrega de q'=9 µC situada al punt (c, c).

Donat que ja s'ha calculat el camp elèctric **E** al punt (c, c), la força sobre la càrrega q'=9 µC és:

$$\vec{F}=q\vec{E}=9x10^{-6}\ C\cdot\left(-22{,}73x10^3\quad,\quad 49{,}27x10^3\right)\frac{N}{C}\quad=\quad\left(-0{,}205\quad,\quad 0{,}443\right)\ N$$

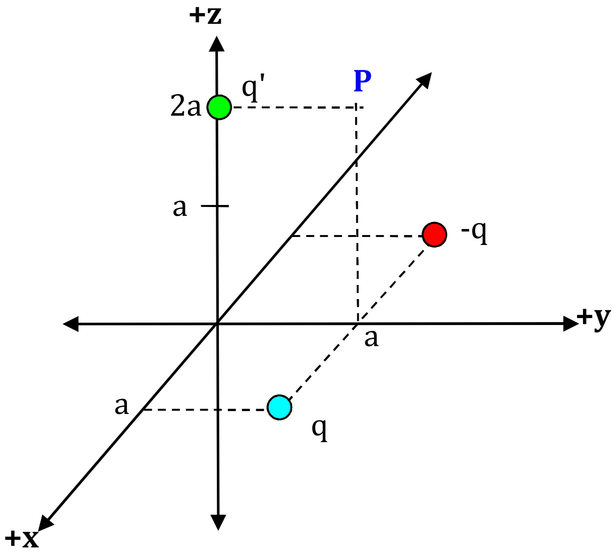
$$\text{mòdul}:$$

$$F=qE=9x10^{-6}\ C\cdot 52{,}26x10^3\ \frac{N}{C}\quad=\quad 0{,}488\ \ N$$

e) Trobeu l'energia potencial d'una càrrega de q=11 µC situada a l'origen.

Com que ja s'ha calculat el potencial a l'origen, l'energia potencial d'una càrrega q en un punt amb potencial V és E_p=q·V(0,0): E_p=11x10^{-6} C · 63.64e3 V=0.7 J.

2) Siguin tres càrregues puntuals de valors q, -q i q' situades tal com indica la figura:



a) Calcula una expressió del camp elèctric que les tres càrregues fan sobre el punt P: dóna les 3 components del camp **E** en funció de q, q', de a i de k_e.

Per trobar aquest camp elèctric cal aplicar el teorema de superposició i sumar els camps elèctrics creats per cadascuna de les càrregues:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} k_e \frac{Q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right)$$

Per això cal identificar primer els $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ i $\mathbf{r}$:

$\mathbf{r_1}$=(-a, a, 0) $\mathbf{r_2}$=(a, a, 0) $\mathbf{r_3}$=(0, 0, 2a)   i $\mathbf{r}$=(0, a, 2a)

D'aquí es poden trobar els radis vectors i els seus mòduls necessaris:

$\mathbf{r}-\mathbf{r_1}$=(a, 0, 2a) , $\mathbf{r}-\mathbf{r_2}$=(-a, 0, 2a) , $\mathbf{r}-\mathbf{r_3}$=(0, a, 0)
$|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}|=\sqrt{5}\cdot a$, $|\mathbf{r}-\mathbf{r_2}|=\sqrt{5}\cdot a$, $|\mathbf{r}-\mathbf{r_3}|=a$

I substituir a l'equació:

$$\vec{E} = k_e \frac{q\left(\vec{r} - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_1\right|^3} + k_e \frac{-q\left(\vec{r} - \vec{r}_2\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_2\right|^3} + k_e \frac{q'\left(\vec{r} - \vec{r}_3\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_3\right|^3} = k_e\left(\frac{q(a,0,2a)}{\left(\sqrt{5}a\right)^3} + \frac{-q(-a,0,2a)}{\left(\sqrt{5}a\right)^3} + \frac{q'(0,a,0)}{a^3}\right) =$$

$$= k_e\left(\frac{q(1,0,2)}{5\sqrt{5}\cdot a^2} - \frac{q(-1,0,2)}{5\sqrt{5}\cdot a^2} + \frac{q'(0,1,0)}{a^2}\right) = \frac{k_e}{a^2}\left(\frac{2q}{5\sqrt{5}} \quad ,q' \quad ,0 \quad\right)$$

b) Calcula una expressió de la força que les càrregues q i –q fan sobre la tercera càrrega q'.

La posició de q' és $\mathbf{r_3}$=(0,0,2a) i ara aquesta serà la posició del punt de prova, és a dir
$\mathbf{r}=\mathbf{r_3}$=(0,0,2a)

Els potencials vectors des de les altres dues càrregues els haurem de canviar respecte a l'apartat a) d'acord amb el canvi del punt de prova **r**:

$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=(a, -a, 2a)$, $\mathbf{r}-\mathbf{r}_2=(-a, -a, 2a)$

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|=\sqrt{6}\cdot a$, $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|=\sqrt{6}\cdot a$

La força la calcularem com q' pel camp corresponent a aquest punt.

$$\vec{F} = q'\cdot\vec{E}(0,0,2a) = q'k_e\left(\frac{q(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + k_e\frac{-q(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right) = q'\cdot q\cdot k_e\left(\frac{(a,-a,2a)}{\left(\sqrt{6}a\right)^3} - \frac{(-a,-a0,2a)}{\left(\sqrt{6}a\right)^3}\right) =$$

$$= \frac{q'\cdot q\cdot k_e}{6\sqrt{6}\cdot a^2}(2 \quad ,0 \quad ,0 \quad)$$

c) Calcula l'expressió del potencial que q + -q fan sobre el punt ocupat per la càrrega q'.

$$V(0,0,2a) = k_e\left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} - \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right) = q\cdot k_e\left(\frac{1}{\sqrt{6}\cdot a} - \frac{1}{\sqrt{6}\cdot a}\right) = 0$$

d) Calcula el treball necessari W que hem hagut de fer per a portar la càrrega q' des de l'infinit fins la seva posició actual.

Considerem l'infinit com a orígen de potencials, $V(\infty)=0$. Per altra banda de l'apartat d) ja sabem el potencial a (0,0,2a) que és la posició actual de q'. Per tant:

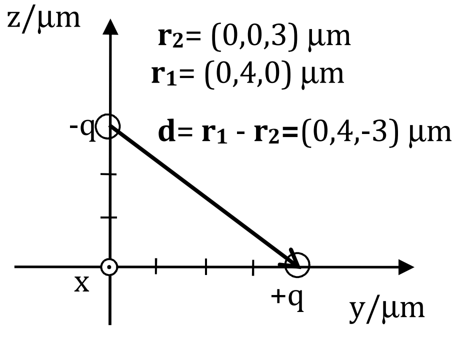
$$W = \Delta E_P = q'\cdot\Delta V = q'\cdot(V(0,0,2a)-V(\infty)) = q'\cdot(0-0) = 0$$

No hem hagut de fer treball per a portar-la des de l'infinit.

3). Dues càrregues puntuals, q_1 = 2 nC i q_2 = -2 nC estan situades al punts (0,4,0) μm i (0,0,3) μm, respectivament, i unides solidàriament.

Les situem en un diagrama

a) Trobeu el moment dipolar elèctric (components p_x, p_y, p_z i mòdul p).



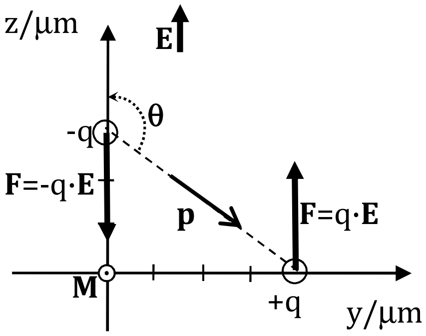
$$\vec{p} = q\cdot\vec{d} = 2\text{ nC}\cdot(0,4,-3)\ \mu\text{m} = (0,8,-6)\text{x}10^{-15}\ \text{C}\cdot\text{m}$$

$$p = |\vec{p}| = 10\text{x}10^{-15}\ \text{C}\cdot\text{m} = 10\ \text{fC}\cdot\text{m}$$

b) Inundem l'espai amb un camp elèctric extern uniforme de mòdul $E=10^7$ N/C i dirigit en sentit positiu cap a l'eix de les z. Quina força total fa aquest camp sobre el dipol?

$$\vec{E} = 10^7 \frac{N}{C} \cdot (0,0,1)$$

$\vec{F}_{dipol} = q\cdot\vec{E} - q\cdot\vec{E} = 0$ No hi ha força sobre el dipol: aquest no es desplaça cap enlloc.



c) Quin moment o parell de forces fa aquest camp sobre el dipol? Dóna components i mòdul del moment.

$$\vec{M} = \vec{p} x \vec{E} = 10^{-15}\ C\cdot m\cdot(0,8,-6)x(0,0,1)\cdot 10^7 \frac{N}{C} = \left(8\cdot1-(-6)\cdot0\ ,\ (-6)\cdot0-0\cdot1\ ,\ 0.0-8\cdot0 \right)\cdot 10^{-15}\ N\cdot m =$$

$$= (8, 0, 0)\cdot 10^{-15}\ N\cdot m$$

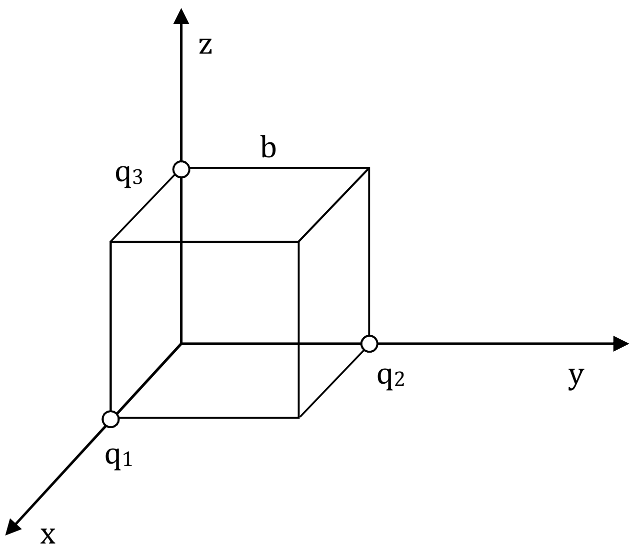
és a dir, el moment només te component x positiva

d) Cap a on giraria el dipol llavors?

En sentit antihorari fins a alinear el moment **p** amb el camp **E**. Això és el que significaria un moment en direcció x positiva. Vegeu figura anterior.

Problema 4.

Tres càrregues puntuals (q_1, q_2 i q_3) estan situades, tal com indica la figura, en tres dels vèrtexs d'un cub de costat b. Es demana:



a) Calcula una expressió del camp elèctric al punt **r**=(b,b,b) en funció de b, q_1, q_2, q_3 i la k_e

Primer calculem els vectors de posició del punt **r** relatius a les càrregues i els seus respectius mòduls.

- $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$=(b,b,b)-(b,0,0)=(0,b,b)
  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|=\sqrt{(b^2+b^2)}=\sqrt{2}\cdot b$

- $\mathbf{r}-\mathbf{r}_2$=(b,b,b)-(0,b,0)=(b,0,b)
  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|=\sqrt{(b^2+b^2)}=\sqrt{2}\cdot b$

- $\mathbf{r}-\mathbf{r}_3$=(b,b,b)-(0,0,b)=(b,b,0); $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_3|=\sqrt{(b^2+b^2)}=\sqrt{2}\cdot b$

Ara calcularem l'expressió del Camp Elèctric:

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_1(\vec{r})+\vec{E}_2(\vec{r})+\vec{E}_3(\vec{r})=k_e\cdot\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1)+k_e\cdot\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}-\vec{r}_2)+k_e\cdot\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_3|^3}(\vec{r}-\vec{r}_3)=$$

$$=k_e\cdot\frac{q_1}{\left(\sqrt{2}\cdot b\right)^3}(0,b,b)+k_e\cdot\frac{q_2}{\left(\sqrt{2}\cdot b\right)^3}(b,0,b)+k_e\cdot\frac{q_3}{\left(\sqrt{2}\cdot b\right)^3}(b,b,0)=$$

$$=k_e\cdot\frac{q_1}{2\sqrt{2}\cdot b^2}(0,1,1)+k_e\cdot\frac{q_2}{2\sqrt{2}\cdot b^2}(1,0,1)+k_e\cdot\frac{q_3}{2\sqrt{2}\cdot b^2}(1,1,0)=\frac{k_e}{2\sqrt{2}\cdot b^2}(q_2+q_3,q_1+q_3,q_1+q_2)$$

b) Calcula una expressió de la força que es faria obre el punt **r**=(b,b,b) a una càrrega puntual de valor $-q_1$.

$$F(\vec{r})=-q_1\cdot\vec{E}(\vec{r})=-q_1\frac{k_e}{2\sqrt{2}\cdot b^2}(q_2+q_3,q_1+q_3,q_1+q_2)$$

c) Calcula una expressió del potencial elèctric al punt **r**=(b,b,b) en funció de b, q_1, q_2, q_3 i la k_e

$$V(\vec{r})=V_1(\vec{r})+V_2(\vec{r})+V_3(\vec{r})=k_e\cdot\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+k_e\cdot\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}+k_e\cdot\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_3|}=$$

$$=k_e\cdot\frac{q_1}{\sqrt{2}\cdot b}+k_e\cdot\frac{q_2}{\sqrt{2}\cdot b}+k_e\cdot\frac{q_3}{\sqrt{2}\cdot b}=\frac{k_e}{\sqrt{2}\cdot b}(q_1+q_2+q_3)$$

d) Calcula una expressió del potencial elèctric a l'orígen (punt r=(0,0,0)) en funció de b, q_1, q_2, q_3 i la k_e

Al canviar de punt **r** (ara **r**=(0,0,0)), cal tornar a calcular els radis vectors, i els seus mòduls:

- **r-r₁**=(0,0,0)-(b,0,0)=(-b,0,0) ; **|r-r₁|**=b
- **r-r₂**=(0,0,0)-(0,b,0)=(0,-b,0) ; **|r-r₂|**=b
- **r-r₃**=(0,0,0)-(0,0,b)=(0,0,-b) ; **|r-r₃|**=b

A partir d'aquí el potencial a l'origen es calcula com abans:

$$V(\vec{0})=V_1(\vec{0})+V_2(\vec{0})+V_3(\vec{0})=k_e\cdot\frac{q_1}{|\vec{0}-\vec{r}_1|}+k_e\cdot\frac{q_1}{|\vec{0}-\vec{r}_2|}+k_e\cdot\frac{q_1}{|\vec{0}-\vec{r}_3|}=k_e\cdot\frac{q_1}{b}+k_e\cdot\frac{q_2}{b}+k_e\cdot\frac{q_3}{b}=$$

$$=\frac{k_e}{b}(q_1+q_2+q_3)$$

e) Calcula una expressió de l'energia potencial per a portar una càrrega de prova q des de **r**=(b,b,b) fins l'orígen

Per a calcular aquesta energia potencial o treball necessari cal multiplicar la càrrega de prova per l'increment del potencial:

$$\Delta E_P(\vec{r} \to \vec{0}) = q \cdot \Delta V(\vec{r} \to \vec{0}) = q \cdot \left(V(\vec{0}) - V(\vec{r})\right)$$

Tenint en compte les expressions dels potencials trobades als apartats c) i d)

$$\Delta E_P(\vec{r} \to \vec{0}) = q \cdot \left(V(\vec{0}) - V(\vec{r})\right) = q \cdot \left(\frac{k_e}{b}(q_1 + q_2 + q_3) - \frac{k_e}{b\sqrt{2}}(q_1 + q_2 + q_3)\right) =$$

$$= \frac{q \cdot k_e}{b}(q_1 + q_2 + q_3)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}1\right) \approx 0{,}293 \frac{q \cdot k_e}{b}(q_1 + q_2 + q_3)$$

Com es pot veure el treball o increment d'energia és positiu, això vol dir que la càrrega q te més energia després que abans i externament hem hagut de fer un treball net positiu per a moure-la.

f) Calcula la força de l'apartat b) i l'increment d'energia potencial de l'apartat e) pel cas: $q_1=q_2=q_3=q=100\ \mu C$, $b=27$ cm.

$$F(\vec{r}) = -q_1 \frac{k_e}{2\sqrt{2} \cdot b^2}(q_2 + q_3, q_1 + q_3, q_1 + q_2) = -100\,\mu C \frac{9x10^9 \frac{Nm^2}{C^2}}{2\sqrt{2} \cdot (0{,}27\ m)^2}(200\,\mu C, 200\,\mu C, 200\,\mu C) =$$

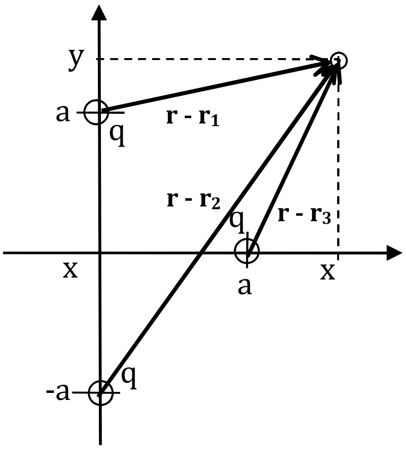
$$= -100\,\mu C \frac{9x10^9 \frac{Nm^2}{C^2}}{2\sqrt{2} \cdot (0{,}27\ m)^2}(200\,\mu C, 200\,\mu C, 200\,\mu C) = -87{,}30 \cdot (1,1,1)\ N$$

$$\Delta E_P(\vec{r} \to \vec{0}) \approx 0{,}293 \frac{q \cdot k_e}{b}(q_1 + q_2 + q_3) = 0{,}293 \frac{100\,\mu C \cdot 9x10^9 \frac{Nm^2}{C^2}}{0{,}27\ m}(3 \cdot 100\,\mu C) =$$

$$= 292{,}9\ J$$

5). Tres càrregues iguals es troben al pla xy. Dues d'aquestes estan sobre l'eix y en els punts (0,a) i (0,-a), mentre que la tercera està sobre l'eix x al punt (a,0).

a) Traceu en un pla x,y la posició de les 3 càrregues, la d'un punt (x,y) qualsevol i la dels radis vectors que van de les càrregues al punt (x,y).



b) Trobeu l'expressió del potencial per als punts del pla (x,y).

Mirant el diagrama anterior trobarem els radis vectors. I després els seus mòduls

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = (\ x\ ,\ y - a\ )\quad ,\quad \vec{r} - \vec{r}_2 = (\ x\ ,\ y + a\ )\quad ,\quad \vec{r} - \vec{r}_3 = (\ x - a\ ,\ y\ )$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}\quad ,\quad |\vec{r} - \vec{r}_2| = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}\quad ,\quad |\vec{r} - \vec{r}_3| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

El potencial és calcula llavors com es fa típicament per superposició

$$V(x,y)=k_e\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+k_e\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}+k_e\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_3|}=$$

$$=k_e\frac{q}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}+k_e\frac{q}{\sqrt{x^2+a^2}}+k_e\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=k_e q\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right)$$

c) Doneu una expressió de les components x i y del camp elèctric (E_x i E_y a partir de la funció de potencial V(x,y).

Tenim la relació de teoria que dóna el camp com a -gradient del potencial:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}(V(x,y))=-\left(\frac{\partial V(x,y)}{\partial x},\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\right)$$

Calculem-ne explícitament la component x, fent la derivada parcial de cada terme

$$E_x=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}=-k_e q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^{1/2}}+\frac{1}{\left(x^2+(y+a)^2\right)^{1/2}}+\frac{1}{\left((x-a)^2+y^2\right)^{1/2}}\right)=$$

$$=-k_e q\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^{3/2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{\left(x^2+(y+a)^2\right)^{3/2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+y^2\right)^{3/2}}\right)=$$

$$=k_e q\left(\frac{x}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^{3/2}}+\frac{x}{\left(x^2+(y+a)^2\right)^{3/2}}+\frac{x-a}{\left((x-a)^2+y^2\right)^{3/2}}\right)$$

Anàlogament per la component y:

$$E_y=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}=-k_e q\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^{1/2}}+\frac{1}{\left(x^2+(y+a)^2\right)^{1/2}}+\frac{1}{\left((x-a)^2+y^2\right)^{1/2}}\right)=$$

$$=-k_e q\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2(y-a)}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^{3/2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2(y+a)}{\left(x^2+(y+a)^2\right)^{3/2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2y}{\left((x-a)^2+y^2\right)^{3/2}}\right)=$$

$$=k_e q\left(\frac{y-a}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^{3/2}}+\frac{y+a}{\left(x^2+(y+a)^2\right)^{3/2}}+\frac{y}{\left((x-a)^2+y^2\right)^{3/2}}\right)$$

d) Calculeu el camp elèctric (components x i y) aplicant la definició directa del camp elèctric i comproveu que l'expressió que heu trobat a l'apartat c) és correcta.

Usant la forma típica d'obtenir el camp produït per les 3 càrregues per superposició:

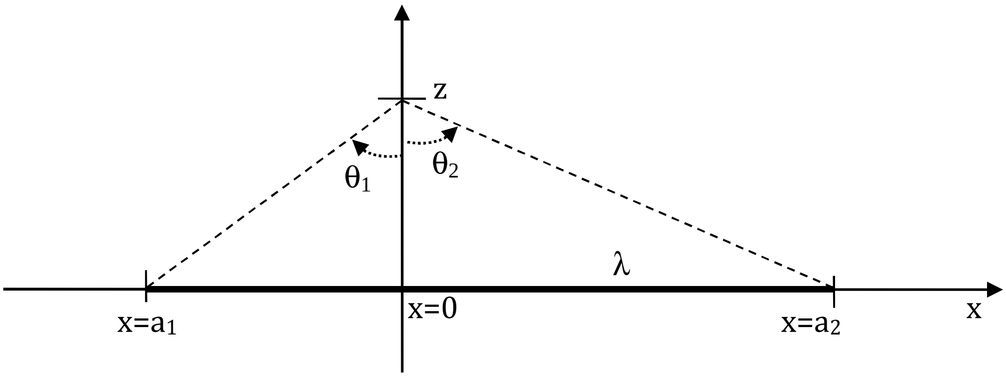
$$\vec{E}=k_e\frac{q(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}+k_e\frac{q(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}+k_e\frac{q(\vec{r}-\vec{r}_3)}{|\vec{r}-\vec{r}_3|^3}=$$

$$=k_e q\left(\frac{(x,y-a)}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^{3/2}}+\frac{(x,y+a)}{\left(x^2+(y+a)^2\right)^{3/2}}+\frac{(x-a,y)}{\left((x-a)^2+y^2\right)^{3/2}}\right)$$

La component x d'aquesta expressió coincideix la E_x de l'apartat anterior i la component y amb la E_y de l'apartat anterior. Per tant és correcte.

6). Anem a descriure com és el camp al voltant d'una barra prima rectilínia, de densitat de càrrega lineal λ uniforme i de llargada 2L, situada sobre l'eix de les x. Per a fer-ho anem a calcular expressions del camp a certs punts situats al voltant de la barra.

a) dibuixa la barra estirada a l'eix x i amb l'eix z situat perpendicularment a ella sobre un punt qualsevol i indica quines són les magnituds d'interès i les expressions de teoria per a calcular la component vertical o component z del camp i la component horitzontal o component x del camp.

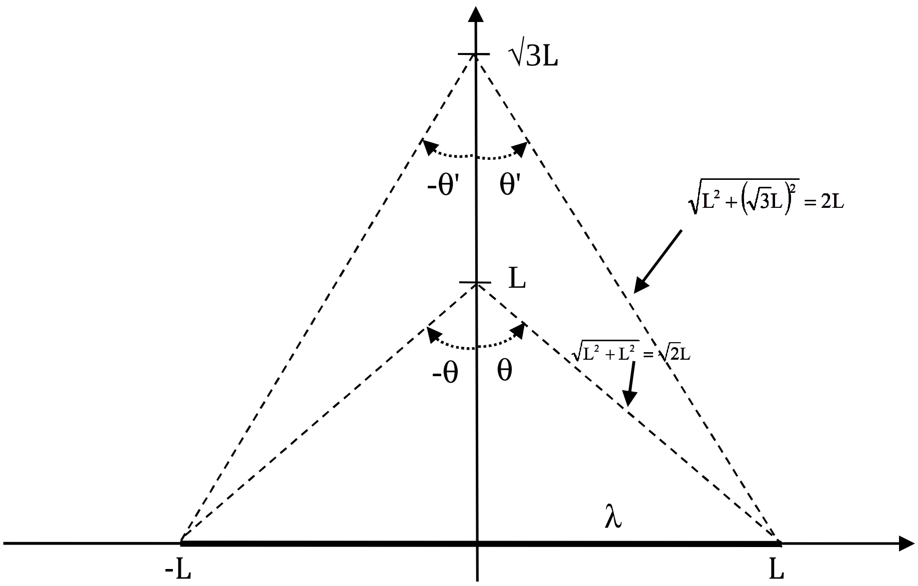


La vertical o component z és: $E_z = \dfrac{k\lambda}{z}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$

La horitzontal o component x és: $E_x = k\lambda\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_2^2+z^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{a_1^2+z^2}}\right)$

Anem a calcular expressions del camp en els següents punts situats al voltant de la barra:

b) 2 punts situats al voltant del punt mig de la barra: un a distància z=√3 L i l'altre a distància z=L



1. Distància z=L.

En el nostre cas: z=L , $\theta_2=\theta$, $\theta_1=-\theta$, $a_2=L$ i $a_1=-L$

Per tant: $E_z = \dfrac{k\lambda}{L}(\sin\theta - \sin(-\theta)) = \dfrac{k\lambda}{L}2\sin\theta$

Mirant el dibuix veiem que l'angle θ és de 45°, per tant $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i finalment:

$$E_z = \frac{2k\lambda}{L}\sin 45° = \frac{2k\lambda}{L}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k\lambda}{L}\sqrt{2}$$

Pel que fa a la component x del camp: $E_x = k\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{L^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-L)^2+L^2}}\right) = 0$.

És a dir: no hi ha camp horitzontal. Lògic, estem just al mig! Per tant no n'hi pot haver per simetria.

2. Distància z=√3·L.

En el nostre cas: z=√3·L , $\theta_2=\theta'$, $\theta_1=-\theta'$, $a_2=L$ i $a_1=-L$

Per tant: $E_z = \frac{k\lambda}{L}(\sin\theta' - \sin(-\theta')) = \frac{k\lambda}{L}2\sin\theta'$

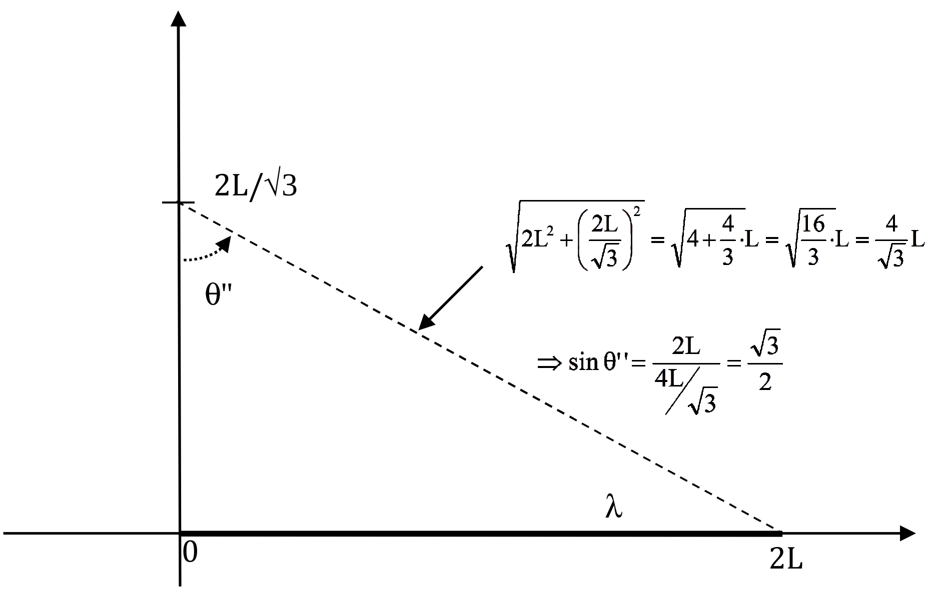
Recordant que el sinus d'un angle és el catet oposat dividit per la hipotenusa i mirant el dibuix veiem que el $\sin\theta' = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$ (si el sinθ' és de 1/2 és que l'angle θ' és de 30°)

Per tant: $E_z = \frac{k\lambda}{L}2\sin\theta' = \frac{k\lambda}{L}2\frac{1}{2} = \frac{k\lambda}{L}$

Igualment no hi ha camp horitzontal, per la mateixa simetria d'abans.

En efecte: $E_x = k\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{L^2+3L^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-L)^2+3L^2}}\right) = 0$.

c) 1 punt situat al voltant de cadascuna de les puntes de la barra perpendicularment a una distància z=2L/√3



En el nostre cas: z=2L/√3 , $\theta_2=\theta''$, $\theta_1=0$, $a_2=2L$ i $a_1=0$

I mirant el dibuix veiem: $\sin\theta'' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. L'angle que te aquest sinus és el de θ''=60°

Per tant: $E_z = \frac{k\lambda}{L}(\sin\theta'' - \sin(0)) = \frac{k\lambda}{L}\sin\theta'' = \frac{k\lambda}{L}\frac{\sqrt{3}}{2}$

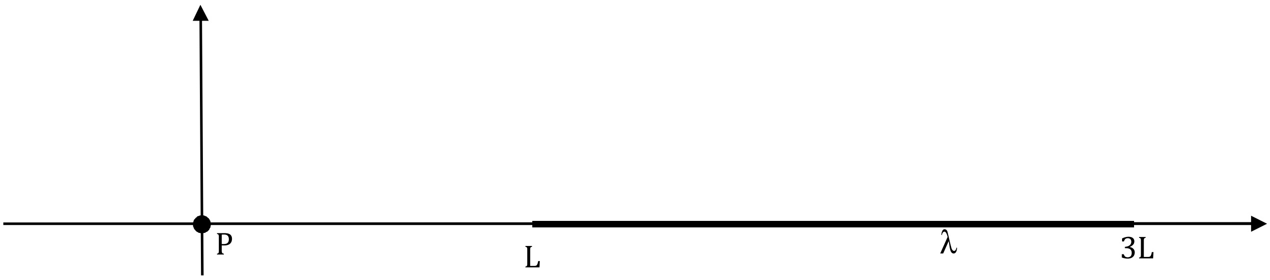
Pel que fa al camp horitzontal:

$$E_x = k\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{(2L)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}L\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(0)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}L\right)^2}}\right) = \frac{k\lambda}{L}\left(\frac{1}{\sqrt{4+\frac{4}{3}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right) = \frac{k\lambda}{L}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{k\lambda}{L}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{k\lambda}{L}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

És a dir, surt un camp negatiu. Lògic en el punt de l'esquerra tenim tota la barra a la dreta del punt, i si λ és positiva, llavors tota la càrrega positiva la tenim a la dreta i el camp va cap a l'esquerra.

d) 1 punt sobre la pròpia recta de la barra (x) i a una distància L de cadascuna de les puntes.



Ara estem a z=0 (punt P del dibuix).

Allí el camp E_z és nul per simetria. Sobre la pròpia recta de la barra el camp no pot anar ni cap a dalt, ni cap a baix, la única manera que sigui neutre en aquest sentit és que s'anul·li.

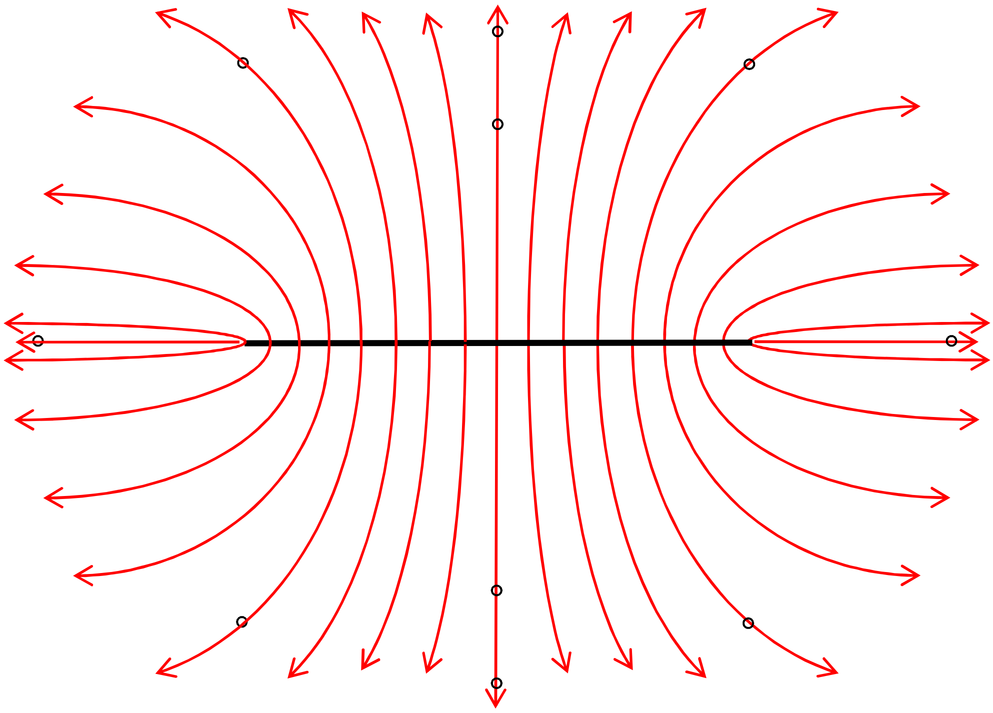
La component horitzontal E_x la calcularem tenint en compte que ara z=0, a_1=L i a_2=3L

$$E_x = k\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{(3L)^2 + 0^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + 0^2}}\right) = \frac{k\lambda}{L}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{k\lambda}{L}\frac{2}{3}$$

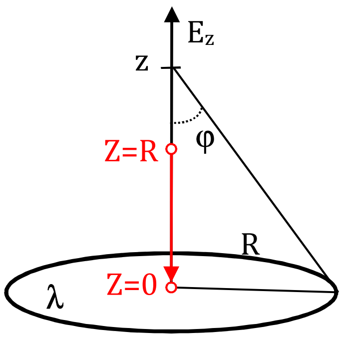
Com veiem, també és negativa: tornem a tenir tota la càrrega positiva a la dreta del punt.

e) a partir dels resultats dels apartats anteriors fes un esquema aproximat de les línies de camp generades al voltant de la barra.

Aquí el tenim, es marquen en un cercle petit els punts que hem estudiat als apartats anteriors (+ els seus equivalents als altres costats simètrics). En ells es pot veure que la línia de camp dibuixada te les components x i z amb el mateix signe que hem deduït. Pel que fa a la resta de línies les hem dibuixat seguint una tendència gradual entre els esmentats punts.



7) Sigui un anell carregat amb densitat lineal de càrrega λ uniforme i de radi R. Calcula una expressió del treball necessari per a portar una càrrega q des d'un punt de l'eix de l'anell a distància R del centre fins al propi centre.



L'expressió del camp, que te component z només, a l'eix d'un anell de radi R i densitat lineal λ, és:

$$E_z = k \cdot q_{anell} \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Per a calcular el treball o increment d'energia potencial per a desplaçar una càrrega de prova q des de z=R, fins al centre, z=0, (vegeu fletxa vermella al dibuix) farem:

$$W = \Delta E_P = q \cdot \Delta V(z = R \rightarrow z = 0)$$

Per a calcular la diferència de potencial ΔV(z=R→z=0) farem us de la integral de camí del camp.

$$\Delta V=-\int_{z=R}^{z=0}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_{R}^{0}E_z\cdot dz=-\int_{R}^{0}k\cdot q_{anell}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}dz=-k\cdot q_{anell}\int_{R}^{0}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}dz=\begin{vmatrix}v\equiv z^2+R^2\\ \Rightarrow\\ 1\cdot dv=2z\cdot dz\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{k\cdot q_{anell}}{2}\int_{2R^2}^{R^2}\frac{du}{v^{3/2}}=-\frac{k\cdot q_{anell}}{2}\int_{2R^2}^{R^2}v^{-3/2}dv=-\frac{k\cdot q_{anell}}{2}\left[\frac{v^{-1/2}}{-1/2}\right]_{2R^2}^{R^2}=k\cdot q_{anell}\left[\frac{1}{\sqrt{v}}\right]_{2R^2}^{R^2}=k\cdot q_{anell}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2}}-\frac{1}{\sqrt{2R^2}}\right)=$$

$$=\frac{k\cdot q_{anell}}{R}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

I finalment l'increment d'energia potencial:

$$\Delta E_p=q\cdot\frac{k\cdot q_{anell}}{R}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

8) Siguin dos plans infinitament extensos situats els dos paral·lels al pla x-y amb z's respectives z_1 i z_2 ($z_1>z_2$) separades 1 cm de distància

Un d'ells el que està a sobre, te una densitat superficial de càrrega: $\sigma_1=2$ C/m^2 i el que està a sota : $\sigma_2=-3$ C/m^2. Calcula el valor, direcció i sentit del camp en els punts situats a:

a) $z>z_1$ (sobre del pla superior)
b) z tal que $z_1>z>z_2$ (entremig dels dos plans)
c) $z<z_2$ (sota del pla inferior)

Revisió de la teoria pertinent:
El camp degut a un pla infinit de densitat superficial de càrrega σ uniforme és també un camp uniforme, perpendicular al pla (z) i amb valors oposats a cadascú dels dos semiespais que divideix el pla, segons les expressions:

Al semiespai superior (+) el camp és: $E_+=+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

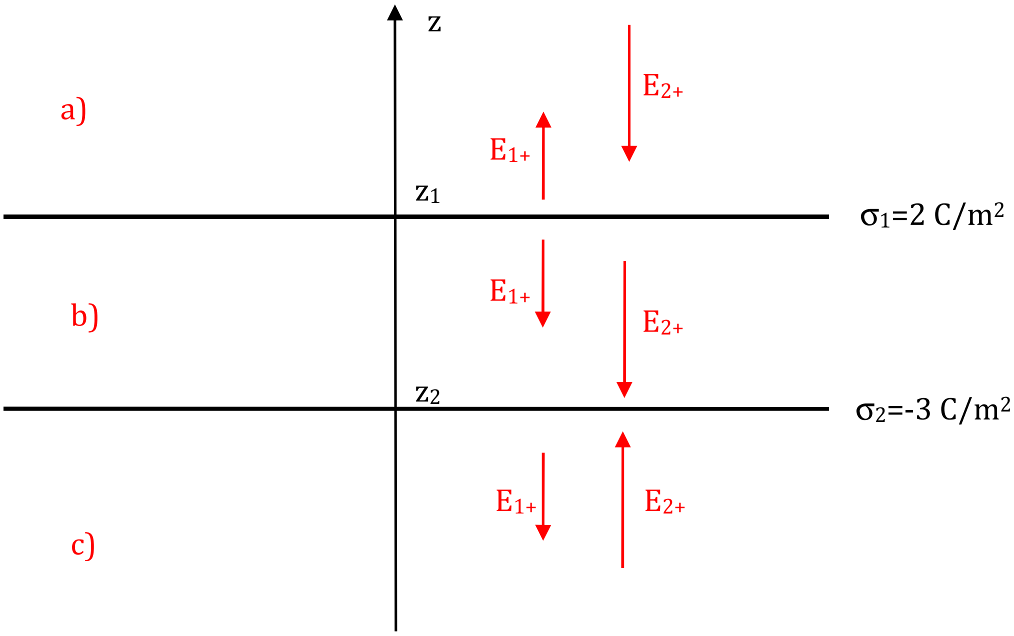
Al semiespai inferior (-) el camp és: $E_-=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Per tant si σ és positiva els camps són perpendiculars i en sentit allunyant-se del pla a ambdós costats. En canvi, si σ és negativa són perpendiculars en sentit cap al pla a ambdós costats.

Considerem ara el cas de l'enunciat del problema format per dos plans perpendiculars a l'eix z. Es farà per superposició dels camps produïts per cadascú dels dos plans a les diferents regions.
Mirem el diagrama següent on es marca el sentit del camp del camp produït pel primer pla, E_1, i pel segon, E_2, a les tres regions.

a) $z>z_1$ (sobre del pla superior)
b) z tal que $z_1>z>z_2$ (entremig dels dos plans)
c) $z<z_2$ (sota del pla inferior)

El signe + indica que és el camp per sobre del pla pertinent i el signe – que és per sota.



Així a cada regió tenim concretament el següent:

$$E_a = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{2\ {C}/{m^2} - 3\ {C}/{m^2}}{2\varepsilon_0} = -\frac{1\ {C}/{m^2}}{2\varepsilon_0}$$

$$E_b = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{-2\ {C}/{m^2} - 3\ {C}/{m^2}}{2\varepsilon_0} = -\frac{5\ {C}/{m^2}}{2\varepsilon_0}$$

$$E_c = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{-2\ {C}/{m^2} + 3\ {C}/{m^2}}{2\varepsilon_0} = +\frac{1\ {C}/{m^2}}{2\varepsilon_0}$$

d) Calcula l'increment d'energia potencial d'una càrrega de 1 C si va des del pla superior a l'inferior.

Calculem primer l'increment de potencial per anar de z_1 a z_2 integrant el camp de la regió b):

$$\Delta V = -\int_{z_1}^{z_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{z_1}^{z_2} E_b \cdot dz = -\int_{z_1}^{z_2} -\frac{5\ {C}/{m^2}}{2\varepsilon_0} \cdot dz = \frac{5\ {C}/{m^2}}{2\varepsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} dz = \frac{5\ {C}/{m^2}}{2\varepsilon_0}(z_2 - z_1) = \frac{5\ {C}/{m^2}}{2 \cdot 8{,}8542x10^{-12}\ \frac{C^2}{N{\cdot}m^2}}(-1\,cm) =$$

$$= -2{,}824x10^9\ \frac{N}{C} m = -2{,}824x10^9\ V$$

L'increment d'energia potencial de la càrrega d'1 C serà per tant:

$$\Delta E_P = q{\cdot}\Delta V = 1\,C{\cdot}(-2{,}824x10^9\ V) = -2{,}824x10^9\ J$$