Problemes d'Equacions Diferencials II

Grau en Enginyeria Matemàtica i Física

BLOC 1: Teoria Fonamental

1. Doneu diferents parelles (φ, I) solucions del problema de Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = tx^2, \\ x(1) = 1. \end{cases}$

Feu el mateix per al problema de Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = x^{3/5}, \\ x(1) = 0. \end{cases}$

2. Si $x(t)$ és solució del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{t(x+1)} - \cos t, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

demostreu que $x(t)$ té un mínim relatiu a $t = 0$.

3. Sigui $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

té una única solució, diguem $\varphi(t)$. Suposem que existeix $T > 0$ tal que $\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + T)$. Demostreu que la solució φ està definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ i que $\varphi(t)$ és periòdica.

4. Estudieu si la funció f satisfà alguna condició de Lipschitz global o local respecte de x. En cas afirmatiu calculeu la constant de Lipschitz.

(a) $f(t,x) = x^2,\ \ x \in [0,1]$.

(b) $f(t,x) = t^2 + x^4,\ \ |t| \leqslant 1$ i $|x| \leqslant 3$.

(c) $f(t,x) = x^n,\ \ n > 1$ i $x \in \mathbb{R}$.

(d) $f(t,x) = p(t)\cos x + q(t)\sin x,\ \ |t| \leqslant 100,\ x \in \mathbb{R}$ i $p(t), q(t)$ funcions contínues.

(e) $f(t,x) = te^{-x^2},\ \ |t| \leqslant 1,\ \ x \in \mathbb{R}$.

(f) $f(t,x) = x^{1/3}$, $x \in [-1,1]$.

(g) $f(t,x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Donat el problema de valor inicial $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \sqrt{|x|}, \\ x(0) = 0, \end{array} \right.$

(a) Trobeu una solució.

(b) És única?

(c) En cas de resposta negativa, contradiu això el Teorema de Picard?

6. Sigui I un interval obert (fins i tot $I = \mathbb{R}$) i $\mathbf{f} : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua. Suposem que per a tot subinterval compacte J de I $\mathbf{f}$ és Lipschitziana en $\mathbf{x}$ a $J \times \mathbb{R}^n$. Proveu que, sota aquestes hipòtesis, per a qualsevol $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ el problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{array} \right.$$

té una única solució definida a I.

7. Considerem el problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{array} \right.$$

on $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és contínua i verifica $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L(t)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$, per a tot $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ amb $L(t)$ contínua a $\mathbb{R}$. Demostreu que hi ha solució única definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.

8. Proveu que el problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x^3 + e^{-t^2}, \\ x(0) = 1, \end{array} \right.$$

admet una solució única definida a l'interval $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$. Quin és el màxim interval d'existència d'aquesta solució que garanteix el teorema de Picard? Podríeu garantir que la solució es pot continuar al menys fins a $t = 1$?

9. Proveu que la funció $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida com

$$f(t,x) = \begin{cases} \frac{tx}{t^2+x^2}, & (t,x) \neq (0,0), \\ 0, & (t,x) = (0,0), \end{cases}$$

no és contínua a l'origen, però el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

té solució per tot $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

10. Sigui $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua. Suposem que f és decreixent en x. Demostreu que per a tot $x_0 \in \mathbb{R}$ el problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

té una única solució.

11. Una funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfà $f(n) = 0$ per a tot enter n. Demostreu que totes les solucions maximals de l'equació $\dot{x} = f(x)$ estan afitades i definides sobre tot $\mathbb{R}$.

12. Considerem l'equació diferencial $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, amb f localment Lipschitz amb un nombre finit de zeros $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Proveu que per tot $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ amb $a_1 \leqslant x_0 \leqslant a_n$ la solució $\varphi(t)$ amb $\varphi(t_0) = x_0$ està definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Demostreu que si $a_i < x_0 < a_{i+1}$ per a cert $i = 1, \ldots, n-1$, aleshores la solució $\varphi(t)$ amb $\varphi(t_0) = x_0$ satisfà $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = a_{i+1}$, $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = a_i$ si $f(x) > 0$ sobre (a_i, a_{i+1}), i $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = a_i$, $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = a_{i+1}$ si $f(x) < 0$ sobre (a_i, a_{i+1}).

13. Determineu segons el valor de x_0 l'interval de definició de la solució del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - x^2, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

14. Determineu l'interval maximal de definició de la solució del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = t^2 + e^{-x^2}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

15. Considereu el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = t^2 e^{nx^2}, & n \in \mathbb{Z} \\ x(t_0) = 0. \end{cases}$$

(a) Discutiu l'existència i unicitat de solucions maximals.

(b) Proveu que si $n \leqslant 0$ aleshores l'interval de definició de la solució és tot $\mathbb{R}$.

(c) Trobeu l'interval de definició de la solució si $n > 0$.

(d) Considereu el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = t^2 e^{nx^2}, & n \in \mathbb{Z} \\ \dot{y} = xy + t, \end{cases}$$

amb les condicions inicials $x(t_0) = 0, y(t_0) = 0$. Trobeu l'interval de definició de la solució per a $n \in \mathbb{Z}$ i $t_0 \in \mathbb{R}$.

16. Donada una funció contínua $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a, b)$, considereu el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Demostreu que si $f(x_0) \neq 0$ llavors (1) té una única solució (local).

(b) Suposeu que x_0 és un zero aïllat de f; demostreu que (1) té solució única (local) si i només si les integrals

$$\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)} \text{ i } \int_{x}^{x_0} \frac{ds}{f(s)}$$

són divergents.

17. Considerem el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = t \sin x, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Demostreu, sense resoldre l'equació, que hi ha una única solució definida a $\mathbb{R}$ i que aquesta solució verifica que $x_0 - \frac{t^2}{2} \leqslant x(t) \leqslant x_0 + \frac{t^2}{2}$ per tot $t \in \mathbb{R}$.

18. Proveu que per a cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ l'equació

$$\dot{x} = \frac{x^3}{1 + x^2}$$

té una única solució tal que $x(t_0) = x_0$ i que aquesta està definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.

19. Demostreu la versió general del Lema de Gronwall: Siguin $u, v, w : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínues, $v(t) \geqslant 0$ i verificant

$$u(t) \leqslant w(t) + \int_a^t v(s)u(s)ds \text{ per a tot } t \in [a, b).$$

Aleshores

$$u(t) \leqslant w(t) + \int_a^t w(s)v(s) \exp\left(\int_s^t v(r)dr\right) ds \text{ per a tot } t \in [a, b).$$

Proveu a més que si $w \in C^1((a, b))$ llavors

$$u(t) \leqslant w(a) \exp\left(\int_a^t v(s)ds\right) + \int_a^t w'(s) \exp\left(\int_s^t v(r)dr\right) ds.$$

20. Utilitzeu el Lema de Gronwall generalitzat per provar el següent resultat:

Sigui $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua i localment Lipschitz respecte $\mathbf{x}$ tal que, per a cert $R \geqslant 0$,

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leqslant a(t)\|\mathbf{x}\| + b(t), \; t \in \mathbb{R} \text{ i } \|\mathbf{x}\| \geqslant R$$

on $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són contínues i no negatives. Llavors, per tot $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$, el problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = x_0, \end{cases}$$

té una única solució que es pot definir per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Observeu que, en particular, si $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ s contínua i localment Lipschitz respecte $\mathbf{x}$ tal que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leqslant M\|\mathbf{x}\| + N$ amb $M, N > 0$, aleshores les solucions de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ estan definides per tot temps.

Aplicació: $\dot{x} = |x|^\alpha + 1, x \in \mathbb{R}, \alpha \leqslant 1$.

21. Sigui $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable amb continuïtat tal que

$$< \mathbf{x}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) > \leqslant k(t)\|\mathbf{x}\|^2$$

per a tot $\mathbf{x}$ amb $\|\mathbf{x}\| > R$, on $k(t)$ és una funció contínua i positiva i R una constant positiva. Proveu que les solucions maximals de l'equació diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ estan definides per a tot temps positiu.

22. Donat el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1), \\ \dot{y} = -2xy + y, \end{cases}$$

(a) Calculeu $\varphi(t; 0, (x_0, y_0))$, la solució del sistema amb condició inicial $\varphi(0) = (x_0, y_0)$?

(b) Comproveu que $\phi(t) := \varphi(t; 0, (1, 1)) = (1, e^{-t})$.

(c) A partir de l'apartat (a) trobeu $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t; 0, (1, 1))$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}(t; 0, (1, 1))$.

(d) Comproveu que les derivades de l'apartat anterior coincideixen amb les solucions de les equacions de primera variació del sistema sobre la solució $\phi(t)$.

23. Considerem el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1), \\ \dot{y} = y^2 - x, \end{cases}$$

i sigui $\varphi = \varphi(t; t_0, x_0, y_0)$ la solució amb $\varphi(t_0, t_0, x_0, y_0) = (x_0, y_0)$. Trobeu l'expressió de $\varphi(t; 0, 0, -1)$. Calculeu $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t; 0, 0, -1)$.

24. Sigui $\varphi = \varphi(t; t_0, x_0, (a, b))$ la solució del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2t(ax - bx^2), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

(a) Trobeu la solució explícita.

(b) Comproveu que $\varphi(t) = e^{t^2}$ és solució si $t_0 = 0, x_0 = 1, a = 1$ i $b = 0$.

(c) Comproveu que les derivades $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t; 0, 1, (1, 0))$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a}(t; 0, 1, (1, 0))$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b}(t; 0, 1, (1, 0))$ són les mateixes que s'obtenen a partir dels teoremes de dependència diferenciable respecte condicions inicials i paràmetres.

25. Considereu el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y-1), \\ \dot{y} = xy+1, \end{cases}$$

amb condicions inicials $t_0 = 0, (x_0, y_0) = (0,1)$. Calculeu $\varphi(t; 0, (0,1))$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t; 0, (0,1))$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}(t; 0, (0,1))$

26. Considereu l'equació diferencial $\dot{x} = x^2 + e^t(1-e^t)$ que té com a solució particular $\varphi(t; 0, 1) = e^t$. Calculen $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t; 0, 1)$.

27. L'equació diferencial $\dot{x} = \alpha x + \beta$ amb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ admet la solució $x(t) = -\frac{\beta}{\alpha}$, que és una funció no contínua en α. Contradiu això la dependència contínua respecte de paràmetres?

28. Considerem l'equació

$$\dot{x} = \alpha \tan x.$$

(a) Analitzeu, en funció del paràmetre real α, les dades inicials (t_0, x_0) per a les quals podem assegurar existència local de solucions. És aquesta única?

(b) Dibuixeu de forma aproximada el camp de direccions. Trobeu el flux associat i analitzeu les propietats de continuïtat i diferenciabilitat. Dibuixeu aproximadament les solucions.

(c) Trobeu i resoleu les equacions variacionals lineals respecte de x_0 i de α corresponents a la solució de l'equació que passa pel punt $(0,0)$. Comproveu els resultats amb l'ajut de la solució explícita obtinguda a (b).

29. Considerem l'equació

$$\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{x^m}{t^m},$$

on $m \in \mathbb{Z}$.

(a) Trobeu, en funció de m, les regions d'existència i unicitat de solucions.

(b) Trobeu la solució que passa per (t_0, x_0) i indiqueu si la fórmula obtinguda és coherent amb les conclusions de l'apartat (a).

(c) Per $m = 0$ doneu la solució general $\phi(t, t_0, x_0)$ corresponent. Escriviu l'equació diferencial que satisfà $\frac{\partial \phi(t,1,1)}{\partial x_0}$ i resoleu-la. Compareu amb el resultat obtingut derivant directament en la fórmula explícita calculada a (b).