Resum de la magnetostàtica en el buit (1a part).

Permeabilitat del buit: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/ A^2

Llei de Biot i Savart per a calcular camp magnètic d'una distribució de corrent, $\vec{\jmath}(\vec{r}\,')$ dins d'un volum V:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\jmath}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dv' \qquad (1)$$

Però com sabem:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Per tant també podem posar el camp com:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\jmath}(\vec{r}\,') \times \vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) dv' \qquad (2)$$

Llei de solenoidabilitat del camp magnètic

Calculem ara: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r})$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\int_V \vec{\jmath}(\vec{r}\,')\times\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\left(\vec{\jmath}(\vec{r}\,')\times\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right)dv'$$

Però l'integrand: $\vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\left(\vec{\jmath}(\vec{r}\,')\times\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right)$ és zero, ja que el vector $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ es multiplica escalarment a una quantitat, $\vec{\jmath}(\vec{r}\,')\times\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$ que és d'entrada perpendicular a $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$

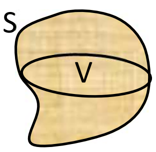
(recordem les propietats **2** i **3** del producte vectorial: $\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$ i $\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$)

Per tant finalment:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = 0 \qquad (3)}$$

Aquesta és la primera de les propietats del camp magnètic i prové, com hem vist, de la llei de Biot i Savart.

Aquesta llei se la sol anomenar de moltes maneres. La 1ª de les denominacions és: *solenoidabilitat del camp $\vec{B}$*



Considerem ara una superfície tancada S, que defineix un volum intern V. Calculem el flux de $\vec{B}$ a través d'aquesta superfície:

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \left|\begin{matrix}\textit{pel teorema}\\ \textit{de la divergència}\end{matrix}\right| = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\cdot dv = \left|\begin{matrix}\text{Usant la relació (3)}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\end{matrix}\right| = 0$$

Per tant:

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \qquad (4)}$$

(3) i (4) són respectivament, la versió diferencial i la versió integral de la mateixa llei de solenoidabilitat del camp $\vec{\mathrm{B}}$. L'aspecte de (4) s'assembla a la del teorema de Gauss integral del camp $\vec{E}$, que recordem que era:

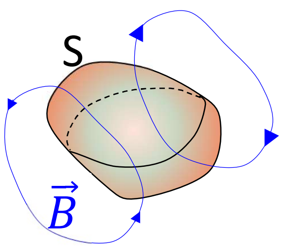
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) \cdot dv$$

Excepte que ara no hi ha càrrega ρ ja que (4) està igualat a zero. Si no hi ha ρ , no hi ha tampoc ni càrregues puntuals ni res similar a la càrrega elèctrica pel cas del camp magnètic.

Per tot això i per la forma (4), sovint a aquesta llei també se l'anomena d'una 2ª forma: <u>*Teorema de Gauss del magnetisme*</u>

En definitiva, aquesta llei diu que no hi ha flux de $\vec{\mathrm{B}}$ a través d'una superfície S tancada, això implica que el número de línies de $\vec{\mathrm{B}}$ que surten de S (contribució positiva al flux) ha de ser igual que les que hi entren (contribució negativa al flux).

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$



Per tant podem afirmar que, les línies no s'acaben ni neixen mai en cap punt, és a dir:

- Les línies de qualsevol camp magnètic **sempre són tancades** (o bé neixen i moren a l'infinit) això és una **propietat fonamental** dels camps magnètics que equival a dir que mai hi ha flux a través d'una superfície tancada

Per això a vegades a aquesta llei també se l'anomena encara d'una 3ª forma: <u>*llei de les línies tancades de $\vec{B}$*</u>, tot i que aquesta denominació significa exactament el mateix (és sinònim) que dir que $\vec{\mathrm{B}}$ és solenoidal, la primera denominació.

Existència d'un potencial vector $\vec{\mathrm{A}}$

Es podria demostrar matemàticament, que si un camp $\vec{B}$ te la divergència nul·la a tot arreu, llavors aquest camp sempre es pot escriure com a rotacional d'un altre camp $\vec{\mathrm{A}}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{B}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathrm{B}} = \vec{\nabla} \, \mathrm{x} \, \vec{\mathrm{A}}$$

La demostració general (per a qualsevol camp) d'aquest teorema queda fora de l'abast de l'assignatura. Tot i així, la implicació $\Leftarrow$ és fàcil ja que $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{\mathrm{A}}\right) = 0$ pel sol fet de que $\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{\mathrm{A}}$ és perpendicular a $\vec{\nabla}$. La que és difícil de demostrar és la implicació $\Rightarrow$.

Pel cas del camp magnètic, $\vec{\mathrm{B}}(\vec{r})$ (que òbviament compleix $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{B}}(\vec{r}) = 0$ i per tant te un $\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})$ tal que $\vec{\mathrm{B}}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{A}(\vec{r})$), a aquest camp $\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})$ se l'anomena potencial vector de $\vec{\mathrm{B}}(\vec{r})$.

Com que sabem que per la llei de Biot i Savart:

$$\vec{\mathrm{B}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\mathrm{j}}(\vec{r}')\,\mathrm{x}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dv' \qquad (1)$$

Per comprovar que existeix, podem proposar un potencial vector com:

$$\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\mathrm{j}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv' \qquad (5)$$

i verificar que efectivament és el potencial vector de $\vec{\mathrm{B}}$. Per a fer-ho, prenem el rotacional d'un $\vec{\mathrm{A}}$ tal com (5) i comprovem que dona un $\vec{\mathrm{B}}$ tal com (1). En efecte:

$$\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}_{\vec{r}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathrm{j}}(\vec{r}')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv' = \left|\begin{array}{c}\vec{\nabla}_{\vec{r}}\text{ no deriva a }\vec{\mathrm{j}}(\vec{r}')\text{ ja que aquest}\\ \text{depèn de }\vec{r}'\text{ i no de }\vec{r}\text{, per tant}\\ \text{el travessa sense derivar. No obstant}\\ \text{canviem el signe pel fet d'haver invertit}\\ \text{l'ordre del producte vectorial}\end{array}\right| = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V -\vec{\mathrm{j}}(\vec{r}')\,\mathrm{x}\,\underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\substack{\text{gradient}\\ \text{de }\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}}\,dv'$$

Com sabem

$$\text{gradient de }\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Per tant substituint:

$$\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\mathrm{j}}(\vec{r}')\,\mathrm{x}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dv'$$

Que és efectivament $\vec{\mathrm{B}}(\vec{r})$ segons (1). c.q.d.

NOTA FINAL: En abordar la demostració formal del teorema general.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{B}}(\vec{r}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathrm{B}}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})$$

No només s'aconsegueix veure que aquest camp $\vec{\mathrm{A}}(\vec{r})$ existeix sinó que, a més, no és únic. En efecte, qualsevol quantitat sumada a $\vec{\mathrm{A}}$ que sigui el gradient d'un camp escalar $\varphi(\vec{r})$, és a dir

$\vec{\mathrm{A}}'(\vec{r}) = \vec{\mathrm{A}}(\vec{r}) + \vec{\nabla}(\varphi(\vec{r}))$, dona el mateix resultat $\vec{\mathrm{B}}(\vec{r})$ al prendre-li el rotacional, ja que $\vec{\nabla}\mathrm{x}\,\vec{\nabla}(\varphi(\vec{r})) = 0$

sigui quin sigui $\varphi(\vec{r})$ donat que el producte vectorial de dues $\vec{\nabla}$ és nul per definició.

Exercici:

Donada la *permitivitat del buit*: $\varepsilon_0 \approx 8{,}8541878176 \times 10^{-12}$ $C^2/(Nm^2)$, constant de la llei de Coulomb de $\vec{E}$ i

donada la *permeabilitat del buit*: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2, constant de la llei de Biot i Savart de $\vec{B}$.

Calculem $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$, Quines unitats te?. Identifica a que correspon la quantitat obtinguda.

Calcula també ara: $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ Quines unitats te?. A que correspon?