# Intersección de subespacios afines

## Proposición

Si $\mathcal{A}_i = (A_i, F_i)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A} = (A, V)$ para todo $i \in I$ y $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, entonces $(A', F) = (\bigcap_{i\in I} A_i, \bigcap_{i\in I} F_i)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$.

## Demostración

Como $F_i$ es un s.e.v. de $V$ para todo $i \in I$, tenemos que $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ es un s.e.v. de $V$. Así, para todo $a, b \in A'$ tenemos

## Demostración

Como $F_i$ es un s.e.v. de $V$ para todo $i \in I$, tenemos que $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ es un s.e.v. de $V$. Así, para todo $a,b \in A'$ tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_a(F) &= \varphi_a\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) \\
&= \left\{a + \overrightarrow{v} :\ \overrightarrow{v} \in \bigcap_{i\in I} F_i\right\} \\
&= \bigcap_{i\in I} \{a + \overrightarrow{v} :\ \overrightarrow{v} \in F_i\} \\
&= \bigcap_{i\in I} \varphi_a(F_i) \\
&= \bigcap_{i\in I} A_i \\
&= A'.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi_a(F) = A'$, y eso implica que $\mathcal{A}' = (A', F)$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$.

## Ejercicio

Considera $\mathbb{R}^3$ como espacio afín. Sea $\mathcal{A}_1$ el subespacio afín dado por $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x+y=3\}$ y $\mathcal{A}_2$ el subespacio afín determinado por $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, z=3\}$.

(a) Determina referencias afines de $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

(b) Muestra que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ es el subespacio afín que contiene el punto $(3,0,3)$ y está dirigido por $\langle(-1,1,0)\rangle$.

(c) Determina $\dim(\mathcal{A}_1)$, $\dim(\mathcal{A}_2)$ y $\dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$. Clasifica estos subespacios de acuerdo a su dimensión.

## Solución

Sean $\mathcal{A}_1 = (A_1, F_1)$ y $\mathcal{A}_2 = (A_2, F_2)$. Los puntos $a = (0,3,0), b = (3,0,0), c = (0,3,3)$ pertenecen a $A_1$ y $F_1 = \langle \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac} \rangle$. Por lo tanto, $(a,b,c)$ es una referencia afín de $\mathcal{A}_1$ y $\dim(\mathcal{A}_1) = 2$.

## Solución

Sean $\mathcal{A}_1 = (A_1, F_1)$ y $\mathcal{A}_2 = (A_2, F_2)$. Los puntos $a = (0,3,0), b = (3,0,0), c = (0,3,3)$ pertenecen a $A_1$ y $F_1 = \langle \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac} \rangle$. Por lo tanto, $(a,b,c)$ es una referencia afín de $\mathcal{A}_1$ y $\dim(\mathcal{A}_1) = 2$. Análogamente, $p = (0,0,3), q = (3,0,3), r = (0,3,3)$ están en $A_2$ y $F_2 = \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr} \rangle$. Así, $(p,q,r)$ es una referencia afín de $\mathcal{A}_2$ y $\dim(\mathcal{A}_2) = 2$.

## Solución

Sean $\mathcal{A}_1 = (A_1, F_1)$ y $\mathcal{A}_2 = (A_2, F_2)$. Los puntos $a = (0,3,0), b = (3,0,0), c = (0,3,3)$ pertenecen a $A_1$ y $F_1 = \langle \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac} \rangle$. Por lo tanto, $(a,b,c)$ es una referencia afín de $\mathcal{A}_1$ y $\dim(\mathcal{A}_1) = 2$. Análogamente, $p = (0,0,3), q = (3,0,3), r = (0,3,3)$ están en $A_2$ y $F_2 = \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr} \rangle$. Así, $(p,q,r)$ es una referencia afín de $\mathcal{A}_2$ y $\dim(\mathcal{A}_2) = 2$. Por otro lado, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = (A_1 \cap A_2, F_1 \cap F_2)$, y por eso

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \{(x,y,3) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y = 3\} \\ &= \{(x, 3-x, 3) : \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0,3,3) + x(1,-1,0) : \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(3,0,3) + x(-1,1,0) : \ x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

## Solución

Sean $\mathcal{A}_1 = (A_1, F_1)$ y $\mathcal{A}_2 = (A_2, F_2)$. Los puntos $a = (0,3,0), b = (3,0,0), c = (0,3,3)$ pertenecen a $A_1$ y $F_1 = \langle \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac} \rangle$. Por lo tanto, $(a,b,c)$ es una referencia afín de $\mathcal{A}_1$ y $\dim(\mathcal{A}_1) = 2$.
Análogamente, $p = (0,0,3), q = (3,0,3), r = (0,3,3)$ están en $A_2$ y $F_2 = \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr} \rangle$. Así, $(p,q,r)$ es una referencia afín de $\mathcal{A}_2$ y $\dim(\mathcal{A}_2) = 2$.
Por otro lado, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = (A_1 \cap A_2, F_1 \cap F_2)$, y por eso

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \{(x,y,3) \in \mathbb{R}^3 : \, x + y = 3\} \\ &= \{(x, 3-x, 3) : \, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0,3,3) + x(1,-1,0) : \, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(3,0,3) + x(-1,1,0) : \, x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

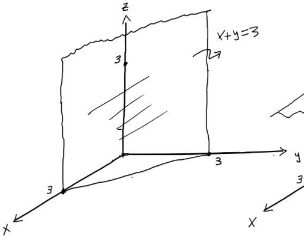
Así, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ es la recta que contiene el punto $(3,0,3)$ y está generada por $\langle (-1,1,0) \rangle$. Una referencia afín es $((0,3,3),(3,0,3))$ y $\dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = 1$.

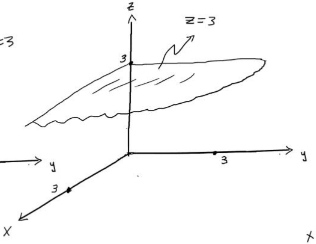
## Solución

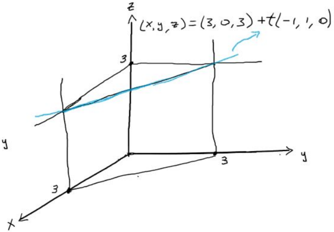
Sean $\mathcal{A}_1 = (A_1, F_1)$ y $\mathcal{A}_2 = (A_2, F_2)$. Los puntos $a = (0,3,0), b = (3,0,0), c = (0,3,3)$ pertenecen a $A_1$ y $F_1 = \langle \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac} \rangle$. Por lo tanto, $(a,b,c)$ es una referencia afín de $\mathcal{A}_1$ y $\dim(\mathcal{A}_1) = 2$.
Análogamente, $p = (0,0,3), q = (3,0,3), r = (0,3,3)$ están en $A_2$ y $F_2 = \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr} \rangle$. Así, $(p,q,r)$ es una referencia afín de $\mathcal{A}_2$ y $\dim(\mathcal{A}_2) = 2$.
Por otro lado, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = (A_1 \cap A_2, F_1 \cap F_2)$, y por eso

$$\begin{aligned}
A_1 \cap A_2 &= \{(x,y,3) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y = 3\} \\
&= \{(x, 3-x, 3) : \ x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(0,3,3) + x(1,-1,0) : \ x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(3,0,3) + x(-1,1,0) : \ x \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Así, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ es la recta que contiene el punto $(3,0,3)$ y está generada por $\langle (-1,1,0) \rangle$. Una referencia afín es $((0,3,3),(3,0,3))$ y $\dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = 1$.
Por lo tanto, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son planos, mientras $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ es una recta.


z
3
x+y=3
3
3
y
x


z
z=3
3
3
3
y
x


z
(x,y,z)=(3,0,3)+t(-1,1,0)
3
3
3
y
x

## Ejercicio

Prueba que por dos puntos diferentes pasa una única recta.

## Ejercicio

Prueba que por dos puntos diferentes pasa una única recta.

## Solución

- Sea $a, b \in A$ dos puntos diferentes de un espacio afín $\mathcal{A} = (A, V)$.

## Ejercicio

Prueba que por dos puntos diferentes pasa una única recta.

## Solución

- Sea $a, b \in A$ dos puntos diferentes de un espacio afín $\mathcal{A} = (A, V)$.
- Asumimos que el espacio vectorial $V$ está definido sobre un cuerpo denotado por $\mathbb{K}$.

## Ejercicio

Prueba que por dos puntos diferentes pasa una única recta.

## Solución

- Sea $a,b \in A$ dos puntos diferentes de un espacio afín $\mathcal{A} = (A,V)$.
- Asumimos que el espacio vectorial $V$ está definido sobre un cuerpo denotado por $\mathbb{K}$.
- Para toda recta $\mathcal{A}' = (A',F)$ de $\mathcal{A}$ tal que $a,b \in A'$, existe un vector $\overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tal que $F = \langle \overrightarrow{u} \rangle$.

## Ejercicio

Prueba que por dos puntos diferentes pasa una única recta.

## Solución

- Sea $a,b \in A$ dos puntos diferentes de un espacio afín $\mathcal{A} = (A,V)$.
- Asumimos que el espacio vectorial $V$ está definido sobre un cuerpo denotado por $\mathbb{K}$.
- Para toda recta $\mathcal{A}' = (A',F)$ de $\mathcal{A}$ tal que $a,b \in A'$, existe un vector $\overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tal que $F = \langle \overrightarrow{u} \rangle$.
- Así, $\overrightarrow{ab} = \lambda \overrightarrow{u}$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$, lo que implica que $F = \langle \overrightarrow{ab} \rangle$.

## Ejercicio

Prueba que por dos puntos diferentes pasa una única recta.

## Solución

- Sea $a, b \in A$ dos puntos diferentes de un espacio afín $\mathcal{A} = (A, V)$.
- Asumimos que el espacio vectorial $V$ está definido sobre un cuerpo denotado por $\mathbb{K}$.
- Para toda recta $\mathcal{A}' = (A', F)$ de $\mathcal{A}$ tal que $a, b \in A'$, existe un vector $\overrightarrow{u} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tal que $F = \langle \overrightarrow{u} \rangle$.
- Así, $\overrightarrow{ab} = \lambda \overrightarrow{u}$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$, lo que implica que $F = \langle \overrightarrow{ab} \rangle$.
- Sabemos que existe un único subespacio afín que pasa por $a$ y tiene la dirección del subespacio $F = \langle \overrightarrow{ab} \rangle$. Por lo tanto, por $a$ y $b$ pasa una única recta. $\square$

## Ejercicio

Sean $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ dos rectas de un espacio afín. Demuestra que si $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing$ y $\mathbb{L}_1 \neq \mathbb{L}_2$, entonces existe un punto $x$ tal que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{x\}$.

## Ejercicio

Sean $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ dos rectas de un espacio afín. Demuestra que si $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing$ y $\mathbb{L}_1 \neq \mathbb{L}_2$, entonces existe un punto $x$ tal que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{x\}$.

## Solución

Supongamos que existen dos puntos diferentes $a, b \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$. Como a través $a$ y $b$ pasa una única recta (ejercicio anterior), tenemos que $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. Por lo tanto, si $\mathbb{L}_1 \neq \mathbb{L}_2$ y $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing$, entonces existe un único punto $x \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$. $\square$