

Anàlisi Matemàtica 1 (AM1) GEMiF

E5.3 Exercicis: Mètodes d'integració

1. Calcula les següents integrals per canvi de variable:

a)

$$\int x(2x - 3)^{99} dx$$

b)

$$\int x(4x^2 + 1)(2x^4 + x^2 + 1)^k dx, \quad k \neq -1$$

c)

$$\int a^x e^x dx$$

d)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

e)

$$\int \frac{x}{(x+1)^2 + 4} dx$$

f)

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

g)

$$\int \frac{\cos(\ln(x^2))}{x} dx$$

h)

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx$$

i)

$$\int \frac{\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

j)

$$\int x^2 \cos^2(x^3) \sin(x^3) dx$$

k)

$$\int_0^1 x^2(1+3x^3)^5 dx$$

l)

$$\int_0^1 x e^{4x^2+3} dx$$

2. Calcula les següents integrals per integració per parts:

a)

$$\int x 2^x dx$$

b)

$$\int \ln x dx$$

c)

$$\int \arctan x dx$$

d)

$$\int x^k \ln x dx, \quad k \neq -1$$

e)

$$\int \cos(\ln x) dx, \quad k \neq -1$$

f)

$$\int \frac{\cos x}{e^x} dx$$

g)

$$\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$$

h)

$$\int e^x \sin x dx$$

i)

$$\int \sin x \sinh x dx$$

j)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cosh(2x) dx$$

k)

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx$$

l)

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx$$

3. Calcule les suivants intégrals:

a)

$$\int \frac{1}{\cos x} dx$$

b)

$$\int \tan^2 x dx$$

c)

$$\int e^{ax} \cosh(bx) dx$$

d)

$$\int \sin^3 x dx$$

e)

$$\int \cos^4 x dx$$

f)

$$\int \sec^3(\pi x) dx$$

g)

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx$$

h)

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} dx$$

i)

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+5)^2} dx$$

j)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$$

k)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$$

4. Superposició d'ones (desenvolupament en sèrie de Fourier):

- a) Calcula $\int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx$, $n \in \mathbb{N}$
- b) Calcula $\int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx$, $n \in \mathbb{N}$
- c) Calcula $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(nx) dx$, $n \in \mathbb{N}$
- d) Calcula $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq n$
- e) Calcula $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq n$
- f) Calcula $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq n$
- g) Sigui f una funció definida a l'interval $[0, 2\pi]$ tal que

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx$$

Determina els coeficients a_k i b_k en funció d'integrals de f

5. Calcula les següents integrals racionals:

- a) $\int \frac{x^5 + 2}{x^2 - 1} dx$
- b) $\int \frac{2x^3 + 3}{x(x-1)^2} dx$
- c) $\int \frac{x^2 + 5x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$
- d) $\int \frac{2x^5 + 9x^3 + x^2 + 7x + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} dx$

6. Calcula les següents integrals:

a)

$$\int x^2 \sqrt{1+x} dx$$

b)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$$

c)

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$

d)

$$\int \frac{1}{x(\sqrt[3]{x}-1)} dx$$

e)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$$

f)

$$\int \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$$

g)

$$\int \frac{1}{1+\cos x - \sin x} dx$$

h)

$$\int \frac{1}{2+\sin x} dx$$

i)

$$\int \frac{1}{\sin x + \tan x} dx$$