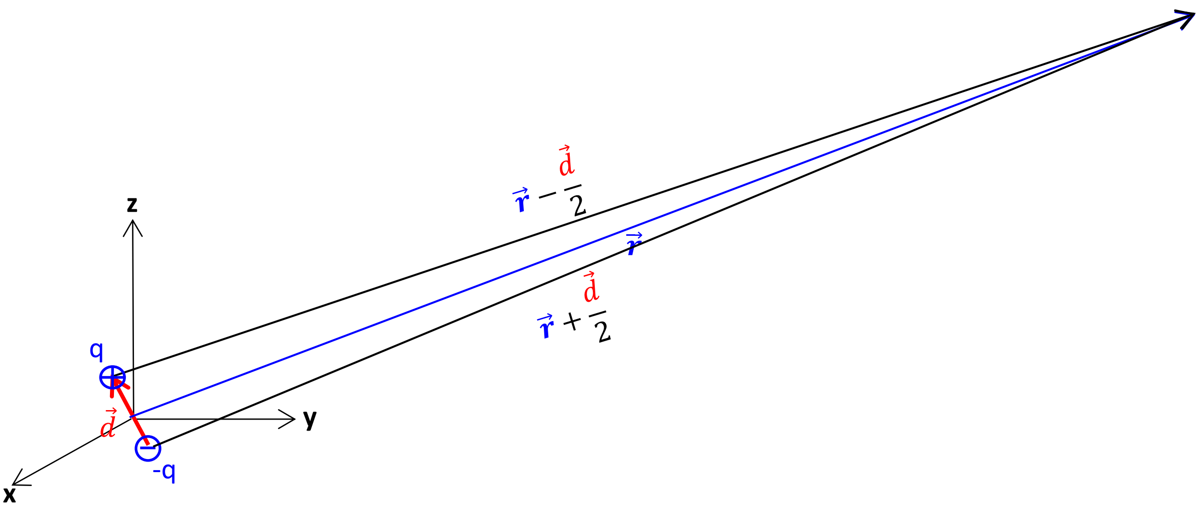
Potencial d'un dipol elèctric a la llunyania.

Sigui un dipol elèctric com el format per les dues càrregues q i -q separades entre si pel vector distància $\vec{d}$, com es veu a la figura següent.Posem l'origen de coordenades just al punt mig entre les dues càrregues.

Sigui $\vec{r}$ la posició del punt on volem calcular el potencial elèctric produït pel dipol. Considerem aquest punt situat **molt lluny** de l'espira (i.e. $|\vec{r}| >> |\vec{d}|$ o $r >> d$)



El punt $\vec{r}$,està situat a la posició $\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}$ respecte la càrrega q i una altra posició: $\vec{r} - \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) = \vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}$ respecte la càrrega -q.

El potencial V($\vec{r}$) serà la superposició del potencial produït per cadascuna de les dues càrregues del dipol, per tant usant l'expressió del potencial produït per una càrrega (suposant origen de potencial a l'infinit), tenim:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left|\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right|} + \frac{-q}{\left|\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right|}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left[\left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right)\cdot\left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right)\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[\left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right)\cdot\left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right)\right]^{1/2}}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r^2 - \vec{r}\cdot\vec{d} + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(r^2 + \vec{r}\cdot\vec{d} + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{1/2}}\right]$$

Desenvolupem: $$\left(r^2 - \vec{r}\cdot\vec{d} + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{-1/2} = \left|\begin{matrix} dividint\ el\ parèntesi \\ per\ r^2\ i\ traient - lo\ a\ fora \\ en\ forma\ de\ (r^2)^{-1/2} = r^{-1}\end{matrix}\right| = r^{-1}\left(1 \underbrace{- \frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} + \left(\frac{d}{2r}\right)^2}_{x}\right)^{-1/2}$$

Com hem vist al darrer pas, hem definit: $x = -\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} + \left(\frac{d}{2r}\right)^2$ i com que d<<r resulta que x<<1.

El desenvolupament de $(1+x)^n$ en sèrie de Taylor al voltant de x=0 és:

$$(1+x)^n = 1 + n\cdot x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Com que x és molt més petit que 1, en el desenvolupament ens quedarem en els termes de segon ordre x^2 com a molt, de manera que pel nostre cas on l'exponent n és -1/2.

$$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^2 = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{r}\right)^2\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} + \left(\frac{d}{2r}\right)^2\right)^2 \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} - \frac{1}{8}\left(\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r}\right)^2$$

La resta de termes del desenvolupament del darrer quadrat són d'ordre superior a $\left(\frac{d}{r}\right)^2$ i per tant no els considerem ja que estem desenvolupant fins a ordre 2 només.

Fent ara el mateix amb l'altre terme: $\left(r^2 + \vec{r}\cdot\vec{d} + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{-1/2}$

Obtenim: $\left(r^2 + \vec{r}\cdot\vec{d} + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = r^{-1}\left(1 + \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} + \left(\frac{d}{2r}\right)^2}_{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx$

$$\approx r^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{r}\right)^2\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{r}\right)^2\right)^2\right) \approx r^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} - \frac{1}{8}\left(\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r}\right)^2\right)$$

Finalment, tornem a calcular el potencial:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{d} + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(r^2 + 2\vec{r}\cdot\vec{d} + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{1/2}}\right]$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} - \frac{1}{8}\left(\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r}\right)^2\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} - \frac{1}{8}\left(\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r}\right)^2\right)\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r}\right]$$

Com es pot comprovar la resta de termes, abans del darrer pas, es cancel·len entre els del parèntesi de l'esquerra i els de la dreta; per tant l'ordre 0 (1) i l'ordre 2 desapareixen del desenvolupament i tot queda d'ordre 1.

Finalment, simplificant una mica més, l'expressió del potencial a la llunyania es converteix en:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} \qquad (1)$$

On $\vec{p} = q\vec{d}$ és el vector moment dipolar del dipol.

Segons aquesta equació (1) el potencial decreix com a $\frac{1}{r^2}$ a la llunyania del dipol, un grau més ràpid que $\frac{1}{r}$ com ho feia per una càrrega puntual segons la Llei de Coulomb

Camp d'un dipol elèctric a la llunyania.

Si ara enlloc del potencial volem obtenir el camp elèctric, es farà servir més o menys el mateix procediment d'aproximacions.

El potencial V($\vec{r}$) serà la superposició del potencial produït per cadascuna de les dues càrregues del dipol, per tant usant l'expressió del potencial produït per una càrrega (suposant origen de potencial a l'infinit), tenim:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q\left(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left|\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right|^{3/2}} - \frac{q\left(\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left|\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right|^{3/2}}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left[\left(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right)\cdot\left(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right)\right]^{3/2}} - \frac{\left(\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left[\left(\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right)\cdot\left(\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right)\right]^{3/2}}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left(\boldsymbol{r}^2-\vec{r}\cdot\vec{d}+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{\left(\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left(\boldsymbol{r}^2+\vec{r}\cdot\vec{d}+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\right]$$

Desenvolupem: $\left(\boldsymbol{r}^2-\vec{r}\cdot\vec{d}+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{-3/2} = \left|\begin{array}{c} dividint\ el\ parèntesi \\ per\ \boldsymbol{r}^2\ i\ traient - lo\ a\ fora \\ en\ forma\ de\ (\boldsymbol{r}^2)^{-3/2} = \boldsymbol{r}^{-3} \end{array}\right| = \boldsymbol{r}^{-3}\left(1\underbrace{-\frac{\vec{r}}{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\vec{d}}{\boldsymbol{r}}+\left(\frac{d}{2\boldsymbol{r}}\right)^2}_{x}\right)^{-3/2}$

Com abans, com que x és molt més petit que 1. Farem el desenvolupament en sèrie de Taylor de: $(1+x)^{-3/2}$, Però ara només ens quedarem en els termes de primer ordre en x com a molt.

$$(1+x)^{-3/2} \approx 1-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2!}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^2 \approx 1-\frac{3}{2}x = 1-\frac{3}{2}\left(-\frac{\vec{r}}{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\vec{d}}{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{4}\left(\frac{d}{\boldsymbol{r}}\right)^2\right) \approx 1+\frac{3}{2}\frac{\vec{r}}{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\vec{d}}{\boldsymbol{r}}$$

El terme que hem eliminat en el darrer pas és perquè és d'ordre 2 i per tant no el considerem (estem fins a ordre 1 només).

Fent ara el mateix amb l'altre terme: $\left(\boldsymbol{r}^2+\vec{r}\cdot\vec{d}+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}$

Obtenim: $\left(\boldsymbol{r}^2+\vec{r}\cdot\vec{d}+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \approx \boldsymbol{r}^{-3}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\vec{r}}{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\vec{d}}{\boldsymbol{r}}\right)$

Finalment, tornem a calcular el camp:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left(\boldsymbol{r}^2-\vec{r}\cdot\vec{d}+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{\left(\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left(\boldsymbol{r}^2+\vec{r}\cdot\vec{d}+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\right]$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\boldsymbol{r}^3}\left[\left(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right)\left(1+\frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{\boldsymbol{r}^2}\right)-\left(\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right)\left(1-\frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{\boldsymbol{r}^2}\right)\right]$$

Fins a primer ordre només queden els termes següents:

$$\vec{E}(\vec{\boldsymbol{r}}) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\boldsymbol{r}^3}\left[2\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{3}{2}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{d}}{\boldsymbol{r}^2} - 2\frac{\vec{d}}{2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\boldsymbol{r}^3}\left[3\frac{\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{d}}{\boldsymbol{r}^5}\vec{\boldsymbol{r}} - \frac{\vec{d}}{\boldsymbol{r}^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3\frac{\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{p}}{\boldsymbol{r}^5}\vec{\boldsymbol{r}} - \frac{\vec{p}}{\boldsymbol{r}^3}\right]$$

Segons aquesta equació (1) el camp decreix com a $\frac{1}{\boldsymbol{r}^3}$ a la llunyania del dipol, un grau més ràpid que $\frac{1}{\boldsymbol{r}^2}$ com ho feia per una càrrega puntual segons la Llei de Coulomb