TEMA 2. Solucions de les equacions de Maxwell en regions limitades.

1. Solucions de les equacions d'ones dels camps $\vec{E}$ i $\vec{H}$ en un medi lineal, isòtrop, homogeni, sense càrregues, aïllant i il·limitat en totes direccions

Aquest paràgraf només és un resum del tema 1. Anterior, plasmat en el document "Equacions de Maxwell. I solució d'ones electròmagnètiques a regions homogènies". En aquest tema anterior deixavem que les radiacions es puguessin propagar lliurement en les 3 direccions de l'espai (x,y,z) en un medi dielèctric, la qual cosa conduia a solucions ondulatòries d'una determinada freqüència $\omega=2\pi\cdot f$ i d'un determinat vector d'ona $\vec{k}$ que dona la direcció de l'espai cap a on es propaga l'ona, de tal manera que el seu mòdul està lligat amb la freqüència per: $k=\frac{\omega}{v}$. Essent $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ la velocitat de propagació de l'ona. És a dir:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cdot exp\left[i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]=\vec{E}_0\cdot exp\left[i\left(\omega t-\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)\right)\right] \quad (1)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}_0\cdot exp\left[i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]=\vec{H}_0\cdot exp\left[i\left(\omega t-\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)\right)\right] \quad (2)$$

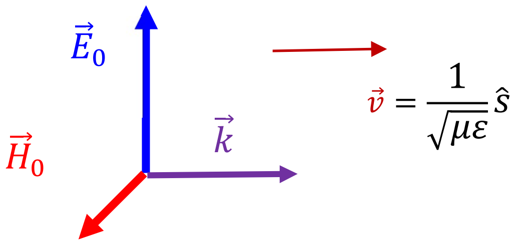
I com vam veure també, $\vec{E}_0$ i $\vec{H}_0$ són perpendiculats entre sí i estan lligats per la relació de la tríada ortogonal:

$$\vec{k}\times\vec{E}_0=\mu\omega\,\vec{H}_0 \quad (3)$$

$$\vec{H}_0\times\vec{k}=\varepsilon\omega\,\vec{E}_0 \quad (4)$$

Que condueix a la relació de mòduls:

$$\frac{E_0}{H_0}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=Z_c \quad (5)$$



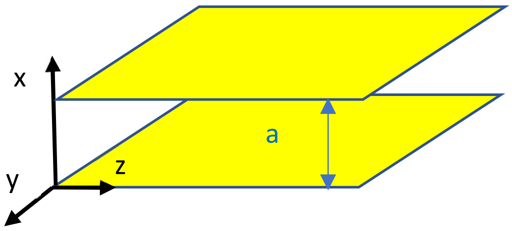
Tal manca de limitació del medi, en totes direccions obligava a tenir solucions ondulatòries i oscil·lants en totes les direccions i el temps. Però ara estudiarem els casos en que les radiacions es propaguen en medis limitats en una o diverses direccions d el'espai. És a dir solucions de les radiacions electromagnètiques en regions limitades. Al voltant de les direccions de limitació hi posarem un material conductor, que no deixa passar el camp $\vec{E}$. Veurem que cada direcció de limitació, també dit confinament, genera unes condicions noves que limiten les freqüències i els vectors d'ona a determinats valors discrets, mentre que les direccions de propagació lliure (no confinament) es comporten com abans com a ones sinussoidals lliures. El primer exemple el farem quan hi ha limitació en una ola direcció que serà la x, deixant lliure propagacióil·limitada al pla y-z.

2) Limitació en una dimensió: x està limitat, y i z no te límit .

És el cas d'una làmina plana infinita entre dos plans infinits dins de la qual es propaguen els camps.

Com vam veure al tema anterior cal trobar solucions separades en el temps de la forma:

$$\varphi(\vec{r},t) = R(\vec{r}) \cdot T(t)$$



On: $T(t) = T_0 \cdot exp(i\omega t)$

Després de separar i establir la constant: ${k_0}^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$, la part de l'espai, $R(\vec{r})$, serà la solució de l'Equació de Helmholtz:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} R = -{k_0}^2 R$$

Provarem solucions separades en les dues variables lliures, y i z. Per el·liminació la funció de x també queda separada, és a dir:

$$(7) \quad R(x,y,z) = M(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Substituint a Helmholtz (6) i dividint per R.

$$(8) \quad \frac{\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}}{M(x)} + \frac{\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}{Y(y)} + \frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)} = -{k_0}^2$$

Cadascú dels termes només depenen d'una de les 3 variables x, y i z. Per tant ambdós són iguals a una constant, que anomenem respectivament $-{k_x}^2, -{k_y}^2, -{k_z}^2$ i que sumen $-{k_0}^2$

$${k_x}^2 + {k_y}^2 + {k_z}^2 = {k_0}^2$$

En el cas de la igualació amb els membres que contenen $Y(y) \;\; i \; X(x)$:

$$\frac{\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}{Y(y)} = -\,k_y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2 Y(y)$$

$$\frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)} = -\,k_z^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k_z^2 Z(z)$$

La solució d'aquest tipus d'equacions són com sempre exponencials, tenint en compte que en les direccions y i z no hi tenim límit, i per tal d'evitar solucions divergents, hem de tenir $k_y^2 > 0 \;\; i \; k_z^2 > 0$ corresponent llavors a solucions oscil·lants sinusoïdals en les dues dimensions:

$$Y(y) = Y_0 \cdot \exp\left(\mp i k_y y\right)$$

$$Z(z) = Z_0 \cdot \exp(\mp i k_z z)$$

És a dir:

$R(x,y,z) = M(x)Y(y)Z(z) = R_0 \cdot M(x) \cdot exp\left(\mp i\left(k_y y + k_z z\right)\right) \cdot$ Mentre que per a la resta de l'equació $M(x)$:

$$\frac{\frac{\partial^2 M(x)}{\partial \mathrm{x}^2}}{M(x)} - k_y^2 - k_z^2 = -{k_0}^2$$

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 M(x)}{\partial \mathrm{x}^2} + \underbrace{\left({k_0}^2 - {k_y}^2 - {k_z}^2\right)}_{k_c^2} M(x) = 0$$

La solució de l'equació (9) dependrà molt del gruix, a, de la làmina i de les condicions de contorn als plans superior i inferior. L'equació (9) és la que importa. Se li diu *equació de l'ona confinada a la làmina.*

Si parlem de camps electromagnètics, hem de fer el mateix per a cadascunes de les components de $\vec{E}$ i de $\vec{H}$.

Així la solució de la component i-èssima (i=1,2,3 o x,y,z) d'aquests en una làmina al llarg del pla x-z, serà:

$$(10) \qquad E_i(x,y,z;\ t) = e_i(x) exp\left[i\left(-\left(k_y y + k_z z\right) + \omega t\right)\right]$$

$$(11) \qquad H_i(x,y,z;\ t)\ = h_i(x)\ exp\left[i\left(-\left(k_y y + k_z z\right) + \omega t\right)\right]$$

Essent les equacions de l'ona confinada així:

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 e_i(x)}{\partial \mathrm{x}^2} + k_c^2 e_i(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 h_i(x)}{\partial \mathrm{x}^2} + k_c^2 h_i(x) = 0$$

Les solucions més generals per a aquestes equacions són:

$$(13) \qquad e_i(x) = A_i \cdot \exp(i k_c x) + B_i \cdot \exp(-i k_c x)$$

$$h_i(x) = C_i \cdot \exp(i k_c x) + D_i \cdot \exp(-i k_c x)$$

Suposem que a ambdós costats de la làmina, per fora hi ha materials conductors, suposem que el corrent interficial és nul: $\vec{\mathbf{k}}_f = 0$, llavors aplicant la continuïtat de les components tangencials dels dos, tenim que les components tangencials són nul·les també (per dins) a la interfície, x=0 i x=a.

2. interfície) $\hat{\mathrm{n}}\, x\left(\vec{E}^{+} - \vec{E}^{-}\right) = 0$: Continuïtat interficial de la component tangencial de $\vec{E}$

4. inte.) $\hat{\mathrm{n}}\, x\left(\vec{H}^{+} - \vec{H}^{-}\right) = \vec{\mathbf{k}}_{f} = 0$: Continuïtat interficial de la component tangencial de $\vec{H}$

Aplicant condicions de contorn corresponents a interfícies conductores a ambdós costats x=0 i x=a pel camp elèctric:

$$e_i(z=0) = A_i + B_i = 0 \quad \Rightarrow \quad B_i = -A_i$$

$$e_i(z=a) = A_i \cdot (\exp(ik_c a) - \exp(-ik_c a)) = 0$$

$$\exp(ik_c a) - \exp(-ik_c a) = 2i\sin(k_c a) \quad \Rightarrow \quad \sin(k_c a) = 0$$

$$(14) \quad k_c = \pi\frac{m}{a} \quad m\ sencer\ no\ zero, \quad m = 1,2,3,\ldots$$

$$\left(k_0{}^2 - k_y{}^2 - k_z{}^2\right) = k_c^2 = \left(\pi\frac{m}{a}\right)^2$$

$$(15) \quad k_0{}^2 = k_c^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2 = \pi^2\left(\frac{m}{a}\right)^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2$$

Com:

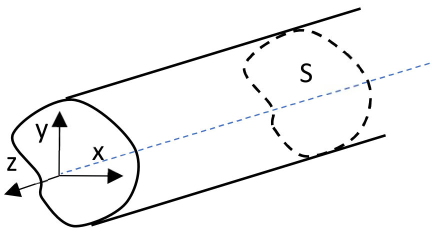
$$k_0 = f2\pi\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{v} = \sqrt{\pi^2\left(\frac{m}{a}\right)^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2}$$

Si la freqüència no és com a mínim,

$$(15) \quad f \geq \frac{v}{2a}$$

No hi haurà cap mode (m) de propagació, ni tant sols el m=1.

3) Limitació en dues dimensions: x, y estan limitats i z no te límit (és el cas d'una guia d'ona de secció uniforme en el pla x-y, que s'estén infinitament al llarg de l'eix z)



Llavors provarem solucions del tipus:

$$(16)\quad R(x,y,z) = M(x,y)\cdot Z(z)$$

Substituint a (6) i dividint per R.

$$(17)\quad \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\right)M(x,y)}{M(x,y)}+\frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial \mathrm{z}^2}}{Z(z)} = -{k_0}^2 \;\Rightarrow\; \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\right)M(x,y)}{M(x,y)}+{k_0}^2 = -\frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial \mathrm{z}^2}}{Z(z)}$$

El membre de l'esquerra només depèn de x i de y, i el de la dreta només de z. Per tant ambdós membres són iguals a una mateixa constant, que anomenem k_g^2.

En el cas de la igualació amb el membre que conté $Z(z)$:

$$-\frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial \mathrm{z}^2}}{Z(z)} = k_g^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial \mathrm{z}^2} = -k_g^2 Z(z)$$

La solució d'aquest tipus d'equacions són com sempre exponencials, tenint en compte que en la direcció z no hi tenim límit, i per tal d'evitar solucions divergents en z, hem de tenir $k_g^2>0$, corresponent llavors a solucions oscil·lants sinusoïdals:

$$Z(z) = Z_0 \cdot \exp\left(-ik_g z\right)$$

Mentre que per a la resta de l'equació per a $M(x,y)$:

$$\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\right)M(x,y)}{M(x,y)}+{k_0}^2 = k_g^2$$

$$(18)\qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\right)M(x,y) + \underbrace{\left({k_0}^2 - k_g^2\right)}_{k_c^2} M(x,y) = 0$$

La solució de l'equació (18) dependrà molt de la forma de la secció de la guia, ja que hem d'aplicar condicions de contorn a la seva superfície lateral. L'equació (16) és la que importa. Se li diu *equació de l'ona guiada*.

Si parlem de camps electromagnètics, hem de fer el mateix per a cadascunes de les components de $\vec{E}$ i de $\vec{H}$.

Així la solució de la component i-èssima (i=1,2,3 o x,y,z) d'aquests en una guia d'ona al llarg de la direcció z, serà:

$$(19) \qquad E_i(x, y, z;\ t) = e_i(x, y) exp\left[i\left(-k_g z + \omega t\right)\right]$$

$$(20) \qquad H_i(x, y, z;\ t) = h_i(x, y)\ exp\left[i\left(- k_g z + \omega t\right)\right)]$$

on $e_i(x, y)$i $h_i(x, y)$ són solucions de les equacions de l'ona guiada, i per tant satisfan les 6 equacions de Helmholtz de

l'ona guiada (també anomenades de propagació) per a les 6 incògnites o 6 components dels camps (e_x, e_y , e_z i h_x , h_y, h_z):

$$\boxed{\begin{array}{ll}
(PE1) & \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\right) e_x(x, y) + k_c^2 e_x(x, y) = 0 \\
(PE2) & \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\right) e_y(x, y) + k_c^2 e_y(x, y) = 0 \\
(PE3) & \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\right) e_z(x, y) + k_c^2 e_z(x, y) = 0 \\
(PH1) & \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\right) h_x(x, y) + k_c^2 h_x(x, y) = 0 \\
(PH2) & \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\right) h_y(x, y) + k_c^2 h_y(x, y) = 0 \\
(PH3) & \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\right) h_z(x, y) + k_c^2 h_z(x, y) = 0
\end{array}}$$

Amb: $k_c^2 = {k_0}^2 - k_g^2 \quad i \quad {k_0}^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$

Això dona un sistema determinat i compatible de rang 6.

Per altra banda aquestes mateixes components satisfan en origen, les pròpies equacions de Maxwell?. Recordem-les:

1'') $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon}$

2'') $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}$

3'') $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$

4'') $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\mathrm{j}}_f + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$

Normalment dins una guia d'ona no hi ni ha càrrega lliure ni corrent lliure, per tant

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = +\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

Substituint-hi les formes dels camps guiats:

$$(17) \qquad E_i(x, y, z;\ t) = e_i(x, y) exp\left[i\left(-k_g z + \omega t\right)\right]$$

$$(18) \qquad H_i(x, y, z;\ t) = h_i(x, y)\ exp\left[i\left(-k_g z + \omega t\right)\right]$$

de $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} - i\, k_g e_z = 0 \qquad (G1)}$

de $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} - i\, k_g h_z = 0 \qquad (G2)}$

de $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{\partial e_z}{\partial y} + i\, k_g e_y = -i\omega\mu h_x & (G3) \\ -i\, k_g e_x - \frac{\partial e_z}{\partial x} = -i\omega\mu h_y & (G4) \\ \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} = -i\omega\mu h_z & (G5) \end{array}}$$

de $\vec{\nabla} \times \vec{H} = +\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{\partial h_z}{\partial y} + i\, k_g h_y = +i\omega\varepsilon e_x & (G6) \\ -i\, k_g h_x - \frac{\partial h_z}{\partial x} = +i\omega\varepsilon e_y & (G7) \\ \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = +i\omega\varepsilon e_z & (G8) \end{array}}$$

Ara en canvi tenim 8 equacions per a les mateixes 6 incògnites. N'hi ha d'haver dues de redundants, que com veurem seran la (G5) i la (G8), per tant. En efecte:

Reescrivim (G4) i (G6) aïllant els termes z i multiplicant per i

$$-k_g e_x + \omega\mu h_y = -i\frac{\partial e_z}{\partial x} \quad (G4)$$

$$\omega\varepsilon e_x - k_g h_y = -i\frac{\partial h_z}{\partial y} \quad (G6)$$

Reescrivim (G3) i (G7) aïllant els termes z i multiplicant per i

$$-k_g e_y - \omega\mu h_x = -i\frac{\partial e_z}{\partial y} \quad (G3)$$

$$-\omega\varepsilon e_y - k_g h_x = -i\frac{\partial h_z}{\partial x} \quad (G7)$$

De (G4) i (G6) obtenim una expressió per a e_x i h_y tot resolent el sistema 2x2:

$$\boxed{e_x = -\frac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(k_g\frac{\partial e_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial h_z}{\partial y}\right) \quad (\mathrm{A1})}$$

$$\boxed{h_y = -\frac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial e_z}{\partial x} + k_g\frac{\partial h_z}{\partial y}\right) \quad (\mathrm{A2})}$$

De (G3) i (G7) obtenim una expressió per a e_y i h_x tot resolent el sistema 2x2:

$$\boxed{e_y = -\frac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(k_g\frac{\partial e_z}{\partial y} - \omega\mu\frac{\partial h_z}{\partial x}\right) \quad (\mathrm{A3})}$$

$$\boxed{h_x = -\frac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(-\omega\varepsilon\frac{\partial e_z}{\partial y} + k_g\frac{\partial h_z}{\partial x}\right) \quad (\mathrm{A4})}$$

$$En\ ambdós\ casos\ s'ha\ usat: \ {k_0}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \omega^2\mu\varepsilon \quad i \quad k_c^2 = {k_0}^2 - k_g^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_g^2$$

A partir de (A1), (A3) i usant (PH3) es pot comprovar fàcilment que (G5) se satisfà directament, per tant (G5) era redundant

A partir de (A2), (A4) i usant (PE3) es pot comprovar fàcilment que (G8) se satisfà directament, per tant igual que (G5), (G8) també era redundant

Substituint (A1), (A2), (A3) i (A4) a:

$$\frac{\partial e_x}{\partial x}+\frac{\partial e_y}{\partial y}-i\,k_g e_z=0 \quad (G1)$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial x}+\frac{\partial h_y}{\partial y}-i\,k_g h_z=0 \quad (G2)$$

Surten les dues equacions de propagació per a les components z dels camps:

$$\boxed{\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2}+k_c^2 e_z=0 \qquad (PE3)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2}+k_c^2\, h_z=0 \quad (PH3)}$$

Si definim l'operador de propagació: $P(\;)\equiv\frac{\partial^2(\;)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\;)}{\partial y^2}+k_c^2(\;)$ a través de la guia d'ones.

I tenint en compte que segons (PE3) i (PH3) e_z i h_z satisfan P( )=0

Com que a partir de (A1), (A2), (A3) i (A4) e_x, e_y , h_x i h_y es posen en combinació lineal de e_z i h_z . Aquestes 4 components e_x, e_y , h_x i h_y també satisfan l'equació de propagació P( )=0, tal com deien les equacions (PE1) , (PE2), (PH1) i (PH2).

Per tant els 3 sistemes de 6 equacions per a 6 incògnites

1. (PE1), (PE2), (PE3), (PH1), (PH2), (PH3).
2. (G1), (G2), (G3), (G4), (G6) i (G7)
3. (A1), (A2), (A3), (A4), (PE3) i (PH3)

Són totalment equivalents:

El mètode operatiu més usual per a resoldre un cas d'ones guiades és usar el sistema **3.** (A1), (A2), (A3), (A4), (PE3) i (PH3).

La descripció detallada d'aquest mètode és la següent:

Escollim o fixem la freqüència angular ω i calculem la $k_0 = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, escollim o fixem també la $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_z}$ (λ_z $longitud\ de\ repetició\ al\ llarg\ de\ l'eix\ z$) i calculem:

$$(21) \quad k_c = \sqrt{{k_0}^2 - k_g^2}$$

A partir d'aquí cal trobar e_z i h_z tot resolent de forma general les equacions de propagació (PE3) i (PH3)

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} + k_c^2 e_z = 0 \qquad (PE3)$$

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + k_c^2\ h_z = 0 \quad (PH3)$$

Que quedaran en funció de constants arbitràries, A, B, C, D, ...

Les solucions generals de e_z i h_z se substitueixen a (A1), (A2), (A3) i (A4) i obtenim així les solucions generals de e_x, e_y , h_x i h_y

Per a determinar les constants arbitràries, cal aplicar les condicions de contorn de les components tangencials dels camps a la superfície lateral de la guia d'ona:

$$E_{t+} - E_{t-} = 0$$

$$H_{n+} - H_{n-} = 0$$

Per tant el problema principal (i no sempre fàcil) es redueix a trobar e_z i h_z

Per a simplificar una mica més, se sol dividir l'espai vectorial de solucions en dos subespais o conjunts:

1. Un subespai de solucions format per les combinacions lineals de solucions amb

$e_z = 0$ anomenat subespai, conjunt o modes de propagació *transversal elèctric* o TE.

En aquest cas es resol només l'equació:

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + k_c^2\ h_z = 0 \quad (PH3) \qquad Per\ a\ \ h_z$$

2. Un altre subespai de solucions format per les combinacions lineals de solucions amb $h_z = 0$ anomenat subespai, conjunt o modes de propagació *transversal magnètic* o TM.

En aquest cas es resol només l'equació:

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} + k_c^2\, e_z = 0 \quad (PE3) \qquad Per\ a\ \ e_z$$

Òbviament la solució més general (per a ω i k_g fixades) és una combinació lineal de solucions TE i TM.

El cas en que $e_z = 0$ i $h_z = 0$ s'anomena transversal electromagnètic o TEM, i si mirem les equacions (A1), (A2), (A3) i (A4) veiem que només és possible (sense que e_x, e_y , h_x i h_y siguin també zero) si el denominador k_c també és zero (generant llavors una indeterminació 0/0)

$$k_c = 0 \ \Rightarrow \ \left|de\ \ {k_c}^2 = {k_0}^2 - k_g^2\right| \ \Rightarrow \mathrm{k}_g = \pm k_0 \ \ , \ és\ a\ dir\ la\ \ \lambda_g\ coincideix\ amb\ la\ \lambda_0 = \frac{v}{f}$$

4) Limitació en les 3 dimensions: x, y i z estan limitats, cap dimensió es propaga lliure. És el cas d'una *cavitat ressonant* on les ones estan confinades en totes les direccions. Aquesta cavitat pot tenir les formes més diverses.

Com ara x, y i z estan tots 3 confinats caldria posar solucions com una funció (en principi no separable) de x, y i z.

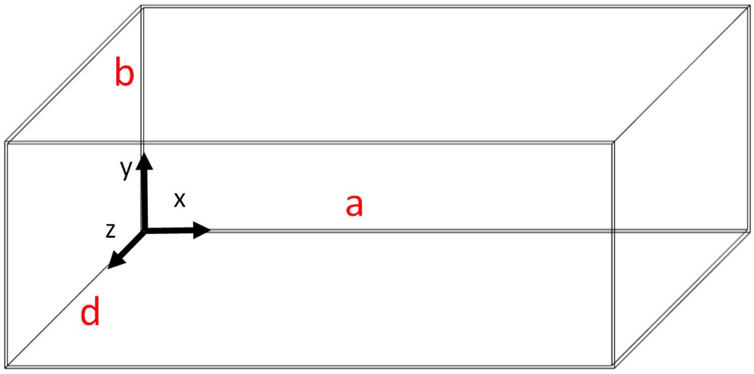
$$(22)\ R(x,y,z)$$

Recordem, l'equació que ha de satisfer $R(x,y,z)$

$$(23)\frac{\vec{\nabla}^2 R(x,y,z)}{R(x,y,z)} = -{k_0}^2 = -\frac{\omega^2}{v^2} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla}^2 R(x,y,z) + {k_0}^2 R(x,y,z) = 0$$

On k_0 i ω són la constant i la freqüència de la funció temporal: $T(t) = T_0 \cdot exp(\, i\, \omega\, t\,)$

Com a exemple considerem el cas més simple de la cavitat ressonant prismàtica amb les costats del prisma dirigit en l'orientació del eixos de coordenades



Donada la simetria prismàtica del problema és possible provar solucions separables:

$$(24)\ R(x,y,z) =$$
$$= X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Substituint a l'equació (23)

$$\frac{\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{dx}^2}}{X(x)} + \frac{\frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{dy}^2}}{Y(y)} + \frac{\frac{\mathrm{d}^2 Z(z)}{\mathrm{dz}^2}}{Z(z)} = -{k_0}^2$$

Cada terme del membre de l'esquerra depèn exclusivament d'una sol de les variables x, y i z. Per tant la única possibilitat és que siguin iguals a unes constants negatives que sumen $-{k_0}^2$

$$-{k_x}^2 - {k_y}^2 - {k_z}^2 = -{k_0}^2 = -\frac{\omega^2}{v^2}$$

Les solucions de cadascuna d'aquestes tres equacions separades són formalment:

$$(25)\begin{cases} X(x) = A_1 \cdot \exp(ik_x x) + B_1 \cdot \exp(-ik_x x) \\ Y(y) = A_2 \cdot \exp(ik_y y) + B_2 \cdot \exp(-ik_y y) \\ Z(z) = A_3 \cdot \exp(ik_z z) + B_3 \cdot \exp(-ik_z z) \end{cases}$$

És a dir, reconstruint, $R(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$R(x,y,z) = \left(A_1 \mathrm{e}^{ik_x x} + B_1 \mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(A_2 \mathrm{e}^{ik_y y} + B_2 \mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(A_3 \mathrm{e}^{ik_y z} + B_3 \mathrm{e}^{-ik_y z}\right)$$

L'equació (20) i per tant la solució (25) és per a cadascuna de les 3 components del camp elèctric i magnètic, per tant tenim:

$$(26)\begin{cases} e_x(x,y,z) = \left(A_{1x} \mathrm{e}^{ik_x x} + B_{1x} \mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(A_{2x} \mathrm{e}^{ik_y y} + B_{2x} \mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(A_{3x} \mathrm{e}^{ik_z z} + B_{3x} \mathrm{e}^{-ik_z z}\right) \\ e_y(x,y,z) = \left(A_{1y} \mathrm{e}^{ik_x x} + B_{1y} \mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(A_{2y} \mathrm{e}^{ik_y y} + B_{2y} \mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(A_{3y} \mathrm{e}^{ik_z z} + B_{3y} \mathrm{e}^{-ik_z z}\right) \\ e_z(x,y,z) = \left(A_{1z} \mathrm{e}^{ik_x x} + B_{1z} \mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(A_{2z} \mathrm{e}^{ik_y y} + B_{2z} \mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(A_{3z} \mathrm{e}^{ik_z z} + B_{3z} \mathrm{e}^{-ik_z z}\right) \end{cases}$$

$$(27)\begin{cases} h_x(x,y,z) = \left(C_{1x} \mathrm{e}^{ik_x x} + D_{1x} \mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(C_{2x} \mathrm{e}^{ik_y y} + D_{2x} \mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(C_{3x} \mathrm{e}^{ik_z z} + D_{3x} \mathrm{e}^{-ik_z z}\right) \\ h_y(x,y,z) = \left(C_{1y} \mathrm{e}^{ik_x x} + D_{1y} \mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(C_{2y} \mathrm{e}^{ik_y y} + D_{2y} \mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(C_{3y} \mathrm{e}^{ik_z z} + D_{3y} \mathrm{e}^{-ik_z z}\right) \\ h_z(x,y,z) = \left(C_{1z} \mathrm{e}^{ik_x x} + D_{1z} \mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(C_{2z} \mathrm{e}^{ik_y y} + D_{2z} \mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(C_{3z} \mathrm{e}^{ik_z z} + D_{3z} \mathrm{e}^{-ik_z z}\right) \end{cases}$$

Les constants arbitràries s'han de trobar tot imposant condicions de contorn a les fronteres.

Considerem el cas de que el prisma està totalment envoltat per material conductor.

Llavors els camps elèctrics tangencials s'han d'anul·lar a les 6 cares (3 parelles paral·leles de fronteres) de la cavitat: x=0, x=a; y=0, y=b, z=0, z=c.

- **Fem això a la primera parella de fronteres: (0,y,z) i (a,y,z)**
  - Imposant-ho a la cara (0,y,z)

$$e_y(0,y,z) = \left(A_{1y} \mathrm{e}^{ik_x 0} + B_{1y} \mathrm{e}^{-ik_x 0}\right)\left(A_{2y} \mathrm{e}^{ik_y y} + B_{2y} \mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(A_{3y} \mathrm{e}^{ik_z z} + B_{3y} \mathrm{e}^{-ik_z z}\right) = 0$$

$$e_z(0,y,z) = \left(A_{1z} \mathrm{e}^{ik_x 0} + B_{1z} \mathrm{e}^{-ik_x 0}\right)\left(A_{2z} \mathrm{e}^{ik_y y} + B_{2z} \mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(A_{3z} \mathrm{e}^{ik_z z} + B_{3z} \mathrm{e}^{-ik_z z}\right) = 0$$

Surt: $B_{1y} = -A_{1y}$

$B_{1z} = -A_{1z}$

  - Imposant-ho ara a la cara oposada (a,y,z)

$$e_y(a,y,z) = A_{1y}\left(\mathrm{e}^{ik_x a} - \mathrm{e}^{-ik_x a}\right)\left(A_{2y} \mathrm{e}^{ik_y y} + B_{2y} \mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(A_{3y} \mathrm{e}^{ik_z z} + B_{3y} \mathrm{e}^{-ik_z z}\right) = 0$$

$$e_z(a,y,z) = A_{1z}\left(\mathrm{e}^{ik_x a} - \mathrm{e}^{-ik_x a}\right)\left(A_{2z} \mathrm{e}^{ik_y y} + B_{2z} \mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(A_{3z} \mathrm{e}^{ik_z z} + B_{3z} \mathrm{e}^{-ik_z z}\right) = 0$$

Surt: $\left(\mathrm{e}^{ik_x a} - \mathrm{e}^{-ik_x a}\right) = 2i\,sin(k_x a) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x a = m\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_x = \pi \frac{m}{a} \quad m\ sencer}$

- **Fem el mateix a la segona parella de fronteres: (x,0,z) i (x,b,z)**
  - Imposant-ho a la cara (x,0,z)

$$e_x(\mathrm{x},0,\mathrm{z}) = \left(A_{1x}\mathrm{e}^{ik_x x} + B_{1x}\mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(A_{2x}\mathrm{e}^{ik_y 0} + B_{2x}\mathrm{e}^{-ik_y 0}\right)\left(A_{3x}\mathrm{e}^{ik_z z} + B_{3x}\mathrm{e}^{-ik_z z}\right) = 0$$

$$e_z(\mathrm{x},0,\mathrm{z}) = \left(A_{1z}\mathrm{e}^{ik_x x} + B_{1z}\mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(A_{2z}\mathrm{e}^{ik_y y 0} + B_{2z}\mathrm{e}^{-ik_y 0}\right)\left(A_{3z}\mathrm{e}^{ik_z z} + B_{3z}\mathrm{e}^{-ik_z z}\right) = 0$$

Surt: $B_{2x} = -A_{2x}$

$B_{2z} = -A_{2z}$

  - Imposant-ho ara a la cara oposada (x,b,z)

$$e_x(a,y,z) = \left(A_{1x}\mathrm{e}^{ik_x x} + B_{1x}\mathrm{e}^{-ik_x x}\right)A_{2x}\left(\mathrm{e}^{ik_y b} - \mathrm{e}^{-ik_y b}\right)\left(A_{3x}\mathrm{e}^{ik_z z} + B_{3x}\mathrm{e}^{-ik_z z}\right) = 0$$

$$e_z(a,y,z) = \left(A_{1z}\mathrm{e}^{ik_x x} + B_{1z}\mathrm{e}^{-ik_x x}\right)A_{2z}\left(\mathrm{e}^{ik_y b} - \mathrm{e}^{-ik_y b}\right)\left(A_{3z}\mathrm{e}^{ik_z z} + B_{3z}\mathrm{e}^{-ik_z z}\right) = 0$$

Surt: $\left(\mathrm{e}^{ik_y b} - \mathrm{e}^{-ik_y b}\right) = 2i\,sin(k_y b) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_y b = n\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_y = \pi\frac{n}{b} \qquad n\ sencer}$

- **Fem el mateix a la tercera parella de fronteres: (x, y ,0) i (x, y, d)**
  - Imposant-ho a la cara (x,y,0)

$$e_x(\mathrm{x},\mathrm{y},0) = \left(A_{1x}\mathrm{e}^{ik_x x} + B_{1x}\mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(A_{2x}\mathrm{e}^{ik_y y} + B_{2x}\mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(A_{3x}\mathrm{e}^{ik_z 0} + B_{3x}\mathrm{e}^{-ik_z 0}\right) = 0$$

$$e_y(\mathrm{x},\mathrm{y},0) = \left(A_{1y}\mathrm{e}^{ik_x x} + B_{1y}\mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(A_{2y}\mathrm{e}^{ik_y y} + B_{2y}\mathrm{e}^{-ik_y y}\right)\left(A_{3y}\mathrm{e}^{ik_z 0} + B_{3y}\mathrm{e}^{-ik_z 0}\right) = 0$$

Surt: $B_{3x} = -A_{3x}$

$B_{3y} = -A_{3y}$

  - Imposant això a la cara (x,y,d)

$$e_x(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{d}) = \left(A_{1x}\mathrm{e}^{ik_x x} + B_{1x}\mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(A_{2x}\mathrm{e}^{ik_y y} + B_{2x}\mathrm{e}^{-ik_y y}\right)A_{3x}\left(\mathrm{e}^{ik_z d} - \mathrm{e}^{-ik_z d}\right) = 0$$

$$e_y(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{d}) = \left(A_{1y}\mathrm{e}^{ik_x x} + B_{1y}\mathrm{e}^{-ik_x x}\right)\left(A_{2y}\mathrm{e}^{ik_y y} + B_{2y}\mathrm{e}^{-ik_y y}\right)A_{3y}\left(\mathrm{e}^{ik_z d} - \mathrm{e}^{-ik_z d}\right) = 0$$

Surt:

$$\left(\mathrm{e}^{ik_z d} - \mathrm{e}^{-ik_z d}\right) = 2i\,sin(k_z d) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_z d = l\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_z = \pi\frac{l}{d} \qquad l\ sencer}$$

De manera que finalment, tenim els següents modes possibles que venen donats per les ternes de nombres sencers (m, n, l):

$$k_0{}^2 = k_x^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2 = \pi^2\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2\right) = \frac{\omega^2}{v^2} \tag{28}$$

Recordant els valors que ja hem establert per condicions de contorn, de moment tenim que:

$$(29)\begin{cases} e_x(x,y,z) = \left(A_{1x}\mathrm{e}^{i\pi\frac{m}{a}x} + B_{1x}\mathrm{e}^{-i\pi\frac{m}{a}x}\right) A_{2x}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{n}{b}y} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{n}{b}y}\right) A_{3x}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{l}{d}z} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{l}{d}z}\right) \\ e_y(x,y,z) = A_{1y}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{m}{a}x} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{m}{a}x}\right)\left(A_{2y}\mathrm{e}^{i\pi\frac{n}{b}y} + B_{2y}\mathrm{e}^{-i\pi\frac{n}{b}y}\right) A_{3y}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{l}{d}z} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{l}{d}z}\right) \\ e_z(x,y,z) = A_{1z}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{m}{a}x} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{m}{a}x}\right) A_{2z}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{n}{b}y} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{n}{b}y}\right)\left(A_{3z}\mathrm{e}^{i\pi\frac{l}{d}z} + B_{3z}\mathrm{e}^{-i\pi\frac{l}{d}z}\right) \end{cases}$$

En realitat per cada mode i per cada parell de cares hi ha dos casos base (dels quals en surten tots els altres casos per combinació lineal) anàlogament com passa per les guies d'ona, es tracta dels 2 casos:

TE (transversal elèctric, la component perpendiculara de $\vec{E}$ a cada parell de cares és nul·la)

TM (transversal magnètic, la component perpendiculara de $\vec{H}$ a cada parell de cares és nul·la)

Amb això si suposem que estem en els casos **TE** de cada parell de cares, podem fer també per a $\vec{E}$: $e_x(0,y,z) = e_x(a,y,z) = 0$, $e_y(x,0,z) = e_y(x,b,z) = 0$ i $e_z(x,y\,,0) = e_z(x,y,d) = 0$, de manera que passa el mateix amb les 6 constants arbitràries de la diagonal de (29) que queden per a simplificar que són: $B_{1x} = -A_{1x}$; $B_{2y} = -A_{2y}$; $B_{3z} = -A_{3z}$ de manera que finalment tots els factors de cada component del camp $\vec{E}$, es comporten igual.

$$(30)\begin{cases} e_x(x,y,z) = A_{1x}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{m}{a}x} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{m}{a}x}\right) A_{2x}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{n}{b}y} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{n}{b}y}\right) A_{3x}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{l}{d}z} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{l}{d}z}\right) \\ e_y(x,y,z) = A_{1y}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{m}{a}x} - \mathrm{e}^{-i\ \frac{m}{a}x}\right) A_{2y}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{n}{b}y} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{n}{b}y}\right) A_{3y}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{l}{d}z} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{l}{d}z}\right) \\ e_z(x,y,z) = A_{1z}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{m}{a}x} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{m}{a}x}\right) A_{2z}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{n}{b}y} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{n}{b}y}\right) A_{3z}\left(\mathrm{e}^{i\pi\frac{l}{d}z} - \mathrm{e}^{-i\pi\frac{l}{d}z}\right) \end{cases}$$

Transformant els parèntesis en $2i \cdot \sin(\ )$

$$(31)\begin{cases} e_x(x,y,z) = A_{1x}A_{2x}A_{3x} \cdot 2i \cdot sin\left(\pi\frac{m}{a}x\right) \cdot 2i \cdot sin\left(\pi\frac{n}{b}y\right) \cdot 2i \cdot sin\left(\pi\frac{l}{d}z\right) \\ e_y(x,y,z) = A_{1y}A_{2y}A_{3y} \cdot 2i \cdot sin\left(\pi\frac{m}{a}x\right) \cdot 2i \cdot sin\left(\pi\frac{n}{b}y\right) \cdot 2i \cdot sin\left(\pi\frac{l}{d}z\right) \\ e_z(x,y,z) = A_{1z}A_{2z}A_{3z} \cdot 2i \cdot sin\left(\pi\frac{m}{a}x\right) \cdot 2i \cdot sin\left(\pi\frac{n}{b}y\right) \cdot 2i \cdot sin\left(\pi\frac{l}{d}z\right) \end{cases}$$

O el que és el mateix, concentrant en unes úniques constants arbitràries, obtenim les amplituds del camp elèctric: $\vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$

$$(32)\quad \vec{E}(x,y,z;t) = \vec{E}_0 \cdot \exp(i\omega t) \cdot sin\left(\pi\frac{m}{a}x\right) sin\left(\pi\frac{n}{b}y\right) sin\left(\pi\frac{l}{d}z\right)$$

Com que les relacions fonamentals de la *tríada ortogonal dels camp elèctric i magnètic* s'han de complir, ja que provenen directament de les Equacions de Maxwell.

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \mu\omega\, \vec{H}_0 \quad (3)$$

$$\vec{H}_0 \times \vec{k} = \varepsilon\omega\, \vec{E}_0 \quad (4)$$

Resulta que també passa el mateix amb les constants arbitràries del camp $\vec{H}$ i podem escriure també (considerant llavors que es tracta justament dels casos **TM**)

$$(31) \qquad \vec{H}(x,y,z;t) = \vec{H}_0 \cdot \exp(i\omega t) \cdot sin\left(\pi \frac{m}{a} x\right) sin\left(\pi \frac{n}{b} y\right) sin\left(\pi \frac{l}{d} z\right)$$

Finalment, (30) i (31) indiquen que els camps elèctric i magnètic són ones estacionàries dins la cavitat ressonant. Hi ha un mode de ressonància o d'ona estacionària per a cada terna de sencers (m, n, l).

Com sabem, satisfan la relació (25), que en termes de la f o freqüència en Hz s'escriu

$$(28) \qquad \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2 = \left(2\frac{f}{v}\right)^2$$

Podem comptar quants modes hi caben per a freqüències situades entre f i f+df cada

Això segons (26) és equivalent a comptar quants nodes o punts de prismes recíprocs de costats $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{d}\right)$ hi caben en una corona esfèrica de radi interior $2\frac{f}{v}$ i exterior $2\frac{f}{v} + 2\frac{df}{v}$

El volum d'aquesta corona és:

$$V = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi\left[\left(2\frac{f+df}{v}\right)^3 - \left(2\frac{f}{v}\right)^3\right] = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{v^3}[(f+df)^3 - f^3]$$
$$= \frac{4}{3}\pi\frac{1}{v^3}[f^3 + 3f^2df + 3fdf^2 + df^3 - f^3] \cong \frac{4}{3}\frac{\pi}{v^3}3f^2df = 4\frac{\pi}{v^3}f^2df$$

Cada mode te un volum en l'espai recíproc de $\bar{V}_0 = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}$

Per tant en ella hi caben (multipliquem per 2 ja que cada mode te dues possibles direccions de polarització **TE** amb $\vec{E}$ tangencial a la cara i l'altra **TM** amb $\vec{H}$ tangencial a la cara) el següent nombre de modes:

$$N = 2\frac{4\frac{\pi}{v^3}f^2df}{\bar{V}_0} = 8\,\overbrace{abd}^{V_c}\frac{\pi}{v^3}f^2df = V_c 8\frac{\pi}{v^3}f^2df$$

Essent $V_c = a \cdot b \cdot d$ el volum de la cavitat. Considerem també que la cavitat ressonant no te cap material dielèctric dins (és el buit o aire), llavors v=c. Llavors el nombre de modes possibles dins la cavitat ressonant per unitat de volum és:

$$n = \frac{N}{V_c} = 8\frac{\pi}{c^3} f^2 df$$

Substituint:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$
$$df = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

Obtenim en funció de la longitud d'ona λ (prenem valor absolut):

$$n = \frac{N}{V_c} = \frac{8\pi}{c^3} f^2 df = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

Segons el Teorema d'Equipartició de l'Energia (un teorema de Termodinàmica o Mecànica Estadística) cada mode d'un oscil·lador harmònic, tal com és una ona estacionària de la cavitat, te una energia promig igual a: $k_B \cdot T$, on k_B és l'anomenada *Constant de Boltzmann* de la termodinàmica, k_B=1,380649x10^{-23} J/K i on T és la temperatura absoluta (en K, kelvins) que hi ha dins la cavitat.

Amb això l'energia total continguda a la cavitat per freqüències entre f i f+df, o bé per longituds d'ona entre λ i $\lambda + d\lambda$, seria:

$$du_f = \frac{8\pi}{c^3} f^2 k_B \cdot T \cdot df$$

$$du_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B \cdot T \cdot d\lambda$$

Cosa que s'anomena *distribució de Rayleigh-Jeans* (1900) , que és la distribució basada en l'*electromagnetisme clàssic* de l'energia d'un **cos negre** (similar a la superfície d'un foradet fet a una cavitat ressonant, pel qual surten ones). Com veiem aquesta energia te sentit per a f baixes, però per a f altres no, ja que l'energia es dispararia a raó de f^2 !!, problema que s'anomenà llavors la **Catàstrofe de l'Ultraviolat**. No se solucionà el problema fins que els treballs de Planck fessin la hipòtesi de que l'energia dels camps electromagnètics (EM) i per extensió els propis camps EM, estaven distribuits en forma de paquets indivisibles, que ell anomenà *quantums* i més tard passarien a dir-se *fotons*, l'energia de cada quantum o fotó en funció de la freqüència la passa a establir com:

$$E_\gamma = h \cdot \nu$$

On h=6,62607015 x10^{-34} J·s és l'anomenada Constant de Planck i ν=f és la freqüència en Hz. Usant això i el fet que la distribució de l'energia dels fotons (que són partícules d'espín sencer, i per tant bosòniques) segueix la distribució estadística de Bose-Einstein:

$$p(\varepsilon = h\nu) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Va arribar a obtenir la distribució de Plank de les freqüències del cos negre, que eren:

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}} - 1},$$

Cosa que lliga quasi perfectament amb les measures experimentals d'aquestas energia del cos negre, a cada freqüència.

Així, la qüàntica acabava de néixer. Estem a l'any 1900

Una aplicació tecnològica de les cavitats ressonants són els **forns microones**.

Com tots sabem un forn microones és un a caixa prismàtica de dimensions determinades en cm.

Els modes que s'hi propaguen són tals que:

$$k_x = \pi \frac{m}{a} \,; k_y = \pi \frac{n}{b} \,;\; k_z = \pi \frac{l}{d}$$

És a dir les longituds d'ones corresponents són:

$$\lambda_x = \frac{2a}{m} \,;\; \lambda_y = \frac{2b}{n} \,;\; \lambda_z = \frac{2d}{l}$$

Per a que s'hi propagui una ona de freqüència f=2,45 GHz i una $\lambda = \frac{c}{2{,}45\ GHz} = 12{,}24\ cm$

(que és la freqüència de la banda de les microones que ressona amb la mol·lècula d'aigua i la fa vibrar, i per tant escalfa l'aigua i junta a ella als aliments) calen dimensions de la caixa tals que es compleixi:

$$12{,}24\ cm = \frac{2a}{m} \,;\; 12{,}24\ cm = \frac{2b}{n} \,;\; 12{,}24\ cm = \frac{2d}{l}$$

Per tant les mides del forn estan estipulades per aquestes relacions.