# Problemes: Codis I. Codis lineals.

**V.1.** Els llibres tenen assignat un número que correspon a l'International Standard Book Number (ISBN). Aquest número és un element d'un codi de longitud $10$, sobre l'alfabet decimal. Els nou primers dígits donen informació sobre l'idioma, l'editorial i el número dins l'editorial. L'últim dígit és tal que $\sum_{i=1}^{10} i \cdot x_i \equiv 0 \bmod 11$.

Demostreu:

(a) Que el codi ISBN és capaç de detectar un error.

(b) Que el codi ISBN és capaç de detectar dos errors, si aquests consisteixen en la transposició de dos dígits.

(c) Que el codi ISBN és capaç de corregir un esborrall.

(d) Quín és el dígit que falta al codi ISBN $0131 * 91399$?

**V.2.** A l'Estat espanyol s'assigna a cada persona un número de NIF que consisteix en el número de DNI (8 dígits decimals) seguit d'una lletra que s'assigna a la classe del DNI a $\mathbb{F}_{23}$. Aquesta assignació *lletra-classe* es fa de la manera següent:

A=3; B=11; C=20; D=9; E=22; F=7; G=4; H=18; J=13; K=21; L=19; M=5; N=12; P=8; Q=16; R=1; S=15; T=0; V=17; W=2; X=10; Y=6; Z=14.

Descriviu les capacitats correctores i/o detectores d'errors d'aquest codi NIF, i compareu-les amb les del codi ISBN.

**V.3.** (a) Doneu justificadament un polinomi en $x$ que generi $\mathbb{F}_4$.

(b) Doneu una taula exponencial-vectorial de $\mathbb{F}_4$.

(c) Diguem $\alpha$ a la classe de $x$ dins de $\mathbb{F}_4$. Considerem el codi $C$ amb matriu generadora

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Codifiqueu la cadena de bits $011001001111$ donant el resultat també en bits.

(d) Doneu una matriu de control del codi.

(e) Quina és la distància mínima del codi $C$?

(f) Quants errors es poden corregir en cada paraula rebuda? I quants esborralls? Quants errors es poden detectar?

(g) Detecteu si hi ha errors en la cadena codificada de bits

$$011111010011001000000000.$$

(h) * En quina posició ha de ser un error per tal de poder-lo corregir?

**V.4.** Donat un codi ternari que té per matriu generadora:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula el valor de $a$ de manera que el codi tingui la màxima capacitat correctora.

(b) Calcula el valor de $a$ pel qual es compleixi que el vector $v = (2, 1, 1, 1, 1)$ sigui una paraula-codi.

(c) Fes la taula de síndromes per poder portar a terme una descodificació incompleta i digues, pels diferents valors de $a$, quina és la informació associada al vector rebut $w = (10212)$.

**V.5.** Sigui $C$ un codi de longitud $n$ i dimensió $k$, de distància mínima 5 i matriu de control $H$. És cert que

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

**V.6.** Considerem el codi binari i lineal definit per les paraules codi:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_1 + a_2 + a_4 + a_5, a_1 + a_3 + a_4 + a_5, a_1 + a_2 + a_3 + a_5, a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

(a) Doneu una matriu de control i una matriu generadora d'aquest codi. Trobeu els valors de $n, k, d$.

(b) Afegiu a la matriu de control trobada una columna desena i una nova equació, donada per:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 0$$

Trobeu la nova matriu generadora. Quant val ara la nova distància mínima?

(c) Doneu les taules de descodificació via síndrome per aquest segon codi.

**V.7.** Demostreu que, en un codi binari lineal, o bé totes les paraules-codi tenen un 0 a la primera coordenada, o bé la meitat tenen un 0 i l'altra meitat un 1.

**V.8.** Diem que un codi binari és de *Hamming* de paràmetre $m$ si la seva matriu de control té per columnes tots els vectors binaris no nuls de longitud $m$.

(a) Doneu la matriu de control del codi de Hamming de paràmetre 3.

(b) Determineu la longitud, la dimensió i la distància mínima d'un codi de Hamming de paràmetre $m$.

**V.9.** *Extensió* d'un codi. Si $C$ és un codi binari de longitud $n$, definim el codi estès $C'$ com:

$$C' = \{(c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}) : (c_1, c_2, ..., c_n) \in C, \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0\}$$

Si $C$ és un codi lineal de matriu generadora $G$ i matriu de control $H$, trobeu, en funció d'aquestes, la matriu generadora i de control del codi $C'$. Si $C$ té distància mínima $2e+1$, trobeu la distància mínima de $C'$.

**V.10.** *Puncturing* d'un codi. Sigui $G$ una matriu generadora d'un codi $C$ de longitud $n$, dimensió $k$ i distància mínima $d \geq 2$. Diem $G^*$ a la matriu obtinguda en suprimir una columna de $G$ i $C^*$ al codi que té matriu generadora $G^*$. Què podem dir de la longitud $n^*$, la dimensió $k^*$ i la distància mínima $d^*$ de $C^*$?

**V.11.** *Shortening* d'un codi. Sigui $C$ un codi de longitud $n$, dimensió $k$ i distància mínima $d \geq 2$. El codi obtingut per *shortening* de $C$ a la posició $i$ $(1 \leq i \leq n)$ és el codi que obtenim en separar totes les paraules que tenen un $0$ a la posició $i$-èssima i en posteriorment eliminar aquesta posició en totes les paraules del conjunt separat.

Què podem dir de la longitud, la dimensió, la distància mínima i la matriu de control del codi obtingut?

**V.12.** Sigui $C$ un codi lineal binari de longitud $n$ i dimensió $k$. Demostreu que si $C$ té una paraula codi de pes imparell, llavors les paraules codi de pes parell formen un altre codi de longitud $n$ i dimensió $k-1$.

**V.13.** Sigui $C$ un codi lineal sobre $\mathbb{F}_q$ de longitud $n$ i dimensió $k$, amb matriu generadora $G$. Si $G$ no té cap columna tot zeros, llavors la suma de tots els pesos de totes les paraules codi és: $n \cdot (q-1) \cdot q^{k-1}$.