Anàlisi Matemàtica 1 (AM1)
GEMiF

E2.2 Exercicis: Continuïtat

1. Solucions

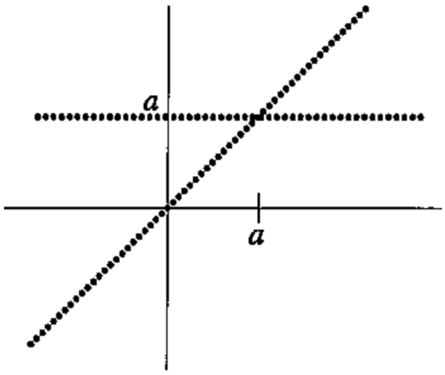
(i) $F(x) = x + 2$ per tot x
(ii) No existeix ja que no té límit evitable per $x = 0$
(iii) $F(x) = 0$ per tot x
(iv) No existeix ja que $F(x)$ hauria de ser 0 pels irracionals, però pels racionals no seria contínua

2. Solució

$f(x) = 1$ si x racional, i $f(x) = -1$ si x irracional

3. Solució

$f(x) = a$ si x irracional, i $f(x) = x$ si x racional



4. Solució

Per una banda, $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$, d'on es dedueix que $f(0) = 0$.
D'altra banda, com f és contínua en el punt a,

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0}\big(f(a) + f(h)\big) = f(a) + \lim_{h\to 0} f(h)$$

d'on es dedueix que

$$\lim_{h\to 0} f(h) = 0$$

Per qualsevol altre punt b tindrem

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{h\to 0} f(b+h) = \lim_{h\to 0}\big(f(b) + f(h)\big) = f(b) + \lim_{h\to 0} f(h) = f(b) \ \blacksquare$$

5. Solucions

(i) Acotada superior e inferiormente; valor mínimo igual a 0; no posee máximo.
(ii) Bounded above and below; no maximum or minimum value.
(iii) Acotada inferiormente pero no superiormente; mínimo igual a 0.
(iv) Bounded below but not above; minimum value 0.
(v) Bounded above and below. If $a \leq -1/2$, then $a \leq -a-1$, so $f(x) = a+2$ for all x in $(-a-1, a+1)$, so $a+2$ is the maximum and minimum value. If $-1/2 < a \leq 0$, then f has the minimum value a^2, and if $a \geq 0$, then f has the minimum value 0. Since $a+2 > (a+1)^2$ only for $\left(-1-\sqrt{5}\right)/2 < a < \left(-1+\sqrt{5}\right)/2$, when $a \geq -1/2$ the function f has a maximum value only for $a \leq \left(-1+\sqrt{5}\right)/2$ (the maximum value being $a+2$).

(vi) Bounded above and below. If $a \leq -1/2$ then f has the minimum and maximum value $3/2$. If $a \geq 0$, then f has the minimum value 0, and the maximum value $\max(a^2, a+2)$. If $-1/2 < a < 0$, then f has the maximum value $3/2$ and no minimum value.
(vii) Acotada superior e inferiormente; valor máximo igual a 1; valor mínimo 0.
(viii) Bounded above and below; maximum value 1; no minimum value.
(ix) Acotada superior e inferiormente; valor máximo igual a 1; valor mínimo -1.
(x) Bounded above and below; maximum value 0; the maximum value is a if a is rational, and there is no maximum value if a is irrational.
(xi) f tiene máximo y mínimo, puesto que f es continua.
(xii) Bounded above and below; minimum value 0; maximum value $[a]$.

6. Solucions

(i) $n = -2$, ya que $f(-2) < 0 < f(-1)$.
(ii) $n = -5$, since $f(-5) = 2(-5) + 1 < 0 < f(-4)$.
(iii) $n = -1$, ya que $f(-1) = -1 < 0 < f(0)$.
(iv) $n = 0$ since both roots of $f(x) = 0$ lie in $[0, 1]$.

7. Solucions

Es fa aplicant el teorema de Bolzano

(i) Si $f(x) = x^{179} + 163/(1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x) - 119$, entonces f es continua en $\mathbf{R}$ y $f(2) > 0$. mientras que $f(-2) < 0$, por tanto $f(x) = 0$ para algún x en $(-2, 2)$.
(ii) If $f(x) = \sin x - x + 1$, then $f(0) > 0$ and $f(2) = (\sin 2) - 1 < 0$.

8. Solució

f és contant, ja que si prengués dos valors diferents, aleshores, pel teorema del valor mig, hauria de prendre també tots els valors intermedis, inclosos els irracionals

9. Solució

Resolent l'equació veiem que $f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$

En cas que l'enunciat no fos cert, f prendria valors positius i negatius. Per tant, pel teorema de Bolzano, hauria de prendre el valor 0 en algun punt de l'interval $(-1,1)$, cosa que és impossible ja que $\sqrt{1 - x^2} \neq 0$ per tot $x \in (-1,1)$

10. Solucions

(1) $f(x) = x$;
(2) $f(x) = -x$;
(3) $f(x) = |x|$;
(4) $f(x) = -|x|$.

11. Solució

Es resol aplicant el teorema de Bolzano a la funció $h(x) = f(x) - g(x)$

12. Solucions

a. Immediat, ja que, $|c\,f|(x) = |c|\;|f|(x)$ per tot $x \in [0,1]$

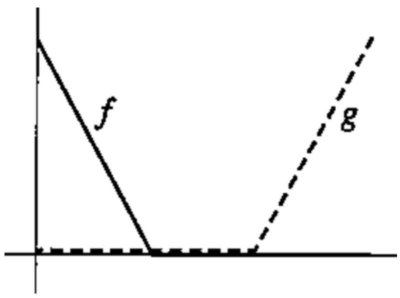
b. Tenim

$$|f + g|(x) = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq |f|(x) + |g|(x)$$

Si $|f + g|$ té el màxim a x_0, aleshores

$$\|f + g\| = |f + g|(x_0) \leq |f|(x_0) + |g|(x_0) \leq \|f\| + \|g\| \qquad \blacksquare$$

Exemple que compleix $\|f + g\| = \|f\| = \|g\| = 1$, i per tant satisfà la desigualtat estricta:



13. Solució

Com els límits a l'infinit són 0, $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tals que $f(x) < f(0)$ per tots els números reals $x \in (-\infty, k_1) \cup (k_2, +\infty)$. Apliquem el teorema de Weierstrass a f en l'interval $[k_1, k_2]$, i en assegura que existeix un valor y tal que $f(y)$ és màxim en aquest interval. Com $f(x) < f(0)$ en la resta de la recta real, $f(y)$ és un màxim global de la funció f en $\mathbb{R}$