Successions de nombres reals

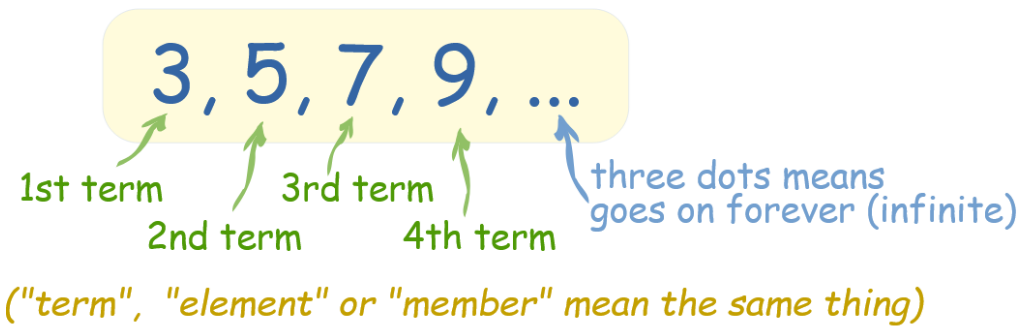
Àlex Arenas, Sergio Gómez

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

Successions de nombres reals

- Definicions
- Tipus de successions
- Successions particulars

- Successió (o seqüència)
  - Llista d'elements en un cert ordre



  - Poden ser
    - Infinites
    - Finites → No interessen, habitualment no es consideren successions

- Successió (o seqüència)
  - Representació matemàtica

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

$$\{a_n\}, n \geq 0$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(a_k)_{k=0}^{\infty}$$

- Exemples

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, \ldots$$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

- Definició de seqüències de nombres reals
  - Per terme general

$$a_n = \frac{1}{n},\ n \geqslant 1 \quad \longrightarrow \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

$$a_n = (-1)^n,\ n \geqslant 0 \quad \longrightarrow \quad 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

$$a_n = n^2,\ n \geqslant 0 \quad \longrightarrow \quad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

  - Per relació de recurrència

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geqslant 2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

- Tipus de successions
  - Creixents $a_{n+1} \geqslant a_n, \ \forall n$
  - Decreixents $a_{n+1} \leqslant a_n, \ \forall n$
  - Estrictament creixents $a_{n+1} > a_n, \ \forall n$
  - Estrictament decreixents $a_{n+1} < a_n, \ \forall n$

  - Fitades superiorment $\exists B: \ a_{n+1} \leqslant B, \ \forall n$
    - *B* és una fita superior
  - Fitades inferiorment $\exists B: \ a_{n+1} \geqslant B, \ \forall n$
    - *B* és una fita inferior
  - Fitades
    - Simultàniament fitades superior i inferiorment

- Tipus de successions
  - Subseqüències (o subsuccessions)
    - S'obtenen eliminant elements d'una altra seqüència, mantenint l'ordre dels que queden
    - Donada una successió a_n i una successió estrictament creixent de naturals n_k

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

es defineix la subseqüència b_k com

$$(b_k) = (a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$$

- Tipus de successions
  - Sèries
    - Successió s_n que s'obté sumant els termes d'una altra successió a_n

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} a_m = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

- Successions particulars
  - Successió aritmètica o progressió aritmètica
    - S'obtenen sumant una constant *d* al terme anterior

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\ \ldots$$

    - Queda determinada pel terme inicial a_1 i la diferència *d*

- Successions particulars
  - Successió aritmètica o progressió aritmètica
    - S'obtenen sumant una constant *d* al terme anterior

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\ \ldots$$

    - Queda determinada pel terme inicial a_1 i la diferència *d*
    - Relació de recurrència

$$a_n = a_{n-1} + d,\ n \geqslant 2$$

    - Terme general

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d,\ n \geqslant 1$$

- Successions particulars
  - Successió aritmètica o progressió aritmètica
    - S’obtenen sumant una constant *d* al terme anterior

$$a_1,\; a_1 + d,\; a_1 + 2d,\; a_1 + 3d,\; \ldots$$

    - Queda determinada pel terme inicial a_1 i la diferència *d*
    - Relació de recurrència

$$a_n = a_{n-1} + d,\;\; n \geqslant 2$$

    - Terme general

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d,\;\; n \geqslant 1$$

    - Sèrie aritmètica

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$$

- Successions particulars
  - Successió geomètrica o progressió geomètrica
    - S’obtenen multiplicant el terme anterior per una constant *r*

$$a_1,\ a_1\,r,\ a_1\,r^2,\ a_1\,r^3,\ \ldots$$

    - Queda determinada pel terme inicial a_1 i la raó *r*

- Successions particulars
  - Successió geomètrica o progressió geomètrica
    - S'obtenen multiplicant el terme anterior per una constant *r*

$$a_1,\ a_1\,r,\ a_1\,r^2,\ a_1\,r^3,\ \ldots$$

    - Queda determinada pel terme inicial a_1 i la raó *r*
    - Relació de recurrència

$$a_n = a_{n-1}\,r,\ n \geqslant 2$$

    - Terme general

$$a_n = a_1\,r^{n-1},\ n \geqslant 1$$

- Successions particulars
  - Successió geomètrica o progressió geomètrica
    - S'obtenen multiplicant el terme anterior per una constant *r*

$$a_1,\ a_1\,r,\ a_1\,r^2,\ a_1\,r^3,\ \ldots$$

    - Queda determinada pel terme inicial a_1 i la raó *r*
    - Relació de recurrència

$$a_n = a_{n-1}\,r,\ n \geqslant 2$$

    - Terme general

$$a_n = a_1\,r^{n-1},\ n \geqslant 1$$

    - Sèrie geomètrica

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m = \begin{cases} \dfrac{a_1\,(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \\ n\,a_1 & r = 1 \end{cases}$$

- Online Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)
  - https://oeis.org/