Algunos teoremas de geometría afín

Teorema de Tales

Tales de Mileto, (624 a.c. - 546 a.c)

Teorema de Pappus

Pappo (o Pappus) de Alejandría, (290 d.c. - 350 d.c.)

Teorema de Menelao

Menelao (o Menelaus) de Alejandría (70 d.c. - 140 d.c.)

Teorema de Ceva

Giovanni Ceva, (1648 - 1734)

Teorema de Desargues

Gérard Desargues (1591 - 1661)

Definición

Sea $\mathbb{L}$ una recta en un plano afín $\mathbb{P}$ y sea $\langle \overrightarrow{u} \rangle$ la dirección de una recta no paralela a $\mathbb{L}$. La aplicación $\pi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$, tal que $\pi(a) \in \mathbb{L}$ y $\overrightarrow{a\pi(a)} \in \langle \overrightarrow{u} \rangle$, para todo $a \in \mathbb{P}$, se llama proyección sobre $\mathbb{L}$ en la dirección de $\langle \overrightarrow{u} \rangle$.

Definición

Sea $\mathbb{L}$ una recta en un plano afín $\mathbb{P}$ y sea $\langle \overrightarrow{u} \rangle$ la dirección de una recta no paralela a $\mathbb{L}$. La aplicación $\pi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$, tal que $\pi(a) \in \mathbb{L}$ y $\overrightarrow{a\pi(a)} \in \langle \overrightarrow{u} \rangle$, para todo $a \in \mathbb{P}$, se llama proyección sobre $\mathbb{L}$ en la dirección de $\langle \overrightarrow{u} \rangle$.

Proposición

La aplicación π es afín.

Definición

Sea $\mathbb{L}$ una recta en un plano afín $\mathbb{P}$ y sea $\langle \overrightarrow{u} \rangle$ la dirección de una recta no paralela a $\mathbb{L}$. La aplicación $\pi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$, tal que $\pi(a) \in \mathbb{L}$ y $\overrightarrow{a\pi(a)} \in \langle \overrightarrow{u} \rangle$, para todo $a \in \mathbb{P}$, se llama proyección sobre $\mathbb{L}$ en la dirección de $\langle \overrightarrow{u} \rangle$.

Proposición

La aplicación π es afín.

Demostración

Ejercicio

Definición

Sea $\mathbb{L}$ una recta en un plano afín $\mathbb{P}$ y sea $\langle \overrightarrow{u} \rangle$ la dirección de una recta no paralela a $\mathbb{L}$. La aplicación $\pi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$, tal que $\pi(a) \in \mathbb{L}$ y $\overrightarrow{a\pi(a)} \in \langle \overrightarrow{u} \rangle$, para todo $a \in \mathbb{P}$, se llama proyección sobre $\mathbb{L}$ en la dirección de $\langle \overrightarrow{u} \rangle$.

Proposición

La aplicación π es afín.

Demostración

Ejercicio

Solución

Ver apuntes.

Observación

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Si $a, b, c, d \in A$ son cuatro puntos con $c \neq d$ tales que $\overrightarrow{ab} = \lambda \overrightarrow{cd}$, entonces la razón $\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} = \lambda$ está bien definida.

Observación

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Si $a, b, c, d \in A$ son cuatro puntos con $c \neq d$ tales que $\overrightarrow{ab} = \lambda \overrightarrow{cd}$, entonces la razón $\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} = \lambda$ está bien definida.

Ejercicio

Demuestra que se cumple la igualdad

$$\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} \cdot \frac{\overrightarrow{cd}}{\overrightarrow{ef}} = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ef}}.$$

Observación

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Si $a, b, c, d \in A$ son cuatro puntos con $c \neq d$ tales que $\overrightarrow{ab} = \lambda\overrightarrow{cd}$, entonces la razón $\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} = \lambda$ está bien definida.

Ejercicio

Demuestra que se cumple la igualdad

$$\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} \cdot \frac{\overrightarrow{cd}}{\overrightarrow{ef}} = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ef}}.$$

Solución

Sea $\lambda = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}}$ y $\lambda' = \frac{\overrightarrow{cd}}{\overrightarrow{ef}}$.

Observación

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Si $a, b, c, d \in A$ son cuatro puntos con $c \neq d$ tales que $\overrightarrow{ab} = \lambda \overrightarrow{cd}$, entonces la razón $\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} = \lambda$ está bien definida.

Ejercicio

Demuestra que se cumple la igualdad

$$\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} \cdot \frac{\overrightarrow{cd}}{\overrightarrow{ef}} = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ef}}.$$

Solución

Sea $\lambda = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}}$ y $\lambda' = \frac{\overrightarrow{cd}}{\overrightarrow{ef}}$.

Solo hay que ver que $\lambda\lambda' = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ef}}$, y esto es claro ya que

Observación

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un espacio afín. Si $a, b, c, d \in A$ son cuatro puntos con $c \neq d$ tales que $\overrightarrow{ab} = \lambda\overrightarrow{cd}$, entonces la razón $\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} = \lambda$ está bien definida.

Ejercicio

Demuestra que se cumple la igualdad

$$\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} \cdot \frac{\overrightarrow{cd}}{\overrightarrow{ef}} = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ef}}.$$

Solución

Sea $\lambda = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}}$ y $\lambda' = \frac{\overrightarrow{cd}}{\overrightarrow{ef}}$.

Solo hay que ver que $\lambda\lambda' = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ef}}$, y esto es claro ya que

$\overrightarrow{ab} = \lambda\overrightarrow{cd} = \lambda(\lambda'\overrightarrow{ef}) = \lambda\lambda'\overrightarrow{ef}$. $\square$

Ejercicio

Demuestra que se cumple la igualdad

$$\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} \cdot \frac{\overrightarrow{ef}}{\overrightarrow{gh}} = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{gh}} \cdot \frac{\overrightarrow{ef}}{\overrightarrow{cd}}.$$

Ejercicio

Demuestra que se cumple la igualdad

$$\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} \cdot \frac{\overrightarrow{ef}}{\overrightarrow{gh}} = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{gh}} \cdot \frac{\overrightarrow{ef}}{\overrightarrow{cd}}.$$

Solución

Ver apuntes.

Ejercicio

Demuestra que si $\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} = \frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}}$ con $b \neq c$, entonces $a = a'$.

Ejercicio

Demuestra que si $\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} = \frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}}$ con $b \neq c$, entonces $a = a'$.

Solución

Sea $\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} = \lambda = \frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}}$.

Nótese que $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba'} = \lambda(\overrightarrow{ac} + \overrightarrow{ca'}) = \lambda\overrightarrow{aa'}$.
Tenemos que $(1-\lambda)\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{0}$.
Ahora bien, como $b \neq c$, tenemos que $\lambda \neq 1$, y por eso $a = a'$.

Tales de Mileto, (624 a.c. - 546 a.c)

Teorema de Tales

Sea $\mathbb{P}$ un plano y sean $\mathbb{L}, \mathbb{L}', \mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ cuatro rectas diferentes en $\mathbb{P}$. Sean o, a, a', b, b' be cuatro puntos diferentes del plano $\mathbb{P}$. Si $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \{o\}$, $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_1 = \{a\}$, $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_2 = \{b\}$, $\mathbb{L}' \cap \mathbb{L}_1 = \{a'\}$ y $\mathbb{L}' \cap \mathbb{L}_2 = \{b'\}$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.

(*i*) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$.

(*ii*) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$.

(i) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$.

Prueba de (i)

Si $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$, entonces tomamos π como la proyección sobre $\mathbb{L}'$ en la dirección de $\mathbb{L}_1$.

(i) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$.

Prueba de (i)

Si $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$, entonces tomamos π como la proyección sobre $\mathbb{L}'$ en la dirección de $\mathbb{L}_1$. Nótese que $\pi(o) = o$, $\pi(a) = a'$ y $\pi(b) = b'$.

(i) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$.

Prueba de (i)

Si $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$, entonces tomamos π como la proyección sobre $\mathbb{L}'$ en la dirección de $\mathbb{L}_1$. Nótese que $\pi(o) = o$, $\pi(a) = a'$ y $\pi(b) = b'$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\overrightarrow{ob} = \lambda \overrightarrow{oa}$.

(i) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$.

Prueba de (i)

Si $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$, entonces tomamos π como la proyección sobre $\mathbb{L}'$ en la dirección de $\mathbb{L}_1$. Nótese que $\pi(o) = o$, $\pi(a) = a'$ y $\pi(b) = b'$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\overrightarrow{ob} = \lambda \overrightarrow{oa}$. Como π es afín, $\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{oa'}$ y $\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{ob}) = \overrightarrow{ob'}$, lo que implica
$\overrightarrow{ob'} = \overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{ob}) = \overrightarrow{\pi}(\lambda \overrightarrow{oa}) = \lambda \overrightarrow{oa'}$.

(i) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$.

Prueba de (i)

Si $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$, entonces tomamos π como la proyección sobre $\mathbb{L}'$ en la dirección de $\mathbb{L}_1$. Nótese que $\pi(o) = o$, $\pi(a) = a'$ y $\pi(b) = b'$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\overrightarrow{ob} = \lambda \overrightarrow{oa}$. Como π es afín, $\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{oa'}$ y $\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{ob}) = \overrightarrow{ob'}$, lo que implica $\overrightarrow{ob'} = \overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{ob}) = \overrightarrow{\pi}(\lambda \overrightarrow{oa}) = \lambda \overrightarrow{oa'}$. Por lo tanto,

$$\frac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \lambda = \frac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}.$$

(i) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$.

Prueba de (i)

Si $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$, entonces tomamos π como la proyección sobre $\mathbb{L}'$ en la dirección de $\mathbb{L}_1$. Nótese que $\pi(o) = o$, $\pi(a) = a'$ y $\pi(b) = b'$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\overrightarrow{ob} = \lambda \overrightarrow{oa}$. Como π es afín, $\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{oa}) = \overrightarrow{oa'}$ y $\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{ob}) = \overrightarrow{ob'}$, lo que implica $\overrightarrow{ob'} = \overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{ob}) = \overrightarrow{\pi}(\lambda \overrightarrow{oa}) = \lambda \overrightarrow{oa'}$. Por lo tanto,

$$\frac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \lambda = \frac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}.$$

Por otro lado, si $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$, entonces la homotecia $h_{(o,\lambda)}$ transforma $\mathbb{L}_1$ en $\mathbb{L}_2$, lo que implica que $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$. $\square$

(ii) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$.

(ii) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$.

Prueba de (ii)

Nótese que $\overrightarrow{oa'} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{aa'}$ y $\overrightarrow{ob'} = \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{bb'}$.

(ii) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$.

Prueba de (ii)

Nótese que $\overrightarrow{oa'} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{aa'}$ y $\overrightarrow{ob'} = \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{bb'}$.

Por (i), solo hay que ver que $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$.

(ii) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$.

Prueba de (ii)

Nótese que $\overrightarrow{oa'} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{aa'}$ y $\overrightarrow{ob'} = \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{bb'}$.

Por (i), solo hay que ver que $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$. ($\Rightarrow$) Sea

$\lambda = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$

(ii) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$.

Prueba de (ii)

Nótese que $\overrightarrow{oa'} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{aa'}$ y $\overrightarrow{ob'} = \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{bb'}$.

Por (i), solo hay que ver que $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$. ($\Rightarrow$) Sea

$\lambda = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$

Lo que implica $\overrightarrow{bb'} = \overrightarrow{ob'} - \overrightarrow{ob} = \lambda(\overrightarrow{oa'} - \overrightarrow{oa}) = \lambda\overrightarrow{aa'}$.

(ii) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$.

Prueba de (ii)

Nótese que $\overrightarrow{oa'} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{aa'}$ y $\overrightarrow{ob'} = \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{bb'}$.

Por (i), solo hay que ver que $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$. $(\Rightarrow)$ Sea

$\lambda = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$

Lo que implica $\overrightarrow{bb'} = \overrightarrow{ob'} - \overrightarrow{ob} = \lambda(\overrightarrow{oa'} - \overrightarrow{oa}) = \lambda\overrightarrow{aa'}$.

Por lo tanto, $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$.

(ii) $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$.

Prueba de (ii)

Nótese que $\overrightarrow{oa'} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{aa'}$ y $\overrightarrow{ob'} = \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{bb'}$.

Por (i), solo hay que ver que $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$. ($\Rightarrow$) Sea

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \frac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$$

Lo que implica $\overrightarrow{bb'} = \overrightarrow{ob'} - \overrightarrow{ob} = \lambda(\overrightarrow{oa'} - \overrightarrow{oa}) = \lambda\overrightarrow{aa'}$.

Por lo tanto, $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{bb'}}{\overrightarrow{aa'}} = \dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}}$.

($\Rightarrow$) La prueba en el otro sentido es análoga. Escribe los detalles. $\square$

Ejercicio

Sea $\mathbb{P}$ un plano y sean $\mathbb{L}, \mathbb{L}', \mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ cuatro rectas diferentes en $\mathbb{P}$. Sean o, a, a', b, b' be cuatro puntos diferentes del plano $\mathbb{P}$. Si $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \{o\}$, $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_1 = \{a\}$, $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_2 = \{b\}$, $\mathbb{L}' \cap \mathbb{L}_1 = \{a'\}$ y $\mathbb{L}' \cap \mathbb{L}_2 = \{b'\}$. Entonces $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{ab}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{a'b'}}$.

Solución

Por el teorema de Tales, $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$.

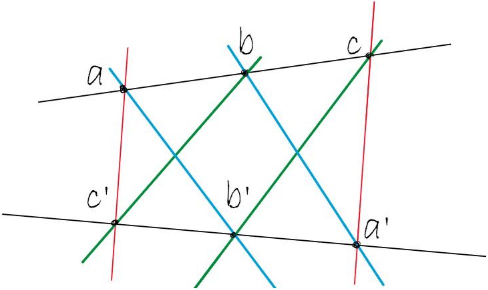
Por lo tanto, solo hay que ver que $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oa}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{oa'}}$ si y solo si $\dfrac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{ab}} = \dfrac{\overrightarrow{ob'}}{\overrightarrow{a'b'}}$.

Escribe los detalles...

Pappo (o Pappus) de Alejandría, (290 d.c. - 350 d.c.)

Teorema de Pappus

En un plano afín, sean a, b, c tres puntos de una recta $\mathbb{L}_1$ y $a', b'c'$ tres puntos de una recta $\mathbb{L}_2$ distinta de $\mathbb{L}_1$. Si $\mathbb{L}_{ab'}//\mathbb{L}_{ba'}$ y $\mathbb{L}_{bc'}//\mathbb{L}_{cb'}$, entonces $\mathbb{L}_{ac'}//\mathbb{L}_{ca'}$.



Demostración

Primero, asumimos $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{o\}$.

Demostración

Primero, asumimos $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{o\}$.

- Sea $\overrightarrow{ob} = \lambda_1 \overrightarrow{oa}$, $\overrightarrow{oc} = \lambda_2 \overrightarrow{ob}$

Demostración

Primero, asumimos $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{o\}$.

- Sea $\overrightarrow{ob} = \lambda_1 \overrightarrow{oa}$, $\overrightarrow{oc} = \lambda_2 \overrightarrow{ob}$
- Consideremos las homotecias $h_1 = h_{(0,\lambda_1)}$ y $h_2 = h_{(0,\lambda_2)}$. Sabemos que $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.

Demostración

Primero, asumimos $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{o\}$.

- Sea $\overrightarrow{ob} = \lambda_1 \overrightarrow{oa}$, $\overrightarrow{oc} = \lambda_2 \overrightarrow{ob}$
- Consideremos las homotecias $h_1 = h_{(0,\lambda_1)}$ y $h_2 = h_{(0,\lambda_2)}$. Sabemos que $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.
- Por el teorema de Tales $h_1(b') = a'$ y $h_2(c') = b'$.

Demostración

Primero, asumimos $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{o\}$.

- Sea $\overrightarrow{ob} = \lambda_1 \overrightarrow{oa}$, $\overrightarrow{oc} = \lambda_2 \overrightarrow{ob}$
- Consideremos las homotecias $h_1 = h_{(0,\lambda_1)}$ y $h_2 = h_{(0,\lambda_2)}$. Sabemos que $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.
- Por el teorema de Tales $h_1(b') = a'$ y $h_2(c') = b'$.
- Como $h_2(h_1(a)) = c$ y $h_1(h_2(c')) = a'$, tenemos que $h_1 \circ h_2$ transforma la recta $\mathbb{L}_{ac'}$ en la recta $\mathbb{L}_{a'c}$.

Demostración

Primero, asumimos $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{o\}$.

- Sea $\overrightarrow{ob} = \lambda_1 \overrightarrow{oa}$, $\overrightarrow{oc} = \lambda_2 \overrightarrow{ob}$
- Consideremos las homotecias $h_1 = h_{(0,\lambda_1)}$ y $h_2 = h_{(0,\lambda_2)}$. Sabemos que $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.
- Por el teorema de Tales $h_1(b') = a'$ y $h_2(c') = b'$.
- Como $h_2(h_1(a)) = c$ y $h_1(h_2(c')) = a'$, tenemos que $h_1 \circ h_2$ transforma la recta $\mathbb{L}_{ac'}$ en la recta $\mathbb{L}_{a'c}$.
- Además, las homotecias transforman rectas en rectas paralelas, de ahí que $\mathbb{L}_{ac'} // \mathbb{L}_{a'c}$.

Demostración

Primero, asumimos $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{o\}$.

- Sea $\overrightarrow{ob} = \lambda_1 \overrightarrow{oa}$, $\overrightarrow{oc} = \lambda_2 \overrightarrow{ob}$
- Consideremos las homotecias $h_1 = h_{(0,\lambda_1)}$ y $h_2 = h_{(0,\lambda_2)}$. Sabemos que $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.
- Por el teorema de Tales $h_1(b') = a'$ y $h_2(c') = b'$.
- Como $h_2(h_1(a)) = c$ y $h_1(h_2(c')) = a'$, tenemos que $h_1 \circ h_2$ transforma la recta $\mathbb{L}_{ac'}$ en la recta $\mathbb{L}_{a'c}$.
- Además, las homotecias transforman rectas en rectas paralelas, de ahí que $\mathbb{L}_{ac'} // \mathbb{L}_{a'c}$.

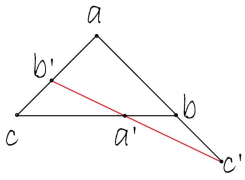
Finalmente, si $\mathbb{L}_1 // \mathbb{L}_2$, entonces procedemos por analogía usando traslaciones, en lugar de homotecias (ver los detalles en los apuntes). $\square$

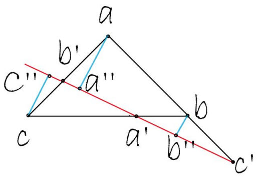
Menelao (o Menelaus) de Alejandría (70 d.c. - 140 d.c.)

Teorema de Menelao

En un plano afín, sea abc un triángulo y sean a',b' y c' puntos de los lados bc, ca y ab, respectivamente. Los puntos b',a' y c' son colineales si y solo si

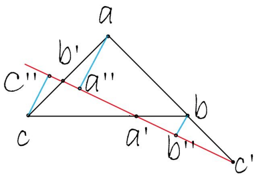
$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = 1. \tag{1}$$





Demostración

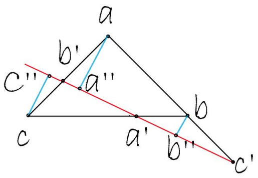
Primero vamos a asumir que b', a' y c' son colineales. Sea $\mathbb{L}$ la recta que pasa por esos tres puntos. Sea π la proyección sobre $\mathbb{L}$ en la dirección de un vector $\overrightarrow{u}$ no paralelo a $\mathbb{L}$. Sean $\pi(a) = a''$, $\pi(b) = b''$ y $\pi(c) = c''$.



Demostración

Primero vamos a asumir que b', a' y c' son colineales. Sea $\mathbb{L}$ la recta que pasa por esos tres puntos. Sea π la proyección sobre $\mathbb{L}$ en la dirección de un vector $\overrightarrow{u}$ no paralelo a $\mathbb{L}$. Sean $\pi(a) = a''$, $\pi(b) = b''$ y $\pi(c) = c''$.

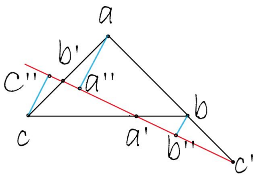
Por el teorema de Tales,



Demostración

Primero vamos a asumir que b', a' y c' son colineales. Sea $\mathbb{L}$ la recta que pasa por esos tres puntos. Sea π la proyección sobre $\mathbb{L}$ en la dirección de un vector $\overrightarrow{u}$ no paralelo a $\mathbb{L}$. Sean $\pi(a) = a''$, $\pi(b) = b''$ y $\pi(c) = c''$.

Por el teorema de Tales, $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} = \frac{\overrightarrow{b''b}}{\overrightarrow{c''c}}$, $\frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} = \frac{\overrightarrow{c''c}}{\overrightarrow{a''a}}$ y $\frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = \frac{\overrightarrow{a''a}}{\overrightarrow{b''b}}$. Por lo tanto,



Demostración

Primero vamos a asumir que b', a' y c' son colineales. Sea $\mathbb{L}$ la recta que pasa por esos tres puntos. Sea π la proyección sobre $\mathbb{L}$ en la dirección de un vector $\overrightarrow{u}$ no paralelo a $\mathbb{L}$. Sean $\pi(a) = a''$, $\pi(b) = b''$ y $\pi(c) = c''$.

Por el teorema de Tales, $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} = \frac{\overrightarrow{b''b}}{\overrightarrow{c''c}}$, $\frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} = \frac{\overrightarrow{c''c}}{\overrightarrow{a''a}}$ y $\frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = \frac{\overrightarrow{a''a}}{\overrightarrow{b''b}}$. Por lo tanto,

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = \frac{\overrightarrow{b''b}}{\overrightarrow{c''c}} \cdot \frac{\overrightarrow{c''c}}{\overrightarrow{a''a}} \cdot \frac{\overrightarrow{a''a}}{\overrightarrow{b''b}} = 1.$$

Demostración (continuación)

Vamos a asumir ahora que $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = 1$. Veamos si b', a' y c' son colineales.

Demostración (continuación)

Vamos a asumir ahora que $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = 1$. Veamos si b', a' y c' son colineales. Sin perder generalidad, podemos asumir que $\mathbb{L}_{c'a'} \cap \mathbb{L}_{ac} \neq \varnothing$, ya que el caso $\mathbb{L}_{c'a'} // \mathbb{L}_{ac}$, $\mathbb{L}_{c'b'} // \mathbb{L}_{bc}$ and $\mathbb{L}_{a'b'} // \mathbb{L}_{ab}$ conduce a $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} < 0$, que es una contradicción.

Demostración (continuación)

Vamos a asumir ahora que $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = 1$. Veamos si b', a' y c' son colineales.
Sin perder generalidad, podemos asumir que $\mathbb{L}_{c'a'} \cap \mathbb{L}_{ac} \neq \varnothing$, ya que el caso $\mathbb{L}_{c'a'} // \mathbb{L}_{ac}$, $\mathbb{L}_{c'b'} // \mathbb{L}_{bc}$ and $\mathbb{L}_{a'b'} // \mathbb{L}_{ab}$ conduce a $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} < 0$, que es una contradicción.
Sea $\{b^*\} = \mathbb{L}_{c'a'} \cap \mathbb{L}_{ac}$. Como b^*, a' y c' son colineales,

Demostración (continuación)

Vamos a asumir ahora que $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = 1$. Veamos si b', a' y c' son colineales.
Sin perder generalidad, podemos asumir que $\mathbb{L}_{c'a'} \cap \mathbb{L}_{ac} \neq \varnothing$, ya que el caso $\mathbb{L}_{c'a'} // \mathbb{L}_{ac}$, $\mathbb{L}_{c'b'} // \mathbb{L}_{bc}$ and $\mathbb{L}_{a'b'} // \mathbb{L}_{ab}$ conduce a $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} < 0$, que es una contradicción.
Sea $\{b^*\} = \mathbb{L}_{c'a'} \cap \mathbb{L}_{ac}$. Como b^*, a' y c' son colineales, por la primera parte del teorema, $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b^*c}}{\overrightarrow{b^*a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = 1$. Por lo tanto,

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = \frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b^*c}}{\overrightarrow{b^*a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}}.$$

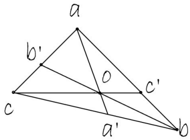
Lo que implica que $\frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} = \frac{\overrightarrow{b^*c}}{\overrightarrow{b^*a}}$, y por eso $b' = b^*$. $\square$

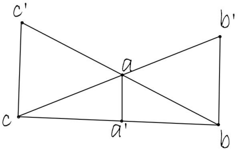
Giovanni Ceva, (1648 - 1734)

Teorema de Ceva

En un plano afín, sea abc un triángulo y sean a',b', y c' puntos de los lados bc, ca y ab, respectivamente. Si las rectas $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ y $\mathbb{L}_{cc'}$ son concurrentes o paralelas, entonces

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1. \tag{2}$$





Demostración

Si $\mathbb{L}_{aa'}//\mathbb{L}_{bb'}//\mathbb{L}_{cc'}$, entonces por el teorema de Tales $\frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} = \frac{\overrightarrow{bc}}{\overrightarrow{ba'}}$ y $\frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = \frac{\overrightarrow{ca'}}{\overrightarrow{cb}}$. De ahí que,

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = \frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{bc}}{\overrightarrow{ba'}} \cdot \frac{\overrightarrow{ca'}}{\overrightarrow{cb}} = -1.$$

Por lo tanto, se cumple

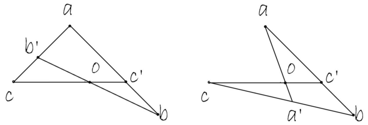
$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1.$$

Demostración (continuación)

Si $\mathbb{L}_{aa'} \cap \mathbb{L}_{bb'} \cap \mathbb{L}_{cc'} = \{o\}$ entonces aplicamos el teorema de Menelao para la recta $b'ob$ y el triángulo cac', y para la recta $a'oa$ y el triángulo cbc'. De ahí que

$$\frac{\overrightarrow{b'a}}{\overrightarrow{b'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{oc}}{\overrightarrow{oc'}} \cdot \frac{\overrightarrow{bc'}}{\overrightarrow{ba}} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{oc}}{\overrightarrow{oc'}} \cdot \frac{\overrightarrow{ac'}}{\overrightarrow{ab}} = 1.$$

De esas igualdades se deduce $\frac{\overrightarrow{b'a}}{\overrightarrow{b'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{bc'}}{\overrightarrow{ba}} = \frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{ac'}}{\overrightarrow{ab}}$, y de ahí se obtiene $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1.$ □



Ejercicio

Sea abc un triángulo, y a', b', c' puntos (diferentes de a, b y c) de los segmentos $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ y $\overline{ab}$, respectivamente. Prueba que si $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1$, entonces las rectas $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ y $\mathbb{L}_{cc'}$ son concurrentes.

Ejercicio

Sea abc un triángulo, y a', b', c' puntos (diferentes de a, b y c) de los segmentos $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ y $\overline{ab}$, respectivamente. Prueba que si $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1$, entonces las rectas $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ y $\mathbb{L}_{cc'}$ son concurrentes.

Solución

Sea $\mathbb{L}_{aa'} \cap \mathbb{L}_{bb'} = \{o\}$ y $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1$. Sea $\{c^*\} = \mathbb{L}_{co} \cap \mathbb{L}_{ab}$.

Ejercicio

Sea abc un triángulo, y a', b', c' puntos (diferentes de a, b y c) de los segmentos $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ y $\overline{ab}$, respectivamente. Prueba que si $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1$, entonces las rectas $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ y $\mathbb{L}_{cc'}$ son concurrentes.

Solución

Sea $\mathbb{L}_{aa'} \cap \mathbb{L}_{bb'} = \{o\}$ y $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1$. Sea $\{c^*\} = \mathbb{L}_{co} \cap \mathbb{L}_{ab}$.

Por el teorema de Ceva, $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c^*a}}{\overrightarrow{c^*b}} = -1.$

Ejercicio

Sea abc un triángulo, y a',b',c' puntos (diferentes de a,b y c) de los segmentos $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ y $\overline{ab}$, respectivamente. Prueba que si $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1$, entonces las rectas $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ y $\mathbb{L}_{cc'}$ son concurrentes.

Solución

Sea $\mathbb{L}_{aa'} \cap \mathbb{L}_{bb'} = \{o\}$ y $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = -1$. Sea $\{c^*\} = \mathbb{L}_{co} \cap \mathbb{L}_{ab}$.

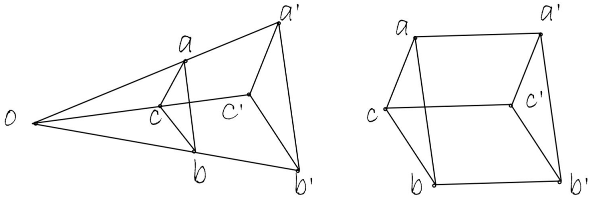
Por el teorema de Ceva, $\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \cdot \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \cdot \frac{\overrightarrow{c^*a}}{\overrightarrow{c^*b}} = -1$.

Por lo tanto, $\frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = \frac{\overrightarrow{c^*a}}{\overrightarrow{c^*b}}$, lo que implica que $c' = c^*$, y por eso $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ and $\mathbb{L}_{cc'}$ son concurrentes. $\square$

Gérard Desargues (1591 - 1661)

Teorema de Desargues

Sea $\mathcal{P}$ un plano afín. Si abc y $a'b'c'$ son dos triángulos de $\mathcal{P}$, sin vértices comunes, cuyos lados son respectivamente paralelos, entonces las rectas $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ y $\mathbb{L}_{cc'}$ son paralelas o concurrentes.



Demostración

Con las premisas del teorema, $\mathbb{L}_{a'c'}$ es la paralela a $\mathbb{L}_{ac}$ que pasa por a', y $\mathbb{L}_{b'c'}$ la paralela a $\mathbb{L}_{bc}$ que pasa por b'.

Demostración

Con las premisas del teorema, $\mathbb{L}_{a'c'}$ es la paralela a $\mathbb{L}_{ac}$ que pasa por a', y $\mathbb{L}_{b'c'}$ la paralela a $\mathbb{L}_{bc}$ que pasa por b'.

Caso 1.

Si las rectas $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ y $\mathbb{L}_{cc'}$ son paralelas, entonces ya estamos.

Demostración

Con las premisas del teorema, $\mathbb{L}_{a'c'}$ es la paralela a $\mathbb{L}_{ac}$ que pasa por a', y $\mathbb{L}_{b'c'}$ la paralela a $\mathbb{L}_{bc}$ que pasa por b'.

Caso 1.

Si las rectas $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ y $\mathbb{L}_{cc'}$ son paralelas, entonces ya estamos.

Caso 2.

Si $\mathbb{L}_{aa'} \cap \mathbb{L}_{bb'} = \{o\}$, entonces la homotecia $h_{(o,\lambda)}$ que transforma a en a' también transforma b en b' (Tales nuevamente). Sea $c^* = h_{(o,\lambda)}(c)$. Como $h_{(o,\lambda)}$ transforma una recta en una paralela, $\mathbb{L}_{a'c^*} // \mathbb{L}_{ac}$ y $\mathbb{L}_{b'c^*} // \mathbb{L}_{bc}$.

Demostración

Con las premisas del teorema, $\mathbb{L}_{a'c'}$ es la paralela a $\mathbb{L}_{ac}$ que pasa por a', y $\mathbb{L}_{b'c'}$ la paralela a $\mathbb{L}_{bc}$ que pasa por b'.

Caso 1.

Si las rectas $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ y $\mathbb{L}_{cc'}$ son paralelas, entonces ya estamos.

Caso 2.

Si $\mathbb{L}_{aa'} \cap \mathbb{L}_{bb'} = \{o\}$, entonces la homotecia $h_{(o,\lambda)}$ que transforma a en a' también transforma b en b' (Tales nuevamente). Sea $c^* = h_{(o,\lambda)}(c)$. Como $h_{(o,\lambda)}$ transforma una recta en una paralela, $\mathbb{L}_{a'c^*} // \mathbb{L}_{ac}$ y $\mathbb{L}_{b'c^*} // \mathbb{L}_{bc}$.

De ahí que, $\mathbb{L}_{a'c'} = \mathbb{L}_{a'c^*}$, ya que hay una sola paralela a $\mathbb{L}_{ac}$ que pasa por a'. Análogamente, $\mathbb{L}_{b'c'} = \mathbb{L}_{b'c^*}$

Demostración

Con las premisas del teorema, $\mathbb{L}_{a'c'}$ es la paralela a $\mathbb{L}_{ac}$ que pasa por a', y $\mathbb{L}_{b'c'}$ la paralela a $\mathbb{L}_{bc}$ que pasa por b'.

Caso 1.

Si las rectas $\mathbb{L}_{aa'}$, $\mathbb{L}_{bb'}$ y $\mathbb{L}_{cc'}$ son paralelas, entonces ya estamos.

Caso 2.

Si $\mathbb{L}_{aa'} \cap \mathbb{L}_{bb'} = \{o\}$, entonces la homotecia $h_{(o,\lambda)}$ que transforma a en a' también transforma b en b' (Tales nuevamente). Sea $c^* = h_{(o,\lambda)}(c)$. Como $h_{(o,\lambda)}$ transforma una recta en una paralela, $\mathbb{L}_{a'c^*} // \mathbb{L}_{ac}$ y $\mathbb{L}_{b'c^*} // \mathbb{L}_{bc}$.

De ahí que, $\mathbb{L}_{a'c'} = \mathbb{L}_{a'c^*}$, ya que hay una sola paralela a $\mathbb{L}_{ac}$ que pasa por a'. Análogamente, $\mathbb{L}_{b'c'} = \mathbb{L}_{b'c^*}$

En resumen, $\{c^*\} = \{c'\} = \mathbb{L}_{a'c'} \cap \mathbb{L}_{b'c'}$, y por eso el resultado se cumple. $\square$