Índice general

Tema 4

Base y dimensión

4.1. Conjuntos generadores. Conjuntos generados

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores del espacio vectorial V. Recordemos que la suma de la forma

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \,,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares, se denomina *combinación lineal* de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Este concepto es esencial en la teoría de los espacios vectoriales y en él se apoyan numerosas ideas. Comenzamos el tema dando la siguiente definición:

El conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se denomina **conjunto generado** por $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Lo denotaremos por $\mathrm{Gen}(v_1, \ldots, v_n)$.

Ejemplo

Consideremos los vectores $(1,1,1)^t$ y $(1,1,0)^t$ de $\mathbb{R}^3$. El conjunto generado por dichos vectores viene dado por el conjunto de todas las combinaciones lineales de la forma:

$$\begin{aligned}\left\{\alpha(1,1,1)^t+\beta(1,1,0)^t\colon \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\} &= \left\{(\alpha+\beta,\alpha+\beta,\alpha)^t\colon \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{(\alpha',\alpha',\beta')^t\colon \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

Ahora consideremos los vectores $(-1,-1,2)^t$, $(1,1,1)^t$ y $(1,1,0)^t$. El conjunto generado por estos vectores se describe por

$$\begin{aligned}&\left\{\alpha(-1,-1,2)^t+\beta(1,1,1)^t+\gamma(1,1,0)^t\colon \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}\\ &\qquad\qquad= \left\{(-\alpha+\beta+\gamma,-\alpha+\beta+\gamma,2\alpha+\beta)^t\colon \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

Sin embargo, si observamos la primera y la segunda coordenadas, vemos que éste también puede ser descrito por:

$$\left\{(\alpha',\alpha',\beta')^t\colon \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\right\}.$$

Así: $\quad \mathrm{Gen}((1,1,1)^t,(1,1,0)^t)=\mathrm{Gen}((-1,-1,2)^t,(1,1,1)^t,(1,1,0)^t)$.

El siguiente resultado es esencial en temas posteriores.

Teorema

Si $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ son elementos de un espacio vectorial V, entonces $\mathrm{Gen}(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)$ es un subespacio de V.

Demostración. Sea $\boldsymbol{v}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{v}_n$ un elemento arbitrario de $\mathrm{Gen}(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)$ y λ cualquier escalar. Puesto que

$$\lambda\boldsymbol{v}=\lambda(\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{v}_n)=(\lambda\cdot\alpha_1)\boldsymbol{v}_1+\cdots+(\lambda\cdot\alpha_n)\boldsymbol{v}_n,$$

se deduce que $\lambda\boldsymbol{v}\in\mathrm{Gen}(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)$.

Ahora consideremos $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathrm{Gen}(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)$, $\boldsymbol{v}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{v}_n$ y $\boldsymbol{w}=\beta_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+$

$\beta_n \mathbf{v}_n$. Puesto que

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{v}_n \in \mathrm{Gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

hemos probado que $\mathrm{Gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ es un subespacio de V. □

Además, el teorema anterior motiva la siguiente definición:

El conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un **conjunto generador de** V si cada vector de V puede escribirse como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Ejemplo

Consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2)^t, \mathbf{v}_2 = (-2, 3, 1)^t$ y $\mathbf{v}_3 = (-1, 3, 8)^t$. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Como $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, cualquier combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ puede reducirse a una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$:

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3(3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2) = (\alpha_1 + 3\alpha_3)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)\mathbf{v}_2 \,.$$

Así, $\quad S = \mathrm{Gen}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \mathrm{Gen}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Este ejemplo ilustra las siguientes proposiciones:

Proposición

Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera un espacio vectorial V y uno de estos vectores puede escribirse como combinación lineal de los otros $n-1$ vectores, entonces esos $n-1$ vectores generan V.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{v}_n$ puede escribirse como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$:

$$\mathbf{v}_n = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} \,.$$

Sea $v \in V$. Puesto que $v_1, \ldots, v_n$ genera V podemos escribir

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \\ &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1}) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_n \alpha_1) v_1 + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n \alpha_{n-1}) v_{n-1} \end{aligned}$$

y cualquier vector $v \in V$ puede escribirse como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_{n-1}$, i.e., $V = \mathrm{Gen}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. □

Proposición

Dados n vectores $v_1, \ldots, v_n$, es posible escribir uno de los vectores como combinación lineal de los otros $n-1$ si y sólo si existen escalares $c_1, \ldots, c_n$, no todos cero, tales que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0\,.$$

Demostración. Supongamos que uno de estos vectores, digamos v_n, puede escribirse como combinación lineal de los otros:

$$v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1}\,.$$

Restando v_n a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0\,.$$

Si hacemos $c_1 = \alpha_1, \ldots, c_{n-1} = \alpha_{n-1}, c_n = -1$, se deduce que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0\,.$$

Inversamente, si

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$$

y al menos uno de los c_i's, digamos c_n, es no nulo, entonces

$$\mathbf{v}_n = -\frac{c_1}{c_n}\mathbf{v}_1 - \cdots - \frac{c_{n-1}}{c_n}\mathbf{v}_{n-1}\,.$$

□

En virtud de las propiedades anteriores podemos dar las siguientes definiciones (ya conocidas):

Los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ del espacio vectorial V se dicen **linealmente independientes** si

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

implica que todos los escalares $c_1, \ldots, c_n$ son iguales a 0. Inversamente, los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ del espacio vectorial V se denominan **linealmente dependientes** si existen ciertos escalares $c_1, \ldots, c_n$, no todos nulos, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}\,.$$

Obsérvese que la expresión (4.1) representa un sistema lineal homogéneo, que siempre tiene solución trivial. Los vectores serán linealmente independientes si dicha solución es *única*.

El siguiente teorema se da sin demostración.

Teorema

Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores de un espacio vectorial V. Un vector $\mathbf{v}$ de $\mathrm{Gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ si y sólo si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes.

4.2. Bases y dimensión

Los vectores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ forman una **base** del espacio vectorial V si y sólo si

1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ son linealmente independientes.

2) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ generan V.

NOTA: es importante observar que las bases son conjuntos ordenados de vectores. Por lo tanto denotaremos una base como $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.

Ejemplo

La base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $B_0 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ con $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)^t$ y $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)^t$. Verifiquemos que B_0 es efectivamente una base.

Claramente, $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ son linealmente independientes, puesto que $\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Además todo vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^t$ de $\mathbb{R}^2$ puede representarse como una combinación lineal de estos dos vectores de la forma

$$\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2$$

y así $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Gen}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Por tanto, $B_0 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Veamos otras propiedades de los conjuntos generadores y de las bases de un espacio vectorial.

Teorema

Si $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es un conjunto generador de un espacio vectorial V, cualquier colección de m vectores de V con $m > n$ es linealmente dependiente.

Como consecuencia, si $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ y $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)$ son bases de un espacio vectorial V, entonces $n = m$. A la vista de este resultado, podemos referirnos al número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial dado V como la **dimensión** de dicho espacio vectorial. Si existe un conjunto finito de vectores que genera V, diremos que V es de dimensión finita. En caso contrario, diremos que V es de dimensión infinita. En este curso sólo nos ocuparemos de espacios vectoriales de dimensión finita.

Teorema

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita $n > 0$:

- Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes genera V.
- Si n vectores generan V, son linealmente independientes.

Finalmente:

Proposición

Sea $B = (v_1, \dots, v_n)$ un conjunto ordenado de vectores de V (sobre $\mathbb{K}$). Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. B es una *base* de V.
2. B es un conjunto *linealmente independiente maximal* (es decir, si añadimos cualquier vector al conjunto, éste deja de ser linealmente independiente).
3. B es un *conjunto generador minimal* de V (es decir, si eliminamos cualquier vector de B, éste deja de ser generador de V).

Veamos el caso de algunos espacios vectoriales muy utilizados. Es fácil demostrar que:

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- $\dim(\mathbb{K}^{m\times n}) = mn$.
- $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$.

Conocidos estos resultados, podremos determinar si un conjunto de vectores forma o no una base en el correspondiente espacio vectorial, observando si su cardinalidad coincide con la dimensión del espacio y, en tal caso, estudiando simplemente si son linealmente independientes.

Ejemplo

El espacio $\mathbb{R}^3$ de dimensión 3 es generado por los vectores linealmente independientes $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^t$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)^t$ y $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^t$, los cuales forman la base canónica $B_0 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

El conjunto ordenado $((1,1,1)^t, (1,1,0)^t, (1,0,0)^t)$ también es una base de $\mathbb{R}^3$. Para probar esto, igualamos a cero una combinación lineal arbitraria de todos ellos

$$\alpha_1(1,1,1)^t + \alpha_2(1,1,0)^t + \alpha_3(1,0,0)^t = (0,0,0)^t\,,$$

que da lugar al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\,, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0\,, \\ \alpha_1 = 0\,. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0\,,$$

lo que demuestra que los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Dada la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, los espacios fila y columna de A tienen la misma dimensión y ésta es igual al rango de la matriz $r = \operatorname{rg}(A)$. Se pueden encontrar bases para estos espacios entre las filas y columnas de la propia A. Los espacios nulos de A y A^t tienen dimensiones $n - r$ y $m - r$ respectivamente.

Espacio Vectorial	**Dimensión**	**Subespacio de**
$N(A)$, espacio nulo	$n - \operatorname{rg}(A)$	$\mathbb{K}^m$
$\mathcal{C}(A)$, espacio columna	$\operatorname{rg}(A)$	$\mathbb{K}^n$
$\mathcal{C}(A^t)$, espacio fila	$\operatorname{rg}(A)$	$\mathbb{K}^m$
$N(A^t)$, espacio nulo de A^t	$m - \operatorname{rg}(A)$	$\mathbb{K}^n$

Para encontrar una base del espacio nulo de A, resolvemos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; si aplicamos el método de Gauss, tendremos que reducir A a forma escalonada.

Para encontrar una base del espacio columna, la forma escalonada de A nos permitirá identificar las columnas que forman un sistema linealmente independiente (las que corresponden a las variables pivote).

De igual modo, para encontrar una base del espacio fila, reducimos A a su forma escalonada; las filas no nulas corresponden a las que forman $\boxed{\text{(en la matriz } A)}$ un conjunto linealmente independiente.

Para el caso del espacio nulo de A^t, podemos encontrar una base resolviendo el sistema $A^t x = 0$. Sin embargo hay una alternativa más práctica: aplicar el método de Gauss a la matriz $\left(A \mid I \right)$ para obtener la matriz equivalente $\left(U \mid J \right)$. Las $m - \operatorname{rg}(A)$ últimas filas de J forman una base del espacio nulo de la traspuesta de A. Esto se debe a que al realizar operaciones elementales sobre $\left(A \mid I \right)$, la matriz J, invertible, refleja las operaciones que se han realizado para obtener U, es decir, $JA = U$. Al realizar este producto, obtenemos que las últimas $m - \mathrm{rg}(A)$ filas de A son vectores fila 0; es decir, las últimas $m - \mathrm{rg}(A)$ filas de J, multiplicadas por A, producen el vector fila 0 y, por ello, forman una base del espacio nulo de A^t. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Vamos a determinar sus cuatro espacios vectoriales asociados.

1) **Espacio Nulo**: $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^4 : A\,\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\}$. La condición $A\,\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ se transforma en:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que representa un sistema lineal con tres ecuaciones y cuatro incógnitas v_1, v_2, v_3 y v_4. Si obtenemos una forma escalonada de la matriz, resulta:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que v_1 y v_2 serán variables pivote y v_3 y v_4 los parámetros. Por tanto el espacio nulo será

$$N(A) = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^t \in \mathbb{R}^4 \colon v_1 = \frac{17}{3} v_3 - \frac{11}{3} v_4,\; v_2 = -4v_3 + v_4 \right\}$$

y una base vendrá dada por

$$B = \left((17, -12, 3, 0)^t, (-11, 3, 0, 3)^t\right).$$

Obsérvese que de este resultado también se deduce que el rango de A es 2.

2) **Espacio columna**:

$$\mathcal{C}(A) = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \colon \boldsymbol{v} = a_1\mathbf{A}_1 + a_2\mathbf{A}_2 + a_3\mathbf{A}_3 + a_4\mathbf{A}_4, a_i \in \mathbb{R}\right\}$$

es el conjunto de vectores que son combinación lineal de las columnas $\mathbf{A}_i$ de la matriz A. Para determinar una base, podemos reducir la matriz A a forma escalonada (como hicimos antes):

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Las variables pivote se corresponden con las columnas 1 y 2, por tanto, una base del espacio columna estará formada por las $\boxed{\text{correspondientes columnas de la matriz } A}$

$$B = \left((3, 0, 6)^t, (5, 1, 11)^t\right).$$

La dimensión del espacio columna es, obviamente, 2.

3) **Espacio fila**: $\mathcal{C}(A^t)$ es generado por dos filas de la matriz A, las que corresponden a las filas no nulas en la forma escalonada obtenida o, equivalentemente, las que contienen los coeficientes de las variables pivote en la forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \end{array}\begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así $\mathcal{C}(A^t) = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \colon \boldsymbol{v} = b_1(3,5,3,6)^t + b_2(0,1,4,-1)^t, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\right\}$. La dimensión del espacio fila es también 2.

4) **Espacio nulo de la traspuesta**: $N(A^t)$ es el conjunto de vectores de la forma $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^t$ que satisfacen $A^t \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ ó también

$$(v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 10 & 11 \end{pmatrix} = (0,0,0,0)\,.$$

Si escribimos la matriz aumentada del sistema lineal $A^t \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ y hallamos su forma escalonada, resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 11 & 0 \\ 3 & 4 & 10 & 0 \\ 6 & -1 & 11 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} N(A^t) &= \left\{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^t \colon v_1 = -2v_3, v_2 = -v_3\right\} \\ &= \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \colon v = v_3(-2,-1,1)^t, v_3 \in \mathbb{R}\right\}\,. \end{aligned}$$

Obviamente, la dimensión del espacio nulo de la traspuesta es $3 - 2 = 1$.

Una manera alternativa para obtener el espacio nulo de la traspuesta simultáneamente a los otros espacios (con menos cálculos) consiste en escribir

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 10 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y reducirla a forma escalonada:

$$(U|J) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

La última fila de J, $(2,1,-1)^t$ proporciona una base del espacio nulo de la traspuesta, como ya sabíamos.

4.2.1. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ y sea $B = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ una base de V. El siguiente teorema es clave en muchos de los resultados que veremos en el curso:

Teorema de representación única

Sea $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ una base del espacio vectorial V. Todo vector $\boldsymbol{v} \in V$ se puede expresar $\boxed{\text{de forma única}}$ como combinación lineal de los vectores de B:

$$\boldsymbol{v} = v_1\,\mathbf{b}_1 + \cdots + v_n\,\mathbf{b}_n\,.$$

Como establece el teorema de representación única, si $\boldsymbol{v} \in V$, podremos escribir $\boldsymbol{v}$ de la forma

$$\boldsymbol{v} = v_1\,\mathbf{b}_1 + \cdots + v_n\,\mathbf{b}_n\,,$$

donde $v_1, \dots, v_n$ son escalares ($\in \mathbb{K}$). Así, podemos asociar a cada vector $\boldsymbol{v} \in V$ un $\boxed{\text{vector único con respecto a la base B}}$ $[\boldsymbol{v}]_B \in \mathbb{K}^n$ dado por $[\boldsymbol{v}]_B = (v_1, \dots, v_n)^t$. Este vector se denomina **vector de coordenadas** de $\boldsymbol{v}$ $\boxed{\text{con respecto a la base B.}}$ Nos referiremos a los escalares v_i $(i = 1, \dots, n)$ como **coordenadas de $\boldsymbol{v}$** en $\mathbb{K}^n$ **con respecto a** B.

NOTA: es importante darse cuenta de que *solamente* en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ *con la base* *canónica* B_0 se cumple que

$$\boxed{\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]_{B_0}} = B_0[\boldsymbol{v}]_{B_0} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\,[\boldsymbol{v}]_{B_0}\,.$$

En un espacio vectorial V de dimensión n con una base arbitraria B no se puede identificar el vector $\boldsymbol{v}$ con el vector de sus coordenadas $[\boldsymbol{v}]_B \in \mathbb{K}^n$ en dicha base. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

Ejemplo

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$. Es sencillo demostrar que $B = (1, x)$ es una base de este espacio. Cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x$ puede representarse mediante el vector de coordenadas con respecto a la base B:

$$[\mathbf{p}]_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que $p \neq [\mathbf{p}]_B$; p es un polinomio y $[\mathbf{p}]_B$ es un vector de $\mathbb{R}^2$: el segundo es una útil *representación* del primero.

Sea un espacio vectorial V de dimensión n. En él definimos una base $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$. Dado un vector cualquiera $\mathbf{a} \in V$, existe una única combinación lineal

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n\,,$$

que define las coordenadas $[\mathbf{a}]_B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^t$ de $\mathbf{a}$ en la base B. Podemos recuperar el vector original escribiéndolo en forma de producto matricial:

$$\mathbf{a} = B\,[\mathbf{a}]_B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)\,[\mathbf{a}]_B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Nótese que, aunque definimos en el Tema 1 que las entradas de las matrices eran escalares, en la fórmula anterior los elementos del vector fila $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ no son escalares, sino vectores (tal y como indica la negrita). Obsérvese que la regla del producto sigue siendo la misma; aunque el resultado es un vector, no un escalar.

4.3. Cambio de base

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ existe una base canónica natural que viene dada por

$$B_0 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \left((1,0,0,\ldots,0,0)^t, (0,1,0,\ldots,0,0)^t, \ldots, (0,0,0,\ldots,0,1)^t\right) .$$

Sin embargo, en muchas ocasiones es más eficiente trabajar en otras bases en $\mathbb{R}^n$. En otros espacios vectoriales no existe una base canónica natural y, en muchos cálculos prácticos, es conveniente elegir una base adecuada para realizarlos.

Es importante recordar que un vector $\boldsymbol{v} \in V$ es un objeto abstracto que existe sin necesidad de establecer una base para el espacio vectorial V. Al fijar una base B en V podemos obtener las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ con respecto a dicha base $[\boldsymbol{v}]_B$. Estas coordenadas dependen obviamente de la base escogida: si elegimos otra base B', las coordenadas del vector $\boldsymbol{v}$ serán $[\boldsymbol{v}]_{B'}$ y, en general, serán diferentes de $[\boldsymbol{v}]_B$.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial V formado por los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales de grado menor que 5 y que sólo contienen potencias pares de x:

$$V = \left\{p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 \, , a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\} .$$

Sea ahora el polinomio p dado por la expresión $p(x) = x^4 - 2x^2$. La gráfica de este polinomio está representada en la figura 4.1. Una base posible de V es la siguiente

$$B_1 = (p_1, p_2, p_3) = (1, x^2, x^4)\,.$$

y las coordenadas de p en esta base son obviamente

$$[\mathbf{p}]_{B_1} = (0, -2, 1)^t\,,$$

ya que

$$p(x) = (p_1, p_2, p_3)\,[\mathbf{p}]_{B_1} = (p_1, p_2, p_3)\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2p_2 + p_3 = x^4 - 2x^2\,.$$

Otra base posible de V es la siguiente

$$B_2 = (q_1, q_2, q_3) = \left(1, x^2 - 1, (x^2-1)^2\right)$$

y las coordenadas de p en esta base son (después de un poco de álgebra)

$$[\mathbf{p}]_{B_2} = (-1, 0, 1)^t\,,$$

ya que

$$p(x) = (q_1, q_2, q_3)\,[\mathbf{p}]_{B_2} = (q_1, q_2, q_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -q_1 + q_3 = x^4 - 2x^2\,.$$

Como se puede observar, el polinomio p no depende de la base elegida para representarlo (en otras palabras, la gráfica de $p(x)$ no depende de la base). Sin embargo, las coordenadas de dicho polinomio sí dependen de la base elegida.

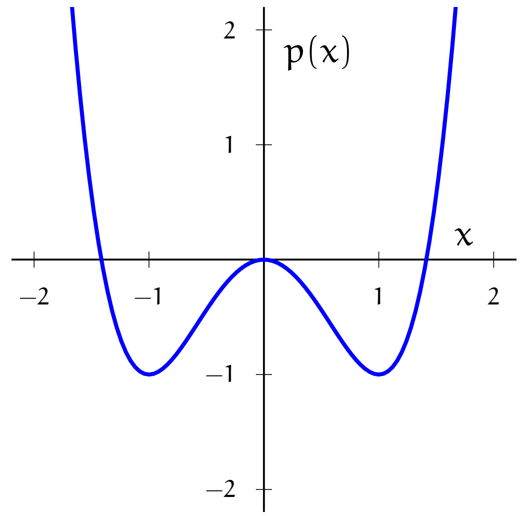

Figura 4.1: Gráfica del polinomio $p(x) = x^4 - 2x^2$.

Vamos a estudiar cómo varían las coordenadas de un vector $\boldsymbol{v} \in V$ respecto a una base B cuando usamos una nueva base B'. Para ello definimos primero la **matriz de cambio de base** $T_{BB'}$. La definición de esta matriz **no** es universal, ya que en algunos libros se usa, en vez de $T = T_{BB'}$, su inversa T^{-1}.

Sea un espacio vectorial V de dimensión n. En él definimos dos bases distintas $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ y $B' = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \ldots, \mathbf{b}'_n)$. La **matriz de cambio de base** $T_{BB'}$ (de dimensión $n \times n$) se define mediante la ecuación

$$B' = B\, T_{BB'} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \ldots, \mathbf{b}'_n) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)\, T_{BB'}\,. \tag{4.2}$$

En otras palabras, la columna i-ésima $\mathbf{T}_i$ de la matriz $T = T_{BB'}$ contiene las coordenadas del vector $\mathbf{b}'_i$ de la "nueva" base B' respecto de la base "antigua" B: $\quad \mathbf{T}_i = [\mathbf{b}'_i]_B$. De otra manera:

$$T_{BB'} = \left([\mathbf{b}'_1]_B, [\mathbf{b}'_2]_B, \ldots, [\mathbf{b}'_n]_B\right)\,.$$

La matriz $T_{BB'}$ se denotará simplemente por T cuando las bases B y B' estén bien definidas en el contexto del problema.

La matriz de cambio de base $T_{BB'}$ es una matriz no singular ($\det(T_{BB'}) \neq 0$), ya que sus columnas son linealmente independientes.

Ejemplo

Supongamos que queremos usar la base $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, donde las coordenadas de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, respecto de la base canónica $B_0 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, son

$$\mathbf{u}_1 = (3, 2)^t\,, \qquad \mathbf{u}_2 = (1, 1)^t\,.$$

La matriz asociada al cambio de base $B_0 \to B_1$ viene dada por la fórmula (4.2): cada columna contiene las coordenadas del vector correspondiente de la base B_1 en la base B_0

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\, T_{B_0 B_1} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si desarrollamos esta ecuación, vemos que es equivalente a:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\,, \\ \mathbf{u}_2 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\,, \end{aligned}$$

tal y como ya sabíamos.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ de los polinomios de grado $\leqslant 1$ con coeficientes reales. Tenemos la base de este espacio

$$B_1 = (1, x)$$

y queremos expresar los polinomios de $\mathbb{P}_1$ en función de la base

$$B_2 = (1 + x, 1 - x)\,,$$

donde la demostración de que B_2 es efectivamente una base de $\mathbb{P}_1$ de deja como ejercicio.

La matriz asociada al cambio de base $B_1 \to B_2$ viene dada por la fórmula (4.2):

$$(1+x, 1-x) = (1, x)\, T_{B_1 B_2} = (1, x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si desarrollamos esta ecuación, vemos que es equivalente a las tautologías

$$\begin{aligned} 1+x &= 1+x \\ 1-x &= 1-x\,, \end{aligned}$$

tal y como debe ser.

Si tenemos un vector $\mathbf{x} \in V$ en un espacio vectorial V de dimensión n y calculamos sus coordenadas $[\mathbf{x}]_B = (x_1, \ldots, x_n)^t$ y $[\mathbf{x}]_{B'} = (x'_1, \ldots, x'_n)^t$ respecto a dos bases distintas $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ y $B' = (\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n)$ de V y que están relacionadas mediante la matriz de cambio de base $T_{BB'}$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= B\,[\mathbf{x}]_B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)\ [\mathbf{x}]_B \\ &= B'\,[\mathbf{x}]_{B'} = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \ldots, \mathbf{b}'_n)\ [\mathbf{x}]_{B'}\,. \end{aligned}$$

Dado que $(\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \ldots, \mathbf{b}'_n) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)\, T_{BB'}$, entonces

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)\,[\mathbf{x}]_B = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \ldots, \mathbf{b}'_n)\,[\mathbf{x}]_{B'} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)\, T_{BB'}\,[\mathbf{x}]_{B'}\,.$$

De esta ecuación se ve cómo se transforman las coordenadas del vector $\mathbf{x}$ al cambiar de base $B \to B'$:

$$[\mathbf{x}]_B = T_{BB'}\,[\mathbf{x}]_{B'}\,.$$

Aunque la fórmula fundamental es (4.2), que define la matriz de cambio de base $B \to B'$, esta última fórmula nos dice cómo se transforman las coordenadas de cualquier vector

$x \in V$ bajo dicho cambio de base. Si queremos escribir las coordenadas del vector x en la base "nueva" B' en función de sus coordenadas en la base "antigua" B, basta con multiplicar (por la izquierda) la ecuación anterior por $T^{-1}_{BB'}$:

$$[x]_{B'} = T^{-1}_{BB'}\,[x]_B\,.$$

Nótese que la matriz $T_{BB'}$ define el cambio de base (4.2), pero su inversa $T^{-1}_{BB'}$ es la que define el cambio de coordenadas.

Ejemplo

Supongamos que queremos cambiar de la base canónica $B_0 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ a una nueva base $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ donde las coordenadas de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ respecto a B_0 son

$$\mathbf{b}_1 = (3,2)^t\,, \qquad \mathbf{b}_2 = (1,1)^t\,.$$

La matriz de cambio de base asociada a $B_0 \to B_1$ es, como ya vimos,

$$T_{B_0B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es no singular y su inversa es

$$T^{-1}_{B_0B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si tenemos el vector $x = (2,-1)^t$ en la base canónica B_0, sus coordenadas en la nueva base B serán

$$[x]_B = T^{-1}_{B_0B_1}\,x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Nótese que

$$\boldsymbol{x} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)\,[\boldsymbol{x}]_B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\,[\boldsymbol{x}]_{B_0}\,.$$

Ejemplo

Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ de los polinomios de grado $\leqslant 1$ con coeficientes reales. Queremos hacer el cambio de base desde la base $B_1 = (1, x)$ a la nueva base $B_2 = (1 + x, 1 - x)$.

La matriz de cambio de base $T_{B_1B_2}$ viene dada por

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Su inversa es

$$T^{-1}_{B_1B_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si tenemos el polinomio $p(x) = 2 - 3x \in \mathbb{P}_1$, sus coordenadas en la base B_1 son obviamente $[\mathbf{p}]_{B_1} = (2, -3)^t$. Sus coordenadas en la base B_2 vendrán dadas por:

$$[\mathbf{p}]_{B_2} = T^{-1}_{B_1B_2}\,[\mathbf{p}]_{B_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La comprobación de este resultado es trivial:

$$p(x) = (1 + x, 1 - x)\,[\mathbf{p}]_{B_2} = (1 + x, 1 - x)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 - 3x = (1, x)\,[\mathbf{p}]_{B_1}\,.$$

Hay dos propiedades importantes que cumplen las matrices de cambio de base

1. Supongamos que hacemos el cambio de base $B \to B'$, lo que define la matriz de

cambio de base $T_{BB'}$. Si hiciésemos el cambio de base inverso $B' \to B$, entonces la matriz de este cambio de base es simplemente

$$\boxed{T_{B'B} = T_{BB'}^{-1}\,.}$$

Este resultado se obtiene de (4.2) multiplicando por la derecha por la matriz $T_{BB'}^{-1}$ (que siempre existe ya que $T_{BB'}$ es no singular). Esto implica que

$$[\mathbf{x}]_{B'} = T_{BB'}^{-1}\,[\mathbf{x}]_B = T_{B'B}\,[\mathbf{x}]_B\,.$$

2. Supongamos que hacemos dos cambios sucesivos de base. Primero vamos de la base $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ a la base $B' = (\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n)$ con la matriz de cambio de base $T_{BB'}$:

$$(\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n) = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)\,T_{BB'}\,.$$

Después cambiamos de la base B' a otra base $B'' = (\mathbf{b}''_1, \ldots, \mathbf{b}''_n)$ con la matriz $T_{B'B''}$:

$$(\mathbf{b}''_1, \ldots, \mathbf{b}''_n) = (\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n)\,T_{B'B''}\,.$$

Evidentemente podemos hacer este cambio de base en un solo paso $B \to B''$. La matriz de cambio de base $T_{BB''}$ vendría dada por:

$$(\mathbf{b}''_1, \ldots, \mathbf{b}''_n) = (\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n)\,T_{B'B''} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)\,T_{BB'}\,T_{B'B''}\,.$$

Es decir,

$$\boxed{T_{BB''} = T_{BB'}\,T_{B'B''}\,.}$$

Ejemplo

Sea el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ de los polinomios de grado $\leqslant 1$ con coeficientes reales. Queremos hacer el cambio de base desde la base $B_1 = (1, x)$ a la nueva base $B_2 = (1+x, 1-x)$.

La matriz de cambio de base $T_{B_1B_2}$ y su inversa vienen dadas por

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1}_{B_1B_2} = T_{B_2B_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sea ahora una nueva base $B_3 = (1+2x, 1-2x)$. Para calcular la matriz $T_{B_2B_3}$ debemos calcular las coordenadas de $1 \pm 2x$ en la base B_2. Para ello hay que resolver los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
1+2x &= \alpha(1+x)+\beta(1-x) = (\alpha+\beta)+x(\alpha-\beta) \;\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1\,, \\ \alpha-\beta = 2\,. \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \\
1-2x &= \alpha(1+x)+\beta(1-x) = (\alpha+\beta)+x(\alpha-\beta) \;\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1\,, \\ \alpha-\beta = -2\,. \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}$$

Luego la matriz de cambio de base $T_{B_2B_3}$ y su inversa vienen dadas por

$$T_{B_2B_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1}_{B_2B_3} = T_{B_3B_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ya hemos visto que el vector $p(x) = 2-3x \in \mathbb{P}_1$ tiene coordenadas $[\mathbf{p}]_{B_1} = (2, -3)^t$ en la base B_1 y coordenadas $(-1/2, 5/2)^t$ en B_2. Sus coordenadas en la base B_3 vendrán dadas por:

$$[\mathbf{p}]_{B_3} = T_{B_3B_2}\,[\mathbf{p}]_{B_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Por supuesto este resultado es el correcto:

$$p(x) = (1+2x, 1-2x)\,[\mathbf{p}]_{B_3} = (1+2x, 1-2x)\,\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 2-3x\,.$$

Si queremos hacer el cambio de base $B_1 \to B_3$ directamente, basta calcular

$$T_{B_1B_3} = T_{B_1B_2}\,T_{B_2B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

que es el resultado esperado, ya que las columnas de $T_{B_1B_3}$ contienen las coordenadas de los vectores de B_3 en la base B_1. La inversa de esta matriz es

$$T^{-1}_{B_1B_3} = T_{B_3B_1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de p en la base B_3 vienen dadas por

$$[\mathbf{p}]_{B_3} = T_{B_3B_1}\,[\mathbf{p}]_{B_1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La comprobación es simple:

$$p(x) = (1+2x, 1-2x)\,[\mathbf{p}]_{B_3} = (1+2x, 1-2x)\,\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 2-3x\,.$$

4.3.1. Cambio de coordenadas usando la base canónica

Frecuentemente, una de las bases del espacio vectorial con las que trabajamos es la canónica, B_0. En este caso, la matriz de cambio de base $T_{B_0B_1}$ a otra base B_1 es particularmente sencilla, como hemos visto. En cambio, si trabajamos con bases arbitrarias B_1 y B_2, el cálculo de las coordenadas de los vectores de una base con respecto a la otra puede ser engorroso. Una alternativa habitual consiste en lo siguiente. Dada la base B_1, podemos calcular la matriz de cambio de base $T_{B_0B_1}$ de B_0 a B_1. De igual manera, dada la base B_2, podemos hallar su correspondiente matriz de cambio de base $T_{B_0B_2}$ de B_0 a B_2. La idea consiste en, en vez de hacer directamente el cambio de base $B_1 \to B_2$, hacer el cambio de base pasando por la base canónica B_0: $B_1 \to B_0 \to B_2$. Entonces

$$\boxed{T_{B_1B_2} = T_{B_1B_0}\, T_{B_0B_2} = T^{-1}_{B_0B_1}\, T_{B_0B_2}\,,}$$

de manera que ahora sólo tenemos que trabajar con las matrices $T_{B_0B_1}$ y $T_{B_0B_2}$ cuya obtención es sencilla. El precio a pagar es que hay que invertir una de ellas y efectuar una multiplicación entre dos matrices.