

Exercicis

1. Calculeu, usant integral triple, el volum de l'el·lipsoide sòlid de semieixos a, b, c positius, que té per equació:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

2. Sigui una forma cilíndrica de formatge de base circular amb radi $r > 0$ i altura $h > 0$. Es talla un tros S , fent dos talls verticals des del centre de la forma cap a la vora, que formen angle α entre si. Calculeu el volum de S .
3. Al problema anterior, suposant que el radi $r = 10$ cm., l'alçada $h = 8$ cm., l'angle $\alpha = \pi/3$ radians, i la densitat del formatge al punt (x, y, z) és;

$$[\delta(x, y, z)] \frac{kg}{cm^3} = [0,9] \left[\frac{kg}{dm^3} \right] \frac{1}{[180]_{cm^3}} \left[\sqrt{x^2 + y^2} + (z^2 - hz + h) \right]_{cm^3}$$

Calcular el pes de S .

4. Converteix a coordenades cilíndriques i avalua les següents integrals
- a)

$$\iiint_S \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$$

on S és el sòlid del primer octant limitat pel pla de coordenades $z = 0$, el pla $z = 4$ i el cilindre $x^2 + y^2 = 25$

b)

$$\iiint_S (x^2 + y^2)^{3/2} \, dV$$

on S és el sòlid limitat a dalt per $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, per sota pel pla XY , i lateralment pel cilindre $x^2 + y^2 = 4$

ESPECIAL:

5. Suposem que cauen meteorits uniformement distribuïts sobre tota la superfície de la Terra, sumant una mitjana anual de $2,2 \times 10^8$ kg, que els meteorits tenen la mateixa densitat que la Terra i que cauen en forma radial (formant un angle de 90 graus amb la superfície de la Terra). Calculeu:
- a) L'augment al radi de la Terra.
 - b) El nou període de rotació que tindria la Terra després de 5 anys.
 - c) El nou període de translació de la Terra després de 3 anys.

Nota: Sabem que la densitat de la Terra, ρ , és 5520 kg/m³, el radi de la Terra, R_{Terra} , és, aproximadament, 6371 Km.

Pista:

La Terra està en creixement constant, a causa de la caiguda de meteorits, per la qual cosa el seu període de rotació varia. Per la manera com aquests meteorits arriben no existeix un canvi en el moment angular de la Terra, per la qual cosa es poden igualar el seu moment angular inicial i final (Llei de conservació del moment angular), on el moment angular es relaciona amb el moment d'inèrcia i velocitat angular.

Per calcular el moment d'inèrcia de la Terra usem l'equació del moment d'inèrcia en forma integral, on dm és igual a l'equació de densitat; després se substitueix i es genera una integral de volum. Per facilitar els càlculs, la Terra és considerada una esfera a la qual s'efectua un canvi de coordenades per tenir una integral triple.

Substituïm el resultat del moment d'inèrcia en l'equació de la llei de conservació del moment angular, amb la qual cosa s'obté una equació de la qual es pot extreure el període de rotació final. Al final, es substitueixen els valors i es considera l'increment de radi de la Terra com a negligible.