Exercicis integral de línia

1. Avalueu les integrals de línia:

$$a)\ f(x,y,z) = x\cos(z)\,, \qquad \boldsymbol{c}: t \mapsto t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}, \qquad t \in [0,1]$$
$$b)\ f(x,y,z) = \frac{x+y}{y+z}, \qquad \boldsymbol{c}: t \mapsto \left(t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t\right), \qquad t \in [1,2]$$

2. Demostrar que la integral de línia de $f(x,y)$ sobre un camí donat per coordenades polars $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, és:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos(\theta)\ , r\sin(\theta)) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

i calculeu després la longitud del camí:

$$r = 1 + \cos(\theta)\,, \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

3. Galileu va contemplar la següent pregunta: Si una perla que cau sota la influència de la gravetat des d'un punt A fins a un punt B al llarg d'una corba, ho fa en el **menor temps possible** si aquesta corba és un arc circular? Per a qualsevol camí donat C, el temps de trànsit T és una integral de línia:

$$T = \int_C \frac{ds}{v}$$

on la velocitat de la perla és

$$v = \sqrt{2g(L-h)}$$

amb g la constant gravitatòria, *L* l'alçada del punt de sortida *A*, i h l'alçada respecte el punt *B*. Suposem que l'objecte surt des de *A* amb velocitat zero, i ue no hi ha fregament. El 1697, Johann Bernoulli va desafiar el món matemàtic a trobar el camí pel que la perla rodaria d'A a B **en el menor temps**.

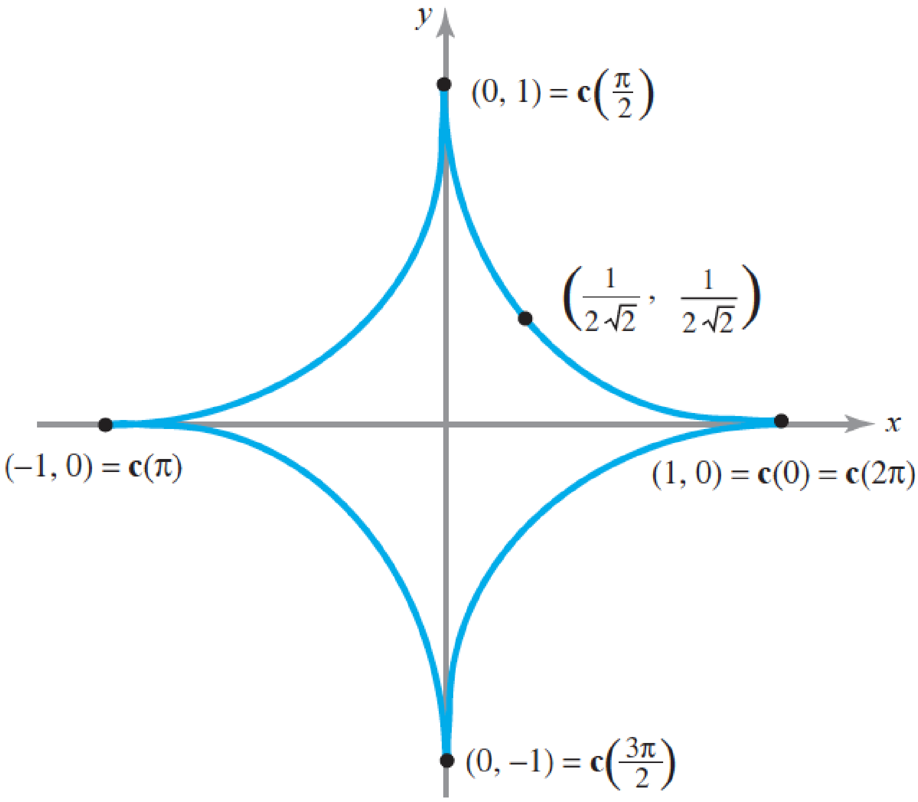
Aquesta solució determinarà si les consideracions de Galileu eren correctes. Els punts de sortida i arribada són $A(0,1)$ i $B(1,0)$ respectivament.

(a) Calculeu T per a la trajectòria recta $y = 1 - x$.
(b) Escriu una fórmula per a T per a la trajectòria circular de Galileu, donada per $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

La solució general d'aquest problema per a camins arbitraris, anomenat problema de la determinació de la corba braquistòcrona, requereix utilitzar Càlcul Variacional, que ja veureu en altres assignatures. La solució són les cicloides.

4. Avaluar la integral de línia on $\boldsymbol{F}(x,y,z) = y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ i el camí $\boldsymbol{c}$ està definit per $\boldsymbol{c}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

5. La imatge del camí $t \to (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ en el pla es mostra a la figura. Avaluar la integral del camp vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ al voltant d'aquesta corba.



6. Sigui $\boldsymbol{F} = (z^3 + 2xy)\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + 3xz^2\boldsymbol{k}$. Demostra que la integral de $\boldsymbol{F}$ al voltant del perímetre del quadrat unitari amb vèrtexs $(\pm 1, \pm 1)$ és zero.

7. Considereu el camp de força gravitatòria (amb $G = m = M = 1$) definit [per a punts $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$] per

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

Demostreu que el treball realitzat per la força gravitatòria quan la partícula es mou de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) al llarg de qualsevol el camí depèn només dels radis:

$$R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad \text{i} \quad R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$