ESPAI DUAL

Donats dos espais vectorials E, F sobre un cos K, anomenem $\boldsymbol{Hom_K(E,F)}$ **o** $\boldsymbol{\mathcal{L}_K(E,F)}$ **al conjunt de les aplicacions lineals de $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{F}$**. (Si no hi ha confusió sobre el cos K se sol simplificar a notació a $Hom(E,F)$ o $\mathcal{L}(E,F)$). Si $E = F$, com que els elements seran endomorfismes d'E es representa per $End(E)$.

Quan en aquest conjunt definim (donats $x \in E, \lambda \in K$) la suma d'aplicacions ($(f+g)(x) \equiv f(x) + g(x)$) i el producte per escalars ($(\lambda f)(x) \equiv \lambda f(x)$) **aquest conjunt té estructura de $\boldsymbol{K}$-espai vectorial:** ($\boldsymbol{\mathcal{L}_K(E,F)}, +, \cdot$). En el cas en que E, F siguin de dimensió finita, es pot veure que $dim(\mathcal{L}(E,F)) = dim(E)dim(F)$.

DEFINICIONS: Forma lineal; espai dual; espai bidual

En el cas en que $\boldsymbol{F = K}$, a les aplicacions lineals se les anomena **formes lineals definides sobre $\boldsymbol{E}$** (s'acostumen a representar per lletres gregues φ, ψ) i a **l'espai $\boldsymbol{\mathcal{L}(E,K)}$ se l'anomena espai dual d'$\boldsymbol{E}$ i se'l representa per $\boldsymbol{E^*}$**. A l'espai dual del dual se l'anomena espai bidual d'E i se'l representa per E^{**}.

DEFINICIÓ: Base dual d'una base d'$\boldsymbol{E}$

Sigui $dim(E) \equiv n$, i donem una base d'E, $B \equiv \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Definim n formes lineals $B^* \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, per tal com actuen sobre els elements de la base B:

$$\varphi_i(v_j) \equiv \delta_{ij}$$

on és la *delta de Kronecker*, el símbol que val 1 si $i = j$ i val 0 si $i \neq j$. Anem a demostrar que B^* és una base d'E^* (que anomenarem base dual de B). N'hi haurà prou (donada la dimensió de l'espai), demostrant que les φ_i són linealment independents. Fem una combinació lineal d'elles i la igualem a 0:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i\,(v_j) = 0\ \forall v_j \Rightarrow \alpha_j = 0\ \forall j$$

TEOREMA: CANVI DE BASE DUAL

Siguin $B \equiv \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, B' \equiv \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ dues bases d'un K-espai vectorial, E; siguin $B^* \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, $B'^* \equiv \{\varphi'_1, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_1\}$, les seves respectives bases duals. Si $A \equiv \left(a_{ij}\right)$ es la matriu de canvi de base de B a B', aleshores A^T és la matriu de canvi de base de B'^* a B^*.

Demostració

En primer lloc veurem com s'expressen un vector d'E i un d'E^* en termes de les bases B i B^* respectivament. Siguin $v \in E, \varphi \in E^*$: aleshores $v = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\,(v)\, v_i$, $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi(v_j)\, \varphi_j$. Efectivament:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Rightarrow \varphi_j(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_j(v_i) = \alpha_j \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v) v_i \quad (1)$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi_j \Rightarrow \varphi(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi_j\,(v_i) = \beta_i \Rightarrow \varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi(v_j)\varphi_j \quad (2)$$

Anem ara amb el canvi de base: per la definició de matriu del canvi de base tenim que

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

Per altra banda hem vist en (1) que si $v \in E$ aleshores

$$v = \sum_{j=1}^{n} \varphi'_j(v) v'_j = \sum_{j=1}^{n} \varphi'_j(v) (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi'_j(v) a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \varphi'_j(v)) v_i$$

i igualant en (1) tenim que

$$\varphi_i(v) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \varphi'_j(v)$$

Tenint en compte que aquesta expressió és vàlida per qualsevol $v \in E$, tindrem que

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \varphi'_j \Longrightarrow \varphi_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, \varphi'_i$$

d'on deduïm que (a_{ji}) (que és la transposada de (a_{ij})) és la matriu de canvi de base de de B'^* a B^*.

<u>TEOREMA DE REFLEXIVITAT</u>

Sigui E un espai vectorial de dimensió finita; aleshores E^{**} és isomorf a E

<u>Demostració</u>

En primer lloc veiem que si $v \in E$ és un vector diferent del 0, aleshores podem assegurar que $\exists \varphi \in E^*$ tal que $\varphi(v) \neq 0$. Efectivament, pel Teorema d'Ampliació de la base, podrem construir una base B d'E que contingui v com a primer vector: $B \equiv \{v, v_2, \dots, v_n\}$. La seva base dual $B^* \equiv \{\varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, per definició tindrà com a primera forma lineal φ tal que $\varphi(v) = 1 \neq 0$.

Considerem ara l'espai bidual d'E, E^{**}. Definirem una aplicació entre els dos que demostrarem que serà lineal i bijectiva, és a dir un isomorfisme. És la següent:

$$\Phi : E \longrightarrow E^{**}$$
$$v \longrightarrow \Phi(v) \equiv \Phi_v$$

on Φ_v és un element del bidual d'E, és a dir una forma lineal definida sobre E^*; i aquesta forma lineal la definim:

$$\Phi_v : E^* \longrightarrow K$$
$$\varphi \longrightarrow \Phi_v(\varphi) \equiv \varphi(v)$$

Veiem primer que Φ_v és una forma lineal (és una forma donat que envia vectors de l'espai dual a K. A més

$$\Phi_v(\alpha\varphi + \beta\psi) \equiv (\alpha\varphi + \beta\psi)(v) = \alpha\varphi(v) + \beta\psi(v) = \alpha\, \Phi_v(\varphi) + \beta\Phi_v(\psi).$$

Anem a veure ara que Φ és lineal, és a dir que

$$\Phi(\gamma v + \delta w) = \gamma\Phi(v) + \delta\Phi(w) = \gamma\Phi_{\mathrm{v}} + \delta\Phi_{\mathrm{w}}$$

Tenim per definició que

$$\Phi(\gamma v + \delta w) \equiv \Phi_{\gamma v + \delta w} \Longrightarrow \Phi(\gamma v + \delta w)(\varphi) = \Phi_{\gamma v + \delta w}(\varphi) = \varphi(\gamma v + \delta w)$$
$$= \gamma\varphi(v) + \delta\varphi(w) = \gamma\Phi_v(\varphi) + \delta\Phi_w(\varphi) = (\gamma\Phi_v + \delta\Phi_w)(\varphi)$$

i per tant

$$\Phi(\gamma v + \delta w) = \gamma \Phi_{\mathrm{v}} + \delta \Phi_{\mathrm{w}} \qquad \boldsymbol{QED}$$

Finalment veurem que l'aplicació Φ és injectiva (amb la qual cosa serà bijectiva donat que els dos espais tenen la mateixa dimensió. Cal doncs demostrar que $Ker\ \Phi = \{0\}$. Efectivament, $v \in Ker\ \Phi \Longrightarrow\ \Phi(v) = 0 \Longrightarrow\ \Phi_v = 0 \Longrightarrow\ \Phi_v(\varphi) = 0\ \forall \varphi \in E^* \Longrightarrow \varphi(v) = 0\ \forall \varphi \in E^*$. Però al començament de la demostració del Teorema hem vist que si $v \neq 0$ ha d'existir algun $\varphi \in E^*$: $\varphi(v) \neq 0$. Per tant v ha de 0.

Així doncs existeix una identificació natural entre els vectors d'E i les formes lineals d'E^{**}