Equacions de Maxwell en funció dels potencials electromagnètics: φ i $\vec{A}$

Tenim les 4 equacions de Maxwell en funció dels camps ($\vec{E}$ i $\vec{B}$) en el buit:

M1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

M2) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$

M3) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

M4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$

A partir de la M**3)** $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, i tenint en compte la propietat matemàtica de que si un camp vectorial te divergència zero vol dir que es pot escriure com a rotacional d'un altre camp vectorial i podrem posar $\vec{B}$ com :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1)$$

On $\vec{A}$ és l'anomenat *potencial vector* del camp electromagnètic.

En realitat $\vec{A}$ no és únic, si a aquest potencial vector li sumem qualsevol gradient d'un escalar, és a dir: $\vec{A} + \vec{\nabla}(\theta)$, llavors (1) es complirà igualment ja que el rotacional d'un gradient és sempre zero. Per tant, tenim certs graus de llibertat alhora d'escollir $\vec{A}$ i això es diu llibertat de gauge. També escollirem l'escalar θ de tal manera que no depengui explícitament del temps, és a dir: $\theta = f(x, y, z)$

Substituint (1) a les equacions de Maxwell, aquestes es converteixen en:

M1') $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

M2') $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{A}$

M3') $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0\,,\ \text{és òbvia d'entrada, no cal considerar} - \text{la}$

M4') $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$

A partir de M2') obtenim:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

I com que el rotacional del parèntesi és nul, llavors matemàticament també podem dir que aquest es pot escriure com el gradient d'un cert camp escalar φ :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}(\varphi) \qquad (2)$$

A partir d'aquí M2') ja no cal escriure-la ja que queda inclosa en la relació (2)

Substituïm: $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}(\varphi)$ de (2) a M1') i obtenim (P1):

(P1) $\underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \vec{\nabla}^2(\varphi)}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Substituint també $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}(\varphi)$ a M4) i desenvolupant el doble rotacional de M4') i obtenim (P2):

(P2) $\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}}_{\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,(\vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{A})} = \mu_0\vec{\mathrm{J}} - \underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{1/c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{1/c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}(\varphi)$

És a dir finalment:

P1) $\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}^2(\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

P2) $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} + \vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}(\varphi) - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -\mu_0\vec{\mathrm{J}}$

En funció del potencials electromagnètics: $\vec{A}$ i φ . De fet les altres dues equacions M2) i M3) estan amagades dins de les relacions els camps amb els potencials (1) i (2) que recordem tot seguit:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\,\mathrm{x}\,\vec{A} \qquad (1)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}(\varphi) \qquad (2)$$

Les formes generals són P1) i P2) però com que tenim llibertat de gauge, podem establir més relacions pel que fa als potencials. Considerarem dos tipus de gauge o condicions:

A) ***Gauge de Coulomb***: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \qquad (3)$

En aquest cas P1) i P2) es converteixen en:

$(\mathbf{M0}_c) \qquad \vec{\nabla}^2(\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ que és la famosa equació de Poisson, la qual permet determinar el potencial escalar a partir de les distribucions de càrrega a cada instant. Típica equació usada pels problemes d'electrostàtica, en la que les distribucions de càrrega no varien en el temps: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ (a vegades també s'hi inclou per aproximació els casos en que varien molt lentament, que és el que s'anomena règim "quasiestàtic" molt usat en corrents alterns de baixa freqüència).

$$(\mathbf{Mi}_c) \qquad -\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

En resum:

$$(\mathbf{M0}_c) \quad \vec{\nabla}^2(\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(\mathbf{Mi}_c) \quad \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{\mathbf{j}}$$

B) ***Gauge de Lorentz***: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad (4)$

En aquest cas:

$$(\mathbf{M0}_L) \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2(\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{o bé:} \quad \vec{\nabla}^2(\varphi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(\mathbf{Mi}_L) \quad -\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

En resum:

$$(\mathbf{M0}_L) \quad \vec{\nabla}^2(\varphi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

$$(\mathbf{Mi}_L) \quad \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\mathbf{j}} \quad (6)$$

Com veiem, en el gauge de Lorentz, les dues equacions adopten la forma d'equacions d'ones si $\rho = \vec{\mathbf{j}} = 0$, per tant seran equacions de propagació pels potencials electromagnètics, com ho eren les dels camps. Fixem-nos que pel cas electrostàtic: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

Les equacions ($M0_L$) i (Mi_L) es redueixen a les del gauge de Coulomb ($M0_C$) i (Mi_C).

Formulació en quadrivectors (formulació relativista especial).

De fet fins i tot (M0) i (Mi) es podrien unificar a una sola equació si definim un nou concepte que són els *quadrivectors*. Els quadrivectors (four-vectors, en anglès) són vectors de 4 dimensions espacio-temporals, tal com es fa en relativitat especial:

- La primera que anomenarem 0-èssima, és l'anomenada *component temporal* (és el la típica del temps, però modificada per la velocitat de la llum c)
- Les altre tres, que seran les i=1,2,3, són les *components espacials* (les típiques de l'espai tridimensional)

Posem quatre exemples de quadrivector usats en el nostre estudi:

- El primer és el *quadrivector del potencial generalitzat*:

$$\mathbf{A}_\mu \equiv \left(-\frac{\varphi}{c}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3\right)$$

On $\frac{\varphi}{c} \equiv \mathrm{A}_0$, $\mathrm{A}_1 \equiv \mathrm{A}_x$, $\mathrm{A}_2 \equiv \mathrm{A}_y$, $\mathrm{A}_3 \equiv \mathrm{A}_z$

i totes les 4 components tenen les mateixes unitats en efecte:

$$T = tesla = [\vec{\mathrm{B}}] = [\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{A}}] = \frac{[\vec{\mathrm{A}}]}{m} \rightarrow [\vec{\mathrm{A}}] = T \cdot m = \frac{N}{Am} \cdot m = \frac{N}{A}$$

$$\left[\frac{\varphi}{c}\right] = \frac{V}{m/s} = \frac{J/C}{m/s} = \frac{J}{m}\frac{s}{C} = \frac{N}{A}$$

- El segon és el *quadrivector posició-temps*:

$$\mathbf{r}_\mu \equiv (-ct, \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3)$$

On: $r_0 \equiv -ct$, $r_1 \equiv x$, $r_2 \equiv y$, $r_3 \equiv z$, amb dimensions de [m] totes elles

- El tercer és el *quadrivector nabla generalitzat*:

$$\boldsymbol{\partial}_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_2}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_3}\right)$$

On: $\partial_0 \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_1} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_2} = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_3} = \frac{\partial}{\partial z}$, amb dimensions de [m^{-1}] totes elles. Aquest quadrivector fa les derivades respecte les components del quadrivector posició-temps

- El quart el *quadrivector càrrega-corrent*:

$$\mathbf{j}_\mu \equiv (-c\rho, \mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \mathrm{j}_3)$$

On: $\mathrm{j}_0 \equiv c\rho$, $\mathrm{j}_1 \equiv \mathrm{j}_x$, $\mathrm{j}_2 \equiv \mathrm{j}_y$, $\mathrm{j}_3 \equiv \mathrm{j}_z$, amb dimensions de [A/m^2] totes

Índexs covariants i contravariants en quadrivectors. Mètrica de Minkowski. Invariància relativista.

Els índexs dels quadrivectors s'escriuen usant lletres gregues com μ, ν, α
Si $\mu = 0$ parlem de la component temporal.

Si $\mu = i = (1,2,3)$ parlem de les 3 components espacials.

En els quadrivectors no és el mateix que els índexs estiguin a baix (contravariants) o a dalt (covariants).

Es passa dels índexs a dalt als de baix i viceversa, multiplicant per la Mètrica de Minkowski:

$$\mathbb{M} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que és una matriu 4x4 que s'usa en relativitat especial, per a substituir a la mètrica

euclidiana o matriu identitat : $\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que és 3x3

Així, per tant multiplicant per $\mathbb{M}$ es pugen els índexs: $A^{\mu} = \mathbb{M}^{\mu,\nu} A_{\nu}$

O sigui: $\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \left| \begin{matrix} \textit{i tal com es} \\ \textit{pot veure} \end{matrix} \right| = \begin{pmatrix} -A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$

És a dir: només l'índex temporal: 0, canvia el signe en pujar (o baixar). La resta, els índexs espacials: i=1,2,3 es queden igual:

$$A^0 = -A_0 \quad ; \quad A^i = A_i$$

Quina gràcia te això? Doncs ni més ni menys que:

Qualsevol expressió amb una contracció entre índexs repetits, els uns a dalt i els altres a baix, és invariant relativista especial.

En efecte, considerem una contracció entre dos quadrivectors: $\mathbf{C}_{\mu}$ i $\mathbf{D}^{\mu}$

$$C_{\mu} D^{\mu} = (C_0, C_1, C_2, C_3) \circ \begin{pmatrix} D^0 \\ D^1 \\ D^2 \\ D^3 \end{pmatrix} = \left| \begin{matrix} \textit{baixant els índexs} \\ \textit{de D amb la mètrica} \end{matrix} \right| = C_{\mu} \mathbb{M}^{\mu,\nu} D_{\nu}$$

$$= (C_0, C_1, C_2, C_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$= (C_0, C_1, C_2, C_3) \begin{pmatrix} -D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = -C_0 D_0 + C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3 D_3$$

Considerem ara un mateix quadrivector **C'** vist des d'un nou sistema de referència inercial amb velocitat $\vec{v} = v\hat{x}$ respecte el primer. Es pot posar en funció del quadrivector en el sistema anterior **C**, com:

$$\begin{pmatrix} C_0{}' \\ C_1{}' \\ C_2{}' \\ C_3{}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_{v\hat{x}}} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

on $\Lambda_{v\hat{x}}$ és la transformació de Lorentz corresponent a la velocitat $\vec{v} = v\hat{x}$
amb: $\beta = \frac{v}{c}$ i $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Així, doncs la mateixa contracció en el nou sistema transformat és ara:

$$C'_\mu D^{\mu\prime} = (C_0{}', C_1{}', C_2{}', C_3{}') \circ \begin{pmatrix} D^{0\prime} \\ D^{1\prime} \\ D^{2\prime} \\ D^{3\prime} \end{pmatrix} =$$

$$= (C_0{}', C_1{}', C_2{}', C_3{}') \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0{}' \\ D_1{}' \\ D_2{}' \\ D_3{}' \end{pmatrix} = \left| \begin{matrix} usant\ les\ transform. \\ de\ Lorentz\ per\ a\ posar \\ C'\ i\ D'en\ funció\ de\ C\ i\ D \end{matrix} \right| =$$

$$= (C_0, C_1, C_2, C_3) \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

Però, es pot comprovar algebraicament que es aquest producte de 3 matrius dona la mètrica de Minkowski de nou:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$C'_\mu D^{\mu\prime} = C_\mu\ D^\mu$$

I la contracció **és invariant** relativista.

Que passa amb les equacions de l'electromagnetisme en quadrivectors?

Ara apliquem això mateix als nostres 4 quadrivectors de l'electromagnetisme

Recordem-los:

$$\mathbf{A}_\mu \equiv \left(-\frac{\varphi}{c}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3\right) \quad ; \quad \mathbf{A}^\mu \equiv \left(\frac{\varphi}{c}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3\right)$$

$$\mathbf{r}_\mu \equiv (-ct, \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3) \quad ; \quad \boldsymbol{r}^\mu \equiv (ct, \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3) \;;$$

$$\boldsymbol{\partial}_\mu \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_3}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_3}\right) \quad ; \quad \boldsymbol{\partial}^\mu \equiv \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_3}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_3}\right)$$

$$\mathbf{j}_\mu \equiv (-c\rho, \mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \mathrm{j}_3) \quad ; \quad \mathbf{j}^\mu \equiv (c\rho, \mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \mathrm{j}_3)$$

Definim també el tensor invariant següent:

$$F^{\mu,\nu} \equiv \partial^\mu \mathrm{A}^\nu - \partial^\nu \mathrm{A}^\mu$$

que és antisimètric per definició: $F^{\nu,\mu} = -F^{\mu,\nu}$ i també: $F^{0,0} = F^{1,1} = F^{2,2} = F^{3,3} = 0$

I tenint en compte que els camps s'escriuen en funció dels potencials com:

$$\vec{\mathrm{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{A}} \qquad (1) \qquad\qquad \vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t} - \vec{\nabla}(\varphi) \qquad (2)$$

Però si ara calculem explícitament tots els termes de $F^{\mu,\nu} = \partial^\mu \mathrm{A}^\nu - \partial^\nu \mathrm{A}^\mu$ obtenim:

$$F^{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

És a dir aquest tensor $F^{\mu,\nu}$ també representa l'expressió dels camps, a partir dels potencials, i s'anomena per tant: *tensor quadridimensional de camp electromagnètic*

Equació de Maxwell unificada en formulació invariant relativista

Atenció ara, **ve quelcom molt interessant**!. Anem a plantejar la següent contracció:

$\boldsymbol{\partial}_\mu F^{\mu,\nu}$

Calculem-la explícitament:

$$\boldsymbol{\partial}_\mu F^{\mu,\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu\partial^\nu A^\mu = \left|\begin{matrix} separant\ termes\ amb \\ \mu = 0\ i\ termes\ amb\ \mu = i \end{matrix}\right|$$
$$= \partial_0\partial^0 A^\nu + \partial_i\partial^i A^\nu - \partial^\nu\partial_0 A^0 - \partial^\nu\partial_i A^i = \left|\begin{matrix} baixant\ tots\ els \\ índexs\ excepte\ \nu \end{matrix}\right|$$
$$= -\partial_0\,\partial_0 A^\nu + \partial_i\,\partial_i A^\nu + \partial^\nu\partial_0 A_0 - \partial^\nu\partial_i A_i$$

Per $\nu = 0$

$$\boldsymbol{\partial}_\mu F^{\mu,0} = -\partial_0\,\partial_0 A^0 + \partial_i\,\partial_i A^0 + \partial^0\,\partial_0 A_0 - \partial^0\,\partial_i A_i = \left|\begin{matrix} baixant\ els \\ índexs\ zero \end{matrix}\right|$$
$$= +\partial_0\,\partial_0 A_0 - \partial_i\,\partial_i A_0 - \partial_0\,\partial_0 A_0 + \partial_0\,\partial_i A_i = \left|\begin{matrix} anul\cdot lant\ mútua- \\ ment\ els\ dos\ termes \\ oposats\ que\ hi\ ha \end{matrix}\right|$$
$$= -\partial_i\,\partial_i A_0 + \partial_0\,\partial_i A_i = \frac{1}{c}\vec{\nabla}^2(\varphi) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}^2(\varphi) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$$
$$= \left|\begin{matrix} i\ d'acord \\ amb\ (P1) \end{matrix}\right| = \frac{1}{c}\left(-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}(-c\rho) = \mu_0\, j_0 = -\mu_0\, j^0$$

Per $\nu = k$

$$\boldsymbol{\partial}_\mu F^{\mu,k} = -\partial_0\,\partial_0 A^k + \partial_i\,\partial_i A^k + \partial^k\,\partial_0 A_0 - \partial^k\,\partial_i A_i = \left|\begin{matrix} baixant\ els \\ índexs\ k \end{matrix}\right|$$
$$= -\partial_0\,\partial_0 A_k + \partial_i\,\partial_i A_k + \partial_k\,\partial_0 A_0 - \partial_k\,\partial_i A_i$$
$$= \left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}(\varphi) - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\right]_{\boldsymbol{component\ k}} = \left|\begin{matrix} i\ d'acord \\ amb\ (P2) \end{matrix}\right| = -\mu_0\, j_k$$
$$= -\mu_0\, j^k$$

Per tant, finalment veiem, que dir la següent expressió:

$$(\mathbf{M}) \qquad \boldsymbol{\partial}_\mu F^{\mu,\nu} = -\mu_0\, j^\nu$$

Conté alhora les dues equacions de Maxwell en potencials, depenent de quin sigui el valor de l'índex ν

$$(\boldsymbol{P1}) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}^2(\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ , \quad és\ (\boldsymbol{M})\ \ per\ \nu = 0$$

$$(\boldsymbol{P2}) \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} + \vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}(\varphi) - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -\mu_0\vec{j}, \quad és\ (\boldsymbol{M})\ \ per\ \nu = k = 1{,}2{,}3$$

És per això que: $\boxed{(\mathbf{M}\ \ ) \qquad \boldsymbol{\partial}_\mu F^{\mu,\nu} = -\mu_0\, j^\nu}$

És *l'equació de Maxwell unificada* en termes de potencials però escrita en forma quadridimensional. Està també en formulació invariant relativista (en efecte, te una contracció de l'índex, μ, a dalt i baix i els índexs lliures ν estan tots al mateix costat.

Altres equacions invariants

Es deix com a exercici comprovar que les equacions invariants següents (8) i (9) també són certes:

$$\partial_\mu \mathrm{j}^\mu = 0 \quad (8)$$

Aquesta, com es pot comprovar, es redueix a la equació de continuïtat: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

També, per altra banda, l'equació invariant:

$$\partial_\mu \mathrm{A}^\mu = 0 \quad (9)$$

És justament el gauge de Lorentz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{A}} + \frac{\mathbf{1}}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

També es pot veure que (igual com passava al principi del curs) l'equació de continuïtat (8) és redundant amb la equació de Maxwell (M). En efecte, el raonament per a demostrar-ho és molt bàsic dins l'àlgebra quadridimensional:

$$\partial_\nu \mathrm{j}^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu,\nu} = \left| \begin{array}{c} permutant\ els\ 2\ \acute{\imath}ndexs \\ del\ tensor\ i\ tenint\ en \\ compte\ la\ seva\ antisimetria \end{array} \right| = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\nu,\mu}$$

$$= \left| \begin{array}{c} invertint\ l'ordre \\ de\ les\ derivades \end{array} \right| = -\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu,\mu}$$

$$= \left| \begin{array}{c} intercanviem\ els\ noms \\ de\ \mu\ i\ de\ \nu, \quad es\ pot\ fer, ja\ que \\ \mu\ i\ \nu, estan\ contrets\ (son\ muts) \end{array} \right| = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu,\nu} = -\partial_\nu \mathrm{j}^\nu$$

I una cosa que és igual a menys si mateixa només pot ser zero. Per tant, finalment demostrem la afirmació que fa l'equació de continuïtat:

$$\partial_\nu j^\nu = 0$$

És trivialment redundant amb l'equació de Maxwell unificada (M), per si mateixa i sense utilitzar res més.