

Energia d'un sistema de càrregues electrostàtiques. Energia d'un camp elèctric.

Ja sabem que el potencial a qualsevol punt \vec{r} d'una càrrega puntual de valor q_i situada a la coordenada: \vec{r}_i , es calcula amb l'expressió:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (1)$$

Aquesta expressió pressuposa que l'origen de potencial està a l'infinit.

Calculem ara el treball necessari per a construir un sistema de N càrregues puntuals, de valors

$q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N$

situades respectivament a les posicions finals

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N$

aquest treball global s'identificarà amb l'energia potencial electrostàtica total del sistema de càrregues i l'anomenarem U.

Per a fer aquest càlcul suposem que anem col·locant les càrregues que estan "aparcades" a l'infinit (molt lluny de la nostra distribució), una a una, en ordre, des de la q_1 , fins a la q_N portant-les des de l'infinit fins a la seva posició final.

1. Suposem que no tenim cap càrrega de moment, per tant no hi ha camp ni potencial, el trasllat de la primera càrrega q_1 des de l'infinit fins a \vec{r}_1 no suposarà cap treball ja que encara no hi ha ningú que li faci força. Per tant:

$$U_1 = 0$$

2. Ara ja tenim q_1 a \vec{r}_1 , i aquesta crea un potencial al seu voltant de:

$$V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

Si ara portem la q_2 des de l'infinit fins a la seva posició final \vec{r}_2 , l'energia o treball esmerçat serà

$$U_2 = q_2 V_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

3. Ara ja tenim q_1 a \vec{r}_1 i q_2 a \vec{r}_2 i aquestes dues creen un potencial a l'espai de:

$$V_{12}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}$$

Si ara portem la q_3 des de l'infinit fins a la seva posició final \vec{r}_3 , l'energia o treball esmerçat serà

$$U_3 = q_3 V_{12}(\vec{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

4. Ara ja tenim q_1 a \vec{r}_1 , q_2 a \vec{r}_2 i q_3 a \vec{r}_3 i aquestes tres creen un potencial a l'espai de:

$$V_{123}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{|\vec{r} - \vec{r}_3|}$$

Si ara portem la q_4 des de l'infinit fins a la seva posició final \vec{r}_4 , l'energia o treball esmerçat serà

$$U_4 = q_4 V_{123}(\vec{r}_4) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4 q_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4 q_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4 q_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|}$$

.

.

.

i. Ara ja tenim q_1 a \vec{r}_1 , q_2 a \vec{r}_2 , q_3 a \vec{r}_3 q_{i-1} a \vec{r}_{i-1} i aquestes (i-1) creen un potencial a l'espai de:

$$V_{123...(i-1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{|\vec{r} - \vec{r}_3|} + \dots \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{i-1}}{|\vec{r} - \vec{r}_{i-1}|}$$

Si ara portem la q_i des de l'infinit fins a la seva posició final \vec{r}_i , l'energia o treball esmerçat serà

$$U_i = q_i V_{123...(i-1)}(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_3}{|\vec{r}_i - \vec{r}_3|} + \dots \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_{i-1}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|}$$

.

.

.

N. Ara ja tenim q_1 a \vec{r}_1 , q_2 a \vec{r}_2 , q_3 a \vec{r}_3 q_{N-1} a \vec{r}_{N-1} i aquestes (N-1) creen un potencial a l'espai de:

$$V_{123...(N-1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{|\vec{r} - \vec{r}_3|} + \dots \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{N-1}}{|\vec{r} - \vec{r}_{N-1}|}$$

Si ara portem la q_N (l'última) des de l'infinit fins a la seva posició final \vec{r}_N , l'energia o treball esmerçat serà

$$U_N = q_N V_{123...(N-1)}(\vec{r}_N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_N q_1}{|\vec{r}_N - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_N q_2}{|\vec{r}_N - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_N q_3}{|\vec{r}_N - \vec{r}_3|} + \dots \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_N q_{N-1}}{|\vec{r}_N - \vec{r}_{N-1}|}$$

Amb això ja donem per acabada la construcció del sistema final. Calculem quanta energia U hem esmerçat en total. Aquesta serà la suma de les energies de cadascuna de les N etapes anteriors.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots U_i + \dots + U_N = \sum_{i=1}^N U_i$$

Substituint-hi les expressions trobades per a cada U_i :

$$U = \sum_{i=1}^N U_i = \sum_{i=1}^N q_i \cdot V_{123...(i-1)}(\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (2)$$

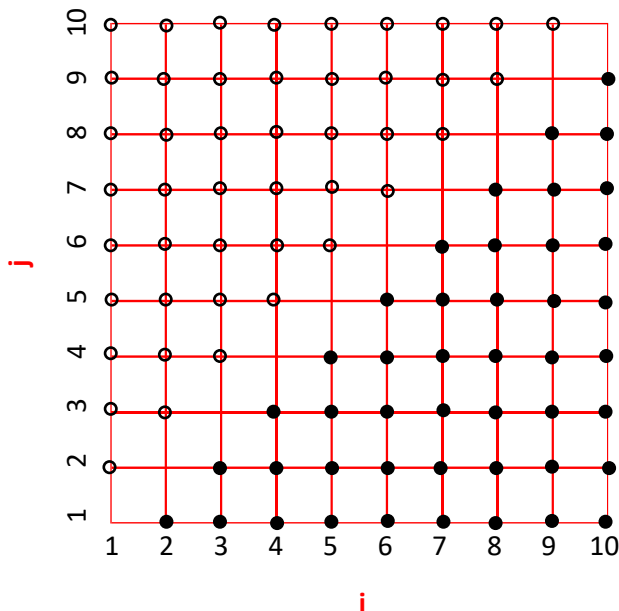
Podríem anomenar també els termes parcials d'energia U_{ij} com:

$$U_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

I considerar l'energia com la suma doble d'aquests termes:

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} U_{i,j}$$

Fixem-nos que el doble sumatori conté només els termes del triangle inferior d'un diagrama de punts bidimensional: $i > j$ ja que com s'ha vist i resulta lògic, la càrrega i-èsima només nota el potencial de totes les anteriors $j=1, \dots, i-1$; $j < i$. El sumatori tampoc conté els termes de la diagonal, $U_{i,i}$, ja que la càrrega i-èsima no es pot fer energia a si mateixa, bàsicament perquè no hi era quan ella mateixa arriba.



En el diagrama de l'esquerra es considera un cas on $N=10$ (deu càrregues puntuals), i veiem els termes inclosos a la suma final (cadascú d'ells amb índexos (i,j)) com a punts emplenats en negre. En tots ells $j < i$.

El que passa és que podem fer el truc d'estendre la suma tots els termes, tant per $j < i$, com per $j > i$, (és a dir incloure també els punts no emplenats del triangle superior del diagrama).

Això és possible ja que, en intercanviar índexs i per j , i viceversa. El terme

$$U_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Es canvia per:

$$U_{j,i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

Que és idèntic al $U_{i,j}$, és a dir: $U_{i,j} = U_{j,i}$, ja que el producte de càrregues ho és: $q_i q_j = q_j q_i$; i l'invers del mòdul de la diferència de posicions també ho és: $\frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$

Per tant podem estendre la suma de (2) per a tots els casos de i i de j , (excepte quan $i=j$, la diagonal), i sabent que si ho fem estem comptant el doble cada terme, per la qual cosa cal dividir per 2 per a avaluar correctament l'energia del sistema.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (3)$$

Aquesta és una expressió molt usada i correcte per a calcular l'energia del sistema de càrregues.

L'expressió (3) és independent de l'ordre seguit en la col·locació de les N càrregues, cosa que ha de ser així per pura coherència.

Una altra forma de posar aquesta expressió és:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i) \quad (4)$$

On s'ha identificat:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Com el potencial a la posició \vec{r}_i de la càrrega q_i , degut a la resta de càrregues puntuals (totes excepte, ella mateixa, la q_i), per tant en definitiva és el potencial del sistema a \vec{r}_i : $V(\vec{r}_i)$.

L'expressió (4) diu que per a trobar l'energia d'un sistema de càrregues s'ha de sumar els productes d'aquestes càrregues pels potencials d'allà on estan, **i tot això dividir-ho per 2!** Aquest factor $\frac{1}{2}$ és degut a la història, és a dir que les càrregues han anat entrant una darrera l'altra i que mai s'ha construït un sistema posant de cop totes les càrregues al final.

L'expressió (4) es pot generalitzar a distribucions contínues de càrrega, simplement canviant les q_i per diferencials de càrrega $dq = \rho(\vec{r}') \cdot dv$ per a cada diferencial de volum dv i coherentment canviant el sumatori per una integral:

$$U = \frac{1}{2} \int_V V(\vec{r}') \rho(\vec{r}') dv \quad (5)$$

Essent V tot el volum que conté alguna càrrega. En general V ha de ser tot l'espai \mathbb{R}^3 , ja que hi poden haver càrregues a qualsevol lloc.

Podem seguir manipulant aquesta expressió:

$$U = \frac{1}{2} \int_V V(\vec{r}') \rho(\vec{r}') dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V V(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{E}(\vec{r}') dv$$

On hem usat el teorema de Gauss en versió diferencial: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$

Seguint en la manipulació de l'expressió, i tenint en compte ara una integració per parts, des de l'operador nabla:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V V(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{E}(\vec{r}') dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot (V(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}')) dv - \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \vec{\nabla}_{\vec{r}'} (V(\vec{r}')) \cdot \vec{E}(\vec{r}') \cdot dv$$

El primer terme el transformem en una integral de flux per mitjà del teorema de la divergència, i en el segon usem la relació diferencial entre el camp i el potencial: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}(V(\vec{r}))$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S V(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') d\vec{S} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{E}(\vec{r}') \cdot dv$$

Quan el primer terme de la integral de flux: $\frac{\epsilon_0}{2} \oint_S V(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') d\vec{S}$, hem de tenir en compte que si, com hem dit abans V és tot l'espai \mathbb{R}^3 , llavors el seu contorn S , és una superfície situada a l'infinit. Donada qualsevol càrrega ja sabem que el potencial cau a raó inversa de la distància i el camp a raó de la inversa de la distància al quadrat, per tant el producte, $V(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}')$, de l'integrand cau a raó inversa de la distància al cub. Per altra banda la superfície d'integració, creix a raó de la distància al quadrat. Amb tot això la integral de flux anterior, decreix netament amb l'invers a la distància, si aquesta distància la fem tendir a l'infinit, llavors la integral anterior tendeix simplement a zero i la podem negligir. Amb tot això, finalment, l'energia del sistema s'escriu per mitjà de la següent integral de volum:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{E}(\vec{r}') \cdot dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\vec{E}(\vec{r}')|^2 \cdot dv \quad (6)$$

La forma de l'equació (6) suggereix que l'integrand complert, es pugui interpretar com la densitat d'energia $u(\vec{r})$ a cada punt \vec{r}

$$u(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{r})|^2 \quad (7)$$

És a dir, el propi camp elèctric ja té una energia, amb densitat volúmica proporcional al mòdul al quadrat d'aquest camp a cada punt.