Continuïtat

Àlex Arenas, Sergio Gómez

Universitat Rovira i Virgili, Tarragona

Continuïtat

- Definicions
  - Funció contínua, discontinuïtats
- Propietats
  - Aritmètiques, composició, monotonia, funció inversa
- Teoremes
  - Bolzano, valor mig, Weierstrass (valors extrems)

- Funcions contínues
  - Definició
    - Sigui $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real definida en un domini A
    - f és una funció contínua en un punt $a \in A$ si es compleix

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

    - Equivalentment, f és una funció contínua en un punt $a \in A$ si es compleix

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in A \text{ amb } |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Funcions contínues

Definició

- Sigui $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció real de variable real definida en un domini A

- f és una funció contínua en un punt $a \in A$ si es compleix

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

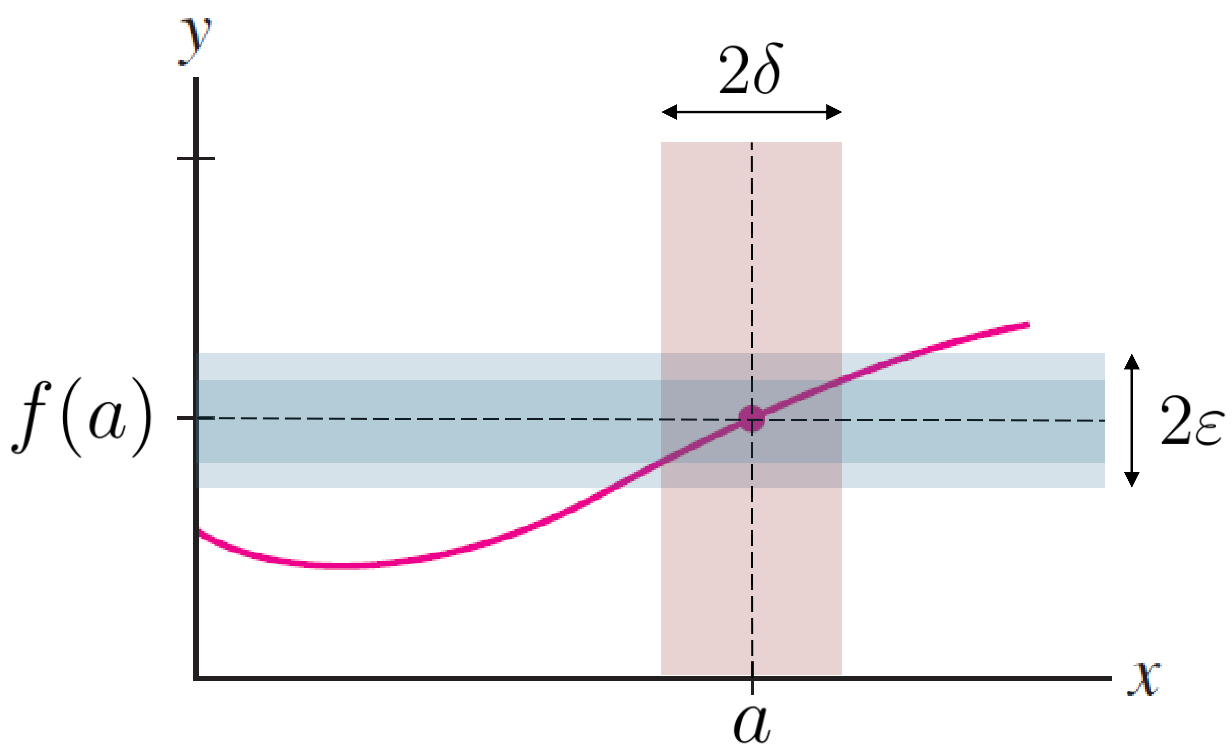
- Equivalentment, f és una funció contínua en un punt $a \in A$ si es compleix

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in A \text{ amb } |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

- També es pot escriure com

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in A \cap (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

- Funcions contínues
  - Definició



$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in A \cap (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

- Funcions contínues
  - Observació
    - La diferència entre la definició de límit i la de continuïtat en un punt està en què, per a la definició de límit es demana

$$0 < |x - a| < \delta$$

mentre que per la definició de continuïtat en un punt és

$$|x - a| < \delta$$

L'única diferència és que en la primera el punt a està exclòs

Definicions

- f és funció contínua en A si és contínua $\forall a \in A$

- f és contínua per la dreta en $a \in A$ si es compleix

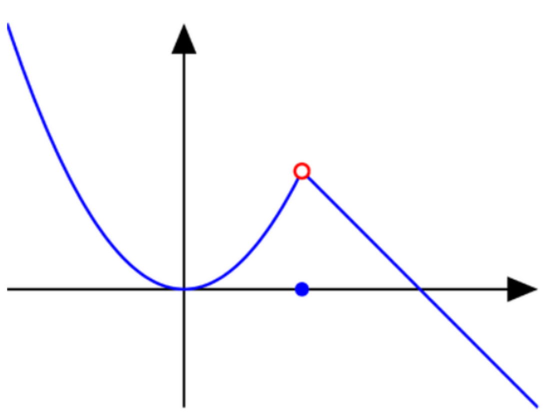
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

- f és contínua per l'esquerra en $a \in A$ si es compleix

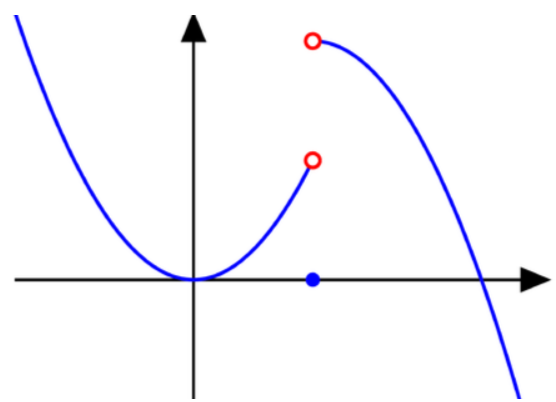
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Tipus de discontinuïtats

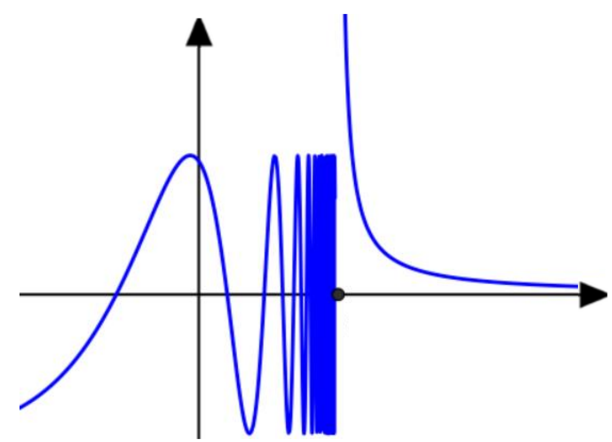
- Evitable: existeix el límit L però $f(a)$ no existeix o $f(a) \neq L$
- De salt: els límits laterals existeixen però són diferents
- Essencial: almenys un límit lateral no existeix o és infinit



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x < 1 \\ 0 & \text{for } x = 1 \\ 2 - x & \text{for } x > 1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x < 1 \\ 0 & \text{for } x = 1 \\ 2 - (x-1)^2 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{5}{x-1} & \text{for } x < 1 \\ 0 & \text{for } x = 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

- Propietats aritmètiques
  - Si $a \in A$ és un punt aïllat, aleshores f és contínua en a
  - Si $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són funcions contínues en $a \in A$, aleshores les funcions
    - λf, amb $\lambda \in \mathbb{R}$
    - $f + g$
    - $f\,g$

    són també contínues en a.

    Si, a més, $g(a) \neq 0$, també és contínua en a la funció
    - $\frac{f}{g}$

Propietats de composició

- Siguin $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g: B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dues funcions tals que $f(A) \subseteq B$

- Si f és contínua en $a \in A$ i g és contínua en $f(a) \in B$, aleshores la composició $g \circ f$ és contínua en a

- Si f és contínua en A i g és contínua en $f(A) \subseteq B$, aleshores la composició $g \circ f$ és contínua en A

Demostracions

- Les demostracions de continuïtat per a les propietats aritmètiques són directes gràcies a les propietats equivalents dels límits

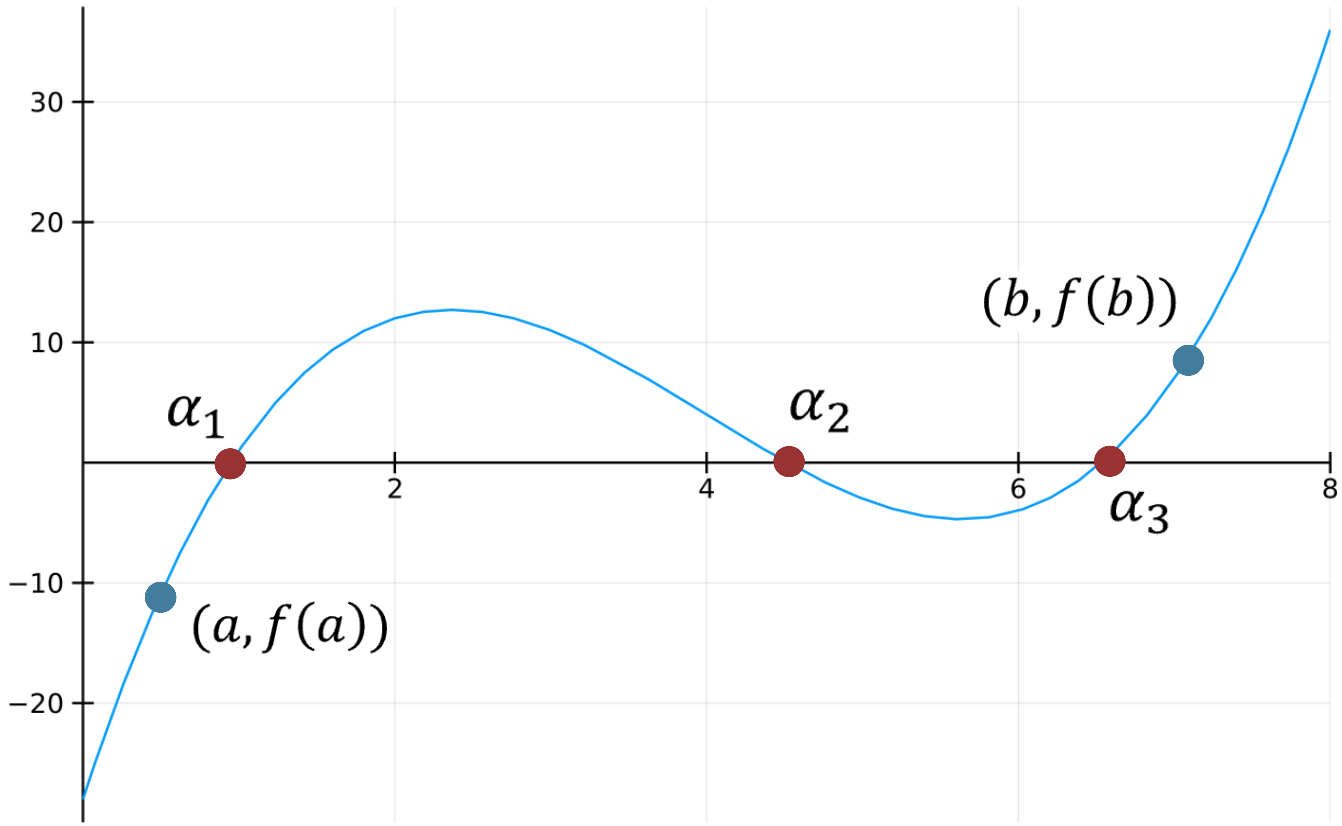
- Per a la composició de funcions
  - Com g contínua en b $= f(a)$, donat un $\epsilon > 0$ existeix $\delta' > 0$ tal que $\forall y$: $|y - b| < \delta' \Longrightarrow |g(y) - g(b)| < \epsilon$
  - Com f contínua en a, donat $\delta' > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $\forall x$: $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta'$
  - Prenent $y = f(x)$ queda $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta' \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$
  - Per tant el límit existeix, i com f i g són contínues, el límit coincideix amb $g(f(a))$

Teorema de Bolzano

- Sigui $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval I. Siguin $a, b \in I$, $a < b$, dos punts tals que $f(a)f(b) < 0$. Aleshores $\exists \alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$

Teorema de Bolzano

- Sigui $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval I. Siguin $a, b \in I$, $a < b$, dos punts tals que $f(a)f(b) < 0$. Aleshores $\exists \alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$



Demostració del teorema de Bolzano

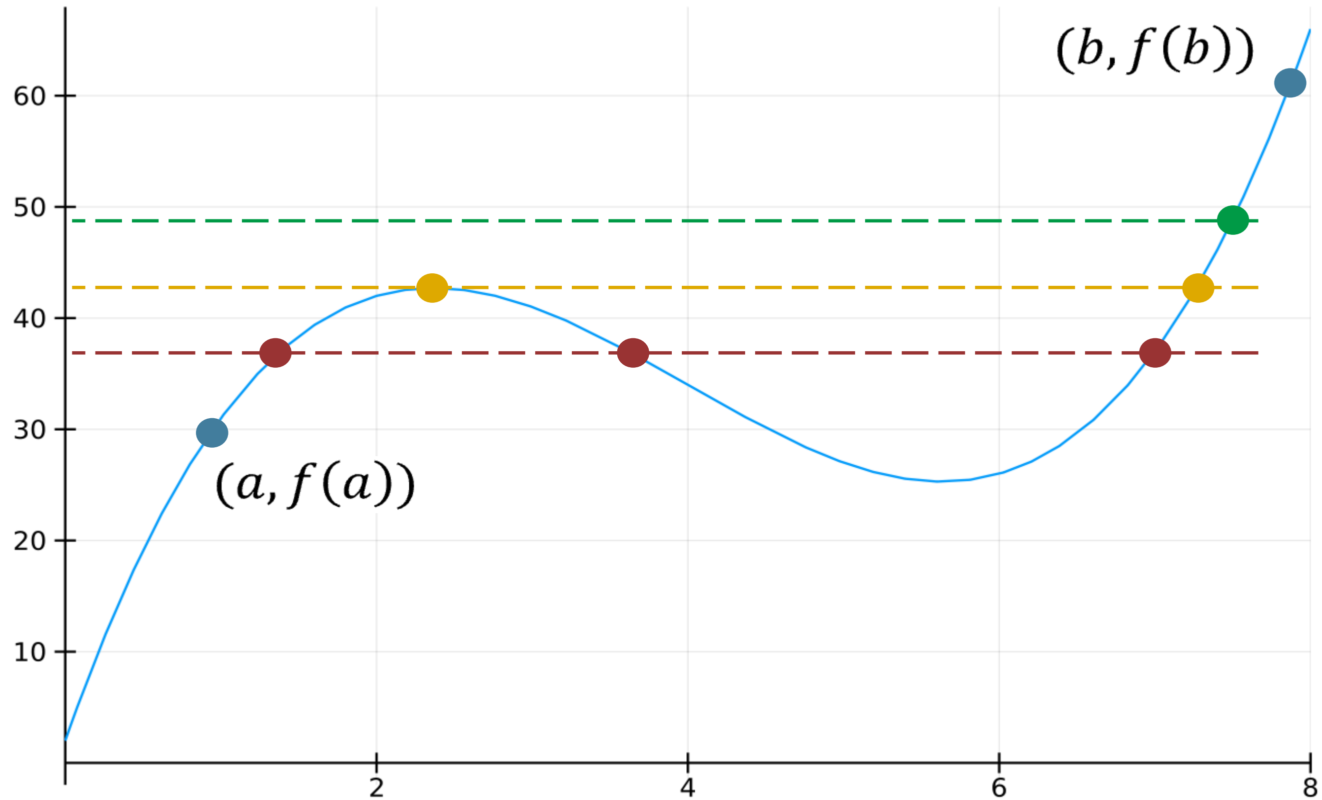
- Sense pèrdua de generalitat suposem $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$
- Sigui $S = \{x \in [a, b]: f(x) < 0\} \subset [a, b]$
- Aquest conjunt conté a i està fitat per b
- Per tant, $\exists \alpha \in [a, b]$ tal que $\alpha = \sup S$
- Demostrem que $f(\alpha) = 0$
  - Suposem que $f(\alpha) < 0$ i $\alpha < b$
  - Com f és contínua, $\exists \delta$ tal que $f(x) < 0\ \forall x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap [a, b]$
  - Per tant, $\exists x \in (\alpha, b)$ amb $f(x) < 0$, en contradicció amb α suprem
  - Suposem ara que $f(\alpha) > 0$ i $\alpha > a$
  - Com abans, $\exists \delta$ tal que $f(x) > 0\ \forall x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap [a, b]$
  - Per tant, $\exists x \in (\alpha - \delta, \alpha]$, amb $f(x) > 0$, i.e., $x \notin S$, en contradicció amb la hipòtesi que α és suprem
  - Com hem descartat tant $f(\alpha) < 0$ com $f(\alpha) > 0$ queda demostrat que $f(\alpha) = 0$

Teorema del valor mig

- Sigui $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval I.
  Siguin $a, b \in I$, $a < b$, dos punts tals que $f(a) \neq f(b)$.
  Suposem sense pèrdua de generalitat que $f(a) < f(b)$.
  Aleshores, $\forall y \in \big(f(a), f(b)\big) \Longrightarrow \exists \alpha \in I: f(\alpha) = y$

Teorema del valor mig

- Sigui $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval I. Siguin $a, b \in I$, $a < b$, dos punts tals que $f(a) \neq f(b)$. Suposem sense pèrdua de generalitat que $f(a) < f(b)$. Aleshores, $\forall y \in \big(f(a), f(b)\big) \Longrightarrow \exists \alpha \in I\colon f(\alpha) = y$



Teorema del valor mig

- Sigui $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval I. Siguin $a, b \in I$, $a < b$, dos punts tals que $f(a) \neq f(b)$. Suposem sense pèrdua de generalitat que $f(a) < f(b)$. Aleshores, $\forall y \in \big(f(a), f(b)\big) \Longrightarrow \exists \alpha \in I: f(\alpha) = y$

- Es pot considerar un corol·lari del teorema de Bolzano
- També es pot considerar el teorema de Bolzano com un cas particular del teorema del valor mig

Demostració

- Només cal aplicar el teorema de Bolzano a la funció $g(x) \equiv f(x) - y$

Corol·lari

- Sigui $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval I. El recorregut de f, $R = f(I)$, també és un interval.

- Demostració
  - Siguin $y_1, y_2 \in R$, amb $y_1 < y_2$. Sigui $y \in (y_1, y_2)$. Per teorema del valor mig, $\exists \alpha \in I\colon f(\alpha) = y$. Per tant, $y \in R$, i això significa que R és un interval

Propietat de monotonia

- Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ una funció contínua i bijectiva. Aleshores f és estrictament monòtona

- Intuïtivament, si no fos estrictament monòtona, dos punts diferents podrien tenir la mateixa imatge, i per tant la funció ja no podria ser bijectiva

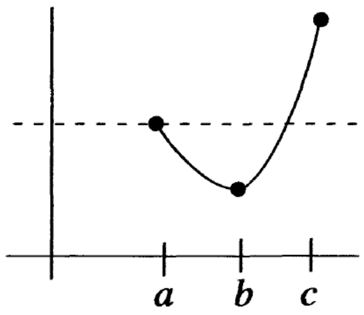
Propietat de monotonia

Demostració 1

- Es prenen $a_0, b_0 \in I$, $a_0 < b_0$
- Com és bijectiva, $f(a_0) < f(b_0)$ o $f(a_0) > f(b_0)$ (suposem <)
- Sigui qualsevol parella $a_1, b_1 \in I$, $a_1 < b_1$
- Definim $x: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $x(t) = (1-t)a_0 + t\, a_1$
- Definim $y: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $y(t) = (1-t)b_0 + t\, b_1$
- Tenim $x(0) = a_0$, $x(1) = a_1$, $x(t)$ està entre a_0 i a_1 $\forall t \in [0,1]$
- Tenim y$(0) = b_0$, $y(1) = b_1$, $y(t)$ està entre b_0 i b_1 $\forall t \in [0,1]$
- Resulta que $x(t) < y(t)$ $\forall t \in [0,1]$
- Sigui $g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(t) = f\big(y(t)\big) - f(x(t))$
- Resulta $g(0) = f(b_0) - f(a_0) > 0$
- Com f bijectiva, $g(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$
- Pel teorema de Bolzano, $g(t) > 0$ $\forall t \in [0,1]$
- Per tant $g(1) = f(b_1) - f(a_1) > 0$, i així f és estrictament creixent (suposant $>$ sortiria f estrictament decreixent)

Propietat de monotonia

- Demostració 2

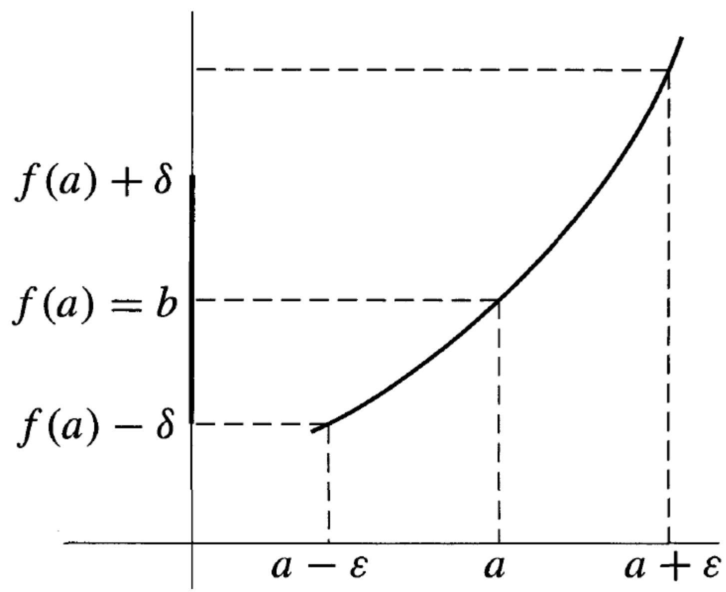


  - Donats tres punts diferents $a, b, c \in I$, $a < b < c$, només pot ser $f(a) < f(b) < f(c)$ o $f(a) > f(b) > f(c)$ ja que, en qualsevol altra ordenació, e.g., $f(b) < f(a) < f(c)$, el teorema del valor mig permetria trobar $x \in (b, c)$, $x \neq a$, amb $f(a) = f(x)$, en contradicció amb que f és bijectiva
  - Idem, si són quatre punts $a < b < c < d$, implica que ha de ser $f(a) < f(b) < f(c) < f(d)$ o $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$; només cal aplicar la propietat anterior als tres primers i als tres últims
  - Per tant, seleccionem $a, b \in I$, $a < b$. Com f bijectiva, tindrem $f(a) < f(b)$ o $f(a) > f(b)$; suposem $f(a) < f(b)$. Aleshores f és estrictament creixent, ja que, prenent qualsevol parella de punts de l'interval, $c, d \in I$, $c < d$, es pot aplicar la propietat anterior als quatre punts $\{a, b, c, d\}$ (després d'ordenar-los), i sortirà necessàriament $f(c) < f(d)$; si s'hagués suposat $f(a) > f(b)$, aleshores f seria estrictament decreixent

Propietat de funció inversa

- Sigui $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ una funció contínua i bijectiva. Aleshores la funció inversa $f^{-1}: J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ és contínua

- Demostració
  - Com f és bijectiva, és estrictament monòtona; suposem que f és creixent. Aleshores f^{-1} també és estrictament creixent
  - Sigui $b \in J$, $f^{-1}(b) = a \in I$, $f(a) = b$
  - Donat ϵ volem δ tal que $\forall y$: $|y - b| < \delta \Longrightarrow \left|f^{-1}(y) - a\right| < \epsilon$



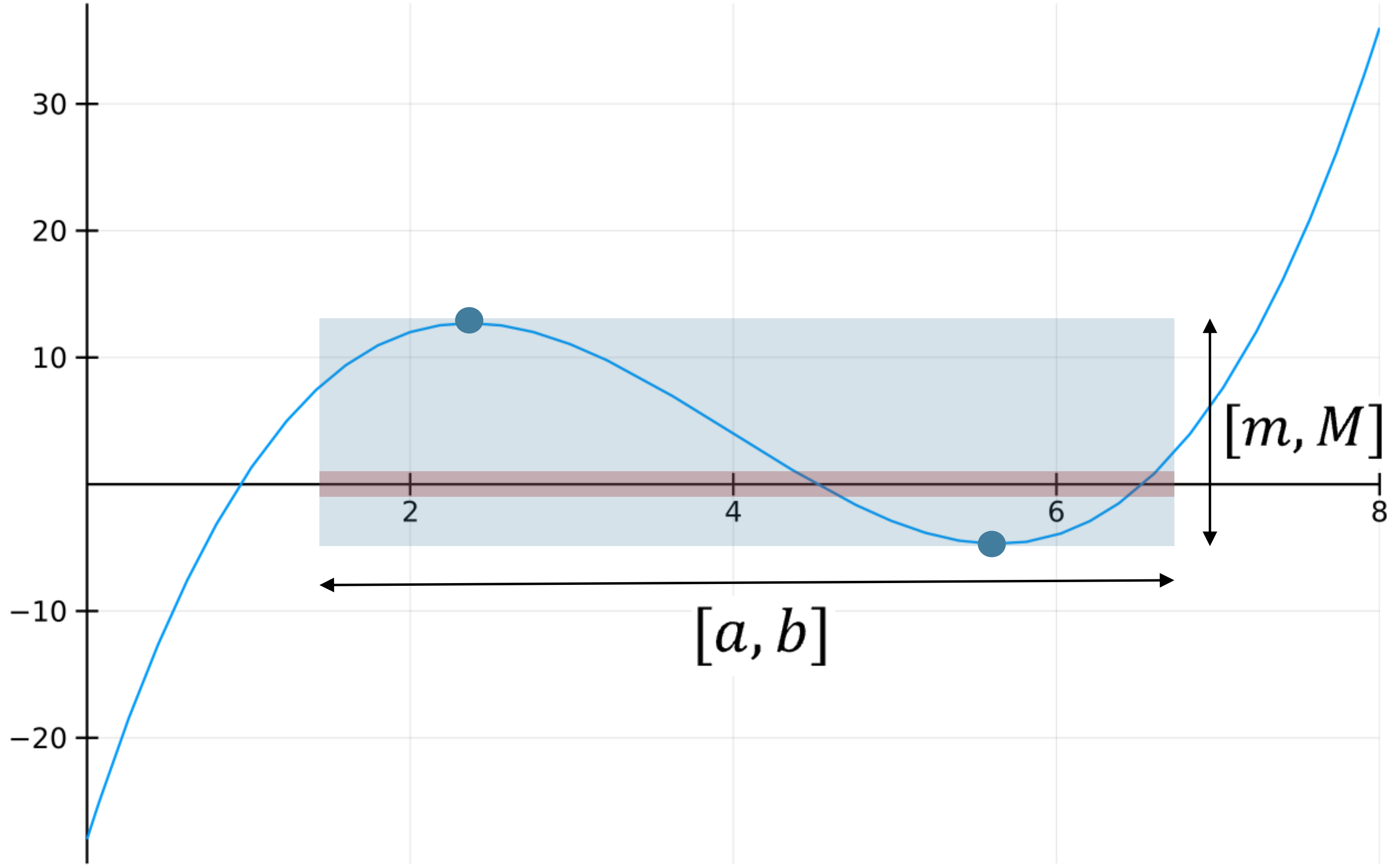
Propietat de funció inversa

- Sigui $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ una funció contínua i bijectiva. Aleshores la funció inversa $f^{-1}\colon J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ és contínua

- Demostració
  - Com f és bijectiva, és estrictament monòtona; suposem que f és creixent. Aleshores f^{-1} també és estrictament creixent
  - Sigui $b \in J$, $f^{-1}(b) = a \in I$, $f(a) = b$
  - Donat ϵ volem δ tal que $\forall y$: $|y-b| < \delta \Longrightarrow \left|f^{-1}(y) - a\right| < \epsilon$
  - Com $a - \epsilon < f^{-1}(y) < a + \epsilon$ i la funció f és estrictament creixent, tenim $f(a-\epsilon) < y < f(a+\epsilon)$
  - Prenem $\delta = \min(b - f(a-\epsilon), f(a+\epsilon) - b)$
  - Per tant, $f(a-\epsilon) \leq b - \delta < y < b + \delta \leq f(a+\epsilon)$
  - Aleshores, per $|y-b| < \delta$, estem segurs que $\left|f^{-1}(y) - a\right| < \epsilon$
  - Si suposem que f és decreixent el resultat és equivalent

- Teorema de Weierstrass (o dels valors extrems)
  - Sigui $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval tancat i fitat. Aleshores, $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$ tals que $m = f(\alpha)$, $M = f(\beta)$ i $f([a, b]) = [m, M]$. És dir, m i M són respectivament el mínim absolut i el màxim absolut de f en l'interval $[a, b]$
  - En altres paraules, per a una funció contínua en un interval tancat i fitat, el seu recorregut també és un interval tancat i fitat.

- Teorema de Weierstrass (o dels valors extrems)



- Teorema de Weierstrass (o dels valors extrems)
  - Esquema de la demostració
    - Es demostra primer que $f([a,b])$ és un interval fitat
    - Es pren el suprem: $M = \sup f([a,b])$
    - Es defineix una successió dins de $f([a,b])$ que convergeix a M
    - S'agafa la successió d'antiimatges dins de $[a,b]$
    - Com aquesta successió és fitada, conté una subseqüència convergent
    - Es pren el límit d'aquesta subseqüència, que està en $[a,b]$, i que és igual a β
    - Com f és contínua, la imatge de β és M, i per tant el suprem és un màxim
    - Anàlogament es faria amb l'ínfim, per a veure que és un mínim