# Problemes EDOs I

Grau en Enginyeria Matemàtica i Física

Curs 2022-23

**1.** Verifiqueu que la funció donada és una solució de l'equació diferencial

$$\begin{array}{lll} (a) & t^2y'' - 3ty' + 4y = 0, & y = t^2(1 + \ln t) \\ (b) & y' = 25 + y^2, & y = 5\ \tan 5t \\ (c) & y' - 2y = e^{3t}, & y = e^{3t} + 10e^{2t} \\ (d) & y' = \sqrt{y/t}, & y = (\sqrt{t} + c)^2 \end{array}$$

**2.** Verifiqueu que la funció donada és una solució de l'equació diferencial:

$$\begin{array}{lll} (a) & y'' + 25y = 0, & y = c_1 \cos 5t \\ (b) & y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, & y = t^2e^t \\ (c) & ty'' + 2y' = 0, & y = c_1 + c_2/t \\ (d) & y'' - 4y' + 4y = 0, & y = e^{2t}(1 + t) \end{array}$$

**3.** Trobeu els valors de $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ que fan que les funcions que es donen siguin una solució particular de les equacions que s'indiquen:

$$\begin{array}{lll} (a) & y = \alpha e^{-4t}, & y'' - 3y' + 2y = 2e^{-4t} \\ (b) & y = \alpha e^t + \beta\cos(2t) + \gamma\sin(2t), & y''' + 2y'' - y = 4e^t - 3\cos(2t) \\ (c) & y = \alpha t + t\log(\tan t), & ty' - y = 2t^2\csc(2t),\ [\csc(t) = 1/\sin(t)] \end{array}$$

**4.** Trobeu els valors de $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ que fan que les funcions que es donen siguin una solució particular de les equacions que s'indiquen:

$$\begin{array}{lll} (a) & y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma, & 2y'' + 5y' - 3y = 2t^2 - t + 1 \\ (b) & y = \alpha t + \frac{t}{\tan(t)}, & y' + \frac{1}{\tan(t)}y + t = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}(1 + 4t) + 4 \\ (c) & y = \alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t), & y'' + 3y' + 2y = 2\cos(3t) - \sin(3t) \end{array}$$

**5.** Trobeu $m$ de manera que $y = e^{mt}$ sigui solució de l'equació diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$.

**6.** Trobeu $m$ de manera que $y = e^{mt}$ sigui solució de l'EDO $y'' + 10y' + 25y = 0$.

**7.** Dibuixeu, aproximadament, la gràfica de la funció solució de les equacions diferencials següents amb les condicions inicials donades. Podeu fer servir un applet com https://aeb019.hosted.uark.edu/dfield.html per tal de tenir una representació aproximada del camp.

(a) $y' = x$ amb c.i. (i) $y(0) = 0$ , (ii) $y(0) = -3$

(b) $y' = x + y$ amb c.i. (i) $y(-2) = 2$ , (ii) $y(1) = -3$

(c) $yy' = -x$ amb c.i. (i) $y(1) = 1$ , (ii) $y(0) = 4$

(d) $y' = \frac{1}{y}$ amb c.i. (i) $y(0) = 1$ , (ii) $y(-2) = -1$

(e) $y' = 0.2x^2 + y$ amb c.i. (i) $y(0) = \frac{1}{2}$ , (ii) $y(2) = -1$

(f) $y' = xe^y$ amb c.i. (i) $y(0) = -2$ , (ii) $y(1) = 2.5$

(g) $y' = y - \cos\frac{\pi}{2}x$ amb c.i. (i) $y(2) = 2$ , (ii) $y(-1) = 0$

(h) $y' = 1 - \frac{y}{x}$ amb c.i. (i) $y(-\frac{1}{2}) = 2$ , (ii) $y(\frac{3}{2}) =$

**8.** Considereu l'equació diferencial de primer ordre autònoma $y' = y - y^3$ amb la condició inicial $y(0) = y_o$. Dibuixeu, a mà i aproximadament, la gràfica de la solució $y(x)$ en els casos

(a) $y_0 > 1$ (b) $0 < y_0 < 1$
(c) $-1 < y_0 < 0$ (d) $y_0 < -1$

**9.** Considereu l'equació diferencial de primer ordre autònoma $y' = y^2 - y^4$ amb la condició inicial $y(0) = y_o$. Dibuixeu, a mà i aproximadament, la gràfica de la solució $y(x)$ en els casos

(a) $y_0 > 1$ (b) $0 < y_0 < 1$
(c) $-1 < y_0 < 0$ (d) $y_0 < -1$

**10.** Per cadascuna de les següents equacions diferencials autònomes:

-trobeu-ne els punts crítics i el retrat de fase,

-classifiqueu cadascun dels punts crítics com a asimptòticament estable, inestable o semiestable

-feu un dibuix aproximat d'una corba solució típica en cadascuna de les regions del pla determinades per la gràfica de les solucions d'equilibri.

(a) $y' = y^2 - 3y$ (b) $y' = y^2 - y^3$
(c) $y' = (y-2)^4$ (d) $y' = 10 + 3y - y^2$
(e) $y' = y^2(4 - y^2)$ (f) $y' = y(2-y)(4-y)$
(g) $y' = y\ln(y+2)$ (h) $y' = \dfrac{ye^y - 9y}{e^y}$

**11.** Resoleu (és a dir doneu la solució general) les següents EDO's *immediates*

$$(a)\, y' + \cos(t) = 0 \quad (b)\, y' = \ln(t)$$
$$(c)\, y' + t^2 + \sqrt{t} = 0 \quad (d)\, y' = \frac{t}{2}e^{3t^2}$$

**12.** Resoleu (és a dir doneu la solució general) les següents EDO's *immediates*

$$(a)\, y' + \sin(t) = 0 \quad (b)\, y' = te^t$$
$$(c)\, y' + \frac{1}{t} + 2\frac{1}{1+t^2} = 0 \quad (d)\, y' = \cos^2(t)\sin(t)$$

**13.** Resoleu (és a dir doneu la solució general) les següents EDO's de *variables separables*

$$(a)\, y' = e^{3t+2y} \quad ; (b)\, y' = \frac{y^3}{t^2}$$

**14.** Resoleu (és a dir doneu la solució general) les següents EDO's de *variables separables*

$$(a)\, ty' = 4y \quad ; (b)\, 2y(t+1)\, dy = tdt$$

**15.** Trobeu la solució de l'edo $(1+e^x)yy' = e^x$ que verifica $y(0) = -1$

**16.** Trobeu la solució general de les equacions diferencials:

(a) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0.$

(b) $(1+y^2)dx + xydy = 0.$

**17.** Una bala travessa un tauló de fusta de 10 cm de gruix. En el moment d'impactar té una velocitat de 200 m/s. En el moment de sortir, s'ha reduït a 80 m/s. Sabent que ls força de resistència exercida per la fusta és proporcional al quadrat de la velocitat, calculeu quant de temps ha trigat la bala a travessar el tauló.

**18.** Trobeu la solució general de les EDOs

(a) $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$

(b) $(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x})dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0.$

**19.** Trobeu la solució general de les EDOs reduïbles a exactes:

(a) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ (factor integrant de la forma $\mu(x)$)

(b) $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$(factor integrant de la forma $\mu(y)$).

**20.** Trobeu la solució general de les EDOs

(a) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$

(b) $2xy - y'(3x^2 - y^2) = 0$

(c) $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$

**21.** Resoleu (és a dir doneu la solució general) les següents equacions diferencials *lineals de primer ordre.* En els casos que es donin condicions inicials, indiqueu la solució particular.

| | |
|---|---|
| $(a)\, (1+e^t)y' + e^t y = 0$ | $(b)\, y' + y\, \tan t = \cos^2 t, \quad y(0) = -1$ |
| $(c)\, ty' + 4y = t^3 - t$ | $(d)\, t(t-2)y' + 2y = 0, \quad y(3) = 6$ |
| $(e)\, \cos^2 t \sin t\, dy + (y \cos^3 t - 1)\, dt = 0$ | $(f)\, \frac{dT}{dt} = T - 50, \quad T(0) = 200.$ |

**22.** Resoleu (és a dir doneu la solució general) les següents equacions diferencials *lineals de primer ordre.* En els casos que es donin condicions inicials, indiqueu la solució particular.

| | |
|---|---|
| $(a)\, y' + 5y = 20, \quad y(0) = 20$ | $(b)\, y' \cos t + y \sin t = 1$ |
| $(c)\, (t+1)y' + y = \ln t, \quad y(1) = 10$ | $(d)\, t^2y' + t(t+2)\, y = e^t$ |
| $(e)\, y' = 0, \quad y(5) = 2$ | $(f)\, y' + \cos(2t)y = 0.$ |

**23.** Resoleu les següents equacions diferencials. En els casos que es donin condicions inicials, indiqueu la solució particular.

| | |
|---|---|
| $(a)\, (x-y)dx + xdy = 0$ | $(b)\, ydx = (2x+2y)dy$ |
| $(c)\, y' = \dfrac{y-x}{y+x}$ | $(d)\, y' = \dfrac{x+3y}{3x+y}$ |
| $(e)\, ydx = (x+\sqrt{xy})dy$ | $(f)\, xy' = y + \sqrt{x^2-y^2}$ |
| $(g)\, xy^2y' = y^3 - x^3, \quad y(1) = 2$ | $(h)\, ydx + x(\ln x - \ln y - 1) = 0 \quad y(1) = e.$ |

**24.** Resoleu les següents equacions diferencials.

| | |
|---|---|
| $(a)\, xy' + y = y^2 \ln x$ | $(b)\, x^2y' + 2x^3y = y^2(1+2x^2)$ |
| $(c)\, (1+x^2)y' = xy + x^2y^2$ | $(d)\, (x+1)y' + y + \frac{1}{2}(x+1)^4y^2 = 0.$ |

**25.** Considerem un planetoiode de forma esfèrica i uniforme, de radi $R$ i massa $M$. Suposem que hi ha un pou que el travessa al llarg d'un diàmetre. D'acord amb la llei de la gravitació universal de Newton, una massa $m$ situada dins el pou a distància $|x|$ del centre està sotmesa a una gravetat resultant equivalent a l'exercida per la massa de l'esfera de radi $|x|$ suposada concentrada en el centre (en altres paraules, l'efecte gravitatori de la *closca* que té pel damunt té resultant 0).

Deixem caure una massa $m$ des de la vora del pou. Plantegeu una equació diferencial que en reguli el moviment, resoleu-la, i trobeu, si és que és possible,

(a) La relació funcional entre la velocitat i la posició.

(b) La relació funcional entre el temps i la posició.

(c) La relació funcional entre la velocitat i el temps.

Indicació. $a = \dfrac{dv}{dx}v$

**26.** Considerem una cadena uniforme de massa $M$ i longitud $L$, la qual mantenim immòbil sobre una taula horitzontal excepte un extrem de longitud $L_0$ que penja d'una vora.

En un cert moment la deixem anar. Suposem que per cada fragment de la cadena el pas de velocitat horitzontal a vertical és instantani quan arriba a la vora de la taula i sense pèrdues d'energia. Suposem també que la taula és llisa, sense fricció. Plantegeu una equació diferencial que en reguli el moviment, resoleu-la, i trobeu, si és que és possible,

(a) La relació funcional entre la velocitat i la posició.

(b) La relació funcional entre el temps i la posició.

(c) La relació funcional entre la velocitat i el temps.

Indicació. $a = \dfrac{dv}{dx}v$

**27.** En la mateixa situació que el problema anterior, suposem ara que la taula exerceix una força de fricció proporcional a la velocitat i a la longitud del fragment de cadena en contacte amb la taula. Plantegeu una equació diferencial que en reguli el moviment, i trobeu, si és que és possible,

(a) La relació funcional entre la velocitat i la posició.

(b) La relació funcional entre el temps i la posició.

(c) La relació funcional entre la velocitat i el temps.

Indicació. $a = \dfrac{dv}{dx} v$

## Model de Malthus de creixement de poblacions

El primer model de creixement d'una població es coneix amb el nom de **Model de Malthus**. Thomas Robert Malthus (1776–1834) va ser un economista anglès molt important en la seva època. Els seus treballs al voltant de com afectava el creixement de la població en la riquesa i la pobresa de la societat va influir d'altres economistes anglesos de primer ordre com ara David Ricardo o John Maynard Keynes. Després de treballar el model entendrem perquè molts cops es parla de *creixement exponencial de poblacions*.

Considerem una població on el nombre d'individus depèn del temps. Ho escrivim com

$$P(t) = \text{ població } P \text{ en funció del temps } t.$$

La derivada de la població, respecte el temps, s'anomena

$$\frac{dP}{dt} = \text{ taxa de canvi de població,}$$

però normalment s'utilitza la **taxa de creixement** que és una mesura més significativa del creixement:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \text{taxa de creixement.}$$

Aquesta quantitat s'acostuma a mesurar en percentatge. El model de Malthus ens diu que **el creixement d'una població és aquell on la taxa de creixement és constant igual a** $k$. Llavors tenim la següent e.d.o.

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

També s'escriu com

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

on ara s'interpreta que el canvi en el nombre d'individus és proporcional ($k$) a la quantitat d'individus en cada moment $t$.

**28.** Si l'estimació de la taxa de creixement es 1,5% anual. Quants anys trigarà la població a duplicar-se?

**29.** Un cristall creix un 5% al dia. Quan es pot esperar per tal que el cristall tingui el doble de tamany?

**30.** S'observa que un cert bacteri és duplica en 8h. Quina és la seva taxa de creixement?

**31.** Es suposa que la població d'una espècie es duplicarà en els propers 30 anys. Quina és la taxa de decreixement?

**32.** El temps per duplicar-se d'un cert virus és de tres anys. Quan de temps necessita el virus per augmentar 10 vegades el seu nivell de població actual?

**33.** Inicialment tenim 0,1 g d'un bacteri en un contenidor i 2 hores més tard tenim 0,15 g. Quin temps necessitem per duplicar la quantitat d'aquest bacteri?

### Decaïment radioactiu

Alguns àtoms tenen un nucli inestable i de forma espontània (aquest fenomen és aleatori) emeten partícules beta. Si denotem per $M(t)$ la quantiat d'àtoms radiatius, succeeix que $M(t)$ canvia a un ritme proporcional a la quantitat d'àtoms radiatius que encara queden, obtenint així la següent EDO:

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M,$$

on $\lambda > 0$ és una constant positiva que s'anomena *constant de desintegració* i que és un indicador de la freqüència amb que aquest fenomen es produeix en un moment donat. Aquesta EDO és de variables separables i es resol de forma similar al model de creixement de poblacions, obtenint

$$M(t) = M(0)e^{-\lambda t}.$$

A diferència del model de creixement de poblacions, on obteníem un creixement exponencial, ara el que observem és un decaïment exponencial. S'anomena *període de semidesintegració* o *semivida* al temps de transcorre fins que la meitat dels nuclis d'una mostra pura determinada decau. Els períodes de semidesintegració coneguts varien àmpliament, des de més de $10^{19}$ anys pels més estables fins a $10^{-23}$ segons pels més inestables.

Una de les aplicacions del decaïment radiatiu és la datació de mostres amb el Carboni 14. El Carboni-14, $^{14}$C, es forma en les capes superiors de l'atmosfera i per simplificar podem suposar que la proporció en el dioxid de carboni de l'aire es manté constant, aproximadament $1.3 \times 10^{-12}$. Aquesta és la proporció que hi ha a les plantes i en molts éssers vius. Però quan un organisme mor, la proporció de $^{14}$C té un decaïment exponencial, donat que no hi ha renovació, i trobant la proporció actual d'aquest isòtop és possible deduir l'antiguitat del fòssil. L'any 1960 Willard F. Libby va obtenir el premi Nobel de Química per la datació amb $^{14}$C i actualment aquesta tècnica s'utilitza en arqueologia, geologia i geofísica entre d'altres àmbits científics.

**34.** La constant de desintegració del Radi-226 és $\lambda = 0,00044$ (la unitat de mesura del temps és l'any). Calculeu el període de semidesintegració.

**35.** La constant de desintegració del Cesi-137 és $\lambda = 0,023$ (la unitat de mesura del temps és l'any). Calculeu el període de semidesintegració.

**36.** El període de semidesintegració de l'Urani-235 és $7,038 \times 10^8$ anys. Calculeu la constant de desintegració de l'Urani-235.

**37.** El període de semidesintegració de l'Oxigen-15 és 122 segons. Calculeu la constant de desintegració de l'Oxigen-15.

**38.** El període de semidesintegració del Carboni-14 és de 5760 anys. Trobeu l'edat aproximada d'una mostra si sabem que el percentatge de Carboni-14 és del 63%.

**39.** El període de semidesintegració del Carboni-14 és de 5760 anys. Trobeu l'edat aproximada d'una mostra si sabem que el percentatge de Carboni-14 és del 31%.

### Model logístic de creixement de poblacions

El *model logístic* de creixement de poblacions sorgeix quan hi han limitacions en el creixement de la població. En certs ecosistemes aquesta limitació pot venir donada, per exemple, per l'escassetat d'alimentació deguda a l'augment de la població per una limitació física de l'espai. En aquests casos les poblacions després d'un creixement exponencial tendeixen a estabilitzar-se a la mida màxima que l'ecosistema pot sostenir, aquest valor màxim s'anomena *capacitat de càrrega*.

En el model logístic de creixement de poblacions l'equació diferencial que ens dona l'evolució temporal de la població és la següent

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

on $k$ és la taxa de canvi de població i on $K$ és la *capacitat de càrrega* del sistema. Aquesta és una equació diferencial de variables separables i integrant podem deduir que la seva solució general és

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{C} - 1\right)e^{-kt}},$$

on $C$ és una constant arbitrària.

**40.** Relacioneu la constant $C$ amb la població inicial $P(0)$.

**41.** Calculeu $P(t)$ quan $t \longrightarrow +\infty$ i comproveu que aquest límit coincideix amb la capacitat de càrrega del sistema.

**42.** Feu la gràfica de la funció $P(t)$ en un sistema amb $k = 5$ i $K = 200$ i trobeu el temps per tal que la població sigui igual a 160.

**43.** Feu la gràfica de la funció $P(t)$ en un sistema amb $k = 1$ i $K = 70$ i trobeu el temps per tal que població sigui igual 65.

### Refredament tèrmic

Sense tenir en compte la circulació i altres efectes, la **Llei de refredament de Newton** ens diu que, la taxa de canvi de temperatura de la superfície d'un objecte és **proporcional a la diferència entre la temperatura del objecte i la temperatura del seu voltant (anomenada també temperatura ambient) en aquest moment**.

Si anomenen $T(t)$ la temperatura de la superfície d'un objecte a temps $t$ i $Q_0$ la temperatura ambient, llavors aquesta llei de refredament de Newton pren la forma

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - Q_0)$$

**44.** La temperatura d'un motor en el moment que l'apaguem és de 200 graus. La temperatura de l'aire que l'envolta és de 30 graus. Després de 10 minuts la temperatura de la superfície del motor és de 180 graus. Quan temps trigarà la temperatura del motor per baixar a 40 graus?

**45.** Alguns experiments han demostrat que un component es refreda amb l'aire, amb una constant $k = 0,2$. En un principi la temperatura del component és de 120 graus. Aquest component és deixa durant 10 minuts en una habitació i després va cap a una nova fase. En aquest moment la seva temperatura a la superfície és de 60 graus. Quina ha de ser la temperatura de l'habitació per tal d'obtenir aquest refredament?

**46.** Posem un objecte a 100 graus en una habitació a 40 graus. Quina ha de ser la constant $k$ de refredament per tal que aquest objecte estigui a 60 graus després de 10 minuts.

**47.** La temperatura de la nostra oficina està a 22 graus. L'experiència ens diu que la temperatura del café de la màquina baixarà de 50 graus a 38 graus en 10 minuts. A quina temperatura hauria de sortir el café de la màquina si volem que passin 20 minuts abans que la temperatura baixi a 38 graus?

### Caiguda lliure amb fregament

Suposarem que tenim un objecte de massa $m$ que cau des d'una certa distància. Sobre ell actuen dues forçces: la gravetat $-mg$ i el fregament proporcional a la velocitat $-kv$. El moviment que el cos experimenta està governat per **La Segona Llei de Newton**.

La segona llei de Newton ens diu que **Tot cos sobre el qual actua una força es mou de tal manera que la variació de la seva quantitat de moviment respecte el temps és igual a la força que produeix el moviment**. S'expressa amb la coneguda fórmula $F = ma$; on $F$ és la força causant del moviment, $m$ és la massa del cos, i $a$ denota l'acceleració (recordem que l'acceleració és la segona derivada de l'espai respecte del temps o, equivalentment, la primera derivada de la velocitat respecte del temps).

En el nostre cas, les forces que actuen sobre el cos en caiguda lliure amb fregament són la gravetat de la terra i el fregament (un a favor i l'altre en contra del moviment, respectivament). Així podem escriure la segona llei de Newton com:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

on $v(t)$ es la velocitat de l'objecte en el temps $t$.

**48.** S'anomena caiguda lliure si no hi ha fregament, és a dir, si $k = 0$. Trobeu la solució general d'aquesta EDO.

**49.** En el cas de caiguda lliure amb fregament, és a dir, $k \neq 0$, trobeu la velocitat asimptòtica calculant $\lim_{t\to+\infty} v(t)$ i comproveu que és independent de la velocitat inicial.

**50.** Des de la superfície de la Terra disparem verticalment un projectil de massa $m = 2.4g$ amb una velocitat inicial de $v_0 = 350m/s$. Calculeu l'alçada màxima a la que arriba i el temps que triga en fer-ho suposant que la seva constant de fregament és de $k = 0.6g/s$ i que l'acceleració de la gravetat és de $g = 9.8m/s$.

**51.** Una paracaigudista de 50 kg es deixa caure d'un avió a 4000 m d'alçada. De salts anteriors se sap que el valor al que tendeix la seva velocitat de caiguda (velocitat terminal o límit) és de 225 km/h. Suposant que les forces implicades en aquest sistema són la gravetat i una força de fricció aerodinàmica proporcional a la velocitat,

(a) Trobeu la fórmula que dóna la velocitat respecte del temps transcorregut des del seu llençament i el valor de la constant de fricció aerodinàmica.

(b) Trobeu la fórmula que dóna l'alçada sobre el terreny respecte del temps transcorregut des del seu llençament.

(c) Quant de temps triga a arribar a 200 km/h?

(d) A quina alçada es troba, en aquest moment?

**52.** Trobeu la solució general de les següents EDO's *lineals de segon ordre a coeficients constants*. En els casos que es donin condicions inicials indiqueu la solució particular.

(*a*) $y'' - 4y' + 5y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,

(*b*) $3y'' + 2y' + y = 0$,

(*c*) $y'' - y = te^t$; $y(0) = e$, $y'(0) = 0$,

(*d*) $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2t} - e^{-t}$.

**53.** Trobeu la solució general de les següents EDO's *lineals de segon ordre a coeficients constants.* En els casos que es donin condicions inicials indiqueu la solució particular.

(*a*) $y'' - y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,

(*b*) $y'' - 2y' + 2y = 0$,

(*c*) $y''' - 4y'' - 5y' = t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$,

(*d*) $3y'' + 2y' + y = t^2 + \sin(t)$.

**54.** Trobeu la solució general de les següents EDO's *lineals de segon ordre a coeficients constants.*

(*a*) $y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}$,

(*b*) $y'' + y = \cos x$.

**55.** Trobeu la solució general de les següents EDO's *lineals de segon ordre a coeficients constants.*

(*a*) $y'' - y = e^x$,

(*b*) $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

**56.** Resoleu l'equació diferencial:

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

**57.** Resoleu les equacions diferencials:

(*a*) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$,

(*b*) $x^2y'' - xy' + 2y = x \ln x$

Exemple 6: Vibracions mecàniques

Seguint la mateixa segona llei de Newton (observeu que la llei és de caràcter universal ja que ens diu com serà el moviment del cos, o almenys ens diu quina llei el governa, sense importar en quina situació ens trobem!) podem entendre el moviment d'una massa clavada a molla.

Suposem que tenim una molla horitzontal clavada a una paret amb una bola al final de la molla de massa, $m$. També suposarem que la força total $F_T$ que actua sobre la massa és la suma de les següents forces.

- $F_s =$ força de la molla.
- $F_r =$ força de fricció (podem pensar que és deguda al terra sobre el que llisca la molla) que actua sobre la masa.
- $F_e =$ qualsevol altra força externa (per exemple una força magnètica)

Si anomenem $L$ a la longitud de la molla en repòs, podem introduir un sistema de coordenades $x$ on el valor $x = 0$ indica la posició a distància $L$ de la paret. Llavors el valor $x(t)$ ens indica la distància de la massa respecte el valor de $L$, així un valor $x(t) > 0$ indica que la massa està en un posició a la dreta de la posició d'equilibri i un valor $x(t) < 0$ just el contrari. La **llei de Hooke** ens diu que **la força que fa la molla és proporcional a la distància amb que estirem la molla.** Robert Hooke (1635–1703) va ser un científic anglès molt destacat i que va polemtizar força amb el també científic anglès Issac Newton (1647–1727) al voltant de la paternitat de la **Llei de la Gravitació Universal**. Issac Newton ha estat, sense cap mena de dubte, un dels personatges de la història de la ciència més rellevants i va escriure un dels llibres científics més importants de tota la història de la humanitat (el *Philosophiae naturalis principia mathematica* l'any 1687).

Però tornem al model de Hooke. Recordem que La llei de Hooke ens diu que la força que fa la molla és proporcional a la distància amb la que estirem la molla. D'aquesta manera temin que

$$F_s = -kx$$

on $k$ és una constant positiva diferent per cada tipus de molla anomenada constant de la molla. La força de fricció és proporcional a la velocitat de l'objecte, la constant de proporcionalitat s'anomena *constant d'amortiment* i la denotarem per $\delta$, obtenint així

$$F_r = -\delta \frac{dx}{dt}$$

Per últim, la força externa la denotarem per $F_e = f(t)$. Si substituïm aquests valors en l'expressió de la segona Llei de Newton obtenim que el moviment d'una molla està determinat per la següent EDO:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \delta\frac{dx}{dt} + kx = f(t). \tag{1}$$

**58.** Resoleu l'EDO (soluciuó general) donada per l'equació (1), suposant que no tenim fregament ($\delta = 0$) i sense cap tipus de força externa ($f(t) = 0$). Trobeu el període les solucions. Hi ha alguna solució que compleixi $x(0) = x'(0) = 0$?

**59.** Resoleu l'EDO donada per l'equació (1), suposant que no tenim cap tipus de força externa i suposant que $\delta < \sqrt{4mk}$. Representeu gràficament les solucions. Hi ha alguna solució que compleixi $x(0) = x'(0) = 1$?

**60.** Resoleu l'EDO donada per l'equació (1), suposant que no tenim cap tipus de força externa i suposant que $\delta > \sqrt{4mk}$. Representeu gràficament les solucions. Hi ha alguna solució que compleixi $x(0) = x'(0) = -1$?

**61.** Resoleu l'EDO donada per l'equació (1), suposant que no tenim cap tipus de força externa i suposant que $\delta = \sqrt{4mk}$. Representeu gràficament les solucions. Hi ha alguna solució que compleixi $x(0) = 0$ i $x'(0) = 1$?

**62.** Resoleu l'EDO donada per l'equació (1), suposant que tenim una força externa $f(t) = \cos(t)$ i amb els valors $m = 1, k = 8, \delta = 8$. Representeu gràficament les solucions. Hi ha alguna solució que compleixi $x(0) = 1$ i $x'(0) = 0$?

**63.** Resoleu l'EDO donada per l'equació (1), suposant que tenim una força externa $f(t) = \sin(t)$ i amb els valors $m = 1, k = 8, \delta = 8$. Representeu gràficament les solucions. Hi ha alguna solució que compleixi $x(0) = \pi$ i $x'(0) = \pi/2$?

**64.** Resoleu els següents sistemes d'equacions diferencials:

$$(a)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} &= x+2y \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 4x+7y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} &= x-2y \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -y+t \\ \\ \dfrac{dy}{dt} &= x-t \end{cases} \qquad (d)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-4y &= 1 \\ \\ \dfrac{dy}{dt}+x &= 2 \end{cases}$$

**65.** Resoleu els següents sistemes d'equacions diferencials:

$$(a)\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} &= 4y+e^t \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} &= 4x-e^t \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}-5x+\dfrac{dy}{dt} &= e^t \\ \\ \dfrac{dx}{dt}-x+\dfrac{dy}{dt} &= 5e^t \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt} &= e^t \\ \\ -\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+x+y &= 0 \end{cases} \qquad (d)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 6y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} &= x+z \\ \\ \dfrac{dz}{dt} &= x+y \end{cases}$$

**66.** Per les següents equacions diferencials, i sense resoldre-les pròpiament, considerem les seves solucions en sèrie de potències al voltant del punt $x=0$. Determineu quin és, com a mínim, radi de convergència d'aquestes sèries.

$(a)$ $(x^2-25)y''-2xy'+y=0$

$(b)$ $(x^2-2x+10)y''+xy'-y=0$

**67.** Ídem al voltant de $x=1$

**68.** Donada l'EDO

$$y''-y'=0$$

(a) Trobeu-ne la solució general

(b) Trobeu-ne la solució en sèrie de potències al voltant del punt $x=0$

(c) Compareu els resultats de (a) i de (b).

**69.** Per cadascuna de les EDO segënts, trobeu-ne *dues* solucions en sèrie de potències al voltant del punt ordinari $x = 0$:

$(a)$ $y'' + x^2 y = 0$

$(b)$ $y'' - 2xy' + y = 0$

$(c)$ $y'' + x^2 y' + xy = 0$

$(d)$ $y'' - (x+1)y' - y = 0$

**70.** Fent ús dels desenvolupaments de Maclaurin de les funcions $\sin x$ i $e^x$, trobeu la solució en sèrie de potències, al voltant de $x = 0$, de les següents EDOs:

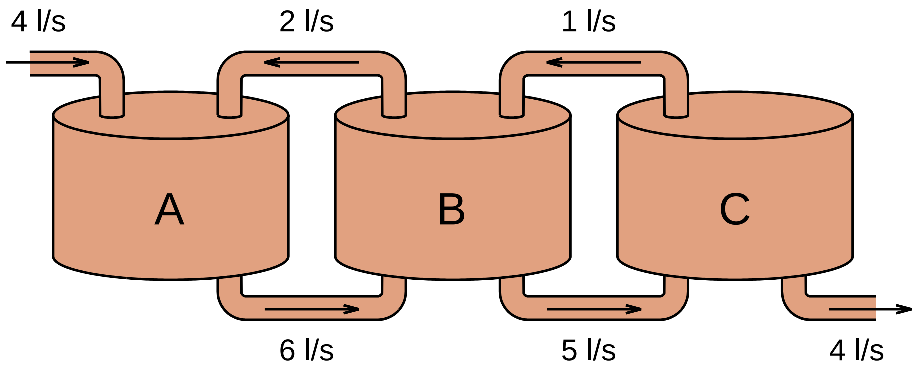
$(a)$ $y'' + y \sin x = 0$

$(b)$ $y'' + e^x y' - y = 0$

**71.** Trobeu la solució en sèrie de potències al voltant del punt ordinari $x = 0$ de l'EDO:

$y'' - xy = 1$

**72.** Considerem un sistema format per tres dipòsits d'1 $m^3$ plens i units per tubs. En el dipòsit A hi ha inicialment una solució al 5%. En el B hi ha una solució al 3% del mateix producte. En el C hi ha aigua.




Engeguem un procés de circulació de fluid, de manera que:

-en el dipòsit A hi entren 4 $l/s$ d'aigua i 2 $l/s$ de líquid provinent de B. En surten 6 $l/s$ cap a B.

-en el dipòsit B hi entren 6 $l/s$ de líquid provinent de A i 1 $l/s$ de líquid provinent de C. En surten 2 $l/s$ cap a A i 5 $l/s$ cap a C.

-en el dipòsit C hi entren 5 $l/s$ de líquid provinent de B. En surten 1 $l/s$ cap a B i 4 $l/s$ cap a la resta del circuit.

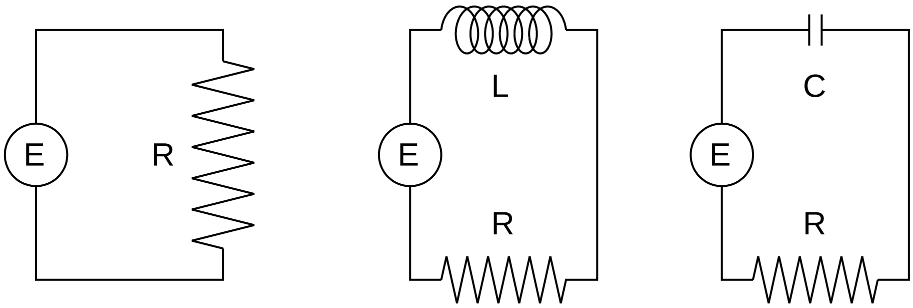
Dient $x_A(t)$, $x_B(t)$ i $x_C(t)$ a les quantitats de solut de cada dipòsit, i suposant que totes les mescles són instantànies i homogènies, construïu un model per l'evolució de $x_A(t)$, $x_B(t)$ i $x_C(t)$.

Circuits elèctrics

Segons les lleis de Kirchoff, en un circuit tancat hi ha una diferència de potencial igual a 0. Si en un extrem hi ha una força electromotriu, el seu valor coincidirà amb la suma de les caigudes de potencial donades pels elements del circuit. Sent $i$ la intensitat i $q$ la càrrega del condensador (relacionades per

$i = \frac{dq}{dt}$), aquestes caigudes valen $L\dfrac{di}{dt}$, sent $L$ la inductància, $iR$, sent $R$ la resistència, i $\frac{q}{C}$, sent $C$ la capacitància. $L$, $R$ i $C$ es consideren habitualment constants.

**73.** Considerem un circuit amb força electromotriu constant $E$, amb càrrega acumulada igual a zero i que es tanca a temps igual a zero. Trobeu una descripció qualitativa de la funció $i$ en els casos (veure gràfiques):

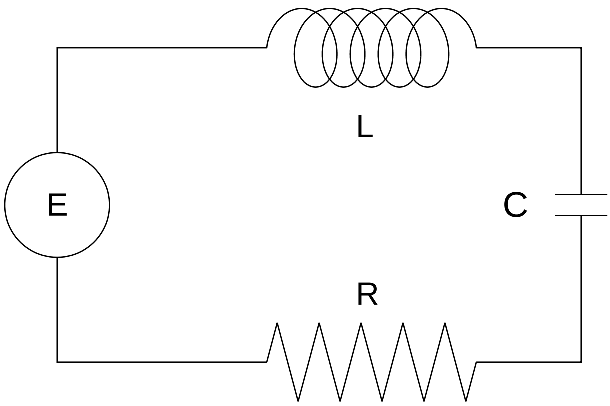



a) Només hi ha $R$

b) Hi ha $R$ i $L$

c) Hi ha $R$ i $C$

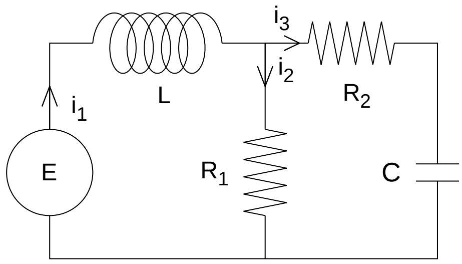
**74.** Considerem un circuit $LRC$ amb càrrega acumulada igual a zero i que es tanca a temps igual a zero. Trobeu una descripció qualitativa de la funció $i$ en els casos:




a) Amb força electromotriu constant $E$

b) Amb força electromotriu $E = A \sin \omega t$

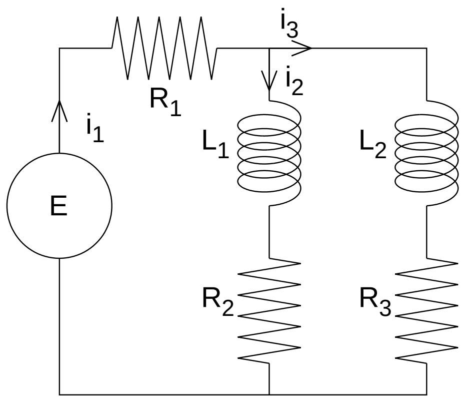
**75.** Considerem el circuit de la figura següent:




Comproveu que les intensitats $i_2(t)$, $i_3(t)$ verifiquen el sistema d'EDOs:

$$\left\{\begin{array}{rcl} L\frac{di_2}{dt}+L\frac{di_3}{dt}+R_1 i_2 & = & E(t) \\ -R_1\frac{di_2}{dt}+R_2\frac{di_3}{dt}+\frac{1}{C}i_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

**76.** Descriviu un sistema d'EDOs de primer ordre on les incògnites siguin les intensitats $i_2(t)$ i $i_3(t)$ corresponents al circuit elèctric següent:




Velocitats en reaccions químiques

En una reacció química de la forma $n_A A + n_B B \to n_C C$ succeeix que es creen $n_C$ mols de $C$ cada cop que se'n consumeixen $n_A$ de $A$ i $n_B$ de $B$. S'anomena **velocitat de la reacció**, $v(t)$, al valor

$$v(t) = -\frac{1}{n_A}\frac{d\,[A]}{dt} = -\frac{1}{n_B}\frac{d\,[B]}{dt} = \frac{1}{n_C}\frac{d\,[C]}{dt}$$

on $[A]\,,[B]$ i $[C]$ són les concentracions molars presents de cada compost (essencialment són el nombre de mols presents), les quals varien amb el temps i són per tant funcions de $t$. Observem que $v(t)$ és sempre positiva.

En reaccions simples, es verifica la **llei de la velocitat de reacció**:

$$v(t) = k\,[A]^a\,[B]^b\,,$$

on $k$ és una constant que depèn de la reacció en concret i de les condicions en què té lloc, i $a$ i $b$ s'anomenen els ordres de la reacció respecte els reactius $A$ i $B$. En la pràctica aquests paràmetres es mesuren experimentalment. La llei de la velocitat s'usa per plantejar una EDO (o a vegades un sistema) fent ús d'una o més d'una de les expressions de la velocitat. Per exemple, si suposem que la concentració inicial de $C$ és 0 i que la de $A$ és $[A]_0$, obtenim

$$[C] = \frac{n_C}{n_A}\left([A]_0 - [A]\right),$$

ja que $[A]_0 - [A]$ són els mols de $A$ consumits per litre. De la mateixa manera

$$[C] = \frac{n_C}{n_B}\left([B]_0 - [B]\right),$$

d'on

$$\frac{1}{n_C}\frac{d[C]}{dt} = k\left([A]_0 - \frac{n_A}{n_C}[C]\right)^a \left([B]_0 - \frac{n_B}{n_C}[C]\right)^b.$$

**77.** Suposem que tenim una reacció $2A + B \to C$ que és d'ordre 2 respecte $A$ i d'ordre 0 respecte $B$, i té $k = 0.025\, mol^{-1}s^{-1}$. Suposem que $A$ i $B$ estan presents amb concentracions inicials 0.3 i 0.5 molar. Trobeu $[C]$

**78.** Suposem que tenim una reacció $2A + B \to C$ que és d'ordre 2 respecte $A$ i d'ordre 0 respecte $B$, i té $k = 0.025\, mol^{-1}s^{-1}$. Suposem que $A$ i $B$ estan presents amb concentracions inicials 0.4 i 0.1 molar. Trobeu $[C]$

**79.** Fent servir transformades de Laplace, resoleu les següents equacions diferencials:

*a)* $y'' + y = te^t$, amb les c. i. $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

*b)* $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}$, amb les c. i. $y(0) = -3$, $y'(0) = 5$

**80.** Fent servir transformades de Laplace, resoleu els següents sistemes d'equacions diferencials:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} y'' + z + y & = & 0 \\ z' + y' & = & 0 \end{array}\right.$ amb les c. i. $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $z(0) = 1$

b) $\left\{\begin{array}{rcl} z'' + y' & = & \cos t \\ y'' - z & = & \sin t \end{array}\right.$ amb les c. i. $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $z(0) = -1$, $z'(0) = -1$

**81.** Sigui la funció:

$$f(t) = \left\{\begin{array}{cl} t & 0 \le t < 1 \\ 2 - t & 1 \le t < 2 \\ 0 & 2 \le t \end{array}\right.$$

a) Expresseu $f(t)$ fent ús de la funció esglaó de Heaviside.

b) Resoleu, fent servir la transformada de Laplace, l'equació diferencial

$$x(t) + \int_0^t x(u)du = f(t)$$