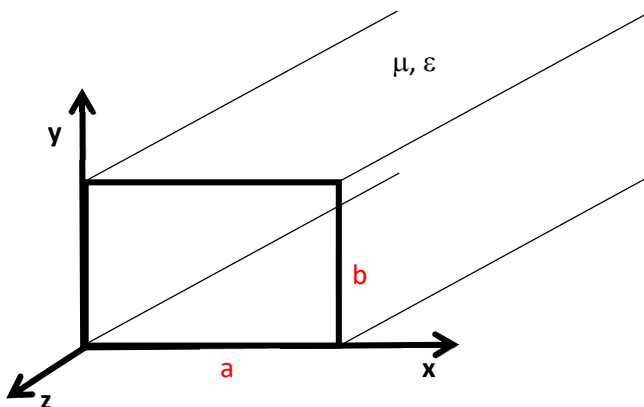


Exemples concrets de guies d'ones

Guia d'ones de secció rectangular

Sigui una guia d'ones de secció rectangular, amb costats de valors a i b paral·lels als eixos x i y . La guia s'estén al llarg de l'eix de les z que és la direcció en la que deixem propagar l'ona. El material de la guia és un dielèctric totalment aïllant de permitivitat i permeabilitat absolutes ϵ i μ respectivament.

Considerem fixada la freqüència angular a un valor: $\omega = 2\pi f$



A partir de μ i ϵ trobarem la velocitat de propagació

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

i a partir d'aquí la k_0

$$k_0 = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (1)$$

Considerem també fixada la longitud d'ona de l'ona propagant-se al llarg de l'eix z : λ_g i per tant la seva $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ associada.

A partir d'aquí obtenim la k_c segons la fórmula que relaciona les k 's d'una guia d'ona

$$k_0^2 = k_c^2 + k_g^2 \quad \text{o bé} \quad k_c = \sqrt{k_0^2 - k_g^2} \quad (2)$$

Intentem trobar les solucions del cas TE (Transversal Electric).

$$e_z(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad h_z(x, y) \neq 0$$

En aquest cas resollem només l'equació de Helmholtz (PH3) per a h_z :

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} = -k_c^2 h_z \quad (3)$$

Donada la geometria rectangular del problema és possible provar solucions separables:

$$h_z(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

Substituint a (PH3) i dividint -ho per $h_z(x, y)$:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -k_c^2 \quad (4)$$

Com que els dos termes del primer membre són funcions de variables diferents, cadascú d'ells només pot ser igual a constants negatives que sumades donin: $-k_c^2$

$$k_1^2 + k_2^2 = k_c^2 \quad (5)$$

És a dir:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k_1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + k_1^2 \cdot X(x) = 0$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -k_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k_2^2 \cdot Y(y) = 0$$

Les solucions més generals d'ambdues són combinacions d'exponencials de nombres imaginaris.

$$X(x) = A \cdot e^{ik_1 x} + B \cdot e^{-ik_1 x}$$

$$Y(y) = C \cdot e^{ik_2 y} + D \cdot e^{-ik_2 y}$$

Finalment

$$h_z(x, y) = X(x) \cdot Y(y) = (Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x})(Ce^{ik_2 y} + De^{-ik_2 y}) \quad (6)$$

On A, B, C i D són constants arbitràries a determinar a partir de les condicions de contorn

De (2) i de (5) podem veure que:

$$k_0^2 = k_c^2 + k_g^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_g^2 \quad (7)$$

És a dir la k_0 és la més gran o igual de les tres i en representa la diagonal d'un prisma de tres costats ortogonals: k_1 , k_2 i k_g .

Substituint aquesta solució general a A1, A2, A3 i A4

$$e_x = -\frac{i}{k_c^2} \left(k_g \frac{\partial e_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) \quad (A1)$$

$$h_y = -\frac{i}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial e_z}{\partial x} + k_g \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) \quad (A2)$$

$$e_y = -\frac{i}{k_c^2} \left(k_g \frac{\partial e_z}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \quad (A3)$$

$$h_x = -\frac{i}{k_c^2} \left(-\omega \varepsilon \frac{\partial e_z}{\partial y} + k_g \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \quad (A4)$$

Tenint en compte que $e_z(x, y) = 0$ (TE), simplifiquem:

$$e_x = -\frac{i}{k_c^2} \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial y} \quad (A1)$$

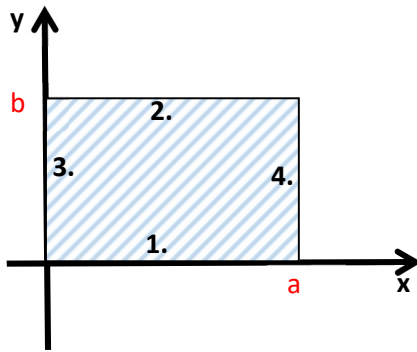
$$h_y = -\frac{i}{k_c^2} k_g \frac{\partial h_z}{\partial y} \quad (A2)$$

$$e_y = +\frac{i}{k_c^2} \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial x} \quad (A3)$$

$$h_x = -\frac{i}{k_c^2} k_g \frac{\partial h_z}{\partial x} \quad (A4)$$

Suposem que la guia d'ona està lateralment rodejada per un material conductor ideal, de manera que $\vec{E}_{fora} = 0$. Imposant llavors la continuïtat de la component tangencial de \vec{E} en cadascun dels segments del contorn:

1. $e_x(x, y = 0) = 0$; 2. $e_x(x, y = b) = 0$; 3. $e_y(x = a, y) = 0$; 4. $e_y(x = 0, y) = 0$



$$\Rightarrow \begin{cases} 1. e_x(x, 0) = -\frac{i}{k_c^2} \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial y} \Big|_{(x,0)} = 0 \\ 2. e_x(x, b) = -\frac{i}{k_c^2} \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial y} \Big|_{(x,b)} = 0 \\ 3. e_y(0, y) = +\frac{i}{k_c^2} \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial x} \Big|_{(0,y)} = 0 \\ 4. e_y(a, y) = +\frac{i}{k_c^2} \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial x} \Big|_{(a,y)} = 0 \end{cases}$$

Si desenvolupem aquestes condicions en detall i les iguaem a 0, veurem que són equivalents a dir:

$$\begin{aligned} 1. C - D &= 0 \\ 2. C \cdot e^{ik_2 b} - D \cdot e^{-ik_2 b} &= 0 \end{aligned}$$

⇓

$$\begin{aligned} C \cdot (e^{ik_2 b} - e^{-ik_2 b}) &= 0 \\ C \cdot 2i \cdot \sin(k_2 b) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. A - B &= 0 \\ 4. A \cdot e^{ik_1 a} - B \cdot e^{-ik_1 a} &= 0 \end{aligned}$$

⇓

$$\begin{aligned} A \cdot (e^{ik_1 a} - e^{-ik_1 a}) &= 0 \\ A \cdot 2i \cdot \sin(k_1 a) &= 0 \end{aligned}$$

Les úniques possibilitats que això doni zero, és que els arguments del sinus siguin angles múltiples de π radians, és a dir:

$$\begin{aligned} k_1 a &= m \cdot \pi & k_2 b &= n \cdot \pi \\ k_1 &= m \frac{\pi}{a} & k_2 &= n \frac{\pi}{b} \end{aligned} \quad (8) \quad (9)$$

amb n i m sencers (**no existeix el (0,0) ! com veurem**)

És a dir, segons (8) i (9) els nombres d'ona k_2 i k_1 estan quantitzats o discretitzats en múltiples de $\frac{\pi}{a}$ i $\frac{\pi}{b}$ respectivament

Com a conseqüència de (5) k_c també està quantitzada

$$k_c = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \sqrt{\left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2} \quad (10)$$

I Segons (7):

$$k_0^2 = k_c^2 + k_g^2 \geq k_c^2 = \left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2 \quad (11)$$

Les diferents solucions que surten per cada parells d'índexs (m, n) s'anomena un *mode de propagació*, $TE_{m,n}$.

En la solució general, per la guia d'ona hi poden passar diferents modes de diverses freqüències així com qualsevol combinació lineal d'ells.

Aplicant les relacions (1) sobre (11):

$$\frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{v} f = k_0 \geq k_c = \sqrt{\left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2} \quad (12)$$

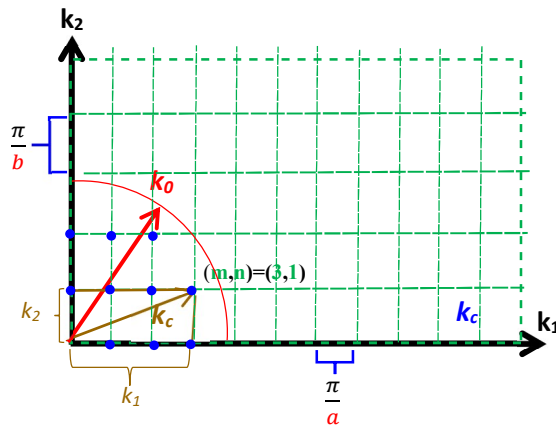
Aquesta desigualtat implica que en una guia d'ones, per una freqüència fixada, f , o el que és el mateix, per una longitud d'ona $\lambda_0 = \frac{v}{f}$ o una k_0 determinada, només hi passen un nombre discret de modes.

Això representat en un pla bidimensional on ortogonal o les dues dimensions són els nombres d'ona k_1 i k_2 (d'unitats=1/m), es converteix en els nodes discrets (m, n) d'una graella bidimensional (de pas $\frac{\pi}{a}$ en la dimensió k_1 i de pas $\frac{\pi}{b}$ en la dimensió k_2)

La condició (11) implica que la distància al centre dels nodes (m, n) possibles no han d'estar per fora d'un quadrant de cercle de radi

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi f}{v}$. Aquests són a la figura següent els punts marcats per •

A la figura n'hi ha 10 modes que compleixen la condició (hi caben)



I són aquests:

$(m,n) = (1,0); (2,0); (3,0); (0,1); (1,1); (2,1); (3,1); (0,2); (1,2); (2,2)$

Concretament el mode $(3,1)$

Està marcat pel vector k_c i on les dues components són k_1 i k_2

Hem exclòs el mode central $(0,0)$, que ja veurem que no existeix.

El mode que està més aprop de l'origen $(k_1, k_2) = (0,0)$ en el nostre cas en el que $(a > b)$ és el $(m,n) = (1,0)$ o també anomenat $TE_{1,0}$.

És a dir, un cop fixades les dimensions de la guia a i b , hi ha una *freqüència mínima de tall*, f_T , i una *longitud d'ona màxima de tall*, $\lambda_{0,T}$, per tal que **almenys un mode** (que serà el mode que marca el límit per sota que en el nostre cas el $(1,0)$) **es propagui per la guia**.

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{v} f \geq \sqrt{\left(1 \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(0 \frac{\pi}{b}\right)^2} = \frac{\pi}{a}$$

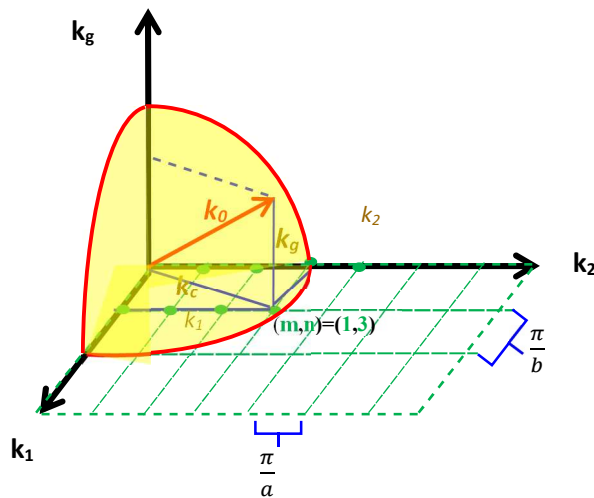
De manera que en la nostra guia d'ones tenim les següents **freqüència i longitud d'ona de tall**:

$$f_T = \frac{v}{2a} \quad \text{i} \quad \lambda_{0,T} = 2a$$

Finalment aplicant (7) veiem que el k_g (vector d'ona en la direcció z de propagació) també està quantitzat:

$$k_g = +\sqrt{k_0^2 - [k_1^2 + k_2^2]} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left[m^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + n^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]}$$

$$k_g^2 = k_0^2 - [k_1^2 + k_2^2] = k_0^2 - \left[m^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + n^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right] \quad (13)$$



D'acord amb (13) Podem veure que k_g es podria representar per l'eix vertical que sobre el mode (m,n) del pla k_1 i k_2 talla a l'esfera de radi k_0

Aplicant aquests valors discretitzats a la $h_z(x,y)$ segons (6) surt la forma de la solució $h_z(x,y)$:

$$\begin{aligned}
 h_z(x,y) &= (Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x})(Ce^{ik_2y} + De^{-ik_2y}) \\
 &= \underbrace{A \cdot C}_{H_0/4} \underbrace{\left(e^{im\frac{\pi}{a}x} + e^{-im\frac{\pi}{a}x}\right)}_{2\cos\left(m\frac{\pi}{a}x\right)} \underbrace{\left(e^{in\frac{\pi}{b}y} + e^{-in\frac{\pi}{b}y}\right)}_{2\cos\left(n\frac{\pi}{b}y\right)} \\
 &= H_0 \cos\left(m\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(n\frac{\pi}{b}y\right) \quad (14)
 \end{aligned}$$

Incís sobre l'inexistència del mode central $(m,n)=(0,0)$

El suposat "mode" central $(m,n)=(0,0)$ no existeix. L'argumentació per a comprovar-ho s'exposa a continuació:

Si $m=0$ i $n=0$ la solució de $h_z(x,y)$ seria trivialment constant

$$h_z(x,y) = H_0 \cos\left(0\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(0\frac{\pi}{b}y\right) = H_0$$

A més per ser TE teniem ja directament també:

$$e_z(x,y) = 0$$

I llavors per les relacions (A1), (A2), (A3) i (A4) tindriem que totes les derivades de $h_z(x,y)$ serien nul·les i per tant no hi hauria camps transversals: $e_x = h_y = e_y = h_x = 0$.

De moment només quedaria un camp magnètic en la direcció z de valor que es propagaria al llarg d'ella i de valor uniforme en cada secció de la guia, és a dir:

$$H_z(x, y, z; t) = h_z(x, y)e^{i(\omega t - k_g z)} = H_0 e^{i(\omega t - k_g z)}.$$

Si la guia està envoltada per un conductor, com se sol fer, llavors a la banda del conductor necessitem tenir $\frac{\partial \vec{H}^+}{\partial t} = 0$ (tal com es va veure en la teoria dels camps en un conductor del document anterior). Plantejem la condició de Maxwell **4)** a la interfície:

$$\hat{n}_x(\vec{H}^+ - \vec{H}^-) = \vec{k}_f,$$

En prendre-li la derivada temporal, es convereix en:

$$\hat{n}_x \left(\frac{\partial \vec{H}^+}{\partial t} - \frac{\partial \vec{H}^-}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{k}_f}{\partial t}$$

suposant $\vec{k}_f = 0$ (cap corrent interfacial en el conductor), llavors això implica:

$$\hat{n}_x \left(\frac{\partial \vec{H}^+}{\partial t} - \frac{\partial \vec{H}^-}{\partial t} \right) = \hat{n}_x \left(0 - \frac{\partial \vec{H}^-}{\partial t} \right) = 0$$

És a dir, la derivada temporal de la H tangencial a la interfície és zero:

$$\frac{\partial H_t^-}{\partial t} = 0.$$

Però la única component que de moment no s'ha fet zero:

$$H_z(x, y, z; t) = H_0 e^{i(\omega t - k_g z)}$$

és justament una component tangencial a la interfície, prenent-li la seva derivada temporal i igualant-la a zero tenim:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (H_0 e^{i(\omega t - k_g z)}) = i H_0 \omega e^{i(\omega t - k_g z)} = 0, \text{ en qualsevol } z \text{ i } t$$

La única solució d'això és que $H_0 = 0$. Per tant també desapareix la única component de camp que s'havia salvat de moment. Conclusió: el cas (m,n)=(0,0) és un camp trivialment nul a tota la guia i per tant aquest cas no existeix.

Per tant el mínim de nodes d'una guia com aquesta és, un si podem enganxar almenys un diferent del (0,0) dins del quadrant. En el nostre exemple en que $a > b$ i per tant el que podem agafar abans és el (1,0)

que té radi $\frac{\pi}{a}$ inferior al de $(0,1) \frac{\pi}{b}$. Però en el cas contrari que $b > a$ el primer mode (el de menor radi k_0) seria $m=0, n=1$, és a dir, $TE_{0,1}$ i no $TE_{1,0}$ per tant $f_T = \frac{v}{2b}$ i $\lambda_{0T} = 2b$. En general escriurem

$$f > f_T = \frac{v}{2a} = \frac{v}{2 \cdot \max(a, b)} \quad ; \quad \lambda < \lambda_{0T} = 2 \cdot \max(a, b)$$

És a dir la longitud d'ona de la radiació ha de ser no molt menor que el doble de la dimensió més gran (a o b) de la guia

En aquest cas tindriem una anomenada *guia monomode*.

Continuem considerant el cas del mode $TE_{m,n}$

Calculem la resta de camps d'aquest mode a partir dels camps en component z que ja sabem:

$$h_z(x, y) = H_0 \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right)$$

$$e_z(x, y) = 0 \quad (TE)$$

A partir d'aquí trobarem la resta de components usant les relacions (A1, A2, A3, A4):

$$e_x = -\frac{i}{k_c^2} \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial y} = +\frac{i}{k_c^2} \omega \mu n \frac{\pi}{b} H_0 \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \quad (15)$$

$$e_y = +\frac{i}{k_c^2} \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial x} = -\frac{i}{k_c^2} \omega \mu m \frac{\pi}{a} H_0 \sin\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \quad (16)$$

$$h_x = -\frac{i}{k_c^2} k_g \frac{\partial h_z}{\partial x} = +\frac{i}{k_c^2} k_g m \frac{\pi}{a} H_0 \sin\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \quad (17)$$

$$h_y = -\frac{i}{k_c^2} k_g \frac{\partial h_z}{\partial y} = +\frac{i}{k_c^2} k_g n \frac{\pi}{b} H_0 \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \quad (18)$$

Reconstruint-ho tot amb $e^{i(\omega t - k_g z)}$, les expressions completes de les 3 components del dos camps són:

$$E_x(x, y, z, t) = H_0 \frac{\omega \mu}{k_c^2} n \frac{\pi}{b} \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) i \exp\left(i(\omega t - k_g z)\right) =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{agafant la part real de:} \\ i \exp\left(i(\omega t - k_g z)\right) \end{array} \right| = -H_0 \frac{\omega \mu}{k_c^2} n \frac{\pi}{b} \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \sin(\omega t - k_g z) \quad (15')$$

$$E_y(x, y, z, t) = -H_0 \frac{\omega \mu}{k_c^2} m \frac{\pi}{a} \sin\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right) i \exp\left(i(\omega t - k_g z)\right) =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{agafant la part real de:} \\ i \exp\left(i(\omega t - k_g z)\right) \end{array} \right| = +H_0 \frac{\omega \mu}{k_c^2} m \frac{\pi}{a} \sin\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \sin(\omega t - k_g z) \quad (16')$$

$$E_z(x, y, z, t) = 0 \quad (TE)$$

$$H_x(x, y, z, t) = H_0 \frac{k_g}{k_c^2} m \frac{\pi}{a} \sin\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \cdot i \exp\left(i(\omega t - k_g z)\right) =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{agafant la part real de:} \\ i \exp\left(i(\omega t - k_g z)\right) \end{array} \right| = -H_0 \frac{k_g}{k_c^2} m \frac{\pi}{a} \sin\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \sin(\omega t - k_g z) \quad (17')$$

$$H_y(x, y, z, t) = H_0 \frac{k_g}{k_c^2} n \frac{\pi}{b} \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) i \exp\left(i(\omega t - k_g z)\right) =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{agafant la part real de:} \\ i \exp\left(i(\omega t - k_g z)\right) \end{array} \right| = -H_0 \frac{k_g}{k_c^2} n \frac{\pi}{b} \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \sin(\omega t - k_g z) \quad (18')$$

$$H_z(x, y, z, t) = H_0 \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \cdot \exp\left(i(\omega t - k_g z)\right)$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{agafant la part real de:} \\ \exp\left(i(\omega t - k_g z)\right) \end{array} \right| = H_0 \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \cos(\omega t - k_g z) \quad (14')$$

Essent segons (13)

$k_g = k_{g,m,n} = +\sqrt{k_0^2 - (k_1^2 + k_2^2)} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - (k_1^2 + k_2^2)}$ La velocitat de propagació al llarg de la guia per a aquest mode TE_{m,n} és:

$$v_f = \frac{\omega}{k_{g,m,n}} = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - (k_1^2 + k_2^2)}} = \frac{v}{\sqrt{1 - (k_1^2 + k_2^2)\left(\frac{v}{\omega}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_0^2}}} > v$$

És el que s'anomena velocitat de fase.

Si el material de la guia fos el buit o l'aire (envoltat de una camisa conductora per a poder fer el confinament), tindríem $v=c$ i per tant sorprenentment:

$$v_f > c \quad !!!$$

Però estiguem tranquils, el que hem trobat és la velocitat de propagació de la fase (ona), no la de la informació. Pensem que una ona sola sinusoidal no transmet cap informació ja que tota l'estona té la mateixa forma repetitiva i avorrida.

Si volem transportar informació a través de la guia, cal modular aquesta ona en de forma no repetitiva, la qual cosa significa fer com a mínim polsos, cosa que només es pot aconseguir barrejant ones de diferents freqüències o modes dins la guia. Generalment cada k o freqüència ω

té una velocitat de propagació diferent en cada dielèctric (això és perquè la permitivitat ε depèn de la freqüència). És el que s'anomena dispersió en la velocitat.

De manera que hi ha una certa funció no lineal entre ω i k : $\omega(k)$

La velocitat a la qual es mou el pols és la velocitat de grup i no la de fase, i es calcula com:

$$v_{grup} \equiv \frac{d\omega}{dk}$$

Calculem-la:

$$\begin{aligned} v_{grup} &\equiv \frac{d\omega}{dk_{g,m,n}} = \frac{1}{\frac{dk_{g,m,n}}{d\omega}} = \left(\frac{d\sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - (k_1^2 + k_2^2)}}{d\omega} \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{2\frac{\omega}{v^2}}{2\sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - (k_1^2 + k_2^2)}} \right)^{-1} = \frac{v^2 \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - (k_1^2 + k_2^2)}}{\omega} = \frac{v^2}{v_f} < v \quad \text{ja que } v_f > v \end{aligned}$$

I la velocitat de grup no viola el principi de causalitat de la relativitat especial.

Potència tramesa per l'ona en el mode TE_{m,n}

La potència tramesa per l'ona per unitat de superfície perpendicular a la direcció de propagació, ve donada pel vector de Poynting:

$$\vec{S}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z, t) \times \vec{H}(x, y, z, t)$$

Tenint en compte la dependència temporal, el que interessa realment és $\vec{P}_{\vec{r}}(x, y, z)$, resultant de fer el promig temporal de $\vec{P}(x, y, z)$ durant un període $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\vec{P}_{\vec{r}}(x, y, z) \equiv \langle \vec{P}(x, y, z, t) \rangle_T = \langle \vec{E}(x, y, z, t) \times \vec{H}(x, y, z, t) \rangle_T$$

Tenint en compte que els dos camps en la component real són:

$$\vec{E}(x, y, z, t) =$$

$$\left(\underbrace{-H_0 \frac{\omega\mu \cdot n \frac{\pi}{b}}{k_c^2} \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \hat{x}}_{e'_x(x,y)} + \underbrace{H_0 \frac{\omega\mu \cdot m \frac{\pi}{a}}{k_c^2} \sin\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \hat{y}}_{e'_y(x,y)} \right) \sin(\omega t - k_g z)$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) =$$

$$\left(\underbrace{-H_0 \frac{k_g \cdot m \frac{\pi}{a}}{k_c^2} \sin\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \hat{x}}_{h'_x(x,y)} - \underbrace{H_0 \frac{k_g \cdot n \frac{\pi}{b}}{k_c^2} \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \hat{y}}_{h'_y(x,y)} \right) \sin(\omega t - k_g z) \\ + \underbrace{H_0 \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \hat{z}}_{h'_z(x,y)} \cos(\omega t - k_g z)$$

Vist això construïm el vector de Poynting de la guia d'ona en mode TE_{m,n} com:

$$\begin{aligned} \vec{S}(x, y, z, t) &= \vec{E}(x, y, z, t) \times \vec{H}(x, y, z, t) = \\ &= \left(\hat{x} e'_y(x, y) h'_z(x, y) - \hat{y} e'_x(x, y) h'_z(x, y) \right) \sin(\omega t - k_g z) \cos(\omega t - k_g z) \\ &\quad + \hat{z} \left(e'_x(x, y) h'_y(x, y) - e'_y(x, y) h'_x(x, y) \right) \sin^2(\omega t - k_g z) \quad (19) \end{aligned}$$

Com que el que interessa és la potència¹ mitjana durant un període $T = \frac{2\pi}{\omega}$, cal fer el càlcul d'aquesta com:

$$\langle \vec{S}(x, y, z, t) \rangle_T \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(x, y, z, t) \cdot dt$$

¹ per unitat de superfície

Deixant els únics factors de (19) que depenen del temps a dins la integral, veiem que apareixen dos tipus d'integrals temporals.

1. La primera és la que apareix en els termes en \hat{x} i \hat{y} de $\langle \vec{S}(x, y, z, t) \rangle_T$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t - k_g z) \cos(\omega t - k_g z) \cdot dt$$

Que fent el canvi de la variable t per la s definida com: $s = \sin(\omega t - k_g z)$ i llavors: $ds = \omega \cos(\omega t - k_g z) dt$, de manera que el seu resultat és:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T\omega} \int_{\sin(0-k_g z)}^{\sin(\omega T - k_g z)} s \cdot ds &= \frac{1}{T\omega} \left[\frac{s^2}{2} \right]_{\sin(0-k_g z)}^{\sin(\omega T - k_g z)} \\ &= \frac{1}{2T\omega} \left[\sin^2 \left(\underbrace{\omega T}_{2\pi} - k_g z \right) - \sin^2(0 - k_g z) \right] = 0 \end{aligned}$$

És zero, ja que el sin d'un angle és el mateix si a l'angle li sumem 2π o una volta sencera.

2. La segona és la que apareix en el terme en \hat{z} de $\langle \vec{S}(x, y, z, t) \rangle_T$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - k_g z) \cdot dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2(\omega t - k_g z))}{2} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2T} \underbrace{\int_0^T \cos(2(\omega t - k_g z)) dt}_{0, ja que \omega = \frac{2\pi}{T}} = \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Per tant finalment:

$$\langle \vec{S}(x, y, z, t) \rangle_T = \hat{z} \left(\mathbf{e}'_x(x, y) \mathbf{h}'_y(x, y) - \mathbf{e}'_y(x, y) \mathbf{h}'_x(x, y) \right) \frac{1}{2}$$

Com es pot comprovar a l'expressió que hem obtingut. La potència mitjana per unitat de secció es propaga només en la direcció z de la guia, la qual cosa resulta totalment raonable.

Concretament i en resum:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}(x, y, z, t) \rangle_T &= \\ &= \hat{z} H_0^2 \frac{\omega \mu}{k_c^2 k_c^2} \frac{k_g}{2} \frac{1}{2} \left(\left(n \frac{\pi}{b} \right)^2 \cos^2 \left(m \frac{\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(n \frac{\pi}{b} y \right) + \left(m \frac{\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(m \frac{\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(n \frac{\pi}{b} y \right) \right) \quad (20) \end{aligned}$$

Exemple de càlcul concret, mode TE_{1,0}: m=1, n=0

En aquest cas, els camps s'escriuen:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \hat{y} H_0 \frac{a}{\pi} \omega \mu \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - k_g z)$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \left[-\hat{x} H_0 \frac{a}{\pi} k_g \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - k_g z) + \hat{z} H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - k_g z) \right]$$

I d'aquí la densitat de potència mitjana, per unitat de superfície, en el sentit de la guia és:

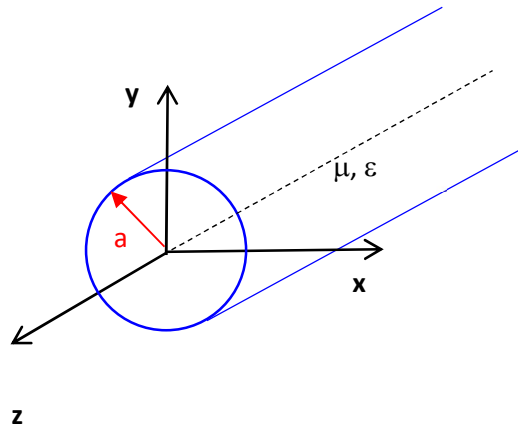
$$\begin{aligned} \langle \vec{S}(x, y, z, t) \rangle_T &= \\ &= \hat{z} H_0^2 \frac{\omega \mu k_g}{k_c^4} \frac{1}{2} \left(\left(1 \frac{\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(1 \frac{\pi}{a} x\right) \cos^2\left(0 \frac{\pi}{b} y\right) - \left(0 \frac{\pi}{b}\right)^2 \cos^2\left(1 \frac{\pi}{a} x\right) \sin^2\left(0 \frac{\pi}{b} y\right) \right) \\ &= \hat{z} H_0^2 \frac{\omega \mu \sqrt{k_0^2 - \left(1^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + 0^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right)}}{\left(\sqrt{1^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + 0^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}\right)^4} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) = \\ &= \hat{z} \frac{H_0^2}{2} \frac{\omega \mu \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^4} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) = \hat{z} \frac{H_0^2}{2} \frac{\omega \mu \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) \quad (21) \end{aligned}$$

I finalment calcularem la potència total tramesa a través de la guia, que seria aquesta densitat (21), integrada al llarg i ample de la secció rectangular d'aquesta:

$$\begin{aligned} \langle P_{tr} \rangle_{1,0} &= \frac{H_0^2}{2} \frac{\omega \mu \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \underbrace{\int_0^b dy}_{\substack{b \\ \frac{a}{2}}} \underbrace{\int_0^a dx}_{\frac{a}{2}} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) = H_0^2 \omega \mu \frac{b \cdot a^3}{4\pi^2} \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \\ &= \mu \frac{H_0^2}{2} b \cdot a \cdot f a^2 \sqrt{\left(\frac{2f}{v}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

Guia d'ones cilíndrica (de secció circular)

Sigui una guia d'ones de cilíndrica de secció circular de radi a . Novament la guia s'estén al llarg de l'eix de les z que és la direcció en la que deixem propagar l'ona.



Considerem fixada la freqüència angular ω i a partir de μ i ϵ la velocitat de propagació

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

i llavors obtenim la k_0

$$k_0 = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (1)$$

Fixem també la longitud d'ona de l'ona propagant-se al llarg de l'eix z : λ_g i per tant la seva $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ associada.

llavors obtenim la k_c segons la fórmula d'abans:

$$k_0^2 = k_c^2 + k_g^2 \quad \text{o bé} \quad k_c = \sqrt{k_0^2 - k_g^2} \quad (2)$$

Per a trobar les solucions de l'equació de l'ona guiada:

$$(3) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) M(x, y) + k_c^2 M(x, y) = 0$$

Ara cal transformar la Laplaciana a coordenades cilíndriques, de manera que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial M(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 M(r, \varphi)}{\partial z^2}}_0 + k_c^2 M(r, \varphi) = 0$$

O sigui:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 M(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial M(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k_c^2 M(r, \varphi) = 0$$

Donada la simetria cilíndrica del problema provarem solucions separables del tipus:

$$M(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$$

Ho posem a (4) , dividim per M i multipliquem per r^2

$$\underbrace{\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + k_c^2 r^2}_{\text{no depèn de } \varphi} + \underbrace{\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}}_{\text{no depèn de } r} = 0$$

Ja tenim l'equació separada en les dues variables r i φ

Com que sumats donen zero, cadascú dels dos termes són iguals a una mateixa constant γ canviada de signe respectivament:

Concretament l'equació de la part angular $\Phi(\varphi)$ és:

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = \gamma$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = \gamma \Phi(\varphi) \quad (6)$$

La solució general de la qual és:

$$\Phi(\varphi) = A e^{\sqrt{\gamma}\varphi} + B e^{-\sqrt{\gamma}\varphi} \quad (7)$$

Però com que $\Phi(\varphi)$ ha de ser univaluada, és a dir no pot tenir valors diferents per a un mateix angle φ després de donar una o diverses voltes la única possibilitat és que sigui periòdica de període $\frac{2\pi}{|\sqrt{\gamma}|}$ la qual cosa obliga que $\sqrt{\gamma} = \pm im$ i $\gamma = -m^2$

És a dir un exponent imaginari pur igual a un nombre sencer m de vegades i . En aquest cas:

$$\Phi(\varphi) = A e^{im\varphi} + B e^{-im\varphi} \quad (8)$$

Substituint aquesta solució general a:

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + k_c^2 r^2 + \underbrace{\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}}_{-m^2} = 0$$

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + k_c^2 r^2 - m^2 = 0$$

O bé:

$$r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial R(r)}{\partial r} + (k_c^2 r^2 - m^2) R(r) = 0$$

Fent el canvi de variable r a $u \equiv k_c r$

$$u^2 \frac{\partial^2 R(u)}{\partial u^2} + u \frac{\partial R(u)}{\partial u} + (u^2 - m^2) R(u) = 0 \quad (9)$$

Les solucions d'aquesta equació radial no es poden determinar analíticament però l'equació (9) és famosa, és l'anomenada *equació de Bessel* i les seves solucions per m sencer estan tabulades i descrites per tot arreu.

I són $J_m(u)$ i $Y_m(u)$ anomenades respectivament funcions de Bessel de 1a i de 2a espècie, que són dues solucions linealment independents quan m és sencer. Per tant la solució general a la equació (9) és:

$$R(k_c r) = C J_m(k_c r) + D Y_m(k_c r)$$

Però el terme $D Y_m(k_c r)$ no té sentit físic ja que les funcions de Bessel de 2a. Espècie $Y_m(u)$ tendeixen a $-\infty$ quan u tendeix a 0, per tant hem de fer $D=0$ i la solució més general és de l'equació de la guia és:

$$M(r, \varphi) = (A e^{im\varphi} + B e^{-im\varphi}) J_m(k_c r)$$

Funcions de Bessel de 1a espècie.

$J_\alpha(x)$ són solucions de l'equació de Bessel:

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_\alpha(x) + x \frac{d}{dx} J_\alpha(x) + (x^2 - \alpha^2) J_\alpha(x) = 0 \quad (10)$$

Aplicarem el *mètode de Frobenius* que consisteix en provar una solució en forma de desenvolupament en sèrie de potències (Taylor?), només amb potències una de cada dos, a veure que passa (trobarem una recurrència pels coeficients):

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} x^{2n+\alpha}$$

Substituint-la a l'equació de Bessel (10):

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} x^{2n+\alpha} + x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} x^{2n+\alpha} + (x^2 - \alpha^2) \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} x^{2n+\alpha} = 0$$

Fent les derivades dels monomis:

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)x^{2n+\alpha-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(2n+\alpha)x^{2n+\alpha-1} + (x^2 - \alpha^2) \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}x^{2n+\alpha} = 0$$

Introduint els productes per x i per x^2 de fora, a dins dels sumatoris:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)x^{2n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(2n+\alpha)x^{2n+\alpha} - \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}x^{2n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}x^{2(n+1)+\alpha} = 0$$

Igualant tots els coeficients dels termes de x amb la potència, $x^{2n+\alpha}$

$$A_{2n}[(2n+\alpha)(2n+\alpha-1) + (2n+\alpha) - \alpha^2] = -A_{2(n-1)}$$

Que, tal com preteníem, ens dona una recurrència per a trobar els diferents termes del desenvolupament polinòmic de $J_{\alpha}(x)$

$$A_{2n} = \frac{-1 \cdot A_{2(n-1)}}{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1) + (2n+\alpha) - \alpha^2} = \frac{-1 \cdot A_{2(n-1)}}{(2n+\alpha)^2 - \alpha^2} = \frac{-1 \cdot A_{2(n-1)}}{(2n+2\alpha)2n} = \frac{-1}{4} \frac{A_{2(n-1)}}{(n+\alpha)n}$$

Usant la mateixa relació successivament per a escriure cada A_{2k} en funció de la $A_{2(k-1)}$ fins arribar a la A_0 que és la primera:

$$A_{2n} = \frac{-1}{4} \frac{A_{2(n-1)}}{(n+\alpha) \cdot n} = \frac{(-1)^2}{4^2} \frac{A_{2(n-2)}}{(n+\alpha)(n-1+\alpha) \cdot n(n-1)} = \dots = \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{A_0}{(n+\alpha)(n-1+\alpha) \dots \alpha \cdot n!}$$

Finalment, multiplicant i dividint per $2^{\alpha}\Gamma(\alpha)$:

$$J_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}x^{2n+\alpha} = \underbrace{A_0 2^{\alpha}\Gamma(\alpha)}_{\text{si } A_0=2^{-\alpha}/\Gamma(\alpha)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{(n+\alpha)(n-1+\alpha) \dots \alpha \cdot \Gamma(\alpha)}_{\Gamma(n+\alpha+1)} \cdot n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}$$

Fent $A_0 = 2^{-\alpha}/\Gamma(\alpha)$, surt la típica forma de les funcions de Bessel de 1a espècie que hi ha per ex a la Wikipedia, on $\Gamma(n+\alpha+1)$ és l'anomenada *funció gamma*.

Gamma te la principal propietat següent: $\Gamma(n+\alpha+1) = (n+\alpha)\Gamma(n+\alpha)$ i si apliquem aquesta propietat de forma recurrent essent $\alpha=m$ sencer, com passa a (9), llavors Γ coincideix amb el factorial de $n+m$, és a dir: $\Gamma(n+m+1) = (n+m)!$

Bessel functions of the first kind: J_α [edit]

Bessel functions of the first kind, denoted as $J_\alpha(x)$, are solutions of Bessel's differential equation. For integer or positive α , Bessel functions of the first kind are finite at the origin ($x = 0$); while for negative non-integer α , Bessel functions of the first kind diverge as x approaches zero. It is possible to define the function by its [series expansion](#) around $x = 0$, which can be found by applying the [Frobenius method](#) to Bessel's equation:[3]

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha},$$

where $\Gamma(z)$ is the [gamma function](#), a shifted generalization of the [factorial](#) function to non-integer values. The Bessel function of the first kind is an [entire function](#) if α is an integer, otherwise it is a [multivalued function](#) with singularity at zero.

The graphs of Bessel functions look roughly like oscillating sine or cosine functions that decay proportionally to $x^{-\frac{1}{2}}$ (see also their asymptotic forms below), although their roots are not generally periodic, except asymptotically for large x . (The series indicates that $-J_1(x)$ is the derivative of $J_0(x)$, much like $-\sin x$ is the derivative of $\cos x$; more generally, the derivative of $J_n(x)$ can be expressed in terms of $J_{n \pm 1}(x)$ by the identities [below](#).)

For non-integer α , the functions $J_\alpha(x)$ and $J_{-\alpha}(x)$ are linearly independent, and are therefore the two solutions of the differential equation. On the other hand, for integer order n , the following relationship is valid (the gamma function has simple poles at each of the non-positive integers):[4]

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

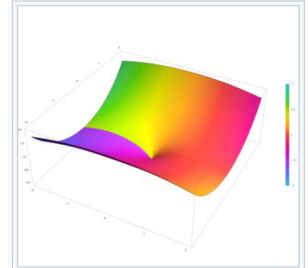
This means that the two solutions are no longer linearly independent. In this case, the second linearly independent solution is then found to be the Bessel function of the second kind, as discussed below.

Bessel's integrals [edit]

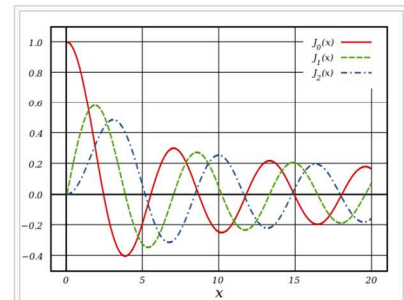
Another definition of the Bessel function, for integer values of n , is possible using an integral representation:[5]

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\tau - x \sin \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{i(n\tau - x \sin \tau)} d\tau,$$

which is also called Hansen-Bessel formula.[6]



Plot of the Bessel function of the first kind $J_n(z)$ with $n=0.5$ in the complex plane from $-2-2i$ to $2+2i$ with colors created with Mathematica 13.1 function ComplexPlot3D



Plot of Bessel function of the first kind, $J_\alpha(x)$, for integer orders $\alpha = 0, 1, 2$

Com veiem les funcions de Bessel són oscil·lants no harmòniques ni periòdiques, i esmorteïdes.

Com calcular els camps transversals en coordenades polars?

En coordenades transversals cartesianes (x,y), els camps transversals es calculen amb les relacions (Ak) com:

$$e_x = -\frac{i}{k_c^2} \left(k_g \frac{\partial e_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) \quad (A1)$$

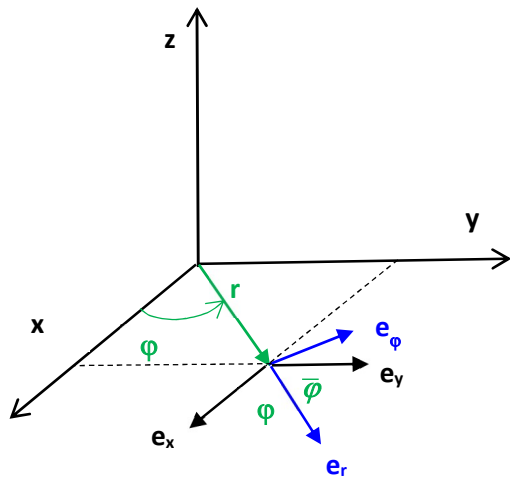
$$e_y = -\frac{i}{k_c^2} \left(k_g \frac{\partial e_z}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \quad (A3)$$

$$h_x = -\frac{i}{k_c^2} \left(-\omega \varepsilon \frac{\partial e_z}{\partial y} + k_g \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \quad (A4)$$

$$h_y = -\frac{i}{k_c^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial e_z}{\partial x} + k_g \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) \quad (A2)$$

Ja sabem que en els mode TE només sobreviuen els segons termes (de h_z) del membre de la dreta, però contràriament en TM només els de l'esquerra (e_z).

Al passar dels vectors camp en coordenades cartesianes als vectors unitaris en polars: r i φ , cal tenir en compte els canvi deguts a la rotació en l'angle φ al voltant de l'eix z , tal i com es veu a la figura (usem com a exemple el camp elèctric):



$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$

En canvi per a passar de polars a cartesianes hem d'aplicar la rotació inversa (canviem φ per $-\varphi$):

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\varphi \end{pmatrix}$$

La rotació inversa és la mateixa que serveix per a transformar les derivades respecte les coordenades cartesianes (y, x) cap a les derivades respecte a les coordenades polars (φ i r).

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

(fixem-nos que $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ necessita a més d'un factor d'escala $\frac{1}{r}$ ja que és un angle)

Així doncs, pel cas **TE**, i reescrivint les relacions (Ak) fent $e_z = 0$:

$$e_x = -\frac{i}{k_c^2} \left(+\omega\mu \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) \quad (A1)$$

$$e_y = -\frac{i}{k_c^2} \left(-\omega\mu \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \quad (A3)$$

$$h_x = -\frac{i}{k_c^2} \left(+k_g \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \quad (A4)$$

$$h_y = -\frac{i}{k_c^2} \left(+k_g \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) \quad (A2)$$

Obtenim els vectors camp en polars:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = -\frac{i\omega\mu}{k_c^2} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial h_z / \partial y \\ -\partial h_z / \partial x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{cases} -\frac{i\omega\mu}{k_c^2} \left(\cos\varphi \frac{\partial h_z}{\partial y} - \sin\varphi \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) = \boxed{-\frac{i\omega\mu}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial h_z}{\partial \varphi}}_{TE} = e_r \\ +\frac{i\omega\mu}{k_c^2} \left(\sin\varphi \frac{\partial h_z}{\partial y} + \cos\varphi \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) = \boxed{+\frac{i\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial h_z}{\partial r}}_{TE} = e_\varphi \end{cases} \\ \begin{pmatrix} h_r \\ h_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = -\frac{ik_g}{k_c^2} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial h_z / \partial x \\ \partial h_z / \partial y \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} -\frac{ik_g}{k_c^2} \left(\cos\varphi \frac{\partial h_z}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) = \boxed{-\frac{ik_g}{k_c^2} \frac{\partial h_z}{\partial r}}_{TE} = h_r \\ +\frac{ik_g}{k_c^2} \left(-\sin\varphi \frac{\partial h_z}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) = \boxed{+\frac{ik_g}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial h_z}{\partial \varphi}}_{TE} = h_\varphi \end{cases} \end{aligned}$$

Fent idènticament pel cas **TM**, i reescriuint les relacions (A_k) fent $h_z = 0$:

$$e_x = -\frac{i}{k_c^2} \left(+k_g \frac{\partial e_z}{\partial x} \right) \quad (A1)$$

$$e_y = -\frac{i}{k_c^2} \left(+k_g \frac{\partial e_z}{\partial y} \right) \quad (A3)$$

$$h_x = -\frac{i}{k_c^2} \left(-\omega\varepsilon \frac{\partial e_z}{\partial y} \right) \quad (A4)$$

$$h_y = -\frac{i}{k_c^2} \left(+\omega\varepsilon \frac{\partial e_z}{\partial x} \right) \quad (A2)$$

Obtenim els vectors camp en polars:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial / \partial y \\ \partial / \partial x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} e_r \\ e_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = -\frac{ik_g}{k_c^2} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial e_z / \partial x \\ -\partial e_z / \partial y \end{pmatrix} = \\
&= \begin{cases} -\frac{ik_g}{k_c^2} \left(\cos\varphi \frac{\partial e_z}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial e_z}{\partial y} \right) = \boxed{-\frac{ik_g}{k_c^2} \frac{\partial e_z}{\partial r} = e_r}_{TM} \\ -\frac{ik_g}{k_c^2} \left(-\sin\varphi \frac{\partial e_z}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial e_z}{\partial y} \right) = \boxed{-\frac{ik_g}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial e_z}{\partial \varphi} = e_\varphi}_{TM} \end{cases} \\
\begin{pmatrix} h_r \\ h_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = -\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial e_z / \partial y \\ \partial e_z / \partial x \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} +\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \left(+\cos\varphi \frac{\partial e_z}{\partial y} - \sin\varphi \frac{\partial e_z}{\partial x} \right) = \boxed{+\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial e_z}{\partial \varphi} = h_r}_{TM} \\ -\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \left(+\sin\varphi \frac{\partial e_z}{\partial y} + \cos\varphi \frac{\partial e_z}{\partial x} \right) = \boxed{-\frac{i\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial e_z}{\partial r} = h_\varphi}_{TM} \end{cases}
\end{aligned}$$

Camps elèctric i magnètic en guies cilíndriques

Tornem a les solucions del nostre problema, però per a cada component dels camps. Ho escrivim només per a les components longitudinals o z:

$$e_z(r, \varphi) = (A e^{im\varphi} + B e^{-im\varphi}) J_m(k_c r)$$

$$h_z(r, \varphi) = (C e^{im\varphi} + D e^{-im\varphi}) J_m(k_c r)$$

Considerem els modes TE $e_z = 0$ Per tant $h_z(r, \varphi) \neq 0$

Considerant la guia rodejada de conductor i anul·lant la component tangencial del camp e a la interfície $r=a$ tenim:

$$e_\varphi(r = a, \varphi) = \frac{i}{k_c^2} \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$$

Tenint en compte que:

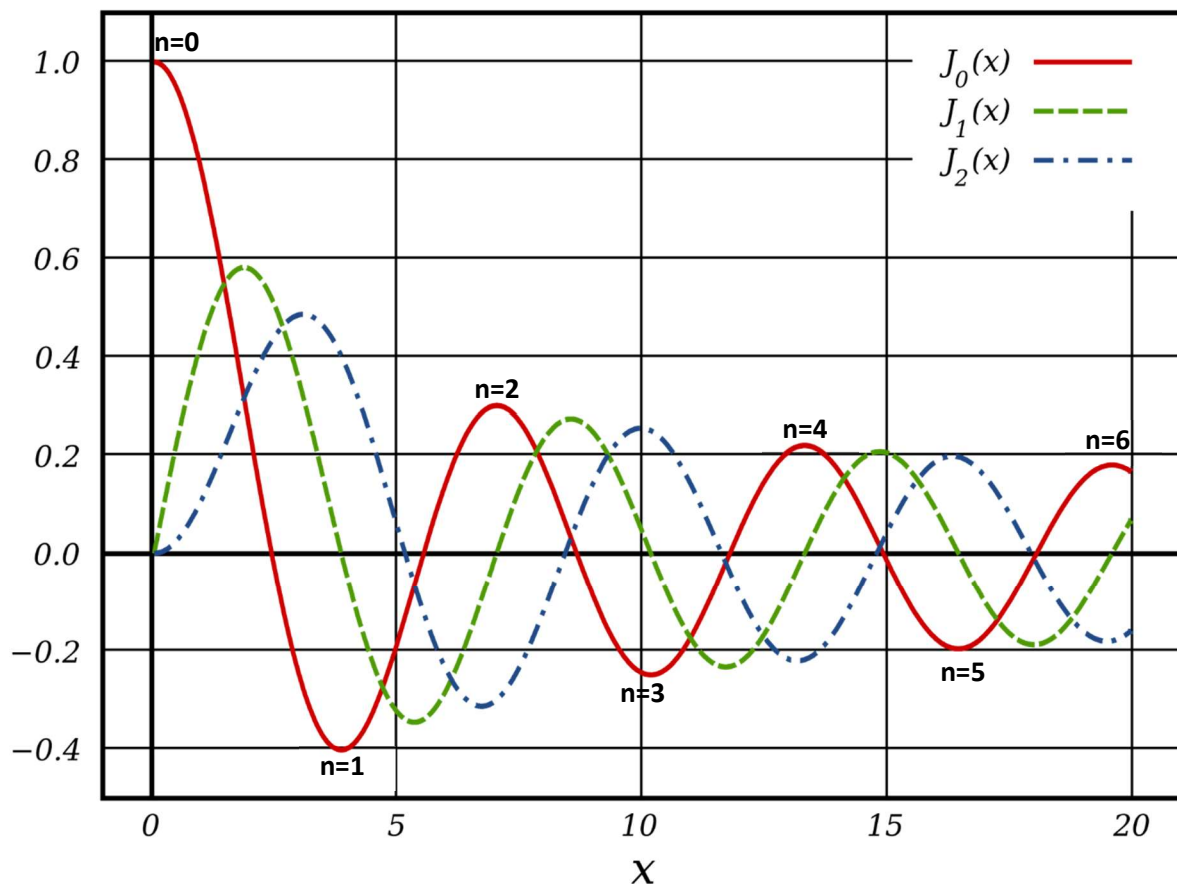
$$h_z(r, \varphi) = (C e^{im\varphi} + D e^{-im\varphi}) J_m(k_c r)$$

Per tant hem d'imposar que

$$\left. \frac{\partial(J_m(k_c r))}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$

La forma de les funcions de Bessel te pendent zero en els seus màxims i mínims, que se situen en determinats valors discrets de $u = k_c r$

Les de $J_0(x)$ estan marcades a la figura:



En general la coordenada d'aquests punts l'anomenem $x_{m,n}$

El mode $n=0$ i $m=0$ no existeix (seria constant a tot el volum).

Els modes són una combinació dels dos índexs \mathbf{m} , que indica la \mathbf{m} de la funció angular, i la funció de Bessel J_m que hem d'agafar

$$h_z(r, \varphi) = (C e^{im\varphi} + D e^{-im\varphi}) J_m(k_c r)$$

i la \mathbf{n} que indica quin màxim o mínim $x_{m,n}$ de J_m agafem

La condició del node n és que $k_c a$ sigui un dels màxims o mínims $x_{m,n}$

$$k_{c(m,n)} a = x_{m,n}$$

$$k_{c(m,n)} = \frac{x_{m,n}}{a}$$

Els nodes $x_{m,n}$ els podem mirar a la gràfica però també estan tabulats:

		m			
		0	1	2	3
n	1	3,832	1,841	3,054	4,201
	2	7,016	5,331	6,706	8,015
	3	10,173	8,536	9,469	11,346

Com que

$$\left(\frac{2\pi f}{v}\right)^2 = k_0^2 = k_c^2 + k_g^2 \quad \text{o bé} \quad k_c = \sqrt{k_0^2 - k_g^2} \quad (2)$$

Pel cas de k mínima en direcció z : $k_g = 0$

Obtenim la freqüència mínima per a cada mode $TE_{m,n}$:

$$\frac{2\pi f}{v} \geq k_0 = k_{c(m,n)} = \frac{x_{m,n}}{a}$$

La menor freqüència per la qual hi ha un sol mode, o sigui la freqüència de tall, és per $m=1$ i $n=1$ tal com es pot veure a la figura i a la taula:

$$x_{1,1}=1,841$$

$$f_c = \frac{v}{2\pi} \frac{x_{1,1}}{a} = \frac{v}{2\pi} \frac{1,841}{a}$$

Transmissió de modes TEM

Si tinguéssim transmissió de modes TEM:

Hauríem de tenir: $e_z = 0$ i alhora $h_z = 0$

Per tant, segons les relacions (Ak):

$$e_x = -\frac{i}{k_c^2} \left(k_g \frac{\partial e_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) \quad (A1)$$

$$e_y = -\frac{i}{k_c^2} \left(k_g \frac{\partial e_z}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \quad (A3)$$

$$h_x = -\frac{i}{k_c^2} \left(-\omega \varepsilon \frac{\partial e_z}{\partial y} + k_g \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \quad (A4)$$

$$h_y = -\frac{i}{k_c^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial e_z}{\partial x} + k_g \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) \quad (A2)$$

Els termes dels parèntesis són tots zero. Llavors només són possibles solucions no nul·les per a e_x , e_y , h_x i h_y si també k_c és zero.

Com que:

$$k_0^2 = \underbrace{k_c^2}_0 + k_g^2$$

Resulta que llavors :

$$k_g = k_0 = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

I com que $k_c = 0$ no hi ha modes quantitzats de propagació i qualsevol freqüència és possible, fins i tot la $\omega = 0$. És a dir, es diu que la freqüència de tall dels modes TEM és zero.

Com que $e_z = 0$ i $h_z = 0$ tots els camps són perpendiculars a l'eix i per tant només tenen dues components, \hat{x} i \hat{y} .

$$\vec{e}(x, y) = e_x(x, y)\hat{x} + e_y(x, y)\hat{y} \quad i \quad \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}(x, y) \cdot e^{i(\omega t - k_g z)} \quad (1)$$

$$\vec{h}(x, y) = h_x(x, y)\hat{x} + h_y(x, y)\hat{y} \quad i \quad \vec{H}(x, y, z, t) = \vec{h}(x, y) \cdot e^{i(\omega t - k_g z)} \quad (2)$$

Les relacions (A1, A3, A4 i A2) no són ara aplicables ja que representen una indeterminació $\frac{0}{0}$.

Enlloc d'això partirem de les formes (1) possibles dels camps transversals:

I els substituïm a les 4 equacions de Maxwell:

$$\bullet \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} = 0 \quad (G1)$$

$$\bullet \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} = 0 \quad (G2)$$

$$\bullet \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} +i k_g e_y = -i\omega\mu h_x \Rightarrow h_x = -\frac{k_g}{\omega\mu} e_y \end{cases} \quad (G3)$$

$$\bullet \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} -i k_g e_x = -i\omega\mu h_y \Rightarrow h_y = +\frac{k_g}{\omega\mu} e_x \end{cases} \quad (G4)$$

$$\bullet \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} = 0 \text{ redundant} \end{cases} \quad (G5)$$

$$\bullet \vec{\nabla} \times \vec{H} = +\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} +i k_g h_y = +i\omega\varepsilon e_x \Rightarrow h_y = +\frac{\omega\varepsilon}{k_g} e_x \end{cases} \quad (G6)$$

$$\bullet \vec{\nabla} \times \vec{H} = +\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} -i k_g h_x = +i\omega\varepsilon e_y \Rightarrow h_x = -\frac{\omega\varepsilon}{k_g} e_y \end{cases} \quad (G7)$$

$$\bullet \vec{\nabla} \times \vec{H} = +\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = 0 \text{ redundant} \end{cases} \quad (G8)$$

Però com hem dit: $k_g = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$, i substituint això a (G3) o (G7):

$$h_x = -\frac{\omega \sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega \cdot \mu} e_y = -\frac{e_y}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} = -\frac{e_y}{\eta}$$

$$\text{On } \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

És el que ja havíem anomenat *impedància característica* del medi dielèctric que hi ha entre les dues capes del cable coaxial.

Substituint-ho ara a (G4) o (G6), surt una relació similar per a h_y

$$h_y = +\frac{\omega \sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega\mu} e_x = \frac{e_x}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} = \frac{e_x}{\eta}$$

És a dir:

$$\vec{h}(x, y) = -\frac{e_y(x, y)}{\eta} \hat{x} + \frac{e_x(x, y)}{\eta} \hat{y} \quad (3)$$

- Calculant el producte escalar: $\vec{E} \cdot \vec{H}$ i usant les formes (1) i (3) veiem que dona zero i, per tant, \vec{E} i \vec{H} són perpendiculars, la qual cosa ja sabem que ha de passar sempre.
- Calculem el vector de Poynting:

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \vec{H} &= (E_y H_z - E_z H_y) \hat{x} + (E_z H_x - E_x H_z) \hat{y} + (E_x H_y - E_y H_x) \hat{z} \\ &= |per TEM| = (E_x H_y - E_y H_x) \hat{z} \\ &= \left(\frac{e_x(x, y)^2 + e_y(x, y)^2}{\eta} \right) e^{2i(\omega t - k_g z)} \hat{z} \end{aligned}$$

És a dir, la direcció de propagació de l'energia és el propi eix de la guia.

- Calculem ara el rotacional del camp elèctric \vec{e} :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{e} &= \left(\underbrace{\frac{\partial e_z}{\partial y}}_0 - \underbrace{\frac{\partial e_y}{\partial z}}_0 \right) \hat{x} + \left(\underbrace{\frac{\partial e_x}{\partial z}}_0 - \underbrace{\frac{\partial e_z}{\partial x}}_0 \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \right) \hat{z} = \\ &= \eta \left(-\frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{\partial h_y}{\partial y} \right) \hat{z} = -\eta \underbrace{\left(\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} \right)}_{0, \text{ per (G2)}} \hat{z} = 0 \end{aligned}$$

per tant \vec{e} és irrotacional i es pot escriure com a (menys el) gradient d'un cert camp escalar de domini bidimensional $\Phi(x, y)$:

$$\vec{e}(x, y) = -\vec{\nabla}(\Phi(x, y)) \quad (4)$$

Com que també tenim de (G1) : $\vec{\nabla} \cdot \vec{e}(x, y) = \frac{\partial e_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial e_y(x, y)}{\partial y} = 0$

Aplicant-ho a l'equació (4) resulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e}(x, y) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(\Phi(x, y)) = -\vec{\nabla}^2 \Phi(x, y) = -\Delta \Phi(x, y) = 0$$

Que no és ni més ni menys que l'equació de Laplace en cada pla $z=\text{cte}$

Trobar $\vec{e}(x, y)$, no és més que resoldre un problema electrostàtic en el pla $z=\text{cte}$.

Com es fa?

Troblem la solució general de l'equació de Laplace $\Delta\Phi(x,y) = 0$, deixant les constants arbitràries que faci falta. Ajustem aquestes constants amb les condicions de contorn i la geometria de la guia, i després calcularem .

$$\vec{e}(x,y) = -\vec{\nabla}(\Phi(x,y))$$

I d'aquí calcularem

$$\vec{h}(x,y) = \frac{1}{\eta}(-e_y(x,y)\hat{x} + e_x(x,y)\hat{y})$$

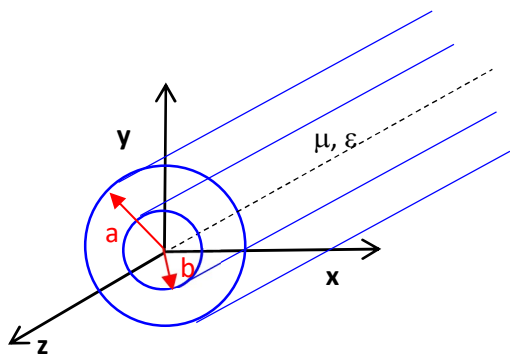
en general usant qualsevol tipus de funcions harmòniques que respectin la geometria del medi

També $\vec{h}(x,y)$ és irrotacional, en efecte:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{h} &= \left(\underbrace{\frac{\partial h_z}{\partial y}}_0 - \underbrace{\frac{\partial h_y}{\partial z}}_0 \right) \hat{x} + \left(\underbrace{\frac{\partial h_x}{\partial z}}_0 - \underbrace{\frac{\partial h_z}{\partial x}}_0 \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \hat{z} = \\ &= \frac{1}{\eta} \underbrace{\left(\frac{\partial e_x}{\partial x} - \left(-\frac{\partial e_y}{\partial y} \right) \right)}_{0, \text{ per (G1)}} \hat{z} = 0\end{aligned}$$

Exemple guia d'ona coaxial.

Sigui un guia d'ona on el dielèctric ocupa l'espai entre dos cilindres coaxials de radi exterior **a** i interior **b**.



Cal trobar la solució del potencial: $\Phi(x, y)$

En ser un problema sota geometria axial o cilíndrica resulta més natural transformar les coordenades cartesianes (x, y) en polars (r, φ) de manera que per ser $\Phi(x, y)$ un escalar i donada la simetria axial, només pot dependre de la coordenada r .

Es a dir en prendre la laplaciana i igualar a zero:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}}_0 = 0$$

És a dir $\Phi(r)$

Fent el canvi de variable:

$$r = e^u ; \quad u = \ln r$$

Calculem les derivades respecte r en la nova variable:

$$\frac{d}{dr} = \frac{du}{dr} \frac{d}{du} = \frac{1}{r} \frac{d}{du}$$

Igualment:

$$\frac{d^2}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{du} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{du} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{du} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{du} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{du^2}$$

Substituint tot això a l'equació de Laplace:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \frac{\partial^2 \Phi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{d\Phi(u)}{du} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi(u)}{du^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi(u)}{du^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d^2 \Phi(u)}{du^2} = 0 \end{aligned}$$

Solució: $\Phi(u) = \alpha \cdot u + \beta$

$$\text{O bé } \Phi(r) = \alpha \cdot \ln r + \beta$$

Així el camp elèctric és:

$$\vec{e}(r) = -\vec{\nabla}(\Phi(r)) = -\frac{d\Phi(r)}{dr} \hat{r} = -\alpha \cdot \frac{d}{dr} \ln r \hat{r} = -\frac{\alpha}{r} \hat{r} = e_r(r) \hat{r}$$

, el camp \vec{e} només té component radial i no té component azimuthal

$$e_r(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad i \quad e_\varphi(r) = 0$$

Típic camp generat en electrostàtica per un conductor cilíndric carregat amb densitat lineal de càrrega λ tal que: $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} = -\alpha$

Anem a trobar ara el camp $\vec{h}(r, \varphi)$ a partir de la seva relació amb $\vec{e}(r)$

$$\vec{h}(r, \varphi) = \frac{1}{\eta} (-e_y(r) \hat{x} + e_x(r) \hat{y}) = \frac{1}{\eta} (-e_y(r) \hat{x} + e_x(r) \hat{y})$$

Per a calcular això anem a considerar els canvis de coordenades polars a cartesianes i a l'inrevés, que es fan amb una rotació d'angle φ .

Primer amb els vectors unitaris:

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \quad i \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}$$

Després per al vector \vec{e} , les mateixes relacions:

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \quad i \quad \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\varphi \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$\begin{pmatrix} -e_y \\ e_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\varphi \end{pmatrix}$$

Amb tot això podrem calcular el camp magnètic ja:

$$\begin{aligned} \vec{h}(r, \varphi) &= \frac{1}{\eta} (-e_y \hat{x} + e_x \hat{y}) = \frac{1}{\eta} (-e_y, e_x) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\eta} (e_r, e_\varphi) \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\eta} (e_r, e_\varphi) \begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\eta} (e_r, e_\varphi) \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\eta} \left(e_r \hat{\phi} - \underbrace{e_\varphi}_{\hat{r}} \hat{r} \right) = \frac{1}{\eta} e_r(r) \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$\vec{h}(r, \varphi) = -\frac{1}{\eta} \frac{\alpha}{r} \hat{\varphi}$$

Conclusió:

$$\vec{e}(r, \varphi) = -\frac{\alpha}{r} \hat{r}$$

$$\vec{h}(r, \varphi) = -\frac{1}{\eta} \frac{\alpha}{r} \hat{\varphi}$$

Fixem-nos que com sempre en les ones electromagnètiques, els camps i la direcció de propagació formen la tríada ortogonal normativa

$$\vec{e} \times \vec{h} \propto \vec{k} \propto \hat{z}$$

A partir de $\Phi(r) = \alpha \cdot \ln r + \beta$

Entre a i b podem trobar la diferència de potencial entre el conductor extern $r=a$ i l'intern $r=b$ de la guia coaxial:

$$\Delta\Phi = (\alpha \cdot \ln a + \beta) - (\alpha \cdot \ln b + \beta) = \alpha \cdot \ln \frac{a}{b}$$

La diferència de potencial (global) al llarg de la guia i durant el temps és això mateix afectat de la part ondulatòria:

$$V(z, t) = \alpha \cdot \ln \frac{a}{b} e^{i(\omega t - k_g z)}$$

És a dir per la guia en mode TEM s'hi propaga una ona de potencial!!

Igualment usant el teorema o llei d'Ampère, obtindrem el corrent al llarg de la guia:

$$\begin{aligned} I(z, t) &= \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = e^{i(\omega t - k_g z)} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{\eta} \frac{\alpha}{r} \hat{\varphi} \cdot r d\varphi \hat{\varphi} = -\frac{\alpha}{\eta} e^{i(\omega t - k_g z)} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= -\frac{2\pi\alpha}{\eta} e^{i(\omega t - k_g z)} \end{aligned}$$

És a dir per la guia en mode TEM també s'hi propaga una ona de corrent!

El quocient entre l'ona de potencial i la de corrent és la impedància (característica) de la guia (en el nostre cas coaxial):

$$Z_c \equiv \frac{V(z, t)}{I(z, t)} = \frac{-\alpha \cdot \ln \frac{a}{b} e^{i(\omega t - k_g z)}}{-\frac{2\pi\alpha}{\eta} e^{i(\omega t - k_g z)}} = \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{a}{b} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{a}{b}$$

Doncs bé, podem dir que sense cap mena de dubte que una guia d'ona en mode TEM.

1. Els camps són perpendiculars a l'eix de la guia.
2. No té modes numerats o quantitzats.
3. Qualsevol freqüència (fins i tot propera a zero) s'hi pot propagar.
4. S'hi formen ones de potencial i de corrent al llarg de l'eix de la guia.
5. La potència o l'energia es propaguen al llarg de l'eix de la guia

I llavors és quan passa a anomenar-se: LÍNIA DE TRANSMISSIÓ

Aquest serà el següent tema