

PROBLEMES D'OSCIL·LACIONS (Tema 3)

1.- El moviment d'un oscil·lador harmònic ve donat per $x = 4 \sin(0.1 t + 0.5)$ on totes les quantitats s'expressen en unitats del S.I. Trobeu:

- a) L'amplitud, el període, la freqüència i la fase inicial.
- b) La velocitat i l'acceleració.
- c) Les condicions inicials.
- d) La x , v i a per a $t = 5$ s.

Solució: a) $A = 4$ m, $T = 20 \pi$ s, $\nu = (20 \pi)^{-1}$ Hz, $\theta = 0.5$ rad.

b) $v = 0.4 \cos(0.1 t + 0.5)$

$a = -0.04 \sin(0.1 t + 0.5)$

c) Condicions inicials: $x(0) = 1.92$ m

$v(0) = 0.35$ m/s

$a(0) = -19 \cdot 10^{-3}$ m/s²

d) $x(5) = 3.36$ m

$v(5) = 0.22$ m/s

$a(5) = 34 \cdot 10^{-3}$ m/s²

2.- Una partícula de massa m es mou al llarg de l'eix x sota l'acció d'una força $F = -Kx$. Quan $t = 2$ s, la partícula passa per l'origen, i per a $t = 4$ s la seva velocitat és de 4 m/s. Trobeu l'equació de l'elongació si sabem que el període d'oscil·lació és de 16 s.

Solució: $x(t) = 14.4 \cos\left(\frac{\pi}{8} t + \frac{5\pi}{4}\right)$

3.- Estudiem el moviment d'una massa $M = 5$ g en l'extrem d'una molla vertical de constant recuperadora $K = 20$ dines/cm. La posició i velocitats inicials són 5 cm per damunt del punt d'equilibri i 2 cm/s cap a baix. Trobeu la posició que ocupa la partícula en cada instant.

Solució: $x(t) = 5.1 \cos(2 t + 3.3389)$ cm

4.- Un oscil·lador lineal de massa m , constant recuperadora K i coeficient d'esmoreïment b , es posa en moviment quan s'allibera a partir d'una posició desplaçada. Obteniu una expressió de l'energia E perduda en un cicle en funció de l'amplitud al començament del cicle.

Solució: $\Delta E = \frac{1}{2} K A^2 \left(1 - e^{-\frac{bT}{m}}\right)$

5.- En l'instant inicial $t = 0$ un sistema està en repòs i en equilibri ($x = 0$, $\dot{x} = 0$). Determineu les oscil·lacions forçades del sistema, degudes a una força $F(t)$, en els següents casos:

- a) $F = F_0$
 b) $F = at$
 c) $F = F_0 e^{-at}$

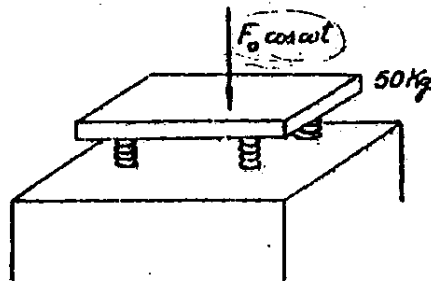
Solució: a) $x(t) = -\frac{F_0}{K} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega_1^2}} e^{-\gamma t} \cos\left(\omega_1 t + \arctg\left(-\frac{\gamma}{\omega_1}\right)\right) + \frac{F_0}{K}$

b) $x(t) = \frac{ba}{K^2} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{K}{b} - \gamma\right)^2}{\omega_1^2}} e^{-\gamma t} \cos\left(\omega_1 t + \arctg\left(\frac{\frac{K}{b} - \gamma}{\omega_1}\right)\right) + \frac{a}{K} t - \frac{ba}{K^2}$

c)

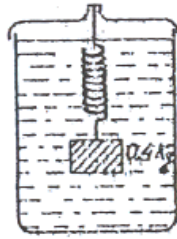
$x(t) = \frac{-F_0}{ma^2 - ba + K} \sqrt{1 + \left(\frac{a - \gamma}{\omega_1}\right)^2} e^{-\gamma t} \cos\left(\omega_1 t + \arctg\left(\frac{a - \gamma}{\omega_1}\right)\right) + \frac{F_0}{ma^2 - ba + K} e^{-at}$

6.- Una plataforma de 50 kg està suportada per ressorts que reposen damunt d'uns fonaments. La freqüència característica d'oscil·lació és 10 Hz. La plataforma està accionada per una força harmònica vertical d'amplitud 25 N. Quines són les amplituds del desplaçament de la plataforma i de la força que exerceixen els ressorts sobre els fonaments quan la freqüència d'accionament és 1 Hz, 9 Hz, 10 Hz i 5 Hz? Negligiu l'esmoreïment.



Solució: $A' = 0.128 \text{ mm}$, $A' = 0.667 \text{ mm}$, $A' = \text{infinit}$, $A' = 0.169 \text{ mm}$
 $A_F = 25.25 \text{ N}$, $A_F = 131.58 \text{ N}$, $A_F = \text{infinit}$, $A_F = 33.33 \text{ N}$

7.- Una massa de 0.4 kg oscil·la amb moviment esmoreït dins un fluid viscos gràcies a l'acció d'una molla. Podem suposar que la força de fregament és proporcional a la velocitat. El seu període és de 2 s i el quocient entre les dues amplituds màximes consecutives val 0.5. Si es vol substituir la molla per una altra, de manera que el moviment correspongui a un esmoreïment crític. Determineu la constant recuperadora de la nova molla.



Solució: $K = 48 \cdot 10^3 \text{ N/m}$

8.- La posició d'una partícula que es mou al llarg de l'eix x es determina mitjançant l'equació $\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 8x = 20 \cos(2t)$. Si la partícula surt del repòs en $x = 0$,

- Trobeu l'amplitud i el període després d'haver transcorregut un llarg temps.
- Com aconseguiríem fenòmens ressonants? Quins valors hauríem d'assignar als paràmetres de l'acció de la força?

Solució: $A = \sqrt{5}$ unitats del problema, $T = \pi \text{ s}$

9.- Tenim un oscil·lador harmònic esmorteït sotmès a l'acció d'una força exterior harmònica. En aquest problema ens podem referir a tres pulsacions diferents:

- La de l'oscil·lador no esmorteït, ω_0 .
- La que posseeixen les oscil·lacions esmorteïdes, ω_1 .
- La de la força exterior que crea el moviment forçat, ω_2 .

En la ressonància, quina relació tenen els valors d'aquestes tres pulsacions? Suposant que coincideixin els valors, quina situació física tindríem? És possible col·locar per ordre de major a menor totes o algunes d'aquestes pulsacions?

10.- Sobre una massa de 40 Kg actua una força recuperadora de constant $K = 60 \text{ N/m}$ i una força esmorteïdora proporcional i oposada a la velocitat, de constant $b = 10 \text{ N s/m}$. Si se separa la massa de la seva posició d'equilibri i es deixa en llibertat, es demana:

- Es pot suposar infraesmorteïment? Raona la resposta.
- Plantejar i resoldre l'equació diferencial del moviment.
- Quant de temps haurà de transcórrer per a que l'amplitud passi a valer el 36.8 % de la inicial?
- Si s'excita el sistema amb una força externa $F = 50 \cos(1.2t)$, on t s'expressa en s i F en N, quin serà el desfasament entre la força F i la velocitat en l'estacionari?

Solució: a) Sí, es pot considerar infraesmorteïment.

c) $t = 8 \text{ s}$

d) $\theta' = -0.19 \text{ rad}$.