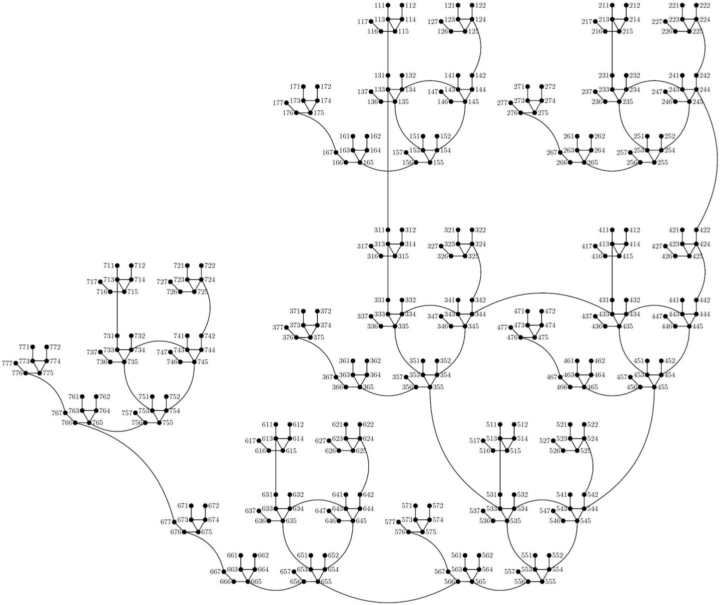
Teoría de grafos

J. A. Rodríguez-Velázquez & A. Estrada-Moreno

URV


111 112 113 114 115 116 117
121 122 123 124 125 126 127
131 132 133 134 135 136 137
141 142 143 144 145 146 147
151 152 153 154 155 156 157
161 162 163 164 165 166 167
171 172 173 174 175 176 177
211 212 213 214 215 216 217
221 222 223 224 225 226 227
231 232 233 234 235 236 237
241 242 243 244 245 246 247
251 252 253 254 255 256 257
261 262 263 264 265 266 267
271 272 273 274 275 276 277
311 312 313 314 315 316 317
321 322 323 324 325 326 327
331 332 333 334 335 336 337
341 342 343 344 345 346 347
351 352 353 354 355 356 357
361 362 363 364 365 366 367
371 372 373 374 375 376 377
411 412 413 414 415 416 417
421 422 423 424 425 426 427
431 432 433 434 435 436 437
441 442 443 444 445 446 447
451 452 453 454 455 456 457
461 462 463 464 465 466 467
471 472 473 474 475 476 477
511 512 513 514 515 516 517
521 522 523 524 525 526 527
531 532 533 534 535 536 537
541 542 543 544 545 546 547
551 552 553 554 555 556 557
561 562 563 564 565 566 567
571 572 573 574 575 576 577
611 612 613 614 615 616 617
621 622 623 624 625 626 627
631 632 633 634 635 636 637
641 642 643 644 645 646 647
651 652 653 654 655 656 657
661 662 663 664 665 666 667
671 672 673 674 675 676 677
711 712 713 714 715 716 717
721 722 723 724 725 726 727
731 732 733 734 735 736 737
741 742 743 744 745 746 747
751 752 753 754 755 756 757
761 762 763 764 765 766 767
771 772 773 774 775 776 777

- Contenido
- Materiales
- Evaluación
- Consultas

Contenido

Contenido

- Conceptos básicos

Contenido

- Conceptos básicos
- Operaciones con grafos

Contenido

Contenido

- Conceptos básicos
- Operaciones con grafos
- Recorridos y conectividad
- Distancia. Problema del camino mínimo

Contenido

- Conceptos básicos
- Operaciones con grafos
- Recorridos y conectividad
- Distancia. Problema del camino mínimo
- Dimensión métrica

Contenido

Contenido

- Conceptos básicos
- Operaciones con grafos
- Recorridos y conectividad
- Distancia. Problema del camino mínimo
- Dimensión métrica
- Planaridad
- Coloración

Contenido

- Conceptos básicos
- Operaciones con grafos
- Recorridos y conectividad
- Distancia. Problema del camino mínimo
- Dimensión métrica
- Planaridad
- Coloración
- Conjuntos característicos e invariantes relacionados

Contenido

Materiales

- Presentación
- Apuntes
- Bibliografía recomendada en la guía docente.
- Libros CRAI

Evaluación

Evaluación

- Examen parcial 1: día 17 de abril, de 10 a 14h, 50 %

  Todo el temario hasta ese día.

Evaluación

- Examen parcial 1: día 17 de abril, de 10 a 14h, 50 %

  Todo el temario hasta ese día.
- Examen parcial 2: día 31 de mayo, de 15 a 19h, 50 %

  Todo el temario a partir del parcial 1.

Evaluación

- Examen parcial 1: día 17 de abril, de 10 a 14h, 50 %

  Todo el temario hasta ese día.

- Examen parcial 2: día 31 de mayo, de 15 a 19h, 50 %

  Todo el temario a partir del parcial 1.

- Durante el curso se 'evaluará' la participación activa en clase mediante la resolución de ejercicios en pizarra y preguntes orales o escritas.

  También se 'evaluará' la presentación de un tema.

Evaluación

- Examen parcial 1: día 17 de abril, de 10 a 14h, 50 %

  Todo el temario hasta ese día.

- Examen parcial 2: día 31 de mayo, de 15 a 19h, 50 %

  Todo el temario a partir del parcial 1.

- Durante el curso se 'evaluará' la participación activa en clase mediante la resolución de ejercicios en pizarra y preguntes orales o escritas.

  También se 'evaluará' la presentación de un tema.

- Segunda convocatoria: día 17 de junio de 10 a 14h. 100 %

  Examen global.

Listado de estudiantes

ASSIGNATURA: TEORIA DE GRAFS (17274111)	
GRUP: Grp CLASSE MAGISTRAL (17274111)	
N	COGNOMS, NOM
1	CALVO MATIELI, VÍCTOR
2	CUARTERO PRIM, CRISTINA
3	DE MIGUEL CID, POL
4	DENIS , FILIP EMIL
5	DIAZ SERRA, MARCEL
6	DIESTRE RUBIO, DAVID
7	ESTEVE TOMÀS, ÈDGAR
8	GARCÍA MONTULL, CANDELA
9	GENESTAR LÁZARO, MAX
10	GINÉ PEDROCCHI, NIL
11	KHADRAOUI KHADRAOUI, AISSAM
12	LOZANO BEL, ELENA
13	MOYA NAVARRO, DANIEL
14	MUÑOZ CURADO, ÀLEX
15	ORTEGA PINTO, PAU
16	PEDREIRA POLO, SERGIO
17	RIVAS AZPIAZU, ANE
18	ROSET MORENO, JUAN
19	SEGÚ TORNÉ, IVET

Listado de papers

Papers

1. Ernesto Estrada and Juan A. Rodríguez-Velázquez. Subgraph centrality in complex networks. Physical Review E 71 (5) 056103 (2005) 9 pages.
2. J. A. Rodríguez-Velázquez, E. D. Rodríguez-Bazan and A. Estrada-Moreno, On Generalized Sierpiński Graphs. Discussiones Mathematicae Graph Theory 37 (2017) 547-560
3. J. A. Rodríguez-Velázquez, Universal lines in graphs. Quaestiones Mathematicae 45 (2022), no. 10, 1485-1500.
4. Abel Cabrera Martínez and Juan Alberto Rodríguez-Velázquez, From the strong differential to Italian domination in graphs. Mediterranean Journal of Mathematics 18 (2021) Article number: 228. https://doi.org/10.1007/s00009-021-01866-7
5. Abel Cabrera Martínez and Juan Alberto Rodríguez-Velázquez, On the perfect differential of a graph. Quaestiones Mathematicae 45 (3) (2022) 327-345
6. A. Cabrera Martínez, M. L. Puertas and J. A. Rodríguez-Velázquez, On the 2-packing differential of a graph. Results Math. 76 (2021), no. 3, Paper No. 157
7. R. Hernández-Ortiz, L. P. Montejano, J. A. Rodríguez-Velázquez, Secure domination in rooted product graphs. Journal of Combinatorial Optimization 41 (2) (2021) 401-413.
8. M. Dettlaff, M. Lemańska and J. A. Rodríguez-Velázquez, Secure Italian domination in graphs. Journal of Combinatorial Optimization. 41 (1) (2021) 56-72.
9. A. Cabrera Martínez and J. A. Rodríguez-Velázquez, A note on double domination in graphs. Discrete Applied Mathematics 300 (2021) 107-111.

Presentaciones

Las exposiciones serán de una hora y se harán los siguientes días:

- Día 10 de mayo. Paper 1 (Candela García, Aissam Khadraoui, Ivet Segú).
- Día 14 de mayo. Paper 2 (Èdgar Esteve, Elena Lozano).
- Día 14 de mayo. Paper 3 (Cristina Cuarteto, Ane Rivas).
- Día 17 de mayo. Paper 4 (Marcel Díaz, Àlex Muñoz).
- Día 17 de mayo. Paper 5 (Víctor Calvo, Juan Roset).
- Día 21 de mayo. Paper 6 (Pol De Miguel, Sergio Pedreira).
- Día 21 de mayo. Paper 7 (David Diestre, Daniel Moya).
- Día 24 de mayo. Paper 8 (Max Genestar, Nil Giné).
- Día 24 de mayo. Paper 9 (Filip E. Denis, Pau Ortega).

Consultas

- Presenciales
- Despacho 133 (Juan A.) Miércoles de 16 a 18h
- Despacho 137 (Alejandro) Jueves de 14 a 16h

Grafos: Conceptos Básicos

Definición

Un **grafo** $G = (V, E)$ es un par ordenado donde:

- los elementos de V se denominan **vértices**, o **nodos**, de G,
- los elementos de E son pares no ordenados de vértices llamados **aristas** de G.

Definición

Un **grafo** $G=(V,E)$ es un par ordenado donde:

- los elementos de V se denominan **vértices**, o **nodos**, de G,
- los elementos de E son pares no ordenados de vértices llamados **aristas** de G.
- El **orden** de G es el número de vértices.

Definición

Un **grafo** $G = (V, E)$ es un par ordenado donde:

- los elementos de V se denominan **vértices**, o **nodos**, de G,
- los elementos de E son pares no ordenados de vértices llamados **aristas** de G.
- El **orden** de G es el número de vértices.
- La **medida** de G es el número de aristas.

Definición

Un **grafo** $G = (V, E)$ es un par ordenado donde:

- los elementos de V se denominan **vértices**, o **nodos**, de G,
- los elementos de E son pares no ordenados de vértices llamados **aristas** de G.
- El **orden** de G es el número de vértices.
- La **medida** de G es el número de aristas.
- Una arista $\{u, v\} \in E$ también se denota por $uv \in E$

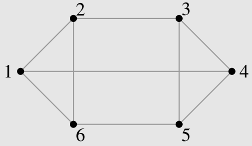
Definición

Un **grafo** $G = (V, E)$ es un par ordenado donde:

- los elementos de V se denominan **vértices**, o **nodos**, de G,
- los elementos de E son pares no ordenados de vértices llamados **aristas** de G.
- El **orden** de G es el número de vértices.
- La **medida** de G es el número de aristas.
- Una arista $\{u, v\} \in E$ también se denota por $uv \in E$

Ejemplo

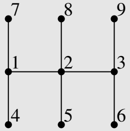
La figura muestra un grafo $G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{1,6\}, \{1,4\}, \{2,6\}, \{3,5\}\}$.



Ejemplo

La siguiente figura muestra un grafo $G = (V,E)$ donde $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y el conjunto de aristas es

$$E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,7\},\{2,5\},\{2,8\},\{2,3\},\{3,6\},\{3,9\}\}.$$



El orden de G es $n = |V| = 9$ y la medida es $m = |E| = 8$.

¿Cuáles son las cotas naturales para la medida de un grafo de orden n?

¿Cuáles son las cotas naturales para la medida de un grafo de orden n?

Para todo grafo de orden n y medida m se cumple que

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2}.$$

Definición

- Dos vértices $u, v \in V$ de un grafo $G = (V, E)$ son **adyacentes** si y solo si $uv \in E$.

Definición

- Dos vértices $u, v \in V$ de un grafo $G = (V, E)$ son **adyacentes** si y solo si $uv \in E$.
- La adyacencia de los vértices u, v se denota por $u \sim v$.

Definición

- Dos vértices $u, v \in V$ de un grafo $G = (V, E)$ son **adyacentes** si y solo si $uv \in E$.
- La adyacencia de los vértices u, v se denota por $u \sim v$.
- Si $u \sim v$ se dice que la arista uv une o conecta los vértices u y v. También se dice que u y v son los **extremos** de la arista uv.

Definición

- Dos vértices $u, v \in V$ de un grafo $G = (V, E)$ son **adyacentes** si y solo si $uv \in E$.
- La adyacencia de los vértices u, v se denota por $u \sim v$.
- Si $u \sim v$ se dice que la arista uv une o conecta los vértices u y v. También se dice que u y v son los **extremos** de la arista uv.
- Si $u \sim v$ se dice que los vértices u y v son **vecinos**.

Definición

La **vecindad abierta** de un vértice $v \in V$ de un grafo $G = (V,E)$ se define como

$$N(v) = \{u \in V : v \sim u\} = \{u \in V : \{u,v\} \in E\}.$$

El **grado** $\delta(v) = |N(v)|$ del vértice v es el número de vértices adyacentes a v. Los vértices de grado cero se denominan **vértices aislados**.

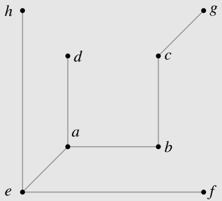
Definición

La **vecindad abierta** de un vértice $v \in V$ de un grafo $G = (V, E)$ se define como

$$N(v) = \{u \in V : v \sim u\} = \{u \in V : \{u, v\} \in E\}.$$

El **grado** $\delta(v) = |N(v)|$ del vértice v es el número de vértices adyacentes a v. Los vértices de grado cero se denominan **vértices aislados**.

Ejemplo



$N(a) = \{e, d, b\}$, $N(e) = \{a, f, h\}$, $N(b) = \{a, c\}$ y $N(c) = \{b, g\}$. En este caso, $\delta(a) = \delta(e) = 3$, $\delta(b) = \delta(c) = 2$ y los demás vértices tienen grado uno.

¿Cuáles son las cotas naturales para el grado de un vértice?

¿Cuáles son las cotas naturales para el grado de un vértice?

Para todo vértice v de un grafo de orden n se cumple que

$$0 \leq \delta(v) \leq n-1.$$

¿Cuáles son las cotas naturales para el grado de un vértice?

Para todo vértice v de un grafo de orden n se cumple que

$$0 \leq \delta(v) \leq n-1.$$

Ejemplo

¿Existe algún grafo con la secuencia de grados $2,2,2,3,3,4,8$?

¿Cuáles son las cotas naturales para el grado de un vértice?

Para todo vértice v de un grafo de orden n se cumple que

$$0 \leq \delta(v) \leq n-1.$$

Ejemplo

¿Existe algún grafo con la secuencia de grados $2,2,2,3,3,4,8$?

Solución

- Si existe dicho grafo, es de orden $n = |V| = 7$
- Si existe un vértice v de grado 8, entonces $8 = \delta(v) \leq n-1 = 6$, lo que es imposible.

Ejercicio

Demuestra que todo grafo de orden $n \geq 2$ tiene al menos dos vértices del mismo grado.

Ejercicio

Demuestra que todo grafo de orden $n \geq 2$ tiene al menos dos vértices del mismo grado.

Solución

Sea $G = (V, E)$ un grafo de orden $n \geq 2$.

$\square$

Ejercicio

Demuestra que todo grafo de orden $n \geq 2$ tiene al menos dos vértices del mismo grado.

Solución

Sea $G = (V, E)$ un grafo de orden $n \geq 2$.

- Para todo vértice $v \in V$ se cumple $0 \leq \delta(v) \leq n - 1$.

$\square$

Ejercicio

Demuestra que todo grafo de orden $n \geq 2$ tiene al menos dos vértices del mismo grado.

Solución

Sea $G = (V, E)$ un grafo de orden $n \geq 2$.

- Para todo vértice $v \in V$ se cumple $0 \leq \delta(v) \leq n - 1$.
- Sólo pueden existir los grados $0, 1, \ldots, n - 1$.

$\square$

Ejercicio

Demuestra que todo grafo de orden $n \geq 2$ tiene al menos dos vértices del mismo grado.

Solución

Sea $G = (V, E)$ un grafo de orden $n \geq 2$.

- Para todo vértice $v \in V$ se cumple $0 \leq \delta(v) \leq n - 1$.
- Sólo pueden existir los grados $0, 1, \ldots, n - 1$.
- No puede haber vértices de grado 0 y $n - 1$ a la vez.

□

Ejercicio

Demuestra que todo grafo de orden $n \geq 2$ tiene al menos dos vértices del mismo grado.

Solución

Sea $G = (V, E)$ un grafo de orden $n \geq 2$.

- Para todo vértice $v \in V$ se cumple $0 \leq \delta(v) \leq n-1$.
- Sólo pueden existir los grados $0, 1, \ldots, n-1$.
- No puede haber vértices de grado 0 y $n-1$ a la vez.
- Todos los grados está en uno de los siguientes conjuntos: $\{0, 1, ..., n-2\}$ o $\{1, ..., n-1\}$.

$\square$

Ejercicio

Demuestra que todo grafo de orden $n \geq 2$ tiene al menos dos vértices del mismo grado.

Solución

Sea $G = (V, E)$ un grafo de orden $n \geq 2$.

- Para todo vértice $v \in V$ se cumple $0 \leq \delta(v) \leq n-1$.
- Sólo pueden existir los grados $0, 1, \ldots, n-1$.
- No puede haber vértices de grado 0 y $n-1$ a la vez.
- Todos los grados está en uno de los siguientes conjuntos: $\{0, 1, ..., n-2\}$ o $\{1, ..., n-1\}$.
- Como ambos conjuntos tiene cardinal $n-1$, por el principio de las cajas concluimos que hay al menos dos vértices del mismo grado. $\square$

Ejercicio

El Sr. Andrés y su mujer invitaron a cuatro parejas a una fiesta. Algunas de las personas de la sala saludaron (dando la mano) a otras personas del grupo. Naturalmente, ninguna persona dio la mano a su cónyuge y ninguna persona dio la mano dos veces a otra persona. Al final, el Sr. Andrés se da cuenta de que ninguno de sus invitados (su mujer incluida) ha saludado al mismo número de personas.

1. ¿Es posible que el Sr. Andrés también diera la mano a un número de personas diferente al de los demás?
2. ¿Es posible que el Sr. Andrés diera sólo un número impar de apretones de manos?
3. ¿Hay alguna persona que no dio la mano a nadie?
4. ¿Cuántas veces dio la mano el Sr. Andrés? ¿Y la Sra. Andrés?

Solución

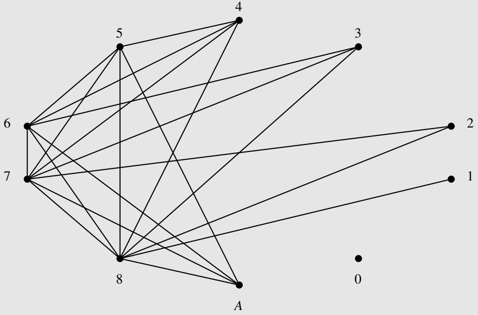
Construimos un grafo cuyos vértices son las personas y dos vértices son adyacentes si las personas correspondientes se han dado la mano. Las etiquetas corresponden al grado, excepto Andrés, cuya etiqueta es A.

Solución

Construimos un grafo cuyos vértices son las personas y dos vértices son adyacentes si las personas correspondientes se han dado la mano. Las etiquetas corresponden al grado, excepto Andrés, cuya etiqueta es A.
Nadie saluda a su pareja $\longrightarrow 0 \leq \delta(v) \leq n-2$, $\forall v$.

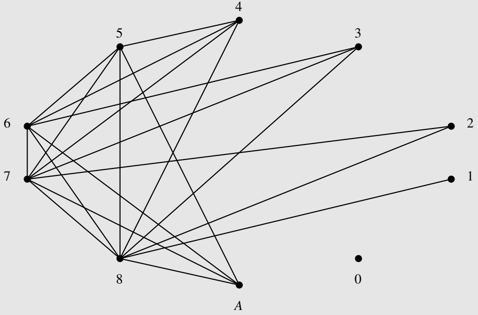
Solución

Construimos un grafo cuyos vértices son las personas y dos vértices son adyacentes si las personas correspondientes se han dado la mano. Las etiquetas corresponden al grado, excepto Andrés, cuya etiqueta es A.
Nadie saluda a su pareja $\longrightarrow 0 \leq \delta(v) \leq n-2$, $\forall v$.



Solución

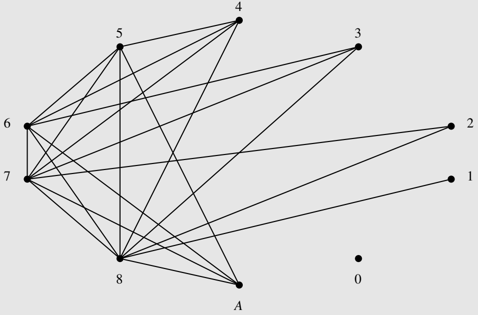
Construimos un grafo cuyos vértices son las personas y dos vértices son adyacentes si las personas correspondientes se han dado la mano. Las etiquetas corresponden al grado, excepto Andrés, cuya etiqueta es A.
Nadie saluda a su pareja $\longrightarrow 0 \leq \delta(v) \leq n-2, \ \forall v$.



Las parejas son: $8-0$, $7-1$, $6-2$, $5-3$ y $4-A$.

Solución

Construimos un grafo cuyos vértices son las personas y dos vértices son adyacentes si las personas correspondientes se han dado la mano. Las etiquetas corresponden al grado, excepto Andrés, cuya etiqueta es A.
Nadie saluda a su pareja $\longrightarrow 0 \leq \delta(v) \leq n-2$, $\forall v$.



Las parejas son: $8-0$, $7-1$, $6-2$, $5-3$ y $4-A$. Con esta información se resuelven todos los apartados.

Definición

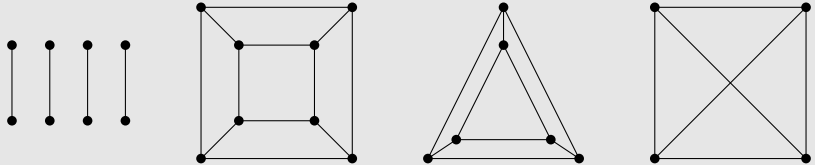
Un grafo es **regular** si todos los vértices tienen el mismo grado.
Si el grado común es δ, entonces se dice que el grafo es δ-**regular**.

Definición

Un grafo es **regular** si todos los vértices tienen el mismo grado.
Si el grado común es δ, entonces se dice que el grafo es δ-**regular**.

Ejemplo

A continuación mostramos algunos ejemplos de grafos regulares.



¿Como podemos calcular la medida de un grafo a partir de la secuencia de grados?

¿Como podemos calcular la medida de un grafo a partir de la secuencia de grados?

Proposición (Fórmula de los grados)

Para todo grafo $G=(V,E)$ de medida m se cumple que

$$m=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}\delta(v).$$

¿Como podemos calcular la medida de un grafo a partir de la secuencia de grados?

Proposición (Fórmula de los grados)

Para todo grafo $G=(V,E)$ de medida m se cumple que

$$m=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}\delta(v).$$

¿y si G es δ-regular?

¿Como podemos calcular la medida de un grafo a partir de la secuencia de grados?

Proposición (Fórmula de los grados)

Para todo grafo $G = (V, E)$ de medida m se cumple que

$$m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \delta(v).$$

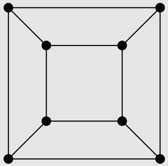
¿y si G es δ-regular?

Corolario

La medida de todo grafo δ-regular de orden n es $m = \dfrac{n\delta}{2}$.

Ejemplo

El cubo es un grafo 3-regular de orden $n = 8$ y medida $m = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$.



Ejercicio

¿Existe algún grafo 5-regular de orden impar?

Ejercicio

¿Existe algún grafo 5-regular de orden impar?

Solución:

Si G es 5-regular de orden $n = 2k+1$, entonces la medida es $m = \frac{5(2k+1)}{2} = 5k + \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, no existe ningún grafo 5-regular de orden impar. $\square$

Corolario

En todo grafo, el número de vértices de grado impar es par.

Corolario

En todo grafo, el número de vértices de grado impar es par.

Demostración:

$P =$conjunto de vértices de grado par. $I =$conjunto de vértices de grado impar.

Corolario

En todo grafo, el número de vértices de grado impar es par.

Demostración:

P =conjunto de vértices de grado par. I =conjunto de vértices de grado impar. Para todo $v \in P$ existe $k_v \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(v) = 2k_v$, y para todo $v \in I$ existe $k_v \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(v) = 2k_v + 1$.

Corolario

En todo grafo, el número de vértices de grado impar es par.

Demostración:

$P =$conjunto de vértices de grado par. $I =$conjunto de vértices de grado impar. Para todo $v \in P$ existe $k_v \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(v) = 2k_v$, y para todo $v \in I$ existe $k_v \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(v) = 2k_v + 1$. Según la formula de los grados,

$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{v \in P} \delta(v) + \sum_{v \in I} \delta(v) \\ &= \sum_{v \in P} 2k_v + \sum_{v \in I} (2k_v + 1) \\ &= 2\left(\sum_{v \in P} k_v + \sum_{v \in I} k_v\right) + \sum_{v \in I} 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|I| = 2\left(m - \left(\sum_{v \in P} k_v + \sum_{v \in I} k_v\right)\right)$. $\square$

Ejercicio

¿Existe algún grafo con secuencia de grados $1, 3, 3, 2, 2, 2, 4$?

Ejercicio

¿Existe algún grafo con secuencia de grados $1, 3, 3, 2, 2, 2, 4$?

Solución:

No, ya que el número de vértices de grado impar ha de ser par. $\square$

Ejercicio

Sea G un grafo de orden $n \geq 10$ tal que todos los vértices son de grado estrictamente mayor que 5. Demuestra que el número de aristas del grafo es mayor o igual que 30.

Ejercicio

Sea G un grafo de orden $n \geq 10$ tal que todos los vértices son de grado estrictamente mayor que 5. Demuestra que el número de aristas del grafo es mayor o igual que 30.

Solución:

- Por hipótesis se tiene que $\delta(v) \geq 6$, $\forall v \in V$.

Ejercicio

Sea G un grafo de orden $n \geq 10$ tal que todos los vértices son de grado estrictamente mayor que 5. Demuestra que el número de aristas del grafo es mayor o igual que 30.

Solución:

- Por hipótesis se tiene que $\delta(v) \geq 6$, $\forall v \in V$.
- Fórmula de los grados: $2m = \sum_{v \in V} \delta(v) \geq \sum_{v \in V} 6 = 6n \geq 6 \times 10 = 60$

Ejercicio

Sea G un grafo de orden $n \geq 10$ tal que todos los vértices son de grado estrictamente mayor que 5. Demuestra que el número de aristas del grafo es mayor o igual que 30.

Solución:

- Por hipótesis se tiene que $\delta(v) \geq 6$, $\forall v \in V$.
- Fórmula de los grados: $2m = \sum_{v \in V} \delta(v) \geq \sum_{v \in V} 6 = 6n \geq 6 \times 10 = 60$
- $m \geq 30$ $\square$

Ejercicio

Sea G un grafo de orden $n = 20$ y medida $m = 62$. Sabiendo que todos los vértices tienen grado 3 o 7, determina el número de vértices de grado 3.

Ejercicio

Sea G un grafo de orden $n = 20$ y medida $m = 62$. Sabiendo que todos los vértices tienen grado 3 o 7, determina el número de vértices de grado 3.

Solición:

- Sean x_3 y x_7 los números de vértices de grado 3 y 7, respectivamente.

Ejercicio

Sea G un grafo de orden $n = 20$ y medida $m = 62$. Sabiendo que todos los vértices tienen grado 3 o 7, determina el número de vértices de grado 3.

Solición:

- Sean x_3 y x_7 los números de vértices de grado 3 y 7, respectivamente.
- $n = x_3 + x_7$, $2m = 3x_3 + 7x_7$.

Ejercicio

Sea G un grafo de orden $n = 20$ y medida $m = 62$. Sabiendo que todos los vértices tienen grado 3 o 7, determina el número de vértices de grado 3.

Solición:

- Sean x_3 y x_7 los números de vértices de grado 3 y 7, respectivamente.
- $n = x_3 + x_7$, $2m = 3x_3 + 7x_7$.
- $20 = x_3 + x_7$, $124 = 3x_3 + 7x_7$.

Ejercicio

Sea G un grafo de orden $n = 20$ y medida $m = 62$. Sabiendo que todos los vértices tienen grado 3 o 7, determina el número de vértices de grado 3.

Solición:

- Sean x_3 y x_7 los números de vértices de grado 3 y 7, respectivamente.
- $n = x_3 + x_7$, $2m = 3x_3 + 7x_7$.
- $20 = x_3 + x_7$, $124 = 3x_3 + 7x_7$.
- $x_3 = 4$ y $x_7 = 16$. $\square$

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo de n vértices, t de los cuales son de grado k y el resto de grado $k+1$. Prueba que $t=(k+1)n-2m$, donde m el número de aristas.

Ejercicio

Sea $G = (V,E)$ un grafo de n vértices, t de los cuales son de grado k y el resto de grado $k+1$. Prueba que $t = (k+1)n - 2m$, donde m el número de aristas.

Solución:

Sea $V = V_k \cup V_{k+1}$, donde V_k es el conjunto de vértices de grado k y V_{k+1} es el conjunto de vértices de grado $k+1$. Aplicando la fórmula de los grados se obtiene la relación

$$2m = k|V_k| + (k+1)|V_{k+1}| = kt + (k+1)(n-t).$$

De ahí que $t = (k+1)n - 2m$. $\square$

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo 3-regular de orden n. Sea $X \subseteq V$ tal que $|X| = \dfrac{2n}{5}$ y cada vértice de $V \setminus X$ tiene al menos dos vecinos en X. Prueba que entre los vértices de X no hay adyacencias.

Ejercicio

Sea $G = (V, E)$ un grafo 3-regular de orden n. Sea $X \subseteq V$ tal que $|X| = \frac{2n}{5}$ y cada vértice de $V \setminus X$ tiene al menos dos vecinos en X. Prueba que entre los vértices de X no hay adyacencias.

Solución:

- Nótese que $|V \setminus X| = |V| - |X| = n - \frac{2n}{5} = \frac{3n}{5}$.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo 3-regular de orden n. Sea $X \subseteq V$ tal que $|X|=\frac{2n}{5}$ y cada vértice de $V\setminus X$ tiene al menos dos vecinos en X. Prueba que entre los vértices de X no hay adyacencias.

Solución:

- Nótese que $|V\setminus X| = |V|-|X| = n-\frac{2n}{5} = \frac{3n}{5}$.
- Sea c el número de aristas que van de X a $V\setminus X$.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo 3-regular de orden n. Sea $X \subseteq V$ tal que $|X| = \frac{2n}{5}$ y cada vértice de $V \setminus X$ tiene al menos dos vecinos en X. Prueba que entre los vértices de X no hay adyacencias.

Solución:

- Nótese que $|V \setminus X| = |V| - |X| = n - \frac{2n}{5} = \frac{3n}{5}$.
- Sea c el número de aristas que van de X a $V \setminus X$.
- Como cada vértice de $V \setminus X$ tiene al menos dos vecinos en X, $2|V \setminus X| = 2 \cdot \frac{3n}{5} \leq c$.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo 3-regular de orden n. Sea $X\subseteq V$ tal que $|X|=\dfrac{2n}{5}$ y cada vértice de $V\setminus X$ tiene al menos dos vecinos en X. Prueba que entre los vértices de X no hay adyacencias.

Solución:

- Nótese que $|V\setminus X|=|V|-|X|=n-\dfrac{2n}{5}=\dfrac{3n}{5}$.
- Sea c el número de aristas que van de X a $V\setminus X$.
- Como cada vértice de $V\setminus X$ tiene al menos dos vecinos en X, $2|V\setminus X|=2\cdot\dfrac{3n}{5}\leq c$.
- Además, como G es 3-regular, $c\leq 3|X|=3\cdot\dfrac{2n}{5}$.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo 3-regular de orden n. Sea $X\subseteq V$ tal que $|X|=\frac{2n}{5}$ y cada vértice de $V\setminus X$ tiene al menos dos vecinos en X. Prueba que entre los vértices de X no hay adyacencias.

Solución:

- Nótese que $|V\setminus X|=|V|-|X|=n-\frac{2n}{5}=\frac{3n}{5}$.
- Sea c el número de aristas que van de X a $V\setminus X$.
- Como cada vértice de $V\setminus X$ tiene al menos dos vecinos en X, $2|V\setminus X|=2\cdot\frac{3n}{5}\leq c$.
- Además, como G es 3-regular, $c\leq 3|X|=3\cdot\frac{2n}{5}$.
- Tenemos, $2\cdot\frac{3n}{5}\leq c\leq 3\cdot\frac{2n}{5}$, lo que implica que $c=\frac{6n}{5}$.
- Por lo tanto, cada vértice de X tiene sus 3 vecinos en $V\setminus X$. □

Algunas familias de grafos

Algunas familias de grafos

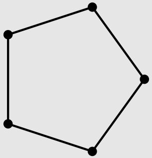
Grafos nulos

El **grafo nulo** (o grafo vacío) N_n de orden $n \geq 1$ es el grafo de n vértices y 0 aristas.
El grafo N_1 se denomina **grafo trivial**.

Algunas familias de grafos

Ciclos

El grafo ciclo de orden $n \geq 3$ es $C_n = (V, E)$, donde $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$.

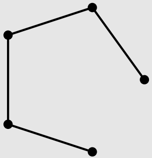


La figura muestra el grafo ciclo C_5.

Algunas familias de grafos

Caminos

El grafo camino $P_n = (V,E)$ de orden $n \geq 2$ es el grafo que cumple $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. El grafo P_n se puede obtener de la eliminación de una arista del grafo ciclo C_n.

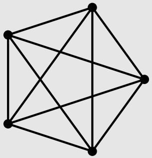


La figura muestra el grafo camino P_5.

Algunas familias de grafos

Completos

El grafo completo K_n es el grafo de n vértices con todas las aristas posibles.

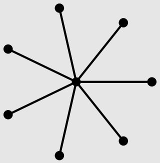


La figura muestra el grafo completo K_5.

Algunas familias de grafos

Grafos estrella

El grafo estrella $K_{1,n-1}$ de orden $n \geq 2$ es el grafo de n vértices y $m = n-1$ aristas que tiene un vértice de grado $n-1$ y $n-1$ vértices de grado 1.



La figura muestra el grafo estrella $K_{1,7}$.

Grafos bipartitos

Definición

Un grafo $G = (V,E)$ no nulo es **bipartito** si $V = V_1 \cup V_2$, con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de manera que las aristas existentes sólo conectan vértices de V_1 con vértices de V_2

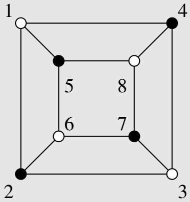
Definición

Un grafo $G = (V, E)$ no nulo es **bipartito** si $V = V_1 \cup V_2$, con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de manera que las aristas existentes sólo conectan vértices de V_1 con vértices de V_2

Será bipartito el cubo?

Ejemplo

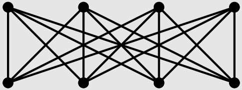
El cubo es un grafo bipartito.



Grafos bipartitos completos

El **grafo bipartito completo**, denotado por $K_{r,s} = (V_1 \cup V_2, E)$, es un grafo bipartito donde $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, con todas las aristas posibles conectando vértices de V_1 con vértices de V_2.

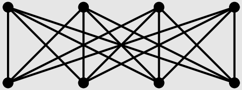
El grafo $K_{4,4}$.



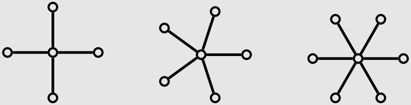
Grafos bipartitos completos

El **grafo bipartito completo**, denotado por $K_{r,s} = (V_1 \cup V_2, E)$, es un grafo bipartito donde $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, con todas las aristas posibles conectando vértices de V_1 con vértices de V_2.

El grafo $K_{4,4}$.



Grafos estrella $K_{1,r}$



$K_{1,4}$ $K_{1,5}$ $K_{1,6}$

Ejercicio

¿Cuál será el máximo número de aristas que puede tener un grafo, con la condición de ser bipartito de orden n? (Es equivalente a determinar el número de aristas de un grafo bipartito completo de orden n)

Ejercicio

¿Cuál será el máximo número de aristas que puede tener un grafo, con la condición de ser bipartito de orden n? (Es equivalente a determinar el número de aristas de un grafo bipartito completo de orden n)

Solución:

Sea $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito de orden n.

- Si x es el número de vértices del conjunto V_1, entonces $n - x$ será el número de vértices de V_2.

Ejercicio

¿Cuál será el máximo número de aristas que puede tener un grafo, con la condición de ser bipartito de orden n? (Es equivalente a determinar el número de aristas de un grafo bipartito completo de orden n)

Solución:

Sea $G=(V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito de orden n.

- Si x es el número de vértices del conjunto V_1, entonces $n-x$ será el número de vértices de V_2.
- El número total de aristas será $m=x(n-x)$.

Ejercicio

¿Cuál será el máximo número de aristas que puede tener un grafo, con la condición de ser bipartito de orden n? (Es equivalente a determinar el número de aristas de un grafo bipartito completo de orden n)

Solución:

Sea $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito de orden n.

- Si x es el número de vértices del conjunto V_1, entonces $n-x$ será el número de vértices de V_2.
- El número total de aristas será $m = x(n-x)$.
- Por lo tanto, debemos maximizar la función $f(x) = x(n-x)$.

Ejercicio

¿Cuál será el máximo número de aristas que puede tener un grafo, con la condición de ser bipartito de orden n? (Es equivalente a determinar el número de aristas de un grafo bipartito completo de orden n)

Solución:

Sea $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito de orden n.

- Si x es el número de vértices del conjunto V_1, entonces $n - x$ será el número de vértices de V_2.
- El número total de aristas será $m = x(n - x)$.
- Por lo tanto, debemos maximizar la función $f(x) = x(n - x)$.
- Si n es par, el máximo se alcanza en $x = \frac{n}{2}$. En cambio, si n es impar, se alcanza en $x = \frac{n-1}{2}$ y en $x = \frac{n+1}{2}$.

Ejercicio

¿Cuál será el máximo número de aristas que puede tener un grafo, con la condición de ser bipartito de orden n? (Es equivalente a determinar el número de aristas de un grafo bipartito completo de orden n)

Solución:

Sea $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito de orden n.

- Si x es el número de vértices del conjunto V_1, entonces $n - x$ será el número de vértices de V_2.
- El número total de aristas será $m = x(n-x)$.
- Por lo tanto, debemos maximizar la función $f(x) = x(n-x)$.
- Si n es par, el máximo se alcanza en $x = \frac{n}{2}$. En cambio, si n es impar, se alcanza en $x = \frac{n-1}{2}$ y en $x = \frac{n+1}{2}$.
- La solución será $m = \frac{n^2}{4}$ para n par y $m = \frac{n^2-1}{4}$ para n impar. Por lo tanto, $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ para n par, y $G \cong K_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}}$ para n impar. □

Ejercicio

Demuestra que si un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$ es regular, entonces $|V_1| = |V_2|$.

Ejercicio

Demuestra que si un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$ es regular, entonces $|V_1| = |V_2|$.

Demostración

- Cada arista tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2

Ejercicio

Demuestra que si un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$ es regular, entonces $|V_1| = |V_2|$.

Demostración

- Cada arista tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2
- La medida de G es $m = \sum_{v \in V_1} \delta(v)$ y también es $m = \sum_{v \in V_2} \delta(v)$.

Ejercicio

Demuestra que si un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$ es regular, entonces $|V_1| = |V_2|$.

Demostración

- Cada arista tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2
- La medida de G es $m = \sum_{v \in V_1} \delta(v)$ y también es $m = \sum_{v \in V_2} \delta(v)$.
- Entonces, si G es δ-regular, $|V_1|\delta = |V_2|\delta$.

Ejercicio

Demuestra que si un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$ es regular, entonces $|V_1| = |V_2|$.

Demostración

- Cada arista tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2
- La medida de G es $m = \sum_{v \in V_1} \delta(v)$ y también es $m = \sum_{v \in V_2} \delta(v)$.
- Entonces, si G es δ-regular, $|V_1|\delta = |V_2|\delta$.
- Por consiguiente, $|V_1| = |V_2|$. $\square$

Grafos k-partitos

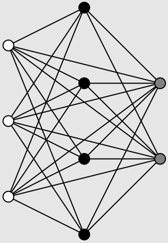
La idea de grafo bipartito se puede generalizar a los grafos k-**partitos**. En este caso se tiene una partición $(V_1, \ldots, V_k)$ del conjunto de vértices, de manera que las aristas conectan vértices que pertenecen a diferentes conjuntos de la partición y no hay aristas conectando vértices de un mismo conjunto V_i.

Grafos k-partitos

La idea de grafo bipartito se puede generalizar a los grafos k-**partitos**. En este caso se tiene una partición $(V_1, \ldots, V_k)$ del conjunto de vértices, de manera que las aristas conectan vértices que pertenecen a diferentes conjuntos de la partición y no hay aristas conectando vértices de un mismo conjunto V_i.

Ejemplo

La figura corresponde al grafo $K_{3,4,2}$.



Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $K_{n_1,\ldots,n_k}$. ¿En qué casos $K_{n_1,\ldots,n_k}$ es un grafo regular?

Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $K_{n_1,\dots,n_k}$. ¿En qué casos $K_{n_1,\dots,n_k}$ es un grafo regular?

Solución

- El orden es $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $K_{n_1,\ldots,n_k}$. ¿En qué casos $K_{n_1,\ldots,n_k}$ es un grafo regular?

Solución

- El orden es $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.
- La medida es $m = \frac{1}{2}(n_1(n-n_1) + n_2(n-n_2) + \ldots + n_k(n-n_k))$.

Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $K_{n_1,\ldots,n_k}$. ¿En qué casos $K_{n_1,\ldots,n_k}$ es un grafo regular?

Solución

- El orden es $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.
- La medida es $m = \dfrac{1}{2}(n_1(n-n_1) + n_2(n-n_2) + \ldots + n_k(n-n_k))$.
- El grafo $K_{n_1,\ldots,n_k}$ es regular si $n_i = n_j$ para todo $i,j \in \{1,\ldots,k\}$.

Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $K_{n_1,\ldots,n_k}$. ¿En qué casos $K_{n_1,\ldots,n_k}$ es un grafo regular?

Solución

- El orden es $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.
- La medida es $m = \frac{1}{2}(n_1(n-n_1) + n_2(n-n_2) + \ldots + n_k(n-n_k))$.
- El grafo $K_{n_1,\ldots,n_k}$ es regular si $n_i = n_j$ para todo $i,j \in \{1,\ldots,k\}$.

  Por lo tanto, $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = \dfrac{n}{k}$. $\square$

Secuencias gráficas

Definición

Una secuencia de números enteros no negativos, $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ se denomina **secuencia gráfica** si existe un grafo $G = (V, E)$ tal que s es la secuencia de grados de G.

Definición

Una secuencia de números enteros no negativos, $s: d_1, d_2, \ldots, d_n$ se denomina **secuencia gráfica** si existe un grafo $G = (V, E)$ tal que s es la secuencia de grados de G.

Ejemplo

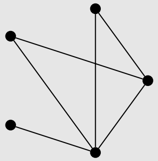
La secuencia $s: 4, 3, 2, 2, 1$ es gráfica.

Definición

Una secuencia de números enteros no negativos, $s: d_1, d_2, \ldots, d_n$ se denomina **secuencia gráfica** si existe un grafo $G = (V, E)$ tal que s es la secuencia de grados de G.

Ejemplo

La secuencia $s: 4, 3, 2, 2, 1$ es gráfica.

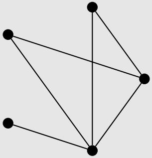


Definición

Una secuencia de números enteros no negativos, $s: d_1, d_2, \ldots, d_n$ se denomina **secuencia gráfica** si existe un grafo $G = (V, E)$ tal que s es la secuencia de grados de G.

Ejemplo

La secuencia $s: 4, 3, 2, 2, 1$ es gráfica.



Ejemplo

La secuencia $s: 4, 3, 3, 2, 1$ no es una secuencia gráfica, puesto que tiene un número impar de números impares.

Condiciones necesarias para que una secuencia sea gráfica

Para que una secuencia $s: d_1, d_2, \ldots, d_n$ sea gráfica es necesario que se cumplan las siguientes condiciones.

(a) $0 \leq d_i \leq n-1$, para $1 \leq i \leq n$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ tiene que ser par.

Condiciones necesarias para que una secuencia sea gráfica

Para que una secuencia $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ sea gráfica es necesario que se cumplan las siguientes condiciones.

(a) $0 \leq d_i \leq n-1$, para $1 \leq i \leq n$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ tiene que ser par.

- ¿Son suficientes estas condiciones?

Condiciones necesarias para que una secuencia sea gráfica

Para que una secuencia $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ sea gráfica es necesario que se cumplan las siguientes condiciones.

(a) $0 \leq d_i \leq n-1$, para $1 \leq i \leq n$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ tiene que ser par.

- ¿Son suficientes estas condiciones?
- ¿Es gráfica la secuencia $5, 5, 3, 3, 3, 1$?

Condiciones necesarias para que una secuencia sea gráfica

Para que una secuencia $s: d_1, d_2, \ldots, d_n$ sea gráfica es necesario que se cumplan las siguientes condiciones.

(a) $0 \leq d_i \leq n-1$, para $1 \leq i \leq n$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ tiene que ser par.

- ¿Son suficientes estas condiciones?
- ¿Es gráfica la secuencia $5,5,3,3,3,1$?
- La secuencia $5,5,3,3,3,1$ no es gráfica.

Condiciones necesarias para que una secuencia sea gráfica

Para que una secuencia $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ sea gráfica es necesario que se cumplan las siguientes condiciones.

(a) $0 \leq d_i \leq n-1$, para $1 \leq i \leq n$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ tiene que ser par.

- ¿Son suficientes estas condiciones?
- ¿Es gráfica la secuencia $5,5,3,3,3,1$?
- La secuencia $5,5,3,3,3,1$ no es gráfica. Para un grafo de orden $n=6$, si hay dos vértices de grado $n-1=5$, entonces no puede haber vértices de grado 1.

Condiciones necesarias para que una secuencia sea gráfica

Para que una secuencia $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ sea gráfica es necesario que se cumplan las siguientes condiciones.

(a) $0 \leq d_i \leq n-1$, para $1 \leq i \leq n$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ tiene que ser par.

- ¿Son suficientes estas condiciones?
- ¿Es gráfica la secuencia $5,5,3,3,3,1$?
- La secuencia $5,5,3,3,3,1$ no es gráfica. Para un grafo de orden $n=6$, si hay dos vértices de grado $n-1=5$, entonces no puede haber vértices de grado 1.
- Obviamente, en un grafo no completo la existencia de k vértices de grado $n-1$ implica que el grado mínimo es al menos k.

Teorema. Caracterización de **Havel-Hakimi**

Sea $d_1, d_2, \ldots, d_n$ una secuencia de números enteros no negativos donde $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) La secuencia $d_1, d_2, \ldots, d_n$ es gráfica.

(b) La secuencia $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ es gráfica.

Teorema. Caracterización de **Havel-Hakimi**

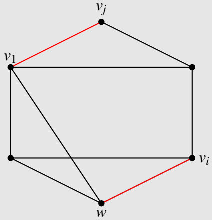
Sea $d_1, d_2, \ldots, d_n$ una secuencia de números enteros no negativos donde $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) La secuencia $d_1, d_2, \ldots, d_n$ es gráfica.

(b) La secuencia $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ es gráfica.

Demostración: ver los detalles en los apuntes.

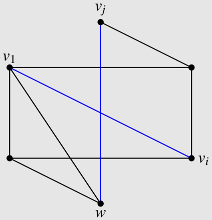
Para ilustrar el caso peor de (a) implica (b), eliminamos v_1 de G que tiene grado máximo, pero no se obtiene un grafo cuya secuencia es (b). En ese caso, modificamos G como se indica en la figura.



Grafo G.

Secuencia

$(4,3,3,3,3,2)$



Grafo G modificado

Algoritmo de Havel-Hakimi

Input: a sequence of integers $s: d_1, d_2, \ldots, d_n$
Output: it tells if s is graphic.
Algorithm:

If there exists $d_i > n-1$, *then* the sequence is not graphic. *end*.
While there is no $d_i < 0$ *and* s is not identically 0.
  Order s in descending order.
  Delete d_1 of s and subtract 1 unit from the following d_1 elements.
endwhile
If there exists $d_i < 0$, *then*
  s is not graphic sequence.
Else
  s is a graphic sequence.
end

Ejemplo

Aplicamos el algoritmo de Havel-Hakimi a la secuencia $2,2,4,3,3,2,3,5$.
5,4,3,3,3,2,2,2
3,2,2,2,1,2,2
3,2,2,2,2,2,1
1,1,1,2,2,1
2,2,1,1,1,1
1,0,1,1,1
1,1,1,1,0
0,1,1,0
1,1,0,0
0,0,0. Por lo tanto, la secuencia inicial es gráfica.

Ejercicio

Considera la secuencia $d-2, d-2, d-1, d-1, d-1, d-1, d+2$, donde d es un número entero ¿Para qué valores de d la secuencia es gráfica?

Ejercicio

Considera la secuencia $d-2, d-2, d-1, d-1, d-1, d-1, d+2$, donde d es un número entero ¿Para qué valores de d la secuencia es gráfica?

Como $d \geq 2$ y $d+2 \leq 6$, tenemos que $d \in \{2,3,4\}$.

Ejercicio

Considera la secuencia $d-2, d-2, d-1, d-1, d-1, d-1, d+2$, donde d es un número entero ¿Para qué valores de d la secuencia es gráfica?

Como $d \geq 2$ y $d+2 \leq 6$, tenemos que $d \in \{2,3,4\}$.
Para $d = 2$, la secuencia $0, 0, 1, 1, 1, 1, 4$ es gráfica ya que al aplicar el algoritmo de Havel-Hakimi se obtiene la secuencia $0, 0, 0, 0, 0, 0$.

Ejercicio

Considera la secuencia $d-2, d-2, d-1, d-1, d-1, d-1, d+2$, donde d es un número entero ¿Para qué valores de d la secuencia es gráfica?

Como $d \geq 2$ y $d+2 \leq 6$, tenemos que $d \in \{2,3,4\}$.
Para $d=2$, la secuencia $0,0,1,1,1,1,4$ es gráfica ya que al aplicar el algoritmo de Havel-Hakimi se obtiene la secuencia $0,0,0,0,0,0$.
Para $d=3$ la secuencia es $1,1,2,2,2,2,5$, que no es gráfica por tener un número impar de números impares.

Ejercicio

Considera la secuencia $d-2, d-2, d-1, d-1, d-1, d-1, d+2$, donde d es un número entero ¿Para qué valores de d la secuencia es gráfica?

Como $d \geq 2$ y $d+2 \leq 6$, tenemos que $d \in \{2,3,4\}$.
Para $d=2$, la secuencia $0,0,1,1,1,1,4$ es gráfica ya que al aplicar el algoritmo de Havel-Hakimi se obtiene la secuencia $0,0,0,0,0,0$.
Para $d=3$ la secuencia es $1,1,2,2,2,2,5$, que no es gráfica por tener un número impar de números impares.
Finalmente, para $d=4$ la secuencia es $2,2,3,3,3,3,6$ y al aplicar el algoritmo de Havel-Hakimi se obtiene:

$6,3,3,3,3,2,2$
$2,2,2,2,1,1$
$1,1,2,1,1$
$2,1,1,1,1$
$0,0,1,1$
$1,1,0,0$
$0,0,0$

Por lo tanto, la secuencia es gráfica. $\square$

Ejercicio

Determina los valores de n y d tales que la secuencia $d, d+1, d+2, \ldots, d+n-1$ sea gráfica.

Ejercicio

Determina los valores de n y d tales que la secuencia $d, d+1, d+2, \ldots, d+n-1$ sea gráfica.

Solución

- Como la secuencia tiene n números, y en todo grafo de orden n el grado máximo es a lo sumo $n-1$, la única posibilidad es $d=0$.

Ejercicio

Determina los valores de n y d tales que la secuencia $d, d+1, d+2, \ldots, d+n-1$ sea gráfica.

Solución

- Como la secuencia tiene n números, y en todo grafo de orden n el grado máximo es a lo sumo $n-1$, la única posibilidad es $d=0$.
- La secuencia es $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Ejercicio

Determina los valores de n y d tales que la secuencia $d, d+1, d+2, \ldots, d+n-1$ sea gráfica.

Solución

- Como la secuencia tiene n números, y en todo grafo de orden n el grado máximo es a lo sumo $n-1$, la única posibilidad es $d=0$.
- La secuencia es $0, 1, 2, \ldots, n-1$.
- Para $n \geq 2$ no puede haber vértices de grado 0 y otros de grado $n-1$.

Ejercicio

Determina los valores de n y d tales que la secuencia $d, d+1, d+2, \ldots, d+n-1$ sea gráfica.

Solución

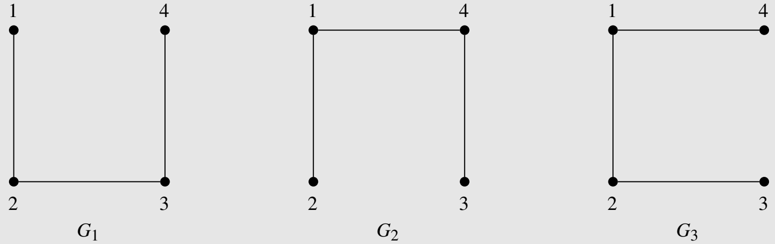
- Como la secuencia tiene n números, y en todo grafo de orden n el grado máximo es a lo sumo $n-1$, la única posibilidad es $d=0$.
- La secuencia es $0, 1, 2, \ldots, n-1$.
- Para $n \geq 2$ no puede haber vértices de grado 0 y otros de grado $n-1$.
- Por lo tanto, la secuencia no es gráfica, excepto el caso $n=1$ que corresponde al grafo trivial K_1. $\square$

Ejercicio propuesto para casa

Considera la familia de grafos $G_{x,t}$ sin vértices aislados, que tienen medida $m(G_{x,t}) \leq 20$ y orden $n(G_{x,t}) = 2x+1$, tales que $G_{x,t}$ tiene x vértices de grado $t-3$ y los demás vértices tienen grado t. Determina todos los posibles valores de x y t.

Isomorfismo de grafos

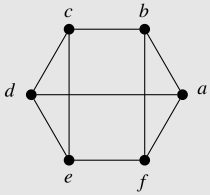
Ejemplo

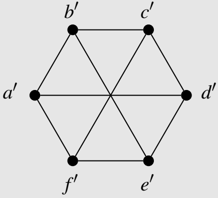


Aunque estos tres grafos son diferentes, ellos tienen la misma estructura. Son caminos de orden 4.

Ejemplo

Aunque los grafos de la siguiente figura tienen el mismo orden, la misma medida y ambos son 3-regulares, no tienen la misma estructura ¿Cómo podemos explicar que no tienen la misma estructura?





Definición

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos.

- G_1 y G_2 son **idénticos** si y sólo si $V_1 = V_2$ y $E_1 = E_2$.
- G_1 y G_2 son **isomorfos** (se denota $G_1 \cong G_2$) si y sólo si existe una biyección

  $$\varphi : V_1 \to V_2$$

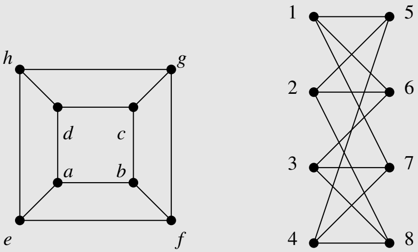
  que conserva las adyacencias y las no adyacencias, es decir,

  $$u \sim v \Leftrightarrow \varphi(u) \sim \varphi(v).$$

  En este caso, se dice que φ es un **isomorfismo** de grafos.

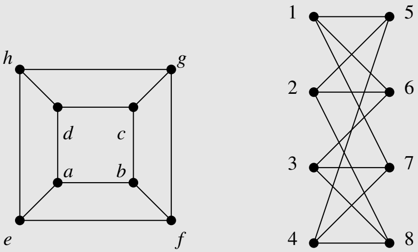
Ejercicio

Determina si los grafos representados en la figura son isomorfos.



Ejercicio

Determina si los grafos representados en la figura son isomorfos.



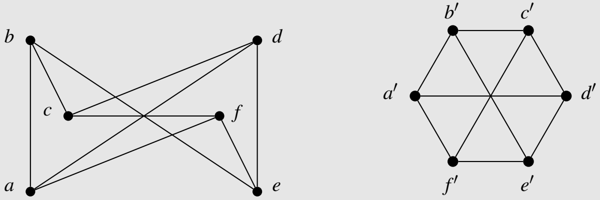
Solución

La respuesta es afirmativa y el isomorfismo es:

$$a \to 1,\ b \to 5,\ c \to 2,\ d \to 6,\ h \to 3,\ e \to 7,\ f \to 4,\ g \to 8$$

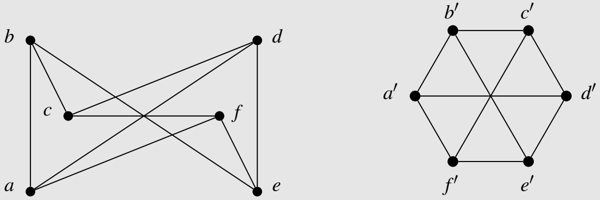
Ejercicio

Determina si los grafos son isomorfos.



Ejercicio

Determina si los grafos son isomorfos.



Solución

Los grafos son isomorfos y el isomorfismo es:

$$a \to a',\ d \to d'$$
$$b \to b',\ e \to e'$$
$$c \to c',\ f \to f'$$

Nótese que ambos son isomorfos al grafo bipartito completo $K_{3,3}$. □

Definiciones alternativas de grafo

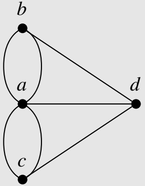
Definición

Un **multigrafo** $G=(V,E)$ es un par ordenado donde V es un conjunto finito no vacío y E es un multiconjunto de pares no ordenados $\{u,v\}$ de elementos de V, donde $u \neq v$.

Definición

Un **multigrafo** $G=(V,E)$ es un par ordenado donde V es un conjunto finito no vacío y E es un multiconjunto de pares no ordenados $\{u,v\}$ de elementos de V, donde $u \neq v$.

Ejemplo



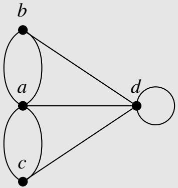
Definición

Un **pseudografo** $G = (V, E)$ es un par ordenado donde V es un conjunto finito no vacío y E es un multiconjunto de pares no ordenados $\{u, v\}$ de elementos de V.

Definición

Un **pseudografo** $G=(V,E)$ es un par ordenado donde V es un conjunto finito no vacío y E es un multiconjunto de pares no ordenados $\{u,v\}$ de elementos de V.

Ejemplo

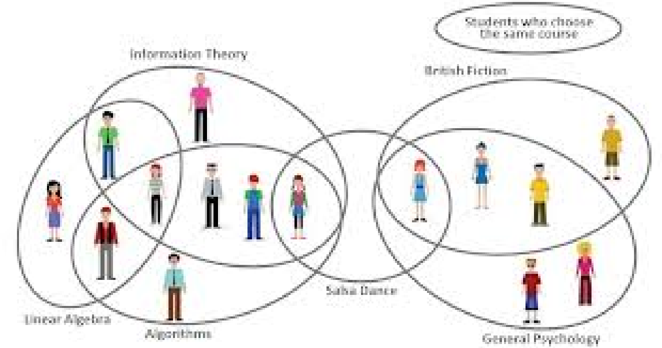


Definición

Un **hipergrafo** $G=(V,E)$ es un par ordenado donde V es un conjunto finito no vacío y los elementos de E son subconjuntos no vacíos de V llamados **hiperaristas**.

Ejemplo

En el siguiente ejemplo de hipergrafo cada nodo es un estudiante y las hiperaristas son los grupos de estudiantes que eligen cursar una determinada asignatura.



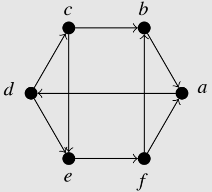
Definición

Un **digrafo** $G=(V,E)$ es un par ordenado donde V es un conjunto finito no vacío y $E \subseteq V \times V$. Es decir, las aristas son pares ordenados de elementos de V llamados **arcos**.

Definición

Un **digrafo** $G = (V, E)$ es un par ordenado donde V es un conjunto finito no vacío y $E \subseteq V \times V$. Es decir, las aristas son pares ordenados de elementos de V llamados **arcos**.

Ejemplo



¿Cómo introducir un grafo al ordenador?

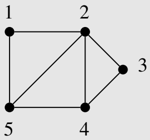
Definición

Sea $G = (V, E)$ un **grafo** y sea $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Se define la **matriz de adyacencia** de G como $A = (a_{ij})$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad v_i \sim v_j; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo

La matriz de adyacencia del grafo



será la siguiente matriz simétrica de orden 5×5:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

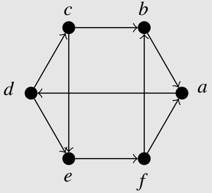
Definición

Sea $G = (V, E)$ un **digrafo** y sea $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Se define la **matriz de adyacencias** de G como $A = (a_{ij})$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (v_i, v_j) \in E; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo

Matriz de adyacencia de un digrafo:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

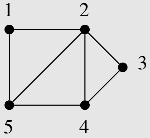
En este caso los vértices están ordenados alfabéticamente de modo que la fila superior de la matriz corresponde al vértice a.

Definición

Sea $A = (V, E)$ un **grafo** donde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Se define la **matriz laplaciana** de G como la matriz $L = D - A$, donde A es la matriz de adyacencia de G y $D = diag(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ es la matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los grados de los vértices. donde G.

Ejemplo

La matriz laplaciana, $L = D - A$, en el grafo



es la siguiente matriz simétrica de orden 5×5:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

"Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas".

Albert Einstein