Solucions Problemes d'Anàlisi Complexa

Grau en Enginyeria Matemàtica i Física

Curs 2024-25

1. El pla complex

1. $c^5 = 16 - 16\sqrt{3}\, i$. Módul 32 i Argument $-\pi/3$.

2. $\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$, $\sqrt{2}e^{i7\pi/12}$, $\frac{1}{2}e^{-2\pi i/3}$

3. $-1+3i$, $1+i$

4. $n = 4$

5. (a) $|z - \frac{5}{4}i| = 3/4$, (b) $Re(z) = 0$

6. $\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$, $\quad 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$

7. $\frac{1}{2} - i\,\frac{\sin(\theta)}{2+2cos(\theta)}$

8. i

9. S'han de fer les proves

10. S'han de fer les proves

11. (a) $\frac{5}{2} - \frac{i}{2}$, (b)$\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$, (c) $\frac{x^2+y^2+3x+2}{(x+1)^2+y^2} - \frac{iy}{(x+1)^2+y^2}$

12. S'ha de fer la prova

13. S'han de fer les proves

14. S'ha de fer el dibuix concret de cada regió

15. El centre està en el punt $(\frac{a_1-r^2b_1}{1-r^2}, \frac{a_2-r^2b_2}{1-r^2})$ i el radi és igual a $r|a-b|$

16. (a) $\bar{a} = re^{-i\theta}$, $1/\bar{a} = r^{-1}e^{i\theta}$. (b) i (c) S'ha de fer la prova. (d) $|z| = 1$.

17. S'ha de fer el dibuix

18. (a) 1, (b) Si $\alpha = p/q$ aleshores el número d'element és q, (b) una quantitat numerable de valors. $(1+i)^4 = -4$, $(1+i)^{2/5} = \{\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi/2+2k\pi}{5}} \quad k = 0,\ldots,4\}$, $(1+i)^i = \{e^{-(\pi/4+2k\pi)}e^{i\ln\sqrt{2}}\}$

19. (a) $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{2}i$, $-\sqrt[4]{2}$, $-\sqrt[4]{2}i$; (b) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\,e^{2\pi i/5}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\,e^{4\pi i/5}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\,e^{6\pi i/5}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\,e^{8\pi i/5}$

20. $\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, $\sqrt{2}\,e^{i11\pi/12}$, $\sqrt{2}\,e^{19i\pi/12}$

21.
- Si $n \neq 0, n \neq 2$, les solucions són 1, $e^{2\pi i/n}$, $e^{4\pi i/n}, \ldots, e^{2\pi i(n-1)/n}$.
- Si $n = 2$ les solucions són r, $re^{2\pi i/n}$, $re^{4\pi i/n}, \ldots, re^{2\pi i(n-1)/n}$ amb $r \geq 0$.
- Si $n = 0$ les solucions són el cercle $r = 1$.

22. (a) totes, (b) totes menys la A, (c) I, O.

23. resolt a classe

2. Funcions holomorfes

24. S'ha de fer la verificació

25. S'ha de fer la verificació

26. S'ha de fer la verificació

27. S'ha de fer la demostració

28. S'ha de fer la prova

29. (a) $Re(z^2) = x^2 - y^2$, $Im(z^2) = 2xy$. (b) $Re(z^3) = x^3 - 3xy^2$, $Im(z^3) = 3x^2y - y^3$. (c) $Re(z^4) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $Im(z^4) = 4x^3y - 4xy^3$. (d) $Re(e^z) = e^x \cos(y)$, $Im(e^z) = e^x \sin(y)$. (e) $Re(1/z) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $Im(1/z) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

30. $f(x, y) = 2e^x \cos(y) + i2e^x \sin(y)$

31. (a) No, (b) No, (c) No

32. (a) $R = 1$, (b) $R = 1$, (c) $R = 1$, (d)$R = 1/2$, (e) $R = 3/5$, (f) $R = \infty$

33. (a) $R = 1$, (b) $R = 1$, (c) $R = 1/e$

34. S'ha de fer la prova

35. S'han de fer les proves

36. S'han de fer les proves

3. Camins i integració. Teoremes de Cauchy. Conseqüències.

37. $2\pi in$

38. 16

39. 8

40. (a) i , (b) 0 , (c) $2i$

41. solucions a l'enunciat

42. (a) 0 , (b) 0 si $m \leq 0$ i $\frac{2\pi i}{(m-1)!}$ si $m \geq 0$, (c) 0, (d) πi

43. S'ha de fer la prova

44. (a) 0, (b) $-\frac{\pi i}{3}$, (c) $\frac{\pi i e^{36}}{3}$, (d)$\frac{\pi i}{3}(e^{36}-1)$

45. s'ha de fer la prova

46. (a) $\frac{2\pi i}{3}$, (b) $\frac{4\pi i}{3}$, (c) $\frac{4\pi i}{3}$

47. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}\left(z-\frac{1}{2}\right)^n$ amb radi de convergència igual a 1/2. (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(z+\frac{1}{2}\right)^n$ amb radi de convergència igual a 3/2.

48. (a)0 , (b) 0

49. $\frac{2\pi}{1-a^2}$

50. $2\pi i$

51. 0

52. s'ha de fer la prova

53. s'ha de fer la prova

54. (a) s'ha de fer la prova, (b) $z_k = \frac{\pi/2+k\pi-1}{\pi/2+k\pi+1}$ on $k \in \mathbb{Z}$, (b) 1

55. s'ha de fer la prova

56. . $2\pi i[\frac{9}{2\pi^2} + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{9}{\pi^2}]$

57. $2\pi ni$

58. (a) sí, (b) no

59. s'ha de fer la prova

60. s'ha de fer la prova

61. s'ha de fer la prova

62. s'ha de fer la prova

63. s'ha de fer la prova

64. s'ha de fer la prova

4. Singularitats i desenvolupament de Laurent

65. (a) evitable, (b) pol, (c) evitable, (d) essencial, (e) pol, (f) essencial, (g) pol, (i) essencial.

66. $r(z) = \frac{2/3}{(z-1)^2} - \frac{i}{3\sqrt{3}} \frac{1}{z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} + \frac{i}{3\sqrt{3}} \frac{1}{z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

67. (a) $\frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n$, (b) $-\frac{1}{2z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} z^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}$, (c) $\sum_{n=2}^{\infty} (2^{n-1} - 1) \frac{1}{z^n}$

68. $\sum_{k=0}^{\infty} (1 + \frac{1}{3^{2k+1}}) z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{3^{2k+2}}$ per $|z| < 1$. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}}$ per $1 < |z| < 3$. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{z^{k+1}}$ per $|z| > 3$.

69. $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$ són pols simples.

70. (a) pol d'ordre n, (b) funció holormofa per $m \geq n$ i pol si $m < n$.

71. S'ha de fer la prova

72. S'ha de fer la prova

73. S'ha de fer la prova

74. (a) 7/360, (b) -47/36

75. Pols en els punts $z_k = \frac{1}{2k\pi}$ amb $k \in \mathbb{Z}$ amb residu 1/6 i $w_k = \frac{1}{\pi + 2k\pi}$ amb $k \in \mathbb{Z}$ amb residu $1/\pi$.

5. Teoria dels residus

76. (a) $\frac{1}{4}i$, (b) 1, (c) $-\frac{1}{4}$, (d) 0, (e) $\frac{1}{5}$, (f) $\dfrac{1}{\displaystyle\prod_{j=0,j\neq k}^{n-1}\left(e^{\frac{2\pi i j}{n}}-e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right)}$

77. (a) $2\pi i$, (b) $-2\pi^2 i$, (c) $\frac{3\pi i}{4}$, (d) $2\pi i\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}\right)$, (e) 0, (f) $-2\pi i$

78. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

79. (a) $\frac{\pi}{\sqrt{a^2+2a}}$, (b) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, (c) $\frac{5\pi}{12}$, (d) $\frac{\pi}{16a^3}$, (e) $\frac{\pi}{2}$, (f) $\frac{\pi}{2}$

80.
- Si $|a|<1 \Rightarrow \frac{2\pi a}{1-a^2}$.
- Si $|a|>1 \Rightarrow \frac{2\pi a}{a^2-1}$

81. Resultat a l'enunciat

82. (a) $\frac{i\pi^3}{8}$, (b) $-\frac{2\pi i}{3}$

83. (a) Pols $z=0$ amb residu $-\frac{\pi^2}{3}$, $z=k$ per $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ amb residu $\frac{1}{k^2}$, (b) $2\pi i\left(-\frac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{j=-n,j\neq 0}^{n}\frac{1}{j^2}\right)$

84. S'ha de fer la prova.