Espacio Proyectivo

J. A. Rodríguez-Velázquez

URV

Definición (Espacio Proyectivo)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$.
El *espacio proyectivo* $P(V)$ asociado a V es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 de V.

Definición (Espacio Proyectivo)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$.
El *espacio proyectivo* $P(V)$ asociado a V es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 de V.

Los elementos de $P(V)$ se llaman puntos del espacio proyectivo.

Definición (Espacio Proyectivo)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$.
El *espacio proyectivo* $P(V)$ asociado a V es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 de V.

Los elementos de $P(V)$ se llaman puntos del espacio proyectivo.

En otras palabras, $P(V)$ es el conjunto de clases de equivalencia de $V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ bajo la relación

$$\overrightarrow{v} \sim \overrightarrow{w} \text{ si y solo si } \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{w} \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Definición (Espacio Proyectivo)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$.
El *espacio proyectivo* $P(V)$ asociado a V es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 de V.

Los elementos de $P(V)$ se llaman puntos del espacio proyectivo.

En otras palabras, $P(V)$ es el conjunto de clases de equivalencia de $V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ bajo la relación

$$\overrightarrow{v} \sim \overrightarrow{w} \text{ si y solo si } \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{w} \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Dimensión

- La dimensión de $P(V)$ se define como $\dim(V) - 1$.
- Suponemos también que $\varnothing$ es el espacio proyectivo asociado al espacio vectorial $\{\overrightarrow{0}\}$ y $\dim(\varnothing) = -1$.

Casos particulares

- Si $\dim(V) = 1$, entonces $P(V)$ es un punto.

Casos particulares

- Si $\dim(V) = 1$, entonces $P(V)$ es un punto.
- Si $\dim(V) = 2$, entonces $P(V)$ es una recta, llamada la recta proyectiva del plano V.

Casos particulares

- Si $\dim(V) = 1$, entonces $P(V)$ es un punto.
- Si $\dim(V) = 2$, entonces $P(V)$ es una recta, llamada la recta proyectiva del plano V.
- Si $\dim(V) = 3$, entonces $P(V)$ es un plano, llamado el plano proyectivo del espacio V.

Casos particulares

- Si $\dim(V) = 1$, entonces $P(V)$ es un punto.
- Si $\dim(V) = 2$, entonces $P(V)$ es una recta, llamada la recta proyectiva del plano V.
- Si $\dim(V) = 3$, entonces $P(V)$ es un plano, llamado el plano proyectivo del espacio V.
- En general, si V es un espacio vectorial de dimension $n+1$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces denotamos $P_n(\mathbb{K}) = P(V)$.

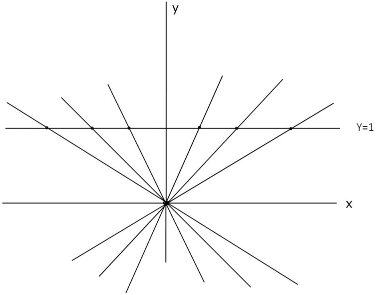
Casos particulares

- Si $\dim(V) = 1$, entonces $P(V)$ es un punto.
- Si $\dim(V) = 2$, entonces $P(V)$ es una recta, llamada la recta proyectiva del plano V.
- Si $\dim(V) = 3$, entonces $P(V)$ es un plano, llamado el plano proyectivo del espacio V.
- En general, si V es un espacio vectorial de dimension $n+1$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces denotamos $P_n(\mathbb{K}) = P(V)$.

Ahora procedemos a mostrar una representación intuitiva de la recta proyectiva $P_1(\mathbb{R})$ y del plano proyectivo $P_2(\mathbb{R})$.

Recta proyectiva $P_1(\mathbb{R})$

En primer lugar, consideremos el espacio euclidiano $\mathbb{R}^2$ donde los puntos se representan en coordenadas cartesianas. Consideremos una recta horizontal de ecuación $y = 1$ como se muestra en la siguiente figura.



$$P_1(\mathbb{R}) = (\text{la recta afín } \; y = 1) \cup \{\infty\}.$$

La recta proyectiva $P_1(\mathbb{R})$

- Otra aproximación se obtiene si normalizamos los vectores no nulos para convertirlos en vectores unitarios. Entonces sólo hay dos vectores que representan el mismo subespacio vectorial de dimensión uno.

La recta proyectiva $P_1(\mathbb{R})$

- Otra aproximación se obtiene si normalizamos los vectores no nulos para convertirlos en vectores unitarios. Entonces sólo hay dos vectores que representan el mismo subespacio vectorial de dimensión uno.
- En tal caso, los puntos de $P_1(\mathbb{R})$ son los puntos de una circunferencia S_1, donde cada punto de $P_1(\mathbb{R})$ está representado dos veces en S_1, es decir, los puntos antipodales de S_1 corresponden al mismo punto en $P_1(\mathbb{R})$.

La recta proyectiva $P_1(\mathbb{R})$

- Otra aproximación se obtiene si normalizamos los vectores no nulos para convertirlos en vectores unitarios. Entonces sólo hay dos vectores que representan el mismo subespacio vectorial de dimensión uno.
- En tal caso, los puntos de $P_1(\mathbb{R})$ son los puntos de una circunferencia S_1, donde cada punto de $P_1(\mathbb{R})$ está representado dos veces en S_1, es decir, los puntos antipodales de S_1 corresponden al mismo punto en $P_1(\mathbb{R})$.
- Ahora, podemos tomar una semicircunferencia y así nos quedamos con sólo dos puntos antipodales (como se muestra en la figura).

La recta proyectiva $P_1(\mathbb{R})$

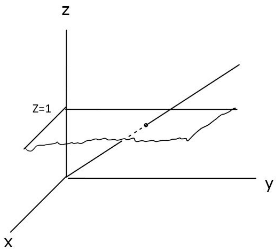
- Otra aproximación se obtiene si normalizamos los vectores no nulos para convertirlos en vectores unitarios. Entonces sólo hay dos vectores que representan el mismo subespacio vectorial de dimensión uno.
- En tal caso, los puntos de $P_1(\mathbb{R})$ son los puntos de una circunferencia S_1, donde cada punto de $P_1(\mathbb{R})$ está representado dos veces en S_1, es decir, los puntos antipodales de S_1 corresponden al mismo punto en $P_1(\mathbb{R})$.
- Ahora, podemos tomar una semicircunferencia y así nos quedamos con sólo dos puntos antipodales (como se muestra en la figura).
- Finalmente, podemos identificar esos dos puntos antipodales para obtener de nuevo una circunferencia, de forma que los puntos de $P_1(\mathbb{R})$ están en correspondencia uno a uno con los puntos de S_1.

El plano proyectivo $P_2(\mathbb{R})$

- Consideremos el plano $z = 1$ en $\mathbb{R}^3$.

El plano proyectivo $P_2(\mathbb{R})$

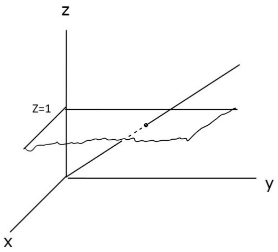
- Consideremos el plano $z = 1$ en $\mathbb{R}^3$.
- Para todas las rectas de $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen podemos tomar un vector director $(x, y, 1)$, excepto para las del plano-xy, $z = 0$. Así, todos los subespacios de dimensión 1 en $\mathbb{R}^3$ se identifican con los puntos del plano $z = 1$, excepto las del plano $z = 0$.



$$P_2(\mathbb{R}) = (\text{el plano afín } z = 1) \cup P_1(\mathbb{R}).$$

El plano proyectivo $P_2(\mathbb{R})$

- Consideremos el plano $z = 1$ en $\mathbb{R}^3$.
- Para todas las rectas de $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen podemos tomar un vector director $(x, y, 1)$, excepto para las del plano-xy, $z = 0$. Así, todos los subespacios de dimensión 1 en $\mathbb{R}^3$ se identifican con los puntos del plano $z = 1$, excepto las del plano $z = 0$.
- En resumen, identificamos $P(\mathbb{R}^3)$ con el plano afín $z = 1$ adicionándole la recta proyectiva $P_1(\mathbb{R}) = P(z = 0)$ que se denomina recta del infinito.



$$P_2(\mathbb{R}) = (\text{el plano afín } z = 1) \cup P_1(\mathbb{R}).$$

Observación

Si $\mathcal{B} = (B, F)$ es un subespacio afín del espacio $\mathcal{A} = (A, V)$ donde $\dim(V) = \dim(F) + 1$ ($\mathcal{B}$ es un hiperplano afín), entonces

$$P(V) = \mathcal{B} \cup P(F).$$

Observación

Si $\mathcal{B} = (B, F)$ es un subespacio afín del espacio $\mathcal{A} = (A, V)$ donde $\dim(V) = \dim(F) + 1$ ($\mathcal{B}$ es un hiperplano afín), entonces

$$P(V) = \mathcal{B} \cup P(F).$$

En particular, tenemos los siguientes casos.

- Si $\dim(V) = 2$, entonces $\mathcal{B}$ es una recta afín y $P(F)$ es un punto, el punto del infinito. Esto significa que si eliminamos el punto del infinito de una recta proyectiva, obtenemos una recta afín.

Observación

Si $\mathcal{B} = (B, F)$ es un subespacio afín del espacio $\mathcal{A} = (A, V)$ donde $\dim(V) = \dim(F) + 1$ ($\mathcal{B}$ es un hiperplano afín), entonces

$$P(V) = \mathcal{B} \cup P(F).$$

En particular, tenemos los siguientes casos.

- Si $\dim(V) = 2$, entonces $\mathcal{B}$ es una recta afín y $P(F)$ es un punto, el punto del infinito. Esto significa que si eliminamos el punto del infinito de una recta proyectiva, obtenemos una recta afín.
- En una recta proyectiva podemos considerar que el punto del infinito es cualquier punto.

Observación

Si $\mathcal{B} = (B, F)$ es un subespacio afín del espacio $\mathcal{A} = (A, V)$ donde $\dim(V) = \dim(F) + 1$ ($\mathcal{B}$ es un hiperplano afín), entonces

$$P(V) = \mathcal{B} \cup P(F).$$

En particular, tenemos los siguientes casos.

- Si $\dim(V) = 2$, entonces $\mathcal{B}$ es una recta afín y $P(F)$ es un punto, el punto del infinito. Esto significa que si eliminamos el punto del infinito de una recta proyectiva, obtenemos una recta afín.
- En una recta proyectiva podemos considerar que el punto del infinito es cualquier punto.
- Si $\dim(V) = 3$, entonces $\mathcal{B}$ es un plano afín y $P(F)$ es la recta del infinito. Esto significa que si eliminamos la recta del infinito de un plano proyectivo, entonces obtenemos un plano afín.

Observación

Si $\mathcal{B} = (B, F)$ es un subespacio afín del espacio $\mathcal{A} = (A, V)$ donde $\dim(V) = \dim(F) + 1$ ($\mathcal{B}$ es un hiperplano afín), entonces

$$P(V) = \mathcal{B} \cup P(F).$$

En particular, tenemos los siguientes casos.

- Si $\dim(V) = 2$, entonces $\mathcal{B}$ es una recta afín y $P(F)$ es un punto, el punto del infinito. Esto significa que si eliminamos el punto del infinito de una recta proyectiva, obtenemos una recta afín.
- En una recta proyectiva podemos considerar que el punto del infinito es cualquier punto.
- Si $\dim(V) = 3$, entonces $\mathcal{B}$ es un plano afín y $P(F)$ es la recta del infinito. Esto significa que si eliminamos la recta del infinito de un plano proyectivo, entonces obtenemos un plano afín.
- En un plano proyectivo podemos considerar que la recta del infinito es cualquier recta.

Sea V un espacio vectorial de dimension $n+1$, y sea

$$p : V \setminus \{\overrightarrow{0}\} \longrightarrow P(V)$$

la proyección canónica.

Definición (Subespacio proyectivo)

Un *subespacio proyectivo*, o variedad lineal proyectiva, de $P(V)$ se define como la imagen $p(F \setminus \{\overrightarrow{0}\})$ de un subespacio vectorial F de V.

Ejemplo (Recta proyectiva de 3 puntos)

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si consideramos el espacio vectorial

$$\mathbb{K}^2 = \{00, 10, 01, 11\}$$

sobre $\mathbb{K}$, entonces $(01, 10)$ es una base y por eso $\dim(\mathbb{K}^2) = 2$.

Ejemplo (Recta proyectiva de 3 puntos)

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si consideramos el espacio vectorial

$$\mathbb{K}^2 = \{00, 10, 01, 11\}$$

sobre $\mathbb{K}$, entonces $(01, 10)$ es una base y por eso $\dim(\mathbb{K}^2) = 2$.

Por lo tanto, $P(\mathbb{K}^2)$ es una recta proyectiva y tiene tres puntos,

$$P(\mathbb{K}^2) = \{\langle 10\rangle, \langle 01\rangle, \langle 11\rangle\}.$$

Ejemplo (El plano de Fano)

- Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y consideremos el espacio vectorial $\mathbb{K}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$.

Ejemplo (El plano de Fano)

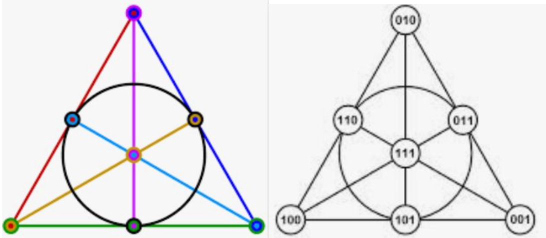
- Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y consideremos el espacio vectorial $\mathbb{K}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$.
- En este caso, $\dim(\mathbb{K}^3) = 3$ y $(100, 010, 001)$ es una base. Así, $P(\mathbb{K}^3)$ es un plano proyectivo que tiene 7 puntos y 7 rectas.

Ejemplo (El plano de Fano)

- Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y consideremos el espacio vectorial $\mathbb{K}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$.
- En este caso, $\dim(\mathbb{K}^3) = 3$ y $(100, 010, 001)$ es una base. Así, $P(\mathbb{K}^3)$ es un plano proyectivo que tiene 7 puntos y 7 rectas.
- Los puntos son 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111.

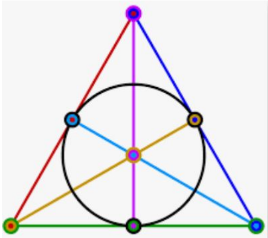
Ejemplo (El plano de Fano)

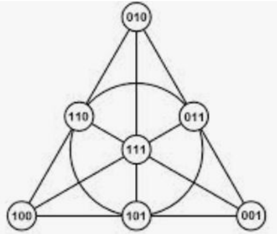
- Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y consideremos el espacio vectorial $\mathbb{K}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$.
- En este caso, $\dim(\mathbb{K}^3) = 3$ y $(100, 010, 001)$ es una base. Así, $P(\mathbb{K}^3)$ es un plano proyectivo que tiene 7 puntos y 7 rectas.
- Los puntos son 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111.
- Cada recta tiene 3 puntos. Si p y q son puntos, el tercer punto de la recta pq se obtiene sumando las etiquetas de p y q modulo 2.



Observación

Podemos suponer que la recta del infinito es la coloreada en negro en el plano de Fano de la izquierda. Así, si eliminamos esa recta, y también los tres puntos sobre ella, obtenemos el plano afín de cuatro puntos.





Proposición

Si $P(F)$ y $P(G)$ son subespacios proyectivos de $P(V)$, inducidos por los subespacios vectoriales F y G, respectivamente, entonces $P(F \cap G) = P(F) \cap P(G)$.

Proposición

Si $P(F)$ y $P(G)$ son subespacios proyectivos de $P(V)$, inducidos por los subespacios vectoriales F y G, respectivamente, entonces $P(F \cap G) = P(F) \cap P(G)$.

Demostración

Si $x \in P(F \cap G)$, entonces existe $\overrightarrow{x} \in F \cap G \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tal que $p(\overrightarrow{x}) = x$.

Proposición

Si $P(F)$ y $P(G)$ son subespacios proyectivos de $P(V)$, inducidos por los subespacios vectoriales F y G, respectivamente, entonces $P(F \cap G) = P(F) \cap P(G)$.

Demostración

Si $x \in P(F \cap G)$, entonces existe $\overrightarrow{x} \in F \cap G \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tal que $p(\overrightarrow{x}) = x$. Tenemos,

- $\overrightarrow{x} \in F \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $p(\overrightarrow{x}) = x \longrightarrow x \in P(F)$,
- $\overrightarrow{x} \in G \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $p(\overrightarrow{x}) = x \longrightarrow x \in P(G)$.

Por lo tanto, $x \in P(F) \cap P(G)$. Es decir, $P(F \cap G) \subseteq P(F) \cap P(G)$.

Proposición

Si $P(F)$ y $P(G)$ son subespacios proyectivos de $P(V)$, inducidos por los subespacios vectoriales F y G, respectivamente, entonces $P(F\cap G) = P(F)\cap P(G)$.

Demostración

Si $x \in P(F\cap G)$, entonces existe $\overrightarrow{x} \in F\cap G \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tal que $p(\overrightarrow{x}) = x$. Tenemos,

- $\overrightarrow{x} \in F\setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $p(\overrightarrow{x}) = x \longrightarrow x \in P(F)$,
- $\overrightarrow{x} \in G\setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $p(\overrightarrow{x}) = x \longrightarrow x \in P(G)$.

Por lo tanto, $x \in P(F)\cap P(G)$. Es decir, $P(F\cap G) \subseteq P(F)\cap P(G)$.

Por otro lado, si $x \in P(F)\cap P(G)$, entonces existen $\overrightarrow{f} \in F\setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $\overrightarrow{g} \in G\setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tales que $p(\overrightarrow{f}) = x$ y $p(\overrightarrow{g}) = x$,

Proposición

Si $P(F)$ y $P(G)$ son subespacios proyectivos de $P(V)$, inducidos por los subespacios vectoriales F y G, respectivamente, entonces $P(F\cap G) = P(F)\cap P(G)$.

Demostración

Si $x \in P(F\cap G)$, entonces existe $\overrightarrow{x} \in F\cap G \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tal que $p(\overrightarrow{x}) = x$. Tenemos,

- $\overrightarrow{x} \in F \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $p(\overrightarrow{x}) = x \longrightarrow x \in P(F)$,
- $\overrightarrow{x} \in G \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $p(\overrightarrow{x}) = x \longrightarrow x \in P(G)$.

Por lo tanto, $x \in P(F)\cap P(G)$. Es decir, $P(F\cap G) \subseteq P(F)\cap P(G)$.

Por otro lado, si $x \in P(F)\cap P(G)$, entonces existen $\overrightarrow{f} \in F \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $\overrightarrow{g} \in G \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tales que $p(\overrightarrow{f}) = x$ y $p(\overrightarrow{g}) = x$, lo que implica que existe $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ tal que $\overrightarrow{g} = \lambda\overrightarrow{f} \in F \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.

Proposición

Si $P(F)$ y $P(G)$ son subespacios proyectivos de $P(V)$, inducidos por los subespacios vectoriales F y G, respectivamente, entonces $P(F \cap G) = P(F) \cap P(G)$.

Demostración

Si $x \in P(F \cap G)$, entonces existe $\overrightarrow{x} \in F \cap G \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tal que $p(\overrightarrow{x}) = x$. Tenemos,

- $\overrightarrow{x} \in F \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $p(\overrightarrow{x}) = x \longrightarrow x \in P(F)$,
- $\overrightarrow{x} \in G \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $p(\overrightarrow{x}) = x \longrightarrow x \in P(G)$.

Por lo tanto, $x \in P(F) \cap P(G)$. Es decir, $P(F \cap G) \subseteq P(F) \cap P(G)$.

Por otro lado, si $x \in P(F) \cap P(G)$, entonces existen $\overrightarrow{f} \in F \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $\overrightarrow{g} \in G \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tales que $p(\overrightarrow{f}) = x$ y $p(\overrightarrow{g}) = x$, lo que implica que existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\overrightarrow{g} = \lambda \overrightarrow{f} \in F \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. De ahí que, $\overrightarrow{g} \in F \cap G \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ y $p(\overrightarrow{g}) = x$, lo que implica que $x \in P(F \cap G)$. Es decir, $P(F) \cap P(G) \subseteq P(F \cap G)$. $\square$

Definición

Dados dos subespacios proyectivos $P(F)$ y $P(G)$, la suma proyectiva de $P(F)$ y $P(G)$, denotada por $P(F) + P(G)$, es el mínimo subespacio proyectivo que contiene a $P(F)$ y $P(G)$.

Definición

Dados dos subespacios proyectivos $P(F)$ y $P(G)$, la suma proyectiva de $P(F)$ y $P(G)$, denotada por $P(F)+P(G)$, es el mínimo subespacio proyectivo que contiene a $P(F)$ y $P(G)$.

Como $F+G$ es el mínimo subespacio vectorial que contiene F y G, tenemos que

$$P(F)+P(G)=P(F+G).$$

Proposición

Si P' y P'' son subespacios proyectivos de un espacio proyectivo $P(V)$, entonces

$$\dim(P' + P'') = \dim(P') + \dim(P'') - \dim(P' \cap P'').$$

Proposición

Si P' y P'' son subespacios proyectivos de un espacio proyectivo $P(V)$, entonces

$$\dim(P' + P'') = \dim(P') + \dim(P'') - \dim(P' \cap P'').$$

Demostración

Sean V' y V'' dos subespacios vectoriales de V tales que $P(V') = P'$ y $P(V'') = P'$.

Proposición

Si P' y P'' son subespacios proyectivos de un espacio proyectivo $P(V)$, entonces

$$\dim(P' + P'') = \dim(P') + \dim(P'') - \dim(P' \cap P'').$$

Demostración

Sean V' y V'' dos subespacios vectoriales de V tales que $P(V') = P'$ y $P(V'') = P'$.
Como $\dim(V' + V'') = \dim(V') + \dim(V'') - \dim(V' \cap V'')$,

Proposición

Si P' y P'' son subespacios proyectivos de un espacio proyectivo $P(V)$, entonces

$$\dim(P' + P'') = \dim(P') + \dim(P'') - \dim(P' \cap P'').$$

Demostración

Sean V' y V'' dos subespacios vectoriales de V tales que $P(V') = P'$ y $P(V'') = P'$.
Como $\dim(V' + V'') = \dim(V') + \dim(V'') - \dim(V' \cap V'')$,

$$\begin{aligned}
\dim(P' + P'') &= \dim(V' + V'') - 1 \\
&= \dim(V') + \dim(V'') - \dim(V' \cap V'') - 1 \\
&= (\dim(V') - 1) + (\dim(V'') - 1) - (\dim(V' \cap V'') - 1) \\
&= \dim(P') + \dim(P'') - \dim(P(V' \cap V'')) \\
&= \dim(P') + \dim(P'') - \dim(P(V') \cap P(V'')) \\
&= \dim(P') + \dim(P'') - \dim(P' \cap P''). \quad \square
\end{aligned}$$

Proposición

Todo espacio proyectivo $P(V)$ de dimensión $n \geq 1$ tiene al menos $n+2$ puntos.

Proposición

Todo espacio proyectivo $P(V)$ de dimensión $n \geq 1$ tiene al menos $n+2$ puntos.

Demostración

- Sea $B = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{n+1}})$ una base de V.

Proposición

Todo espacio proyectivo $P(V)$ de dimensión $n \geq 1$ tiene al menos $n+2$ puntos.

Demostración

- Sea $B = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{n+1}})$ una base de V.
- Obviamente, los puntos $e_1 = p(\overrightarrow{e_1}), \ldots, e_{n+1} = p(\overrightarrow{e_{n+1}})$ de $P(V)$ son diferentes.

Proposición

Todo espacio proyectivo $P(V)$ de dimensión $n \geq 1$ tiene al menos $n+2$ puntos.

Demostración

- Sea $B = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_{n+1}})$ una base de V.
- Obviamente, los puntos $e_1 = p(\overrightarrow{e_1}), \dots, e_{n+1} = p(\overrightarrow{e_{n+1}})$ de $P(V)$ son diferentes.
- Sea $\overrightarrow{x} = \sum_i \overrightarrow{e_i}$.

Proposición

Todo espacio proyectivo $P(V)$ de dimensión $n \geq 1$ tiene al menos $n+2$ puntos.

Demostración

- Sea $B = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{n+1}})$ una base de V.
- Obviamente, los puntos $e_1 = p(\overrightarrow{e_1}), \ldots, e_{n+1} = p(\overrightarrow{e_{n+1}})$ de $P(V)$ son diferentes.
- Sea $\overrightarrow{x} = \sum_i \overrightarrow{e_i}$.
- Si $x = p(\overrightarrow{x}) = e_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, entonces existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{e_j}$, de ahí que

$$(\lambda - 1)\overrightarrow{e_j} = \sum_{i \neq j} \overrightarrow{e_i},$$

lo que es una contradicción ya que B es una base de V.

Proposición

Todo espacio proyectivo $P(V)$ de dimensión $n \geq 1$ tiene al menos $n+2$ puntos.

Demostración

- Sea $B = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{n+1}})$ una base de V.
- Obviamente, los puntos $e_1 = p(\overrightarrow{e_1}), \ldots, e_{n+1} = p(\overrightarrow{e_{n+1}})$ de $P(V)$ son diferentes.
- Sea $\overrightarrow{x} = \sum_i \overrightarrow{e_i}$.
- Si $x = p(\overrightarrow{x}) = e_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, entonces existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{e_j}$, de ahí que

$$(\lambda - 1)\overrightarrow{e_j} = \sum_{i \neq j} \overrightarrow{e_i},$$

  lo que es una contradicción ya que B es una base de V.
- Por lo tanto, $x, e_1, \ldots, e_{n+1} \in P(V)$ son puntos diferentes. $\square$

Corollary

Toda recta proyectiva tiene al menos tres puntos.

Proposición

Por dos puntos diferentes de $P(V)$ pasa una única recta proyectiva.

Proposición

Por dos puntos diferentes de $P(V)$ pasa una única recta proyectiva.

Demostración

- Sean $a, b \in P(V)$ dos puntos diferentes. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ tales que $a = p(\overrightarrow{u})$ and $b = p(\overrightarrow{v})$, y sea $E = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ el subespacio generado por esos vectores.

Proposición

Por dos puntos diferentes de $P(V)$ pasa una única recta proyectiva.

Demostración

- Sean $a, b \in P(V)$ dos puntos diferentes. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ tales que $a = p(\overrightarrow{u})$ and $b = p(\overrightarrow{v})$, y sea $E = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ el subespacio generado por esos vectores.
- Como $a \neq b$, el sistema $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ es linealmente independiente, y por eso $\dim(E) = 2$, lo que implica que $P(E)$ es una recta proyectiva que contiene los puntos a y b.

Proposición

Por dos puntos diferentes de $P(V)$ pasa una única recta proyectiva.

Demostración

- Sean $a, b \in P(V)$ dos puntos diferentes. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ tales que $a = p(\overrightarrow{u})$ and $b = p(\overrightarrow{v})$, y sea $E = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ el subespacio generado por esos vectores.
- Como $a \neq b$, el sistema $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ es linealmente independiente, y por eso $\dim(E) = 2$, lo que implica que $P(E)$ es una recta proyectiva que contiene los puntos a y b.

Si existe otra recta proyectiva $P(F)$ que contiene los puntos a y b, entonces F es un s.e.v. de dimensión 2 que contiene los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Por lo tanto, $F = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = E$, lo que implica $P(F) = P(E)$. $\square$

Proposición

Tres puntos no colineales de $P(V)$ determinan un único plano proyectivo.

Proposición

Tres puntos no colineales de $P(V)$ determinan un único plano proyectivo.

Demostración

- Sean $a, b, c \in P(V)$ tres puntos no colineales. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ tales que $a = p(\overrightarrow{u})$, $b = p(\overrightarrow{v})$ y $c = p(\overrightarrow{w})$, y sea $E = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$.

Proposición

Tres puntos no colineales de $P(V)$ determinan un único plano proyectivo.

Demostración

- Sean $a, b, c \in P(V)$ tres puntos no colineales. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ tales que $a = p(\overrightarrow{u})$, $b = p(\overrightarrow{v})$ y $c = p(\overrightarrow{w})$, y sea $E = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$.
- Como a, b y c no son colineales, el sistema $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ es linealmente independiente, y por eso $\dim(E) = 3$, lo que implica que $P(E)$ es un plano proyectivo que contiene los puntos a, b y c.

Proposición

Tres puntos no colineales de $P(V)$ determinan un único plano proyectivo.

Demostración

- Sean $a, b, c \in P(V)$ tres puntos no colineales. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ tales que $a = p(\overrightarrow{u})$, $b = p(\overrightarrow{v})$ y $c = p(\overrightarrow{w})$, y sea $E = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$.
- Como a, b y c no son colineales, el sistema $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ es linealmente independiente, y por eso $\dim(E) = 3$, lo que implica que $P(E)$ es un plano proyectivo que contiene los puntos a, b y c.

Si existe otro plano proyectivo $P(F)$ que contiene los puntos a, b y c, entonces F es un s.e.v de dimensión 3 que contiene los vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$. Por lo tanto, $F = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = E$, lo que implica que $P(F) = P(E)$. $\square$

Proposición

Sea Π un plano proyectivo en $P(V)$ y $a, b \in P(V)$ dos puntos diferentes. Si $a, b \in \Pi$, entonces la recta que pasa por esos puntos está contenida en Π.

Proposición

Sea Π un plano proyectivo en $P(V)$ y $a,b \in P(V)$ dos puntos diferentes. Si $a,b \in \Pi$, entonces la recta que pasa por esos puntos está contenida en Π.

Demostración

- Sea W un subespacio de V tal que $P(W) = \Pi$, y sea L la recta que pasa por $a,b \in \Pi$. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W$ tales que $a = p(\overrightarrow{u})$ y $b = p(\overrightarrow{v})$.

Proposición

Sea Π un plano proyectivo en $P(V)$ y $a, b \in P(V)$ dos puntos diferentes. Si $a, b \in \Pi$, entonces la recta que pasa por esos puntos está contenida en Π.

Demostración

- Sea W un subespacio de V tal que $P(W) = \Pi$, y sea L la recta que pasa por $a, b \in \Pi$. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W$ tales que $a = p(\overrightarrow{u})$ y $b = p(\overrightarrow{v})$.
- Para todo $c \in L$, existe $\overrightarrow{w} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ tal que $c = p(\overrightarrow{w})$.

Proposición

Sea Π un plano proyectivo en $P(V)$ y $a,b \in P(V)$ dos puntos diferentes. Si $a,b \in \Pi$, entonces la recta que pasa por esos puntos está contenida en Π.

Demostración

- Sea W un subespacio de V tal que $P(W) = \Pi$, y sea L la recta que pasa por $a,b \in \Pi$. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W$ tales que $a = p(\overrightarrow{u})$ y $b = p(\overrightarrow{v})$.
- Para todo $c \in L$, existe $\overrightarrow{w} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ tal que $c = p(\overrightarrow{w})$.
- Como $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ es un s.e.v. de W, tenemos que $\overrightarrow{w} \in W$.

Proposición

Sea Π un plano proyectivo en $P(V)$ y $a, b \in P(V)$ dos puntos diferentes. Si $a, b \in \Pi$, entonces la recta que pasa por esos puntos está contenida en Π.

Demostración

- Sea W un subespacio de V tal que $P(W) = \Pi$, y sea L la recta que pasa por $a, b \in \Pi$. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W$ tales que $a = p(\overrightarrow{u})$ y $b = p(\overrightarrow{v})$.
- Para todo $c \in L$, existe $\overrightarrow{w} \in \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ tal que $c = p(\overrightarrow{w})$.
- Como $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ es un s.e.v. de W, tenemos que $\overrightarrow{w} \in W$.
- Por lo tanto, $c = p(\overrightarrow{w}) \in P(W) = \Pi$. $\square$

Proposición

Sean P' y P'' dos subespacios proyectivos de $P(V)$.
Si $\dim(P') + \dim(P'') \geq \dim(P(V))$, entonces $P' \cap P'' \neq \varnothing$.

Proposición

Sean P' y P'' dos subespacios proyectivos de $P(V)$.
Si $\dim(P') + \dim(P'') \geq \dim(P(V))$, entonces $P' \cap P'' \neq \varnothing$.

Demostración

Si $\dim(P') + \dim(P'') \geq \dim(P(V))$, entonces

$$\begin{aligned}
\dim(P') + \dim(P'') &\geq \dim(P(V)) \\
&\geq \dim(P' + P'') \\
&= \dim(P') + \dim(P'') - \dim(P' \cap P'').
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dim(P' \cap P'') \geq 0$, lo que implica que $P' \cap P'' \neq \varnothing$. $\square$

Proposición

Sean P' y P'' dos subespacios proyectivos de $P(V)$.
Si $\dim(P') + \dim(P'') \geq \dim(P(V))$, entonces $P' \cap P'' \neq \varnothing$.

Demostración

Si $\dim(P') + \dim(P'') \geq \dim(P(V))$, entonces

$$\begin{aligned} \dim(P') + \dim(P'') &\geq \dim(P(V)) \\ &\geq \dim(P' + P'') \\ &= \dim(P') + \dim(P'') - \dim(P' \cap P''). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dim(P' \cap P'') \geq 0$, lo que implica que $P' \cap P'' \neq \varnothing$. □

Corolario

Dos rectas cualesquiera en un plano proyectivo se cortan.