Определение. Системой Эрдёша называется множество точек $\{M_1, M_2, ..., M_n\}$ на плоскости, не содержащееся ни в какой прямой, такое, что для любых $i \neq j$ расстояние $|M_iM_j| \in \mathbb{N}$, т.е. является натуральным числом.

Лемма 1. Для любой системы Эрдёша $S = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$ существует такое целое число m, не превосходящее её диаметра $diam(S)$, что можно выбрать систему координат способом, при котором координаты каждой точки системы будут иметь вид

$$M_i = \left(\frac{p_i}{2m}; \frac{\pm\sqrt{q_i}}{2m}\right), \tag{1}$$

где $p_i \in \mathbb{Z}, q_i \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $|M_1M_2| = m$, тогда, очевидно, $m \leq diam(S)$. Введём систему координат так, что $M_1 = (-m/2, 0)$, $M_2 = (m/2, 0)$ Рассмотрим некоторую другую точку $M_i = (x, y) \in S$. Обозначим $M_iM_1 = a$, $M_iM_2 = b$. Тогда M_i лежит на пересечении двух окружностей, задаваемых уравнениями

$$\left(-\frac{m}{2} - x\right)^2 + y^2 = a^2, \tag{2}$$

$$\left(\frac{m}{2} - x\right)^2 + y^2 = b^2. \tag{3}$$

Решив её, имеем

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2m} = \frac{p_i}{2m}, \tag{4}$$

$$y = \pm\sqrt{a^2 - \left(\frac{m}{2} + x\right)^2} = \pm\sqrt{a^2 - \left(\frac{m}{2} + \frac{p_i}{2m}\right)^2} = \frac{\pm\sqrt{q_i}}{2m}, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. Для любой системы Эрдёша $S = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$ существует такое целое число m, не превосходящее её диаметра $diam(S)$, и такое натуральное число q, свободное от квадратов (ссылка!!), что можно выбрать систему координат способом, при котором координаты каждой точки системы будут иметь вид

$$M_i = \left(\frac{p_i}{2m}; \frac{s_i\sqrt{q}}{2m}\right), \tag{6}$$

где $p_i, s_i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Рассмотрим две точки $M_1, M_2 \in S$. По лемме 1 их координаты (при введении соответствующей системы координат) выражаются в виде

$$M_1 = \left(\frac{p_1}{2m}; \frac{\pm\sqrt{q_1}}{2m}\right), M_2 = \left(\frac{p_2}{2m}; \frac{\pm\sqrt{q_2}}{2m}\right), \tag{7}$$

где $p_i \in \mathbb{Z}, q_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$.

Тогда

$$|M_1M_2| = \frac{1}{2m}\sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 + q_1 + q_2 - 2\sqrt{q_1q_2}} \tag{8}$$

Для того, чтобы расстояние $|M_1M_2| \in \mathbb{N}$, необходимо, чтобы $|M_1M_2|^2 \in \mathbb{N}$, для чего, в свою очередь, необходимо, чтобы $p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 + q_1 + q_2 - 2\sqrt{q_1q_2} \in \mathbb{N}$, что влечёт $\sqrt{q_1q_2} \in \mathbb{N}$, что, в свою очередь, требует соотношения $q_1 = s_1^2\sqrt{q}$, $q_2 = s_2^2\sqrt{q}$. Лемма доказана.

Лемма 3. Число q в лемме 2 не зависит от выбора «опорных» точек для системы координат в лемме 1.

Доказательство. Покажем для простоты, что при замене «опорной» точки M_2 на M_3 число q сохраняется. Пусть в системе координат с «опорными» точками M_1 и M_2 имеем $M_1 = (x_1, 0)$, $M_2 = (x_2, 0)$, $M_3 = (x_3, y_3)$, где x_1, x_2, x_3 — рациональные, $y_3 = \frac{s_3\sqrt{q}}{2m}$ по лемме 2; и пусть в системе координат с «опорными» точками M_1 и M_3 имеем $M_1 = (\tilde{x}_1, 0)$, $M_3 = (\tilde{x}_3, 0)$, $M_2 = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$, где $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ — рациональные, $\tilde{y}_2 = \frac{s_2\sqrt{\tilde{q}}}{2\tilde{m}}$ по лемме 2. Тогда площадь треугольника $M_1M_2M_3$ двумя способами выражается как полупроизведение основания на высоту:

$$\frac{1}{2}|y_3| \cdot |x_1 - x_2| = \frac{1}{2}|\tilde{y}_2| \cdot |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3|, \tag{9}$$

откуда имеем

$$|y_3| = |\tilde{y}_2| \frac{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3|}{|x_1 - x_2|}, \tag{10}$$

или, подставив выражения для $\tilde{y}_2$ и y_3,

$$\left| \frac{s_3\sqrt{q}}{2m} \right| = \left| \frac{s_2\sqrt{\tilde{q}}}{2\tilde{m}} \right| \frac{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3|}{|x_1 - x_2|}, \tag{11}$$

Сгруппировав иррациональные множиели в левой части, а рациональные — в правой, получим

$$\left| \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{\tilde{q}}} \right| = \left| \frac{s_2}{2\tilde{m}} \right| \frac{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3| \cdot |2m|}{|s_3| \cdot |x_1 - x_2|}, \tag{12}$$

или, что то де самое,

$$\sqrt{\frac{q}{\tilde{q}}} = \left| \frac{s_2}{2\tilde{m}} \right| \frac{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3| \cdot |2m|}{|s_3| \cdot |x_1 - x_2|}, \tag{13}$$

Так как q b $\tilde{q}$ свободны от квадратов, то $\frac{q}{\tilde{q}} = 1$, т.е. $q = \tilde{q}$, что и требовалось доказать.