Метод наименьших квадратов

Эконометрика. Лекция 1

Эконометрика на одном слайде :)

Вопросы:

- Как устроен мир? Как переменная x влияет на переменную y?
- Что будет завтра? Как спрогнозировать переменную y?

Ответ:

Модель — формула для объясняемой переменной

Например:

- $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$

Основные типы данных:

- Временные ряды
- Перекрёстные данные
- Панельные данные

Есть много-много других!

Временные ряды

Данные по России:

Год	Население	Безработица
2010	142962	7.4
2011	142914	6.5
2012	143103	5.5
2013	143395	5.5

Перекрёстная выборка

Результаты зимних Олимпийских игр 2014:

Страна	Золото	Серебро	Бронза
Россия	13	11	9
Норвегия	11	5	10
Канада	10	10	5
США	9	7	12

Панельные данные

Сочетание первых двух: данные по нескольким переменным для множества объектов в разные моменты времени

Данные — обозначения

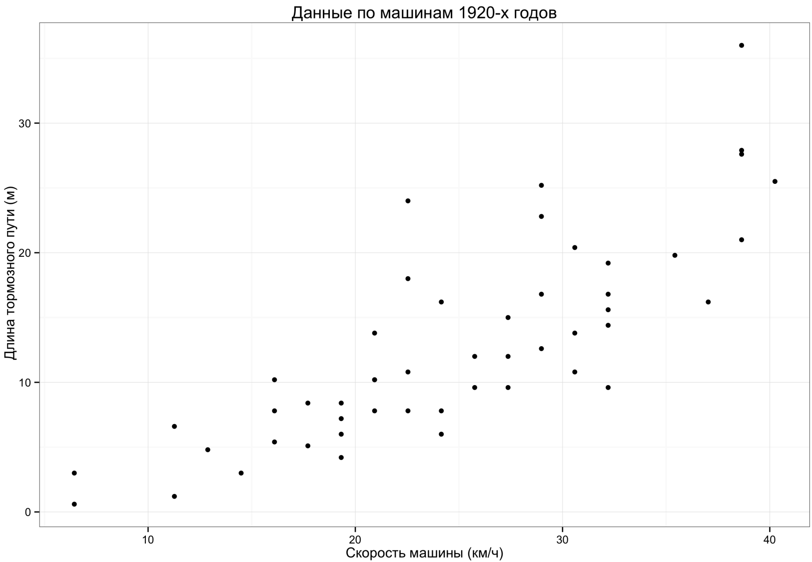
- Одна зависимая, объясняемая, переменная: y
- Несколько регрессоров, объясняющих, переменных: x, z, ...
- По каждой переменной n наблюдений: y_1, y_2, ..., y_n

Данные — пример

Исторические данные 1920-х годов :)

Длина тормозного пути (м), y_i	Скорость машины (км/ч), x_i
0.6	6.44
3.0	6.44
1.2	11.27
...	...

Всегда изображайте данные!



Модель:

Пример: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$

- Наблюдаемые переменные: y, x
- Неизвестные параметры: β_2, β_2
- Случайная составляющая, ошибка: ε

План действий

- придумать адекватную модель
- получить оценки неизвестных параметров: $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$
- прогнозировать, заменив неизвестные параметры на оценки:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$$

Метод наименьших квадратов

- Способ получить оценки неизвестных параметров модели исходя из реальных данных.

Ошибка прогноза: $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$.

Сумма квадратов ошибок прогноза:

$$Q(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Суть МНК: В качестве оценок взять такие $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, при которых сумма квадратов ошибок прогноза, Q, минимальна.

Пример с машинами:

Фактические данные:

$x_1 = 6.68$, $x_2 = 6.68$, $\ldots$,

$y_1 = 0.6$, $y_2 = 3$, $\ldots$

Модель: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$. Формула для прогнозов: $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$

Сумма квадратов ошибок прогнозов: $Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$

$$Q = (0.6 - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 6.68)^2 + (3 - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 6.68)^2 + \ldots$$

Точка минимума, найдена в R: $\hat{\beta}_1 = -5.3$, $\hat{\beta}_2 = 0.7$:

Формула для прогнозов: $\hat{y}_i = -5.3 + 0.7 x_i$

Простой пример [у доски]

Имя	Вес (кг), y_i	Рост (см), x_i
Вася	60	170
Коля	70	170
Петя	80	181

Оцените модели:
$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$,
$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$

Маленькая подготовка: $n\bar{x} = \sum_i x_i = \sum_i \bar{x}$, $\sum_i (x_i - \bar{x}) = 0$.

Готовые формулы МНК. Регрессия на константу

В модели $y_i = \beta + \varepsilon_i$

$$\hat{\beta} = \bar{y}$$

Интерпретация:

В модели без объясняющих переменных наилучший прогноз — это среднее значение зависимой переменной

Готовые формулы МНК. Парная регрессия

В модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}$$

Интерпретация:

Точка $(\bar{x}, \bar{y})$ лежит на линии регрессии $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$

Терминология и обозначения:

y_i — зависимая, объясняемая, переменная

x_i — регрессор, объясняющая переменная

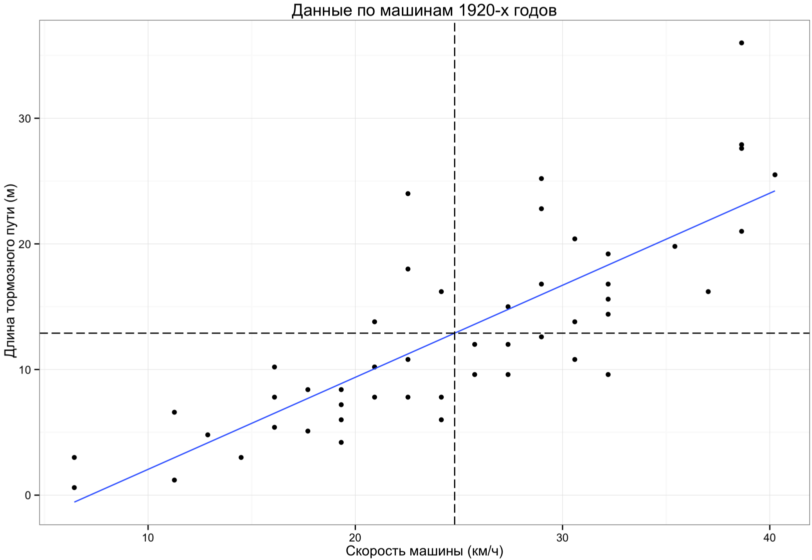
ε_i — ошибка, ошибка модели, случайная составляющая

$\hat{y}_i$ — прогноз, прогнозное значение

$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$ — остаток, ошибка прогноза

$RSS = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2$ — сумма квадратов остатков

Регрессия проходит через среднюю точку [у доски]



Много объясняющих переменных [у доски]

$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$

Выпишем систему уравнений для оценок $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$

$$\begin{cases} \sum \hat{\varepsilon}_i \cdot 1 = 0 \\ \sum \hat{\varepsilon}_i \cdot x_i = 0 \\ \sum \hat{\varepsilon}_i \cdot z_i = 0 \end{cases}$$

Суммы квадратов

- Сумма квадратов остатков

$$RSS = \sum \hat{\varepsilon}_i^2$$

- Общая сумма квадратов

$$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

- Объясненная сумма квадратов

$$ESS = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

Абсолютный ликбез по линейной алгебре

Вектора: y, x, $\hat{y}$, ε, ...

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_n \end{pmatrix} \quad \vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

В нашей модели: $\hat{y} = \hat{\beta}_1 \cdot \vec{1} + \hat{\beta}_2 \cdot x + \hat{\beta}_3 \cdot z$

Матрица всех регрессоров

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ \vdots & & \\ 1 & x_n & z_n \end{pmatrix}$$

Длина вектора

Длина вектора, $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$

Квадрат длины вектора, $|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = \sum_i y_i^2$

Примеры:
$RSS = \sum \hat{\varepsilon}_i^2$ — квадрат длины вектора $\hat{\varepsilon}$
$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$ — квадрат длины вектора $(y - \bar{y} \cdot \vec{1})$

$$\begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_n - \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \bar{y} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = y - \bar{y} \cdot \vec{1}$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot cos(x, y)$$

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_i x_i y_i$$

Условие перпендикулярности:

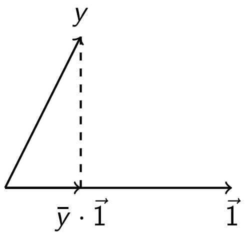
$$x \perp y \Leftrightarrow \sum_i x_i y_i = 0$$

т.к. $cos(90^\circ) = 0$.

Иллюстрация для регрессии на константу [у доски]

Модель: $y_i = \beta + \varepsilon_i$

Прогнозы: $\hat{y}_i = \hat{\beta} = \bar{y}$

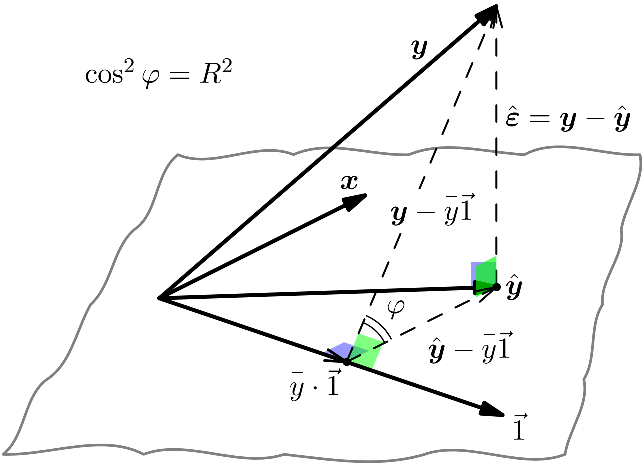


Геометрическая интерпретация условий первого порядка

$$\begin{cases} \sum \hat{\varepsilon}_i \cdot 1 = 0 \\ \sum \hat{\varepsilon}_i \cdot x_i = 0 \\ \sum \hat{\varepsilon}_i \cdot z_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\varepsilon} \perp \vec{1} \\ \hat{\varepsilon} \perp x \\ \hat{\varepsilon} \perp z \end{cases}$$

Иллюстрация для множественной регрессии [у доски]

$\cos^2\varphi = R^2$



Если в регрессию включён свободный член β_1

Если в регрессию включён свободный член, $y_i = \beta_1 + \ldots$, и оценки МНК единственны, то:

- $\sum \hat{\varepsilon}_i = 0$
- $\sum y_i = \sum \hat{y}_i$
- $\bar{y} = \bar{\hat{y}}$
- $TSS = RSS + ESS$

Коэффициент детерминации — простой показатель качества

В моделях со свободным членом $R^2 = ESS/TSS$

TSS — общий разброс y
ESS — объясненный регрессорами разброс
R^2 — доля объясненного разброса в общем разбросе

Теорема. Если в регрессию включён свободный член, $y_i = \beta_1 + \ldots$, и оценки МНК единственны, то R^2 равен выборочной корреляции между y и $\hat{y}$, т.е.

$$R^2 = (sCorr(y, \hat{y}))^2 = \left(\frac{\sum (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2} \sqrt{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}} \right)^2$$

Явная формула для оценок коэффициентов

Модель: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ \vdots & & \\ 1 & x_n & z_n \end{pmatrix}$$

Линейная алгебра позволяет получить явные формулы:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

Мораль

УРА!!! МНК позволяет оценивать модели!!!

Предположив $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$

Получаем $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$

Вопросы

- Как выбрать форму модели?
- А будет ли решение задачи минимизации единственным?
- А будет ли решение задачи минимизации вообще существовать?
- А почему сумма квадратов остатков, а не, скажем, модулей?
- А насколько точны полученные оценки?
- ...