Автокорреляция

Эконометрика. Лекция 6

Автокорреляция

Автокорреляция — нарушение предпосылки
$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j|X) = E(\varepsilon_i\varepsilon_j|X) = 0$ при $i \neq j$

Прежняя предпосылка

Для проверки гипотез мы предполагали условную некоррелированность ошибок:
$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j|X) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j|X) = 0$ при $i \neq j$
Что произойдет если эта предпосылка будет нарушена?

Когда логично ожидать автокорреляцию?

- “близость” наблюдений во времени или в пространстве
- наличие ненаблюдаемого фактора, действующего на “соседние” наблюдения

Автокорреляцию подробно изучают!

- анализ временных рядов
- пространственная эконометрика
- анализ панельных данных

Автокорреляция бывает небезобидной

- может привести к несостоятельности оценок $\hat{\beta}$

Пример у доски

Известно, что все ошибки равны между собой, и равновероятно принимают значения +1 или -1, т.е.
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = \pm 1$
Будут ли МНК оценки коэффициентов модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ состоятельны?
Отметим, что $E(\varepsilon_1 \varepsilon_2 | X) = 1$

Автокорреляция может иметь очень сложную богатую структуру

Не пугайтесь, эти страшные слова означают лишь определенный тип структуры автокорреляции:

- AR, MA, ARMA, ARIMA, VAR, VMA, VARMA, VECM, ARCH, GARCH, EGARCH, FIGARCH, TARCH, AVARCH, ZARCH, CCC, DCC, BEKK, VEC, DLM, ...

Мы рассмотрим автокорреляцию порядка p

- Начнем с автокорреляции первого порядка, $p = 1$

$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$

Предпосылки

- $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$
- u_t — независимы между собой,
- u_t независимы от регрессоров
- u_t одинаково распределены
- $E(u_t) = 0,\ Var(u_t) = \sigma_u^2$

Упражнение [доска]

Как выглядит $Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k})$ при автокорреляции первого порядка?

Автокорреляция порядка p:

$\varepsilon_t = \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \phi_p\varepsilon_{t-p} + u_t$
Допускает более богатую структуру $Corr(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$
Как и в случае автокорреляции первого порядка,

$$\lim_{k\to\infty} Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$$

Условная автокорреляция и другие предпосылки

- автоматом нарушена предпосылка о независимости наблюдений $(x_{i.}, y_i)$
- во временных рядах обычно нарушена предпосылка $E(\varepsilon_t|X) = 0$

Например, использование y_{t-1} в качестве регрессора нарушает $E(\varepsilon_t|X) = 0$
Мы будем анализируем ситуацию, в которой все остальные предпосылки кроме некоррелированности ошибок выполнены.

Мы используем прежние формулы:

- Для оценок коэффициентов: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$
- Для оценки ковариационной матрицы оценок коэффициентов, $\widehat{Var}(\hat{\beta}|X) = \frac{RSS}{n-k}(X'X)^{-1}$
- В частности, $\widehat{Var}(\hat{\beta}_j|X) = \frac{\hat{\sigma}^2}{RSS_j}$ и $se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_j|X)}$

Три группы свойств:

- конечная выборка без предположения о нормальности ε
- конечная выборка с предположением о нормальности ε
- асимптотические свойства без предположения о нормальности ε

Что происходит в каждом случае?

Конечная выборка без предположения о нормальности ε

- (+) Линейность по y
- (+) Несмещенность, $E(\hat{\beta}|X) = \beta$, $E(\hat{\beta}) = \beta$
- (−) Оценки неэффективны

Конечная выборка с предположением о нормальности ε

- (—) $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} | X \sim t_{n-k}$
- (—) $\frac{RSS}{\sigma^2} | X \sim \chi^2_{n-k}$
- (—) $\frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n-k)} \sim F_{r,n-k}$

Асимптотические свойства:

- $(+)$ $\hat{\beta} \to \beta$
- $(+)$ $\frac{RSS}{n-k} \to \sigma^2$
- $(-)$ $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \to N(0,1)$
- $(-)$ $\frac{RSS_R - RSS_{UR}}{RSS_{UR}/(n-k)} \to \chi^2_r$

Мораль:

- Сами $\hat{\beta}$ можно интерпретировать и использовать
- Стандартные ошибки $se(\hat{\beta}_j)$ несостоятельны
- Не можем строить доверительные интервалы для β_j и проверять гипотезы о β_j

Что делать?

- Исправить стандартные ошибки!
- Другая формула для оценки $\widehat{Var}_{HAC}(\hat{\beta}|X)$
- Следовательно, другие $se_{HAC}(\hat{\beta}_j)$

Робастная (устойчивая) к условной гетероскедастичности и автокорреляции оценка ковариационной матрицы

- Вместо $\widehat{Var}(\hat{\beta}|X) = \frac{RSS}{n-k}(X'X)^{-1}$

использовать

$$\widehat{Var}_{HAC}(\hat{\beta}|X) = (X'X)^{-1}\hat{\Phi}(X'X)^{-1}$$

- Нью-Вест (Newey-West), 1987 (Существует много вариантов)

$$\hat{\Phi} = \sum_{j=-k}^{k} \frac{k-|j|}{k} \left(\sum_{t} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t+j} x'_{t\cdot} x_{t+j\cdot} \right)$$

Суть корректировки:

Мы меняем $se(\hat{\beta}_j)$ на $se_{HAC}(\hat{\beta}_j)$
Какие проблемы решены?

- (+) $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se_{HAC}(\hat{\beta}_j)} \to N(0,1)$ (УРА!)

Какие проблемы не решены?

- (—) оценки $\hat{\beta}$ не меняются и остаются неэффективными

Даже при предположении о нормальности ε:

- (—) $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} | X \sim t_{n-k}$
- (—) $\frac{RSS}{\sigma^2} | X \sim \chi^2_{n-k}$
- (—) $\frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n-k)} \sim F_{r,n-k}$

С практической точки зрения:

- Новая формула для $\widehat{Var}_{HAC}(\hat{\beta}|X)$, и, следовательно, для $se_{HAC}(\hat{\beta}_j)$
- Робастная оценка ковариационной матрицы в R:

```
model <- lm(y~x, data=data)
vcovHAC(model)
```

- С ней жизнь прекрасна!

$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se_{HAC}(\hat{\beta}_j)} \to N(0,1)$

Когда следует использовать

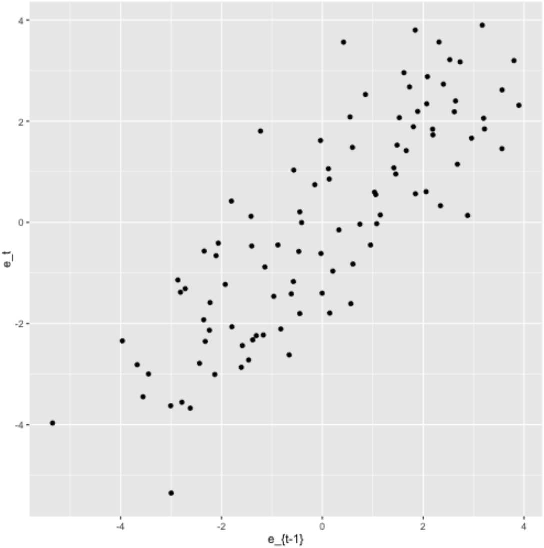
- Когда мы подозреваем наличие автокорреляции и не хотим заниматься её моделированием

Обнаружение автокорреляции

- Оцениваем интересующую нас модель с помощью МНК
- Строим график остатков в осях $\hat{\varepsilon}_{t-1}$, $\hat{\varepsilon}_t$

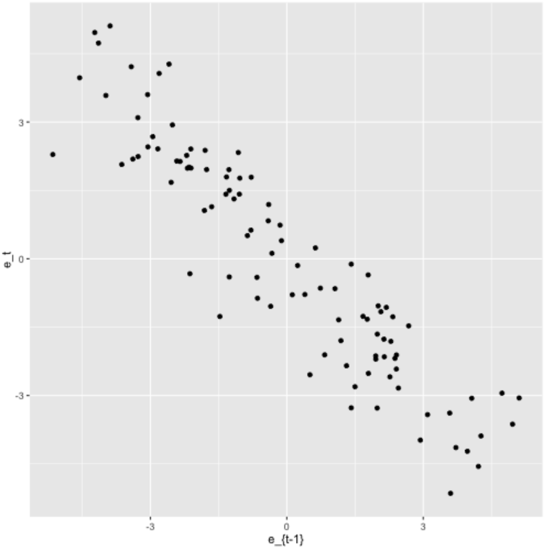
Положительная автокорреляция

$\varepsilon_t = 0.9\varepsilon_{t-1} + u_t$



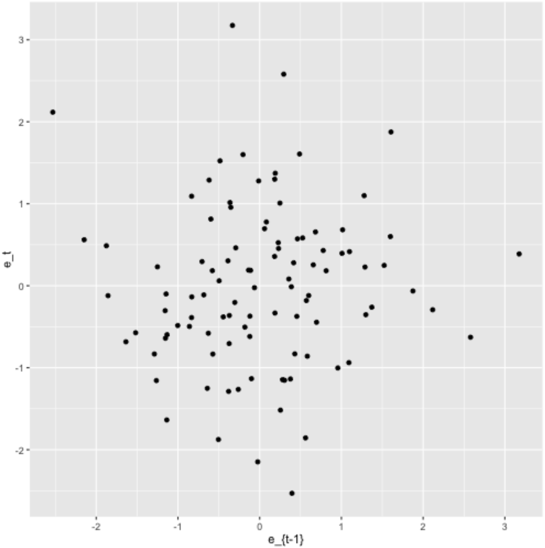
Отрицательная автокорреляция

$\varepsilon_t = -0.9\varepsilon_{t-1} + u_t$



Отсутствие автокорреляции

ε_t независимы



Формальные тесты на автокорреляцию

- тест Дарбина-Уотсона (Durbin-Watson)
- тест Бройша-Годфри (Breusch-Godfrey)

Тест Дарбина-Уотсона, предпосылки:

- Автокорреляция первого порядка в остатках

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

- нормальность ошибок ε
- сильная экзогенность, $E(\varepsilon_t|X) = 0$
- H_0 об отсутствии автокорреляции, $\rho = 0$

Процедура теста Дарбина-Уотсона

- Шаг 1. Оценить основную регрессию, получить $\hat{\varepsilon}_i$
- Шаг 2. Посчитать статистику

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2}$$

Распределение статистики DW

- H_0 об отсутствии автокорреляции, $\rho = 0$
- Точный закон распределения статистики DW сложным образом зависит от X
- Если $\hat{\rho}$ — выборочная корреляция остатков, то $DW = 2(1 - \hat{\rho})$

Качественные выводы по статистике DW

$DW = 2(1-\hat{\rho})$, поэтому $0 < DW < 4$

- $DW \approx 0$ означает положительную автокорреляцию $\hat{\rho} \approx 1$
- $DW \approx 2$ означает отсутствие автокорреляции $\hat{\rho} \approx 0$
- $DW \approx 4$ означает отрицательную автокорреляцию $\hat{\rho} \approx -1$

С практической точки зрения:

- R рассчитывает точные P-значения для теста DW
- Если P-значение меньше уровня значимости α, то гипотеза H_0 об отсутствии автокорреляции отвергается
- Для любителей истории существуют статистические таблицы диапазонов критических значений

Тест Бройша-Годфри, предпосылки

- для тестирования автокорреляции порядка p в ошибках

$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \phi_p \varepsilon_{t-p} + u_t$$

- не требуется нормальность остатков
- верен при ряде нарушений предпосылки $E(\varepsilon_t | X) = 0$
- асимптотический

H_0: $\phi_1 = \phi_2 = \ldots = \phi_p = 0$

Процедура теста Бройша-Годфри

- Шаг 1. Оцениваем исходную модель, получаем остатки $\hat{\varepsilon}_t$
- Шаг 2. Строим вспомогательную регрессию $\hat{\varepsilon}_t$ на исходные регрессоры, $\hat{\varepsilon}_{t-1}$, $\hat{\varepsilon}_{t-2}$, ..., $\hat{\varepsilon}_{t-p}$, находим R^2_{aux}
- Шаг 3. Считаем статистику $BG = (n-p)R^2_{aux}$

Распределение статистики BG

- При верной H_0 об отсутствии автокорреляции

H_0: $\phi_1 = \phi_2 = \ldots = \phi_p = 0$
$BG = (n-p)R^2_{aux} \sim \chi^2_p$

- Если статистика BG больше критического значения χ^2_{cr}, то H_0 об отсутствии автокорреляции отвергается.

Тест Бройша-Годфри требует меньше предпосылок

Хотя тест Дарбина-Уотсона распространен, следует предпочитать тест Бройша-Годфри.

Пример теста Дарбина-Уотсона и Бройша-Годфри [доска]

Мораль

- Мы рассмотрели ситуацию нарушения предпосылки условной некоррелированности ошибок модели
- Нарушена во временных рядах и пространственных данных
- В простейшем случае для проверки гипотез достаточно использовать специальные стандартные ошибки se_{HAC}
- Если заниматься исследованием структуры автокорреляции серьезно, то это отдельные дисциплины

Источники мудрости:

- Артамонов Н.В., Введение в эконометрику: глава 3.4, 3.5
- Борзых Д.А., Демешев Б.Б. Эконометрика в задачах и упражнениях: глава 11
- Катышев П.К., Пересецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс: глава 6.2
- Себер Дж., Линейный регрессионный анализ: глава 6.2