1. Автокорреляция!

   Для проверки гипотез мы предполагали условную некоррелированность ошибок:

   $E(\varepsilon_i \varepsilon_j | X) = 0$ при $i \neq j$

   Что произойдет если эта предпосылка будет нарушена?

2. Когда логично ожидать автокорреляцию?

   * «близость» наблюдений во времени или в пространстве

   * наличие ненаблюдаемого фактора, действующего на «соседние» наблюдения

3. Автокорреляцию подробно изучают!

   * анализ временных рядов

   * пространственная эконометрика

4. Автокорреляция бывает небезобидной

   * может привести к несостоятельности оценок $\hat{\beta}$

5. Чудо-доска

   $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = \pm 1$

   отметим, что $E(\varepsilon_1 \varepsilon_2 | x) = 1$

6. Автокорреляция может иметь очень сложную богатую структуру

   * AR, MA, ARMA, ARIMA, VAR, VMA, VARMA, VECM, ARCH, GARCH, EGARCH, FIGARCH, TARCH, AVARCH, ZARCH, CCC, DCC, BEKK, VEC, DLM, ...

   (тут можно страшными сокращениями заполнить весь экран)

7. Мы рассмотрим автокорреляцию порядка p

   $p = 1$: автокорреляция первого порядка

   $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$

   u_t — независимы между собой,

   — независимы от регрессоров

   - одинаково распределены

   -$E(u_t) = 0$, $Var(u_t) = \sigma_u^2$

8. упражнение у чудо-доски

   Как выглядит $Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k})$ при автокорреляции первого порядка?

9. Автокорреляция порядка p:

   $\varepsilon_t = \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \phi_p\varepsilon_{t-p}u_t$

   допускает более богатую структуру $Corr(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$

   Как и в случае автокорреляции первого порядка,

   $$\lim_{k\to\infty} Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$$

10. условная автокорреляция и другие предпосылки

    * автоматом нарушена предпосылки о независимости наблюдений $(x_{i.}, y_i)$

    * во временных рядах обычно нарушена предпосылка $E(\varepsilon_t|X) = 0$

    например, использование y_{t-1} в качестве регрессора нарушает $E(\varepsilon_t|X) = 0$

    (сказать про остальные предпосылки, и более слабые варианты)

11. Мы используем прежние формулы:

Для оценок коэффициентов: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$

Для оценки ковариационной матрицы оценок коэффициентов, $\widehat{Var}(\hat{\beta}|X) = \frac{RSS}{n-k}(X'X)^{-1}$

В частности, $\widehat{Var}(\hat{\beta}_j|X) = \frac{\hat{\sigma}^2}{RSS_j}$ и $se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_j)}$

12. Три группы свойств:

- конечная выборка без предположения о нормальности ε

- конечная выборка с предположением о нормальности ε

- асимптотические свойства (без предположения о нормальности ε)

Что происходит в каждом случае?

13. Конечная выборка без предположения о нормальности ε

    * Линейность по y

    * Условная несмещенность, $E(\hat{\beta}|X) = \beta$

    * (—) Оценки неэффективны

14. Конечная выборка с предположением о нормальности ε

    * (—) $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)}|X \sim t_{n-k}$

    * (—) $\frac{RSS}{\sigma^2}|X \sim \chi^2_{n-k}$

    * (—) $\frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n-k)} \sim F_{r,n-k}$

15. Асимптотические свойства:

   * $\hat{\beta} \to \beta$
   * $\frac{RSS}{n-k} \to \sigma^2$
   * (—) $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \to N(0,1)$
   * (—) $\frac{RSS_R - RSS_{UR}}{RSS_{UR}/(n-k)} \to \chi^2_r$

16. Мораль:

   * Сами $\hat{\beta}$ можно интерпретировать и использовать
   * Стандартные ошибки $se(\hat{\beta}_j)$ несостоятельны
   * Не можем строить доверительные интервалы для β_j и проверять гипотезы

17. Что делать?

   * Исправить стандартные ошибки!

   * Другая формула для оценки $\widehat{Var}_{HAC}(\hat{\beta}|X)$

   * Следовательно, другие $se_{HAC}(\hat{\beta}_j)$

18. Робастная (устойчивая) к условной гетероскедастичности и автокорреляции оценка ковариационной матрицы

   * Вместо $\widehat{Var}(\hat{\beta}|X) = \frac{RSS}{n-k}(X'X)^{-1}$

   использовать

$$\widehat{Var}_{HAC}(\hat{\beta}|X) = (X'X)^{-1}\hat{\Phi}(X'X)^{-1}$$

   * Нью-Вест (Newey-West), 1987 (Существует много вариантов)

$$\hat{\Phi} = \sum_{j=-k}^{k} \frac{k-|j|}{k} \left(\sum_{t} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t+j} x'_{t.} x_{t+j.} \right)$$

19. Суть корректировки:

    Мы меняем $se(\hat{\beta}_j)$ на $se_{HAC}(\hat{\beta}_j)$

    Какие проблемы решены?

    * $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se_{HAC}(\hat{\beta}_j)} \to N(0,1)$ (УРА!)

20. Какие проблемы не решены?

    (—) оценки $\hat{\beta}$ не меняются и остаются неэффективными

    даже при предположении о нормальности ε:

    * (—) $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} | X \sim t_{n-k}$
    * (—) $\frac{RSS}{\sigma^2} | X \sim \chi^2_{n-k}$
    * (—) $\frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n-k)} \sim F_{r,n-k}$

21. С практической точки зрения:

   * Новая формула для $\widehat{Var}_{HAC}(\hat{\beta}|X)$, и, следовательно, для $se_{HAC}(\hat{\beta}_j)$

   * ковариационная матрица в R:

   ```
   model <- lm(y~x, data=data)
   vcovHAC(model)
   ```

   * С ней жизнь прекрасна!

   $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se_{HAC}(\hat{\beta}_j)} \to N(0, 1)$

22. Когда следует использовать

   * Когда мы подозреваем наличие автокорреляции и не хотим заниматься её моделированием

23. Обнаружение автокорреляции

* Оцениваем интересующую нас модель с помощью МНК
* Строим график остатков в осях $\hat{\varepsilon}_{t-1}$, $\hat{\varepsilon}_t$

/здесь пришлю три графика/

24. Формальные тесты на автокорреляцию

* тест Дарбина-Уотсона (Durbin-Watson)
* тест Бройша-Годфри (Breusch-Godfrey)

25. Тест Дарбина-Уотсона предпосылки:

* Автокорреляция первого порядка в остатках

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

* нормальность ошибок ε
* сильная экзогенность, $E(\varepsilon_t|X) = 0$
* H_0 об отсутствии автокорреляции, $\rho = 0$

26. процедура теста Дарбина-Уотсона

* Шаг 1. Оценить основную регрессию, получить $\hat{\varepsilon}_i$
* Шаг 2. Посчитать статистику

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2}$$

27. Распределение статистики DW

    * H_0 об отсутствии автокорреляции, $\rho = 0$

    * Точный закон распределения сложным образом зависит от X

    * Если $\hat{\rho}$ — выборочная корреляция остатков, то $DW = 2(1 - \hat{\rho})$

28. Качественные выводы по статистике DW

    $DW = 2(1 - \hat{\rho})$, поэтому $0 < DW < 4$

    * $DW \approx 0$ означает положительную автокорреляцию $\hat{\rho} \approx 1$

    * $DW \approx 2$ означает отсутствие автокорреляции $\hat{\rho} \approx 0$

    * $DW \approx 4$ означает отрицательную автокорреляцию $\hat{\rho} \approx -1$

29. иллюстрация (рисунок прилагается: график про Дарбина-Уотсона)

    теховские надписи для графиков:

    H_0 не отвергается H_0 отвергается DW_{cr} H_0: $\rho = 0$

30. С практической точки зрения:

 * `R` рассчитывает точные P-значения для теста DW

 * существуют таблицы диапазонов критических значений

31. Тест Бройша-Годфри (Breusch-Godfrey)

 * для тестирования автокорреляции порядка p в ошибках

$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \phi_p \varepsilon_{t-p} + u_t$$

 * не требуется нормальность остатков

 * верен при ряде нарушений предпосылки $E(\varepsilon_t | X) = 0$

 * асимптотический

 H_0: $\phi_1 = \phi_2 = \ldots = \phi_p = 0$

32. Процедура теста Бройша-Годфри

* Шаг 1. Оцениваем исходную модель, получаем остатки $\hat{\varepsilon}_t$

* Шаг 2. Строим вспомогательную регрессию $\hat{\varepsilon}_t$ на исходные регрессоры, $\hat{\varepsilon}_{t-1}$, $\hat{\varepsilon}_{t-2}$, ..., $\hat{\varepsilon}_{t-p}$, находим R^2_{aux}

* Шаг 3. Считаем статистику $BG = (n-p)R^2_{aux}$

33. Тест Бройша-Годфри продолжение

* При верной H_0 об отсутствии автокорреляции

H_0: $\phi_1 = \phi_2 = \ldots = \phi_p = 0$

$BG = (n-p)R^2_{aux} \sim \chi^2_p$

Здесь график распределения BG (рисунок прилагается) Подписи на графике:

H_0 не отвергается H_0 отвергается χ^2_{cr} H_0: $\phi_1 = \phi_2 = \ldots = \phi_p = 0$

34. Тест Бройша-Годфри требует меньше предпосылок

35. Вставка с чудо-доской

Тест Дарбина-Уотсона и Бройша-Годфри (уже снят)

здесь в задаче было дано DW, надо было найти $\hat{\rho}$ и провести тест Бройша-Годфри

36. Мораль

* Мы рассмотрели ситуацию нарушения предпосылки условной некоррелированности ошибок модели

* Нарушена во временных рядах и пространственных данных

* В простейшем случае достаточно использовать специальные стандартные ошибки se_{HAC}

* Большое количество специальных моделей