

## Лекция 4. Мультиколлинеарность.

1. Мультиколлинеарность — наличие линейной зависимости между регрессорами.

(а) строгая (идеальная линейная зависимость)

(б) нестрогая (примерная линейная зависимость)

2. Строгая мультиколлинеарность

Пример:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Здесь:  $x_{.2} + x_{.3} = 2x_{.4}$

3. Строгая мультиколлинеарность

Частая причина: неправильно включены дамми-переменные

Пример с ошибкой:

$$wage_i = \beta_1 + \beta_2 male_i + \beta_3 female_i + \beta_4 educ_i + \varepsilon_i$$

Здесь:  $x_1 = x_2 + x_3$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

4. Последствия строгой мультиколлинеарности  
в теории: оценки МНК неединственны

$$\widehat{wage}_i = 15 + 3male_i - 2female_i + 3educ_i$$

$$\widehat{wage}_i = 28 - 10male_i - 15female_i + 3educ_i$$

$$\widehat{wage}_i = 18 + 0male_i - 5female_i + 3educ_i$$

5. на практике:

- (a) сообщение об ошибке
- (b) автоматическое удаление переменной (R)

6. Нестрогая мультиколлинеарность

Причина:

- (a) регрессоры, измеряющие примерно одно и то же: валютный курс на начало и на конец дня
- (b) естественные соотношения между регрессорами: возраст, стаж и количество лет обучения

7. последствия нестрогой мультиколлинеарности

нестрогая мультиколлинеарность НЕ нарушает стандартный набор предпосылок

оценки  $\hat{\beta}_j$  несмещенные, асимптотически нормальные, можно проверять гипотезы и строить доверительные интервалы

#### 8. последствия

один из регрессоров хорошо объясняется другими регрессорами

$$se(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}^2}{RSS_j} = \frac{\hat{\sigma}^2}{TSS_j \cdot (1 - R_j^2)} = \frac{1}{1 - R_j^2} \frac{\hat{\sigma}^2}{TSS_j}$$

высокие стандартные ошибки  $se(\hat{\beta}_j)$

#### 9. неприятные проявления высоких стандартных ошибок

(а) очень широкие доверительные интервалы

(б) незначимые коэффициенты

(с) чувствительность модели к добавлению/удалению наблюдения

## 10. Типичное проявление

Несколько коэффициентов незначимы по отдельности

Гипотеза об их одновременном равенстве нулю отвергается.

## 11. количественные признаки

(а) коэффициент вздутия дисперсии (Variance Inflation Factor)

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

$$se(\hat{\beta}_j) = VIF_j \frac{\hat{\sigma}^2}{TSS_j}$$

(b) выборочные корреляции между регрессорами

Некоторые источники:  $VIF_j > 10$ ,  $\widehat{Corr}(x_{.j}, x_{.m}) > 0.9$

## 12. Что делать?

- (a) Не так страшен чёрт! Оценки  $\hat{\beta}_j$  обладают наименьшей дисперсией среди несмещенных оценок. На доверительных интервалах для прогнозов мультиколлинеарность не сказывается.
- (b) Пожертвовать несмещенностью
- (c) Мечта: получить больше наблюдений

### 13. Жертвуем несмещенностью

Модель зависит от всех регрессоров!

- (a) выкинуть часть регрессоров  
Жертвуем: знанием коэффициента, несмещенностью коэффициентов
- (b) использовать МНК со штрафом  
Жертвуем: несмещенностью коэффициентов, доверительными интервалами

Жертвуем несмещенностью!

14. упражнение у чудо доски:

$$R_2^2 = 0.5, R_3^2 = 0.95, R_4^2 = 0.98$$

Рассчитайте  $VIF_j$ , между какими переменными есть линейная зависимость?

15. МНК со штрафом

(a) Ридж-регрессия

$$\min_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j^2$$

(b) LASSO

$$\min_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^k |\hat{\beta}_j|$$

(с) Метод эластичной сети

$$\min_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda_1 \sum_{j=1}^k |\hat{\beta}_j| + \lambda_2 \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j^2$$

16. чудо-доска, упражнение

Выведите оценку  $\hat{\beta}_{Ridge}$  в модели  $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$

17. метод главных компонент

Позволяет уменьшить число переменных, выбрав самые изменчивые

18. переход к новым переменным

Например:

Исходные переменные (центрированные):  $x_1$  и  $x_2$

Новые переменные (главные компоненты):



$$pc_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$$

$$pc_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2.$$

Сумма квадратов весов равна 1.

## 19. Новые переменные

- (a)  $pc_1$  имеет максимальную выборочную дисперсию  $\widehat{Var}(pc_1)$
- (b)  $pc_2$  некоррелирована с  $pc_1$  и имеет максимальную  $\widehat{Var}(pc_2)$
- (c)  $pc_3$  некоррелирована с  $pc_1$ ,  $pc_2$  и имеет максимальную  $\widehat{Var}(pc_3)$
- (d) ...

## 20. игрушечный пример для пояснения идеи

| Биология | Математика |
|----------|------------|
|----------|------------|

|   |   |
|---|---|
| 4 | 5 |
| 4 | 2 |
| 4 | 5 |
| 4 | 4 |
| 4 | 3 |
| 4 | 4 |
| 3 | 3 |
| 5 | 3 |

Первая главная компонента — математика

Вторая главная компонента — биология

21. чудо-доска

Найдите первую главную компоненту

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ \hline 2 & 5 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}$$

Не забываем центрировать!

## 22. Свойства главных компонент

$$pc_1 = v_{11} \cdot x_1 + v_{21} \cdot x_2 + \dots + v_{k1} \cdot x_k$$

...

$$pc_k = v_{1k} \cdot x_1 + v_{2k} \cdot x_2 + \dots + v_{kk} \cdot x_k$$

$$\widehat{Corr}(pc_j, pc_m) = 0$$

$$\widehat{Var}(x_1) + \widehat{Var}(x_2) + \dots + \widehat{Var}(x_k) = \widehat{Var}(pc_1) + \widehat{Var}(pc_2) + \dots + \widehat{Var}(pc_k)$$

## 23. Вставка с линейной алгеброй

Если: все переменные центрированы,  $\bar{x}_j = 0$

То:  $pc_j = X \cdot v_j$  и  $|pc_j|^2 = \lambda_j$ , где

$\lambda_j$  — собственные числа, а  $v_j$  — собственные вектора матрицы  $X'X$

24. Что дают главные компоненты?

- (a) визуализировать сложный набор данных
- (b) увидеть самые информативные переменные
- (c) увидеть особенные наблюдения
- (d) переход к некоррелированным переменным

25. Подводные камни на практике

- (a) разные единицы измерения
- (b) применение перед регрессией

26. Разные единицы измерения

первая главная компонента «поймает» переменную с самыми мелкими единицами измерения

вместо самой информативной — самая шумная  
нормировать переменные  $x_j = \frac{a_j - \bar{a}_j}{se(a_l)}$

## 27. Применение перед регрессией

строят регрессию на несколько первых главных компонент, например на  $pc_1, pc_2$

Осторожно:

хорошо объясняющая переменная может быть почти постоянной

## 28. Метод главных компонент

(а) полезен сам по себе

(b) иногда используется для борьбы с мультиколлинеарностью

## 29. Мораль - мультиколлинеарность

(а) зависимость между регрессорами

(b) высокие стандартные ошибки

(с) либо не бороться, либо жертвовать несмещенностью