**考虑个体警觉行为的双层网络传播策略**

**摘要**

1. **绪论**

近年来，流行病的传播一直是复杂网络领域的一个热门话题[1]。在人类社会中，流行病的传播过程中往往会伴随着其他的传播过程，如信息传播，疾病信息的扩散既可以改变人们对流行病传播的认识，同时，在了解到疾病的信息时，个体为了避免感染疾病其行为也发生相应改变[2]。以现实生活为例，一方面，流行病的爆发往往会伴随着相关的信息，通过大众媒体在朋友及家人之间迅速扩散，另一方面，信息的扩散会促使人们采取更多的保护措施，如戴口罩、避免接触及接种疫苗等[3]，这些行为又会在一定程度上抑制流行病的传播。因此，对于流行病传播与信息扩散相互影响的研究，引起了各学科的广泛关注。

目前，流行病传播和信息扩散的交互模型一般用双层网络来描述。在双层网络中，一层代表的是接触网络，用于模拟流行病在物理接触网络中的传播过程，另外一层是信息网络，用于描述伴随着流行病传播所引发的信息扩散。在接触网络中，可以采用Susceptible-Infected-Susceptible(SIS) 疾病传播模型[4] 或是Susceptible-Infected-Recovered (SIR)疾病传播模型[5]演化流行病在网络中的传播。在SIS疾病传播模型中，网络中的个体分为易感状态(S)和感染状态(I)。而在SIR疾病传模型中，除了上述SIS模型中的S状态和I状态外，个体还可以是免疫状态(R)。在信息网络中，通常采用Unaware-Aware-Unaware(UAU)信息传播模型描述流行病传播所引起的信息扩散。其中，网络中的个体根据对信息的了解情况可分为未知状态(U)和已知状态(A)。

对于多层网络上的疾病与信息的传播与交互，已有的研究通常将意识和流行病之间的相互作用建模为多层网络中的两个相互竞争的传播过程，就像物理接触网络中疾病传播的过程一样，意识也会从有意识的个体传给通信网络上的邻居，通过促使更多个体在信息层成为有意识地节点从而采取预防行为来抑制疾病在物理接触曾的传播。[6]提出了一个UAU-SIS多层网络传播模型来描述多层网络中意识和流行病之间的动态相互作用，使用微观马尔可夫链方法(MMAC)进行的分析表明，存在一个意识传播速率的亚临界点，在该临界点下，流行病的阈值不受意识传播的影响。随后他们进一步研究了自我意识和大众传媒的影响，发现大众传媒会使得亚临界点消失[7]。而[8]则通过深入的研究发现易感个体在了解信息后采取的自我意识行为对流行病传播的抑制作用要明显好于感染个体的自我意识行为，因为易感个体的自我意识行为可以直接降低其被感染的可能性。并且无论是局部信息还是全局信息，自我意识行为都无法改变流行病的阈值。此外，引入信息网络后会促使某些个体有更多被告知的机会，从而大大降低其感染风险。[9]通过研究多层网络的UAU-SIR模型发现，随着自我感知率ν的增加，个体的自我感知对传播行为具有很大的影响，可以极大地降低流行率的患病率。[10]则把信息传播层定义为了基于阈值的UAU模型，即信息层节点的邻居产生意识的数量超过给定的阈值则此节点就会具有自我意识。通过MMCA推导，发现了流行病的阈值与意识的扩散及接触层网络的拓扑结构相关。仿真模拟表明在流行病传播过程中所伴随而来的信息扩散在抑制流行病的过程中起着重要作用。[11]则在接触网络的SIR传播模型基础上引入了免疫状态V(Vaccination)，个体可以直接接种疫苗从而可以对疾病免疫。理论分析和数值模拟显示，信息的爆发可以由自身的传播或疾病的爆发促进，但流行病的阈值却不受信息扩散的影响，即疾病的爆发仅取决于接触网络的拓扑。更重要的是，对于给定的流行病传播速率，存在一个最佳的信息传播速率，在此速率下可以将流行病的感染规模减小到最小值。并且，信息网络的同质性可以促进疫苗接种规模的扩大，从而在信息扩散迅速时能够更有效地抑制疾病的传播。

考虑到实际生活中不同个体在网络中邻居关系具异质性，[12]则出了一种非线性耦合信息-流行病模型，通过研究发现流行病阈值是由耦合网络的拓扑结构决定的，而度分布的不均匀性可以降低流行病的阈值。这意味着，要控制流行病的传播，我们需要增强对已了解该流行病信息个体的保护，如促进信息的扩散，减缓信息的遗忘等。[13]则研究了具有异质感染率的多重网络流行病传播过程，并构建了异质感染率函数，其可调幂指数与节点度相关。其研究表明，随着幂指数从-1增加到1，流行病的阈值逐渐下降，当幂指数为-1时流行病感染率最低，并且流行病的阈值最高。负的幂指数表明异质感染率与节点的度负相关，因此免疫枢纽节点更利于抑制流行病的传播，因为枢纽节点通常居住在城市中心，并且保持良好的健康习惯。另外，其研究同样证明了信息的扩散有助于抑制流行病的传播，随着疾病信息传播率的增加，感染规模会逐渐减少。

以上研究虽然考虑了个体在了解疾病传播所产生的信息后会产生警觉意识以及网络中不同节点结构的异质性，来采取适当的防护措施抑制疾病的传播，却忽视了不同个体的在防护行为选择上的异质性，即不同个体在了解到疾病相关的信息后会采取不同的行为来避免感染疾病。如在流行病的传播期间，个体通常都会注意基本的健康防护，如勤洗手，注意保暖及服用预防性的药物等。除此之外，还有可能会产生社交行为上的改变，例如部分个体因为日常工作以及社交上的需求，不会主动切断与部分邻居的接触，而其他个体则可以在流行病传播期间因了解到流行病的严重性从而会变得更加谨慎，于是会主动选择只与一部分邻居接触，从而避开与另一部分邻居的接触[8]。

考虑到个体在接触行为上的改变通常与对流行病所伴随信息的了解相关，本文通过引入个体警觉性来表示不同个体在接触行为上的不同选择。在我们的模型中，个体在了解到疾病相关的信息时会有一定概率成为警觉个体，从而采取不同的接触行为来规避被流行病感染的风险。在本文中，我们会探讨个体警觉性所引起的两种不同的接触行为对流行病传播的影响。一方面，具有警觉性的个体因为大多是已经了解流行病相关的信息的有意识个体，所以都会采取基本的防护措施，此时警觉个体若只和警觉个体主动接触，而不与非警觉个体主动接触，则可以在一定程度上避免被流行病感染；另一方面，由于一部分了解疾病相关信息的意识同样有可能是由感染流行病所引发的，因此警觉个体若主动和非警觉个体接触，而避免和警觉个体接触，同样也有可能在一定程度上规避与这些感染邻居的接触，从而达到避免被感染流行病感染的目的。而对于非警觉节点，因为其不了解流行病的相关的信息，则会和所有的邻居接触。我们希望通过对个体具有警觉性后所采取的不同行为进行研究，在我们的模型中寻找到抑制流行病传播相对有效的策略，从而在现实情况中，当疾病扩散时可以制定出更具有指导意义的应对方法。本文所关注的主要问题如下：首先，我们提出的节点警觉性行为策略能否对疾病的传播产生抑制作用？第二，我们提出的两种警觉性行为策略对信息扩散与流行病传播之间相互作用的影响是否存在差异？

本文的其余部分安排如下：在第二章，我们介绍了所采用的多层网络的传播模型，并且引入基于节点警觉性的策略，并且基于警觉性的不同应对策略，给出了模型的微观马尔可夫描述。在第三章，我们通过仿真实验对比警觉个体采取不同行为策略时对流行病传播造成的影响，通过对不同的多层网络结构中应用不同警觉性应对策略的仿真，我们做出了对比。在第四章，我们总结本文并给出了结论。

1. **模型**

**2.1 传播模型描述**

考虑到社交网络上信息的传播和个人行为的改变是一种复杂的社会心理过程，所以我们使用双层网络来建立并且简化传播机制。在我们的多层网络模型中，定义下层网络为接触网络，用以描述流行病在人群中的传播，节点代表个体，连边表示人与人之间的物理接触，而定义上层网络为通信网络，用以描述随着流行病的传播伴随而来的信息的扩散，节点代表个体，连边表示了个体之间信息的交流，其中两层网络的对应节点表示同一个个体。考虑到相同个体在进行物理接触和信息交流时其邻居集合通常不会相同，因此在我们的双层网络模型中，上下两层网络有着不同的网络结构。【图1】展示了我们的SIS-UAU多层网络传播模型。

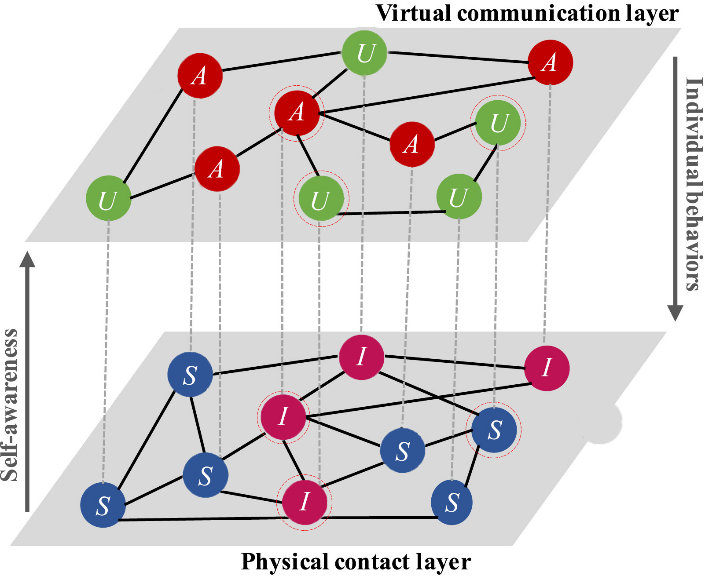


图 1 - SIS-UAU多层网络传播模型。其中下层代表物理接触层，模拟SIS流行病传播过程；上层代表信息扩散层，模拟UAU信息扩散过程，个体在信息层成为A状态后则有的概率成为警觉节点，在图中以有红色虚线包围的节点表示。

在物理接触层中，我们用SIS传播模型演化流行病在网络中的传播。个体在每个时刻可以是易感状态（S）或者是感染状态（I）。在病毒传播过程中，当感染个体在和易感个体接触时，易感个体会以的概率被感染；同时，感染个体也会以的概率恢复为易感个体[1]。

在信息层中，有关流行病传播所伴随的信息扩散采用UAU传播模型[\*2]。和SIS流行病传播模型类似，个体在每一个时刻可以是不知道信息的无意识状态（U）或者是知道信息的有意识状态（A）。假设信息层有意识个体的来源主要分为两个方面：一方面，接触层感染疾病的个体在信息层会以概率转变为有意识状态，自发的向邻居节点传播相关信息。另一方面，来源于通信网络中知道信息的有意识个体，即在每个时刻会在有意识地个体会在信息层中传播疾病相关的信息，和无意识的邻居接触后会以概率使得邻居也变为有意识个体。同时，因为大多数流行病的传播都有一定季节性或周期性，这就使得散播信息的有意识个体可能会遗忘疾病相关的信息或者不再传播，进而有意识地个体也会以的概率重新变为无意识个体。

在流行病相关信息的传播过程中，没有获得疾病相关信息的无意识个体并不会考虑如何预防被疾病感染的问题，但是，接收到疾病相关信息的有意识个体则会采取适当地防护措施，以便减少被疾病感染的风险，即有意识的易感个体被感染的概率一般小于无意识的个体被感染的概率，在我们的模型中，设有意识地易感个体被病毒感染的概率为无意识易感个体的倍。因此，若无意识的易感个体被疾病感染的概率为，则有意识的易感个体被病毒感染的概率为。

* 1. **个体行为**

在此之上，我们引入了节点的警觉状态以表示不同个体在接触行为选择上的异质性，即在信息层中，知道疾病相关信息的有意识个体会以的概率变为警觉状态（V），警觉个体充分了解疾病的严重性，因此愿意改变自己的社交行为以避免被流行病所感染；而随着对疾病相关信息的忘记，警觉个体会停止散播信息，并以的概率重新恢复为非警觉状态（R）。非警觉个体因为没有认识到疾病的严重性，或是因为工作以及社交的需求，无法避免与全部邻居的接触。考虑到个体在流行病传播期间若是更偏向于进入警觉状态，则其通常会希望保持警觉以最大程度避免被感染的风险，因此我们假设。

基于以上所提出的模型，我们依据个体在产生警觉性时接触行为的不同偏好，提出了两种个体在产生警觉性后的不同行为策略。

* **策略1：**

具有警觉性的个体会和同样具有警觉性的邻居个体主动进行物理接触，而不会主动与非警觉个体进行物理接触，不具有警觉性的个体则会和所有的邻居个体接触。

例如，在流行病传播时，大部分了解到疾病相关信息的个体都会比平时更加谨慎，采取适当的防护措施，但是会有少数充分了解疾病严重性的个体为了最大程度避免被疾病所感染，除了会带口罩，勤洗手之外，还会避免和不了解疾病严重性的人接触，只和同样具有警觉性的邻居接触，因为这些邻居大多是已经了解疾病相关信息的节点，会采取防护措施，因此和同样警觉的节点主动接触所带来的感染风险更小。

* **策略2：**

具有警觉性的个体会和不具备警觉性的个体主动进行物理接触，而不会主动与非警觉个体进行物理接触，不具有警觉性的个体则会和所有的邻居个体接触。

例如，当流行病传播时，考虑到有意识的个体通常有两个来源：由已感染疾病的个体自发转化而来，以及在信息传播层接收到邻居节点散播消息而变为有意识状态。因此，当一部分有意识个体产生警觉性之后，警觉个体中会有相当一部分是已感染疾病的个体，因此如果具有警觉性的易感个体和不具备警觉性的个体进行物理接触，被疾病感染的风险也有可能会降低。

考虑到两种应对方式都有其合理性，我们在建立模型时把这两种策略都纳入到了模型之中，通过参数控制不同策略的选取，分析两种策略对于抑制流行病传播的效果。

**2.3 数学描述**

基于以上假设，整个多层网络中的节点存在四种主要状态：未知易感（），未知感染（），已知易感（），已知感染（ ）。以及八种子状态：四种警觉状态，，，，以及四种非警觉状态，，，（其中下标V代表警觉状态，而R代表非警觉状态）。

由于MMCA在解决淬火网络中的扩散动力学方面有很高的准确定[\*]，我们在本文中使用MMCA对我们的模型进行理论分析。根据前文给出的模型，在t时刻，每个节点都会以一个确定的概率成为以下八个状态之一：，，，，，，以及，分别以，，，，，，， 表示。显然有， 。我们分别以，来表示接触层和信息层的邻接矩阵元素。随后，我们在信息层定义个体不被任何邻居传播为知觉个体的概率为。在接触层，我们定义非警觉个体在未知状态时，不被任何邻居感染的概率为，警觉个体在未知状态时，不被任何邻居感染的概率为。同样，非警觉个体在知觉状态时，不被任何邻居感染的概率为，警觉个体在知觉状态时，不被任何邻居感染的概率为。假设没有动力学相关性[\*]，我们有以下方程式：











其中，，，而控制着两种应对方式的选取，时对应于采用策略1，时对应于则采用策略2。

因此，对于每个个体，所有八种状态变化可能性的概率转移树如图2所示。





图 2 – UAU-SIS模型中个体在每个时刻八个状态的概率转移树。状态包括，，，，，，以及。每棵树的根节点表示在时间的个体的状态，而叶子节点表示时刻个体的状态。每个时刻都被分为四个阶段：意识传播(UAU过程)，警觉状态的改变，疾病传播(SIS过程)，以及自我意识的产生(信息上传过程)。

结合以上四个式子以及图2的概率转移树，我们可以用MMCA建立每个节点从所有八种状态演化的方程为：



1. **分析/仿真结果**

在上一节中我们提出了节点产生警觉性后的两种不同的接触行为策略，即处于警觉状态的节点倾向于和同样处于警觉状态的邻居节点主动接触，以及处于警觉状态的节点倾向于和非警觉状态的邻居节点主动接触，而非警觉状态的节点因为不具备警觉性则会和所有邻居的节点主动接触。在本节中，我们将针对不同的多层网络类型，比较并分析采取两种不同的行为策略时对疾病传播的影响。其中，疾病以及信息传播的参数的选取如下：，，，，及。每个仿真实验我们都进行了200次蒙特卡洛循环。

考虑到现实网络结构多为小世界网络（WS）以及无标度网络（BA）因此我们在实验中选取这两种网络结构来建立物理接触层以及信息传播层。

**对于策略1的仿真如下：**

首先我们选取BA-BA多层网络：与物理接触层相对应的网络采用无标度（BA）网络，节点数为2000，每个节点在加入网络时与3个节点建立连接。与信息传播层相对应的网络同为BA网络，但是考虑到现实社会中同一个个体的在接触关系网络和在线社交关系网络中虽然不会有相同的结构，却也不会产生过于差异化的人际关系，如在接触关系网络中拥有更多好友的个体，在信息传播层中同样更有可能拥有较多好友，虽然个体在两层中拥有的好友并不一定完全一致。为了保证这种相关性，上层的信息层BA网络以下层的接触层网络为基础，随机增加了400条边。

而在WS-WS多层网络模拟中，与物理接触层相对应的网络采用小世界（WS）网络，节点数为2000，其中而。与信息传播层相对应的网络同为WS网络。为了保证上下两层网络的相关性，上层表示信息传播的WS网络以下层的接触网络为基础，随机增加了400条边。

最后，我们研究策略在BA-WS网络上的表现。与物理接触层相对应的网络采用无标度（BA）网络，节点数为2000，生成参数选取同之前的BA网络。与信息传播层相对应的网络为WS网络，节点数为2000，生成参数选取同之前的WS网络。为了保证上下两层网络的相关性，上层的信息层WS网络依旧随机增加了400条边。

接下来，我们将研究采用策略一时，对取不同值时的流行病的传播情况。

图1 - 三种双层网络选取策略一时a的取值对疾病感染率的影响。其中横轴表示时间t的变化，纵轴表示流行病的感染率I(t)。其中，(a)为采取策略一时流行病在BA-BA双层网络上的感染率变化；(b)为采取策略一时流行病在WS-WS双层网路上感染率的变化；(c)为采取策略一时流行病在BA-WS双层网络上感染率的变化。

图一显示了当选取警觉性行为策略一时，取不同值时在上文给出的三种双层网络中流行病感染率随时间的变化。综合以上三个图像可以看出，当取较小的值时策略一对于流行病的抑制作用较为明显，随着取值的逐渐增大，策略一对于流行病的抑制作用会逐渐减弱。

从易感节点的角度出发，我们希望可以保护这些具有警觉性的易感节点，当其产生警觉性后通过调整接触行为策略，减小被流行病所感染的概率。通过使这些节点主动和同样具有警觉性的节点接触，可以切断与那些不具备警觉性的感染邻居节点的接触，于是在一定程度上可以减小其被流行病感染的概率。

一方面，当产生警觉性的概率较小时，网络中只会有少部分有意识的节点处于警觉状态。其中具有警觉性的易感节点会切断与其他不具有警觉性的感染态邻居的接触，同时，网络中非警觉节点占大多数，其中包括大部分感染节点，因此这些具有警觉性的易感节点被感染的概率较低。另一方面，考虑到节点的意识一部分来源于信息的扩散，由与有意识的邻居通信所引发，另一部分来源于节点本身因感染疾病自发产生，因此有意识的节点中患病节点的比例会比无意识节点中患病节点的比例更高。当的取值偏小时，不具备警觉性的易感节点比例高，通过采取策略一，也可以在一定程度上形成对具有警觉性节点的隔离，从而保护这些不具备警觉性的易感节点。因此，较小的值对流行病的抑制作用更明显。

随着有意识的节点具备警觉性概率的增加，网络中警觉性恢复到非警觉性的概率会逐渐降低，最终网络中警觉节点的比例会逐渐增高，警觉性节点之间所组成的子网络会逐渐扩大，在其子网内部，子网中每个节点都会与其所有的邻居进行物理接触，于是策略一的效果会减弱。当的取值为1时，网络中所有有意识的节点都会永久转变为警觉节点，此时警觉性节点所组成的子网络会扩展到几乎整个网络中，因此策略一会基本失效，其效果会接近于不采取任何策略的情况。而在不同的网络中，并不是所有的节点都有机会接收到关于流行病的信息，因此网络中会存在少数节点不具备警觉性，所以当与时的疾病感染率不会完全重合。

值得一提的是，当的取值非常小时，网络中一开始警觉节点的比例也会非常小，在初期疾病感染率会基本和不采取策略时相接近，随着疾病在网络中的传播，警觉节点的比例随着有意识节点的数量增加而提高，此时策略一产生作用，使得疾病感染率逐渐下降，随着时间的推进感染率逐渐稳定，于是在初期疾病感染率会产生了一个峰值。

**对于策略2的仿真如下：**

在双层网路的选取上，我们采用和策略1相同的网络类型。

首先，我们选取BA-BA多层网络：下层物理接触层相对应的网络采用无标度（BA）网络，其网络参数同策略1；与上层信息传播层相对应的网络同为BA网络，为了保证上下两层网络的相关性，上层的信息层BA网络以下层的接触层网络为基础，随机增加了400条边。

其次，在WS-WS多层网络模拟中，与下层物理接触层相对应的网络采用小世界（WS）网络，网络参数同策略1。与上层信息传播层相对应的网络同为WS网络。为了保证上下两层网络的相关性，上层的信息层WS网络以下层的接触层网络为基础，随机增加了400条边。

最后，在BA-WS多层网络模拟中。与下层物理接触层相对应的网络采用无标度（BA）网络，网络参数同策略1。与上层信息传播层相对应的网络为WS网络，网络参数同之前的WS网络。为了保证上下两层网络的相关性，上层的信息层WS网络依旧随机增加了400条边。

接下来，我们将分析当采用策略2时，对取不同值时流行病的传播情况。

图2 - 三种双层网络选取策略二时a的取值对疾病感染率的影响。其中横轴表示时间t的变化，纵轴表示流行病的感染率I(t)。其中，(a)为采取策略一时流行病在BA-BA双层网络上的感染率变化；(b)为采取策略一时流行病在WS-WS双层网路上感染率的变化；(c)为采取策略一时流行病在BA-WS双层网络上感染率的变化。

图二显示了当选取警觉性行为策略二时，取不同值时在上文给出的三种双层网络中流行病感染率随时间的变化。综合以上三个图像可以看出，当取较大的值时策略二对于流行病的抑制作用较为明显，随着取值的逐渐减小，策略二对于流行病的抑制作用逐渐减弱。

在采取策略二时，若从易感节点的角度考虑，具有警觉性的易感节点会选择与不具有警觉性的邻居接触，因为有意识的节点中有一部分节点的意识来源是因为其在物理接触层感染了疾病，与无意识的节点相比，有意识的节点中感染节点的比例会略高，因此通过避免与同样具有警觉性的节点的物理接触，个体被流行病感染的概率便会降低。

当的取值偏小时，网络中只有小部分的有意识节点具备警觉性，因此具有警觉性的易感节点会主动与其非警觉邻居进行物理接触，其中包括了大部分感染节点，因此此时策略二对于流行病的抑制效果并不明显。

随着的取值逐渐增大，有意识的节点中产生警觉性的概率会逐渐增大，考虑到有意识的节点中感染节点的比例较高，因此具有警觉性的易感节点通过改变行为，切断与同样是警觉状态的邻居的接触，从而能够有效的降低被疾病感染的风险。而当取1时，网络中随着信息的扩散会有越来越多的节点永久地成为警觉节点，而警觉节点并不会主动与同样是警觉状态的邻居接触，因此当网络中警觉节点比例相当高时，网络中大部分连边都是处于被切断的状态，警觉节点之间相互孤立，网络基本不连通，此时疾病无法有效传播，随着感染个体的康复，流行病最终会在网络中消失。

而当的取值较大时，考虑到前文提到有意识的个体中感染疾病的比例会略高，因此在初期，这些节点在产生警觉性后会通过与大量非警觉节点的接触快速的扩散疾病，其中这些非警觉节点并没有疾病相关的意识，防护能力较为脆弱。所以取较大的值时在前期会产生峰值，随着时间的推进，警觉个体逐渐增多，流行病的感染率才会逐渐稳定。

1. **结论**

**参考文献**

[1] R. Pastor-Satorras , C. Castellano , P. Van Mieghem , A. Vespignani , Epidemic processes in complex networks, Rev. Mod. Phys. 87 (3) (2015) 925 . march

[2] S. Funk , E. Gilad , C. Watkins , V.A. Jansen , The spread of awareness and its impact on epidemic outbreaks, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 106 (16) (2009) 6 872–6 877 .

[3] Z. Ruan, M. Tang, Z. Liu Epidemic spreading with information-driven vaccination Phys. Rev. E, 86 (3) (2012), p. 036117

[4]

[5]

[6] Granell C, Gómez S, Arenas A. Dynamical interplay between awareness and epidemic spreading in multiplex networks[J]. Physical review letters, 2013, 111(12): 128701.

[7] Granell C, Gómez S, Arenas A. Competing spreading processes on multiplex networks: awareness and epidemics[J]. Physical review E, 2014, 90(1): 012808.

[8] Kan J Q, Zhang H F. Effects of awareness diffusion and self-initiated awareness behavior on epidemic spreading-an approach based on multiplex networks[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2017, 44: 193-203.

[9] Zheng C, Wang Z, Xia C. A novel epidemic model coupling the infectious disease with awareness diffusion on multiplex networks[C]//2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC). IEEE, 2018: 3824-3830.

[10] Wang Z, Guo Q, Sun S, et al. The impact of awareness diffusion on SIR-like epidemics in multiplex networks[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 349: 134-147.

[11] Wang W, Liu Q H, Cai S M, et al. Suppressing disease spreading by using information diffusion on multiplex networks[J]. Scientific reports, 2016, 6: 29259.

[12] Gao C, Tang S, Li W, et al. Dynamical processes and epidemic threshold on nonlinear coupled multiplex networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2018, 496: 330-338.

[13] Yang J X. Epidemic spreading in multiplex networks with heterogeneous infection rate[J]. EPL (Europhysics Letters), 2019, 124(5): 58004.