

 <p>Universidad de Alcalá</p> <p>Escuela Politécnica Superior Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones</p>		<p>Curso 2021-22</p> <p>Guion de las demos</p> <p>Curso: 3º B</p> <p>Asignatura: Comunicaciones Digitales</p>		

Demos de Teoría de la Información

Práctica 2.1: modelos de canal.

El canal de comunicación es el medio por el que la información se transmite desde una fuente hasta un destino. Utilizaremos modelos de canal no deterministas porque a partir de ellos podemos obtener los modelos deterministas como un caso particular.

El modelo de canal más sencillo es el canal discreto sin memoria (DMC - *Discrete-Memoryless Channel*), caracterizado porque la entrada y la salida se relacionan mediante una probabilidad condicional. El canal DMC está descrito completamente por: el alfabeto de entrada del canal X , el alfabeto de salida del canal Y y la matriz de probabilidades de transición del canal \mathbf{P} . El caso más sencillo de canal discreto sin memoria es el canal binario simétrico (BSC - *Binary Symmetric Channel*) utilizado como modelo en la transmisión binaria por un canal gaussiano con decisión rígida (*hard decision*) a la salida.

La capacidad del canal es, por definición, la velocidad máxima de transmisión que permite mantener la posibilidad de una comunicación fiable. La comunicación fiable es posible cuando existe una secuencia de códigos con longitud de bloque creciente, para la cual la probabilidad de error de transmisión tiende a cero si la longitud del bloque tiende a infinito. En el caso del canal discreto sin memoria,

$$C = \max_{p_X} I(X; Y),$$

donde $I(X; Y)$ denota la información mutua entre la entrada y la salida del canal. En el caso del canal binario simétrico la capacidad responde a la expresión

$$C = 1 - H(p),$$

donde $H(\cdot)$ es la función de entropía y p es la probabilidad de transición del BSC (recepción errónea de bit).

Si el modelo de canal es el denominado Canal de Ruido Blanco Gaussiano Aditivo (AWGN - *Additive White Gaussian Noise Channel*) limitado en banda a B Hz, la capacidad del canal es:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 B} \right),$$

donde S es la potencia media recibida y $N_0/2$ W/Hz es la densidad espectral de potencia de ruido.

Ejercicios

- (Proakis & Salehi 2000-Prob. 5.3 y 8.1) Un sistema transmite símbolos por un canal binario simétrico con ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral de potencia $N_0/2$ con una probabilidad de transmisión errónea $p = Q(\sqrt{2\gamma})$, donde $\gamma = E_b/N_0$ y E_b es la energía media de bit. Se pide:

- Representar la probabilidad de error en función de γ . Considere el margen de valores de γ comprendido entre -20 dB y 20 dB.
- Representar la capacidad del canal en función de γ .

Sugerencia: puede utilizarse la función `qfunc(x)`.

- (Proakis & Salehi 2000-Prob. 8.2) Se dispone de un canal con ruido blanco gaussiano aditivo con un ancho de banda B . Se pide:

- Representar la capacidad del canal en función de S/N_0 para valores de S/N_0 entre -20 dBHz y 30 dBHz cuando el ancho de banda es $B = 3000$ Hz.
- Representar la capacidad del canal en función de B cuando la relación señal-ruido es $S/N_0 = 25$ dBHz. ¿Cuál es el valor de la capacidad del canal cuando B aumenta indefinidamente?

Práctica 2.2: sistema ideal frente a sistemas reales¹.

Llamamos sistema ideal a aquel que transmite los datos con un régimen binario igual a la capacidad del canal expresada en bit/s. En ese caso, podemos expresar la potencia transmitida en función de la capacidad del canal mediante

$$S = \frac{E_b}{T_b} = E_b \cdot R_b = E_b \cdot C,$$

donde E_b es la energía transmitida por bit y T_b , la duración de bit. Así pues, podemos decir que el sistema ideal se caracteriza por tener una eficiencia espectral

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left(1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{C}{B} \right) \text{ bit/s} \cdot \text{Hz}.$$

A partir de esta expresión, podemos despejar la relación entre la energía por bit y la densidad espectral de potencia de ruido en función de la eficiencia espectral del sistema ideal (C/B),

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/B} - 1}{C/B}.$$

Llamamos diagrama de eficiencia espectral a la representación gráfica de la eficiencia espectral R_b/B en función de E_b/N_0 . Sobre este diagrama podemos representar la característica del sistema ideal para que nos sirva de referencia a la hora de evaluar los distintos sistemas que se utilizan en la práctica.



Figura 1: Diagrama de eficiencia espectral del sistema ideal en un canal AWGN.

La Figura 1 muestra ese diagrama. La curva dibujada se corresponde con el sistema ideal y representa la frontera de capacidad. Por debajo de la frontera se sitúan los sistemas para los que es posible la comunicación fiable; por encima de ella estarían los sistemas para los que no hay ningún esquema de codificación que permita la comunicación fiable, es decir, con probabilidad de error arbitrariamente pequeña. Podemos observar lo siguiente:

1. Si no hay limitación de ancho de banda ($B \rightarrow \infty$), la E_b/N_0 se aproxima al valor límite

$$\left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{\infty} = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{E_b}{N_0} = \ln(2) = 0,693 = -1,6 \text{ dB}.$$

Este valor es el denominado **límite de Shannon** para un canal AWGN, suponiendo una tasa de codificación (k/n) igual a cero. Obtenemos la capacidad correspondiente a este límite haciendo que B tienda a infinito en la fórmula de Shanon-Hartley,

$$C_{\infty} = \lim_{B \rightarrow \infty} C = \lim_{B \rightarrow \infty} \log_2(e) \cdot \frac{E_b}{N_0} \frac{R_b}{B} B = \frac{S}{N_0} \log_2(e).$$

¹Esta introducción teórica ha sido extraída del libro de S. Haykin *Communication Systems*, Wiley, 2001.

2. La cota de capacidad separa las combinaciones de parámetros de los sistemas de transmisión fiable posible ($R_b < C$) de los sistemas de transmisión no fiable ($R_b > C$).
3. El diagrama muestra posibles compromisos entre E_b/N_0 , R_b/B y P_e o P_b (probabilidad de error de símbolo o de bit). Así, las rectas paralelas al eje de abscisas ($R_b/B = \text{cte}$) muestran el compromiso entre E_b/N_0 y la probabilidad media de error P_e . Por su parte, las rectas paralelas al eje de ordenadas ($E_b/N_0 = \text{cte}$) muestran el compromiso entre R_b/B y la probabilidad media de error P_e (o P_b).

Ejercicios

1. Escriba el código en Matlab que represente la Figura 1, teniendo en cuenta que el sistema ideal se rige por la expresión (donde $C = R_b$)

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left(1 + \frac{E_b}{N_0} \frac{C}{B} \right).$$

2. (Adaptado de Haykin 2001-Ejemplo 9.11). En este ejercicio, se compara la capacidad de intercambio entre potencia transmitida y ancho de banda de transmisión en las modulaciones M-PSK y M-FSK coherentes. Para ello, a partir de las expresiones de eficiencia espectral y de probabilidad de error dadas más abajo, se pide:

- a) Representar los puntos de funcionamiento de un sistema M-PSK con probabilidad de error de bit $P_b = 10^{-5}$, para $M = 4, 8, 16, 32, 64$. Sobre los mismos ejes, represente también la cota de capacidad de la Figura 1 para poder comparar el sistema ideal con el sistema M-PSK.
- b) Repetir el apartado anterior para el caso de modulación M-FSK.
- c) Repetir los dos apartados anteriores para $P_b = 10^{-3}$ y $P_b = 10^{-7}$. Comparar los resultados.

Datos: $Q(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \cdot e^{-x^2/2}$, para $x \geq 3$.

Modulación	Ancho de banda	$\rho = R_b/B$	Probabilidad de error de símbolo	Probabilidad de error de bit
M-PSK	$\frac{2R_b}{\log_2(M)} = \frac{2}{T}$	$\frac{\log_2(M)}{2}$	$P_e = 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right)$	$P_b \approx \frac{P_e}{\log_2(M)}$
M-FSK	$\frac{(M+3)R_b}{2\log_2(M)} = \frac{M+3}{2T}$	$\frac{2\log_2(M)}{M+3}$	$P_e = (M-1)Q \left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \right)$	$P_b \approx \frac{2^{\log_2(M)-1}}{2^{\log_2(M)}-1} P_e$

Cuadro 1: Listado de datos para las modulaciones.