ExamenesResueltos.pdf

MRA_Engineer

Comunicaciones Digitales

3º Grado en Ingeniería de las Tecnologías de Telecomunicación

Escuela Politécnica Superior
Universidad de Alcalá

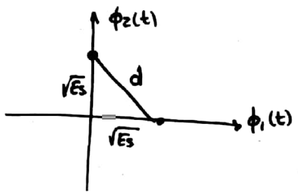
EXAMEN GIST 1º

① Sea un canal discreto obtenido a partir de un canal AWGN con una modulación 4-FSK coherente con decisión dura.

a) Obtener la matriz del canal y calcular su capacidad

Una 4-FSK se puede representar en una base ortonormal : $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$

Es decir, que entre los símbolos:



$$\bar{P} = \begin{pmatrix} 1-3p & p & p & p \\ p & 1-3p & p & p \\ p & p & 1-3p & p \\ p & p & p & 1-3p \end{pmatrix}$$

$$d^2 = \sqrt{Es}^2 + \sqrt{Es}^2 = 2Es \longrightarrow d = \sqrt{2Es}$$

$$\underline{\underline{p}} = Q\left(\sqrt{\frac{2Es}{2Nb}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{Es}{Nb}}\right) = Q(2'75) = \underline{\underline{3'467 \cdot 10^{-3}}} \quad \text{OK!!}$$

DATOS : $Nb = 2 \cdot 10^{-12}\ W/Hz$
$Es = 1'518 \cdot 10^{-11}\ J$
$B = 25\ MHz$
Forma de impulso rectangular

Como la matriz es simétrica : $C = \log_2(M) - H(F|A)$

$$H(F|A) = 3 \cdot \underbrace{3'467 \cdot 10^{-3} \cdot \log_2 \frac{1}{3'467 \cdot 10^{-3}}}_{0'085} + \underbrace{0'989 \log_2 \frac{1}{0'989}}_{0'0149} = \underline{\underline{0'1}}$$

$$\underline{\underline{C}} = 2 - 0'1 = \underline{1'9 \text{ bits/uso del canal}} \quad \text{OK!!}$$

b) Valor de la eficiencia espectral y relación Eb/Nb en dB :

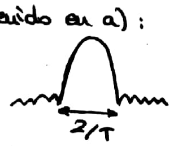
$$\underline{\eta = \rho|_{4FSK}} = \frac{2 \cdot \log_2(M)}{(M+3)} = \frac{2 \cdot 2}{7} = \underline{\underline{\frac{4}{7}}} \quad \underline{\underline{\text{OK!!}}}$$

$$Eb \rightarrow Es = \log_2(M) \cdot Eb = 2 \cdot Eb \longrightarrow Eb = Es/2 \longrightarrow \underline{\underline{\frac{Eb}{Nb}}} = \frac{Es/2}{Nb} = 3'795 = \underline{\underline{5'79\ dB}}$$

OK!!

c) Valor de la duración de un símbolo de la 4-FSK y la capacidad del canal en bits/s a partir del obtenido en a) :

Conformidad rectangular ⟶



$$B = \frac{2}{Ts} \longrightarrow \underline{\underline{Ts}} = \frac{2}{B} = \underline{\underline{80ns}}$$

↓

No!! ⟶ Fórmulas

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1'9 \text{ bits/uso canal}}{Ts\ (80\ ns)} = \underline{\underline{23'75 Mbps}}$$

$$B = \frac{(M+3)}{2T} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{Ts} =$$

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1'9}{140ns} = \underline{\underline{13'57\ Mbps}} \quad \text{OK!!} \longleftarrow \underline{\underline{Ts}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{B} = \underline{\underline{140\ ns}} \quad \text{OK!!}$$

2

$P(x,y)$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$y=1$	1/9	0	2/9
$y=2$	1/9	1/9	1/9
$y=3$	2/9	0	1/9

a) $P(X)$, $P(Y)$ y la matriz de transición

$P(X) = (4/9 \quad 1/9 \quad 4/9)$

$p(x_1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}$

$p(x_2) = \frac{1}{9}$

$p(x_3) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$

$P(Y) = (3/9 \quad 3/9 \quad 3/9)$

$p(y_1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}$

$p(y_2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$

$p(y_3) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}$

$$\bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \longrightarrow p(Y) = p(X) \cdot \bar{\bar{P}}$$

$\frac{3}{9} = \frac{4}{9} \cdot a + \frac{1}{9} \cdot d + \frac{4}{9} \cdot g$

$a+b+c = 1, \; d+e+f = 1 \ldots$

$\frac{3}{9} = \frac{4}{9} \cdot b + \frac{1}{9} \cdot e + \frac{4}{9} \cdot h$

$\frac{3}{9} = \frac{4}{9} \cdot c + \frac{1}{9} \cdot f + \frac{4}{9} \cdot i$

b) $H(X)$, $H(Y)$, $H(Y|X)$:

$H(X) = \frac{4}{9} \cdot 2 \log_2\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{1}{9} \log_2(9) = 1'04 + 0'35 \approx \underline{1'40 \text{ bits}}$ ok!!

$H(Y) = 3 \cdot \frac{3}{9} \log_2\left(\frac{9}{3}\right) = \underline{1'58 \text{ bits}}$ ok!!

$H(Y|X) = 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{4} \log_2(4) + \frac{1}{2} \log_2(2) \right] +$

$+ \frac{1}{9} \left[1 \log_2(1) \right] = \cancel{\ldots} = \frac{8}{9} \cdot [0'5 + 1] = \frac{8}{9} \cdot 1'5 = \underline{\frac{4}{3} \text{ bits}}$ ok!!

c) $I(X;Y)$, $H(X;Y)$

$\underline{I(X;Y)} = H(Y) - H(Y|X) = 1'58 - 1'33 = \underline{0'25 \text{ bits}}$ ok!!

$H(X,Y) \longrightarrow I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \longrightarrow \underline{H(X,Y)} = 1'40 + 1'58 - 0'25 = \underline{2'73 \text{ bits}}$

ok!!

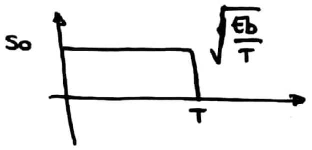
KEEP
CALM
AND
ESTUDIA
UN POQUITO

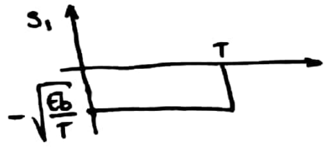
PRIMER PARCIAL

Sistema de comunicación banda base
Transmite símbolos binarios, tasa = 10 Mbps
Código línea polar NRZ $\longrightarrow$ $h_T(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E_b}{T}} & 0 \le t \le T \\ 0 & c.c \end{cases}$

$E_b = 2pJ$

a) Representar constelación de la señal de entrada del canal y las coordenadas.



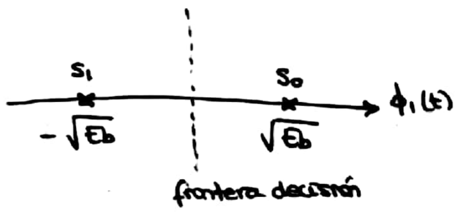


$$\phi_1(t) = \frac{s_0(t)}{\|s_0(t)\|} = \frac{\sqrt{\frac{E_b}{T}}}{\sqrt{E_b}} = \sqrt{\frac{1}{T}} \longrightarrow$$

$$\|s_0(t)\|^2 = \int_0^T s_0^2(t)\,dt = \int_0^T \frac{E_b}{T}\,dt = \frac{E_b}{\cancel{T}}\cancel{T} = E_b$$

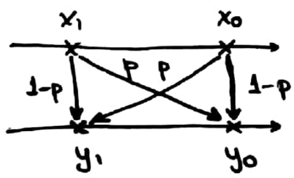
$$\boxed{\vec{s_0} = \sqrt{E_b}\cdot\phi_1(t)}$$

$$s_1(t) = -s_0(t) \longrightarrow \boxed{\vec{s_1} = -\sqrt{E_b}\cdot\phi_1(t)}$$

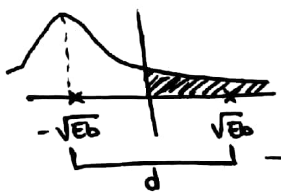


b) Capacidad del canal discreto equivalente en caso de detección dura (ML) en el receptor

$$C = \max_{p_x}\{I(x;y)\}$$



Es un canal BSC : $\bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$



$$p = p(y_1|x_0) = p(y_0|x_1) = Q\left(\frac{2\sqrt{E_b}}{\sqrt{2N_0}}\right).$$

$$\longrightarrow d = 2\sqrt{E_b} \qquad = Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$\underline{p} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 10^{-12}}{4\cdot 10^{-12}}}\right) = Q(1) = \underline{0'158}$$

$$\bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} 0'842 & 0'158 \\ 0'158 & 0'842 \end{pmatrix}$$

Al ser una matriz simétrica la capacidad se calcula simplemente:

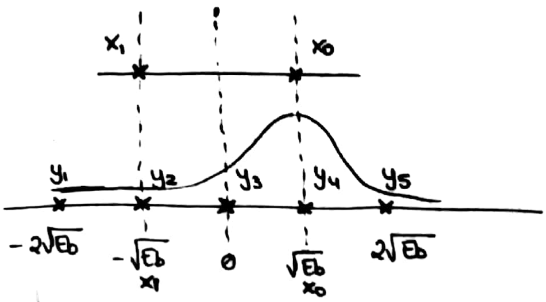
$$\boxed{\underline{C} = \log_2(N=2) - H(F|A) = 1 - 0'63 = \underline{0'37 \text{ bits/uso}}}$$

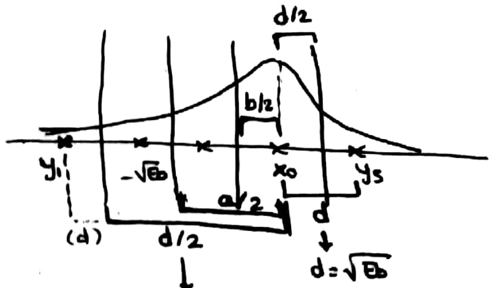
$$H(F|A) = 0'842\log_2\left(\frac{1}{0'842}\right) + 0'158\log_2\left(\frac{1}{0'158}\right) = 0'42 + 0'21 = \underline{0'63}$$

El canal ha resultado ser muy ruidoso.
Detección blanda con 5 niveles

c) Capacidad del canal si $\max\{I(X;Y)\}$ se obtiene con símbolos equiprobables a la entrada.

Primero se debe calcular la nueva matriz $\bar{\bar{P}}$:





$$\boxed{\frac{d}{2}} = 2\sqrt{E_b} + 0'5\sqrt{E_b} = \boxed{2'5\sqrt{E_b}}$$

$$p(y_5|x_0) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_b}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_b}}\right) = p_1$$

$$p(y_1|x_0) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_b}}\right) = Q\left(\frac{2\cdot 2'5\cdot\sqrt{E_b}}{\sqrt{2N_b}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{25E_b}{2N_b}}\right) = p_2$$

$$p(y_2|x_0) = Q\left(\frac{a}{\sqrt{2N_b}}\right) - Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_b}}\right) = Q\left(\frac{2\cdot 1'5\sqrt{E_b}}{\sqrt{2N_b}}\right) - p(y_1|x_0) = p_3 - p_2$$

$$\frac{a}{2} = 1'5\sqrt{E_b} \qquad \to p_3 = Q\left(\sqrt{\frac{9E_b}{2N_b}}\right)$$

$$p(y_3|x_0) = Q\left(\frac{b}{\sqrt{2N_b}}\right) = Q\left(\frac{2\cdot 0'5\sqrt{E_b}}{\sqrt{2N_b}}\right) = p_1 - p(y_2|x_0)$$

$$\frac{b}{2} = 0'5\sqrt{E_b}$$

$$\boxed{\begin{aligned} N_0 &= 4\cdot 10^{-12} \\ E_b &= 2\cdot 10^{-12}\end{aligned}} \text{ Datos}$$

$$p_1 = Q(0'5) = 0'31$$
$$p_2 = Q(2'5) = 6'2\cdot 10^{-3} = 0'0062$$
$$p_3 = Q(1'5) = 6'68\cdot 10^{-2} = 0'067$$

$$p(y_5|x_0) = 0'31$$
$$p(y_1|x_0) = 0'0062$$
$$p(y_2|x_0) = p_3 - p_2 = 0'061$$
$$p(y_3|x_0) = p_1 - p(y_2|x_0) = 0'31 - 0'061 \approx 0'25$$
$$p(y_4|x_0) = 1 - p(y_5|x_0) - \ldots = 0'373$$

$$\bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} 0'0062 & 0'061 & 0'25 & 0'373 & 0'31 \\ 0'31 & 0'373 & 0'25 & 0'061 & 0'0062 \end{pmatrix}$$

$$C = \max_{P_x}\{I(X;Y)\} \longrightarrow I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) =$$

$$P_Y = \bar{P}_X \cdot \bar{\bar{P}} = (0'158 \quad 0'217 \quad 0'25 \quad 0'217 \quad 0'158)$$

equiprobable
$P_X = (0'5 \quad 0'5)$

$\bar{p}_Y = (0'158 \quad 0'217 \quad 0'25 \quad 0'217 \quad 0'158)$

$$H(Y) = \sum_k p_k \log_2 \frac{1}{p_k} = 0'158 \cdot 2 \log_2 \frac{1}{0'158} + 2 \cdot 0'217 \log_2 \frac{1}{0'217} + 0'25 \log_2 \frac{1}{0'25} =$$

$$= 0'84 + 0'95 + 0'5 = \underline{\underline{2'29}}$$

$$H(Y|X) = \sum_i p(x_i) \sum_j p(y_j|x_i) \log_2 \frac{1}{p(y_j|x_i)} =$$

$$= 0'5 \cdot \left[0'0062 \log_2 \frac{1}{0'0062} + 0'061 \log_2 \frac{1}{0'061} + 0'25 \log_2 \frac{1}{0'25} + 0'373 \log_2 \frac{1}{0'373} + 0'31 \log_2 \frac{1}{0'31} \right] \times 2$$

$$= 2 \cdot 0'5 \left[0'045 + 0'25 + 0'5 + 0'53 + 0'52 \right] \approx \underline{\underline{1'85}}$$

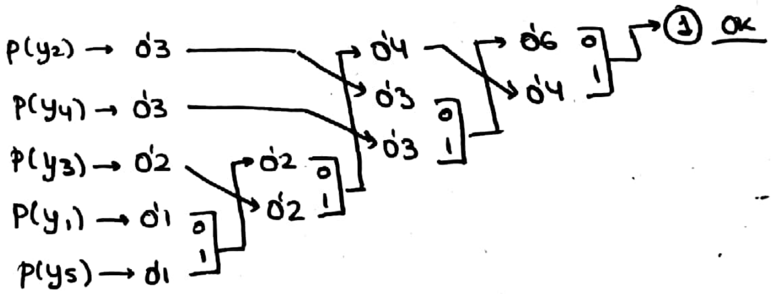
$$\boxed{C = \max_{\bar{p}_X} \{ I(X;Y) \} = 2'29 - 1'85 = \underline{\underline{0'44 \text{ bits/uso}}}}$$

d) Comparar la capacidad y justificar resultado:

$C_1 = 0'37$ bits/uso
$C_2 = 0'44$ bits/uso → Se mejora en el segundo caso, esto se debe a que al detectar de forma blanda se consigue una mayor precisión.

e) Suponiendo: $p_Y = [0'1 \quad 0'3 \quad 0'2 \quad 0'3 \quad 0'1] = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5]$

Obtener código Huffman y Longitud media:



código:	l_k
$p(y_2) = 00$	2
$p(y_4) = 01$	2
$p(y_3) = 11$	2
$p(y_1) = 100$	3
$p(y_5) = 101$	3

$$\underline{\underline{\bar{L}}} = \sum_k p_k l_k = 0'3 \cdot 2 \cdot 2 + 0'2 \cdot 2 + 2 \cdot 0'1 \cdot 3 = \underline{\underline{2'2 \text{ bits}}}$$

PRUEBA FINAL ORDINARIA

① Se transmiten $\{s_i(t)\} \rightarrow i = 1,2,3,4 \quad (M=4)$

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2E_s}{T_s}} \cdot \cos\left(\dfrac{2n_p\pi}{T_s}t + \dfrac{\pi}{2}i\right) & 0 \leq t \leq T \qquad n_p \text{ entero} \\ \emptyset & c.c \end{cases}$$

Canal AWGN con ruido $N_0/2$.

a) Obtener vectores de la señal y representar constelación:

$$s_i(t) = A \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2n_p\pi}{T_s}t\right)}_{\phi_1(t)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}i\right) - A \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{2n_p\pi}{T_s}t\right)}_{\phi_2(t)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}i\right)$$

Se normaliza:

$$\phi_1(t) = \frac{\cos\left(\frac{2n_p\pi}{T_s}t\right)}{\sqrt{E_1}} = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\left(\frac{2n_p\pi}{T_s}t\right)$$

$$E_1 = \int_0^T \cos^2(x)\,dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left(1 + \xrightarrow{\emptyset}\cancel{\cos(2x)}\right)dt = \frac{1}{2}\cdot T$$

$$\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\operatorname{sen}\left(\frac{2n_p\pi}{T_s}t\right)$$

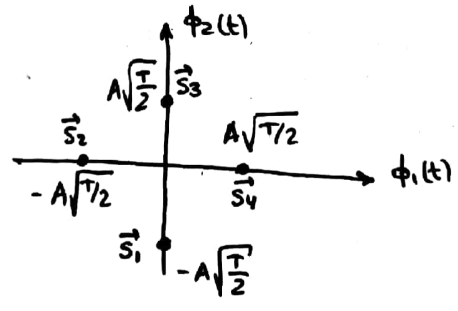
$$s_1(t) = A\cdot\sqrt{\frac{T}{2}}\phi_1(t)\cdot\underbrace{\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{\emptyset} - A\cdot\sqrt{\frac{T}{2}}\operatorname{sen}(\pi/2)\,\phi_2(t) = -A\sqrt{\frac{T}{2}}\cdot\phi_2(t)$$

$$s_2(t) = A\sqrt{\frac{T}{2}}\phi_1(t)\cos(\pi) - A\sqrt{\frac{T}{2}}\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(\pi)}}_{\emptyset}\phi_2(t) = -A\sqrt{\frac{T}{2}}\phi_1(t)$$

$$s_3(t) = A\sqrt{\frac{T}{2}}\phi_1(t)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - A\sqrt{\frac{T}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\phi_2(t) = +A\sqrt{\frac{T}{2}}\phi_2(t)$$

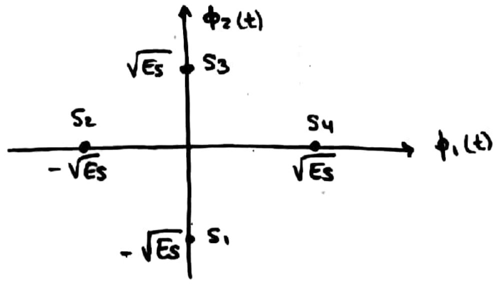
$$s_4(t) = A\sqrt{\frac{T}{2}}\phi_1(t)$$

Constelación:



$$A = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}}$$

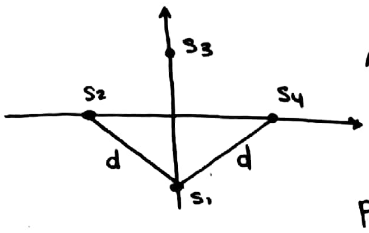
$$A\cdot\sqrt{\frac{T}{2}} = \sqrt{E_s}$$

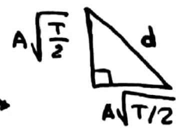


b) Matriz probabilidades de transición en caso de detector ML.

prob. transición errónea entre símbolos contiguos $= Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_b}}\right)$

resto $= 0$





$d^2 = A^2\cdot\frac{T}{2} + A^2\frac{T}{2} = A^2 T \longrightarrow \boxed{d = A\sqrt{T}}$

$p(r_2|s_1) = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2N_b}}\right) = p$

$p(r_4|s_1) = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2N_b}}\right) = p$

$p(r_3|s_1) = 0$

$$\bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \\ 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \end{pmatrix}$$

$p = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_b}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_b}}\right)$

$A^2\cdot T = \frac{2E_s}{\cancel{T_s}}\cdot\cancel{T_s} = 2E_s$

Datos:

$P_R = -22'7$ dBm

$N_b = -114$ dBW/Hz

$R_s = 1/T_s = 300$ ksymb/s

$P_R = 5'37\ mW \Rightarrow S = E_s\cdot R_s$

$\underline{E_s} = \frac{S}{R_s} = \frac{5'37mW}{300k} = \underline{17'9\ n}$

$\underline{N_b = 3'98\cdot10^{-12}}$

$p = Q\left(\sqrt{\frac{17'9n}{3'98p}}\right) = \underline{Q(67) = 0}$ (?!) algún fallo?

c) Obtener la capacidad del canal en bits/uso del canal

Como la matriz es simétrica: $C = \max\{I(X;Y)\} = \log_2(M) - H(F|A)$

$H(F|A) = 2\cdot p\log_2\frac{1}{p} + (1-2p)\cdot\log_2\frac{1}{1-2p}$

② d) Capacidad del canal binario equivalente si se utiliza codificación gray

BSC → capacidad es: $\bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{PRUEBA EXTRAORDINARIA}}$

1 Fuente S emite tres posibles símbolos: $\{x_0, x_1, x_2\}$

$p_x = (0'2 \quad 0'7 \quad 0'1)$

Canal tiene como salida: $\{y_0, y_1, y_2\}$

$$\overline{\overline{P}} = \begin{pmatrix} 0'5 & 0'4 & 0'1 \\ 0'1 & 0'5 & 0'4 \\ 0'4 & 0'1 & 0'5 \end{pmatrix}$$

a) Entropía de la fuente:

$$\underline{\underline{H(S)}} = \sum_i p(x_i) \log_2 \frac{1}{p(x_i)} = 0'2 \log_2 \frac{1}{0'2} + 0'7 \log_2 \frac{1}{0'7} + 0'1 \log_2 \frac{1}{0'1} =$$
$$= 0'46 + 0'36 + 0'33 = \underline{\underline{1'15}}$$

b) Valor de la información mutua:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$\overline{p}_y = \overline{p}_x \cdot \overline{\overline{P}} = (0'2 \quad 0'7 \quad 0'1) \cdot \overline{\overline{P}} = (0'21 \quad 0'44 \quad 0'35) \Longrightarrow \text{suma 1 OK!!}$$

$$\underline{\underline{H(Y)}} = \sum p_k \log_2 \frac{1}{p_k} = 0'21 \log_2 \frac{1}{0'21} + 0'44 \cdot \log_2 \frac{1}{0'44} + 0'35 \log_2 \frac{1}{0'35} =$$
$$= 0'47 + 0'52 + 0'53 = \underline{\underline{1'52}}$$

$$\underline{\underline{H(Y|X)}} = \sum_i p(x_i) \cdot \sum_j p(y_j|x_i) \log_2 \frac{1}{p(y_j|x_i)} =$$
$$= 0'2 \cdot \Big[\underbrace{0'5 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0'5}\right)}_{0'5} + \underbrace{0'4 \log_2 \left(\frac{1}{0'4}\right)}_{0'528} + \underbrace{0'1 \log_2\left(\frac{1}{0'1}\right)}_{0'332} \Big] +$$
$$+ 0'7 \cdot [\quad \text{"} \quad]$$
$$+ 0'1 \cdot [\quad \text{"} \quad] = 0'272 + 0'952 + 0'136 =$$
$$= \underline{\underline{1'36}}$$

$\longleftrightarrow$ 1'36

$$\boxed{I(X;Y) = 1'52 - 1'36 = 0'16}$$

c) Capacidad del canal y comparar con $I(X;Y)$:

Como la matriz es simétrica: $\underline{\underline{C}} = \max_{p_x} \{I(X;Y)\} = \log_2(M) - H(F|A) =$
$$= \log_2(3) - 1'36 = 1'58 - 1'36 = \underline{\underline{0'22}}$$

$$\boxed{C > I(X;Y)}$$

d) Codificación Huffman para la fuente. Comprobar $H(S) \leq \overline{L} \leq H(S)+1$

x_1 (0'7) ⟶ 0'7 [0]
x_0 (0'2) [0]
x_2 (0'1) [1] ⟶ 0'3 [1] ⟶ (1)

$x_1 = 0$
$x_0 = 10$
$x_2 = 11$

$\overline{L} = 0'7 \cdot 1 + 0'2 \cdot 2 + 0'1 \cdot 2 = 1'3$ bits/código

$\Downarrow$

$$\boxed{1'15 < 1'3 < 2'15}$$