ProblemasResueltos3.pdf

MRA_Engineer

Comunicaciones Digitales

3º Grado en Ingeniería de las Tecnologías de Telecomunicación

Escuela Politécnica Superior
Universidad de Alcalá

TEMA 3

EJERCICIOS :

(3) Códigos de repetición $\rightarrow n$

$$\begin{matrix} 0 & (0 \ldots 0) \\ 1 & (\underbrace{1 \ldots 1}_{n}) \\ k=1 & \\ (n,1) & GF(2)^n \end{matrix}$$

n = 3

$$\bar{\bar{G}}_{k \times n} = (\underbrace{1}_{I_1} \vdots \underbrace{1\,1}_{\bar{\bar{P}}})$$ $\bar{\bar{P}} \downarrow$ paridad

$$\underset{(n-k)\times n}{\bar{\bar{H}}} = \left(\begin{array}{c:cc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$ ($\bar{\bar{P}}$, $\bar{\bar{I}} \rightarrow$ matriz identidad)

$d_{min} = 3 \rightarrow d = d_{min} - 1 = 2$

$t = \left[\frac{d_{min}-1}{2}\right] = 1$

n = 5

$$\bar{\bar{G}} = (\underbrace{1}_{I_1} \vdots \underbrace{1\,1\,1\,1}_{\bar{\bar{P}}})$$

$$\bar{\bar{H}} = \left(\begin{array}{c:cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$d_{min} = 5$

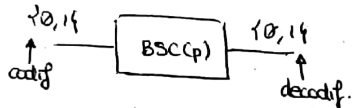
cada línea es una ecuación de comprobación de paridad

d_{min} = nº mínimo de columnas que sumadas = 0 $= n$ (en un código de repetición)

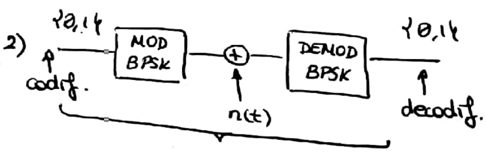
$R = \frac{1}{n} \rightarrow n \uparrow$ se desaprovechan recursos $\eta \downarrow$

errores que detecto $\rightarrow d = 4$

que puedo corregir $\rightarrow t = 2$

1) 

$p = 0'05$

2) 

SNR = 10dB

$$p' = P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_b}}\right) = 8 \cdot 10^{-4}$$

$$\left[\frac{E_b}{N_b} = \frac{E_s}{N_b} \; (M=2) = \frac{SNR}{2} \right]$$ en el espacio de señales

$$\left[\underset{M=2}{\frac{E_b}{N_b} =} \boxed{\frac{E_s}{N_b} = \frac{SNR}{2}} \right]$$

$P(\varepsilon) \rightarrow$ cota de probabilidad de corrección errónea

$$\hat{\bar{c}} \neq \bar{c} \longrightarrow \hat{\bar{b}} \; \bar{b} \Rightarrow P_b'$$

cada error en la decodificación = error de 1 bit

"1" $\rightarrow$ (111) $\dashrightarrow$ (001) $\rightarrow$ "0"
codif — decod — 1 bit

código repetición

$$P_b' = \sum \binom{n}{i} p^i (n-p)^{n-i}$$

P_b'	n = 3	n = 5
BSC(p)	$7'3 \cdot 10^{-3}$	$1'2 \cdot 10^{-3}$
BSC(p')	$1'8 \cdot 10^{-6}$	$4'8 \cdot 10^{-9}$

se cumple

$P_b' < P_b$ ⟨ p, p'

$\downarrow$

FUNCIONA !!

$\longrightarrow$ Códigos Capacity Achieving :

puedo bajar el error tanto como quiera con n.

PERO $R = \frac{1}{n}$

$$R_b' = R_b \cdot R = R_b \cdot \frac{1}{n}$$

④ Código de paridad simple

$GF(2)^n \supseteq C(n,k)$

$\bar{c} = (c_1, \dots c_n)$

$\omega(\bar{c}) \longrightarrow$ numero par

$2^k \rightarrow \underbrace{2^{n-1}}_{\text{nº palabras del código}}$

a) $k = n-1$

$\boxed{c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0} \longrightarrow$ par

solo necesito una ecuación

$\downarrow$

$\underset{(n-k)\times n}{\bar{\bar{H}}} \longrightarrow n-k=1$

$\boxed{n-1=k}$

b) Matriz $\bar{\bar{H}}$:

$\bar{\bar{H}} = (\overbrace{\underbrace{1\,1 \dots}_{\bar{\bar{P}}}\,\underbrace{1}_{\bar{\bar{I}}_1}}^{n})$

coeficientes ecuación: $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0$

$$\underset{\substack{k\times n \\ \downarrow \\ (n-1)\times n}}{\bar{\bar{G}}} = \left(\begin{array}{c|c} \bar{\bar{I}}_{n-1} & \bar{\bar{P}}^T \\ 1\,0\,0 \dots 0 & 1 \\ 0\,1\,0 \dots 0 & 1 \\ 0\,0\,1 \dots 0 & \vdots \\ 0\,0\,0 \dots 1 & 1 \end{array} \right)$$

c) $d_{min} = 2 \longrightarrow d = 1 \longrightarrow$ detecto errores de peso 1 $\longrightarrow$ todos los patrones de error de peso impar !!

$\downarrow$ matriz $\bar{\bar{H}}$ $\qquad t = 0 \longrightarrow$ no puedo corregir nada

$\hookrightarrow 2^{n-1}$

detecta la mitad de los errores que pueden ocurrir !!!

Se emplea mucho en buses digitales, solo implica añadir un bit de paridad

Tasa: $R = \frac{n-1}{n} = \frac{k}{n} \longrightarrow n\uparrow : R \rightarrow 1$: consume pocos recursos!

⑤ $k = 9$, $b = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8\ b_9)$

$\bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{\bar{G}}$

Subdivisión:

$\rightarrow b_1\, b_2\, b_3 + c$

$\rightarrow b_4\, b_5\, b_6 + c$

$\rightarrow b_7\, b_8\, b_9 + c$

$\quad \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$ (+c +c +c)

bit paridad por filas y columnas

bit paridad

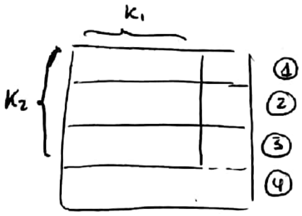
$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \end{pmatrix} = \bar{c} \text{ (vector codificado)}$$

a) $n = 16 \longrightarrow n-k = 7$

$k = k_1 \cdot k_2$

$n = (k_1+1)(k_2+1)$

Código producto



b) $(n-k) \times n \longrightarrow 7\times 16$

Ecuaciones comprueba paridad:

$$\underset{7\times 16}{\bar{\bar{H}}} = \begin{pmatrix} 1111 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 0000 & 1111 & 0000 & 0000 \\ 0000 & 0000 & 1111 & 0000 \\ 0000 & 0000 & 0000 & 1111 \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1000 \\ 0100 & 0100 & 0100 & 0100 \\ 0010 & 0010 & 0010 & 0010 \\ \cancel{0001} & \cancel{0001} & \cancel{0001} & \cancel{0001} \end{pmatrix}$$

(c_1 … c_{16})

$\rightarrow$ primera fila ①

$\rightarrow$ ②

$\rightarrow$ ③

$\rightarrow$ ④

$\rightarrow$ primera columna

$\rightarrow$ ecuación de más (linealmente dependiente)

$\downarrow$

suma de todas las filas

c)

$d_{min} = 4 \longrightarrow d_{min} = 2\times 2$ = dmin paridad simple y par

$\hookrightarrow = 1$ (~~col~~ = 0)

$= 2$ (columnas iguales)

$d = 3$

$t = 1 \longrightarrow$ corregimos!!

columna = $col1 + col2 + col5 + col6 = 0$

⑥ Códigos de Hamming

$n - k = m$

$n = 2^m - 1$

$k = 2^m - m - 1$

a) $m = 3 \longrightarrow n = 7$, $k = 4$

$$\underset{\substack{(n-k)\times n \\ m\times 2^m-1 \,=\, 3\times 7}}{\bar{\bar{H}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Código Hamming (7, 4)

$m = 3$, distinta de 000

se pueden ordenar como quiera.

b) Propiedades del código

$d_{min} = 3 \longrightarrow d = 2 \rightarrow$ detecta

$t = 1 \rightarrow$ corrige

Construcción muy sencilla

c) Independientemente de m: $\boxed{d_{min} = 3}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{matrix}$$

d) Tasa:

$$R = \frac{k}{n} = \frac{2^m - m - 1}{2^m - 1}$$

$m \to \infty \longrightarrow \boxed{R = 1} \longrightarrow$ (aplicar l'Hopital) $\longrightarrow \lim_{m\to\infty} \frac{2^m}{2^m} = 1$

$\longrightarrow$ mejor que el código de repetición

$\downarrow$

Aun así sus propiedades detectoras y correctoras no varían.

[PRÁCTICA 3.1]

demodulación dura y blanda $\rightarrow$ igual tasa de error si no se tiene en cuenta LLR, codificación del canal...

Teniendo en cuenta el LLR se gana dos órdenes de magnitud. Coste = recursos

7

$m = 3 = n-k$ $\qquad$ $(7,4)$

$n = 2^n - 1 = 7$

$k = 2^m - m - 1 = 4$

$C(n,k) < GF(2)^n$

$$\bar{\bar{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

↓

ecuaciones

$\bar{c} \cdot \bar{\bar{H}}^T = 0$

$d_{min} = 3$

$t = 1$ $\qquad$ $d = 2$

a)

$$\bar{\bar{H}}_{exp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Fila '1's : ecuación de paridad par}$$

mantiene algunas características => $n = 7$ (misma longitud)
pero ahora $k = 3$ $\Big\}$ $(7,3)$

El anterior tenía cardinalidad $2^k = 2^4 = 16$ palabras
Este tiene ahora $2^k = 2^3 = 8$ palabras $\longrightarrow$ En el anterior hay 8 palabras de peso par y 8 de peso impar.

Código expurgado: es el código anterior pero solo aquellas palabras que cumplen la condición de paridad par o peso par.

8 palabras par $\qquad$ 8 palabras impar $\longrightarrow \bar{\bar{H}}$

↓

$\bar{\bar{H}}_{exp}$

$d_{min} = 4$ (tiene que ser par!) $\longrightarrow$ $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$

$d = 3$ $\qquad$ $t = 1$ $\longrightarrow$ se mejora el código (hemos añadido condiciones)

b)

$$\bar{\bar{H}}_{ext} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{n=8} \Big\} \; n-k = 4$$

$K = 4$

$\#C(8,4) = 2^4 = 16 \longrightarrow$ mismas palabras

ampliadas

$c_1, c_2 \dots c_8$
↓
bit de paridad par

$c_8 = 0 \longrightarrow$ peso par
$c_8 = 1 \longrightarrow$ peso impar

$d_{min} = 4 \longrightarrow$ igual que antes
($d_{min} = 3$ + 1) ↳ condición
vectores de peso tres

También se mejora como el expurgado.

c) BSC, $p = 0.01$

Probabilidad de error no detectado: $P_u(E) = \sum_{i=d_{min}}^{n} A_i p^i (1-p)^{n-i}$

A_i => nº de palabras de peso i

$\bar{r} = \bar{c} + \bar{e} \longrightarrow \bar{s} = \bar{r} \cdot \bar{\bar{H}}^T = \bar{e} \cdot \bar{\bar{H}}^T$

⑨ a) Filas son linealmente independientes → definen código

Es un CRC

$\bar{\bar{G}} \to C(n,K) < GF(2)^n$

$\bar{\bar{G}} = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \bar{g}_1 \\ \to \bar{g}_2 \\ \to \bar{g}_3 \\ \to \bar{g}_4 \end{matrix}$ } FILA = vector generador

$\bar{b} \cdot \bar{\bar{G}} = \bar{c} \quad \bar{c} \cdot b \cdot g_i \longrightarrow \bar{c} = b_1 \bar{g}_1 + b_2 \bar{g}_2 + b_3 \bar{g}_3 + b_4 \cdot \bar{g}_4$

$(c_1 \dots c_7) \in C(n,K)$

$\downarrow$

$(c_i - c_7, c_1 \dots c_{i-1}) \in C(n,K)$

Los vectores generadores son rotaciones cíclicas unos de otros ⟶ se cumple.

b) Hay que diagonalizar para obtener la I:

$$\bar{G} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\underbrace{\qquad}_{\text{casi } I}$

① $g_3 + g_1 \longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

② $g_4 + g_1 \to$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 0 & 1 & \cancel{0} & 1 \end{array}\right)$$

③ $g_4' = g_4' + \bar{g}_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

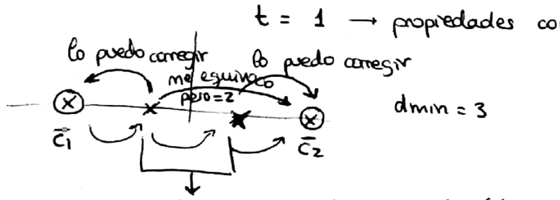
$\underbrace{\qquad}_{\bar{\bar{P}}} \quad \underbrace{\qquad}_{\bar{\bar{I}}_4}$

→ sistemática! $\underline{\underline{OK}}$ $\bar{\bar{G}}_S$ ⟶ $\bar{\bar{H}}_S = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ → curioso: Hamming $n=3$!! $(7,4)$ es un CRC

$\bar{\bar{I}}_3 \qquad \bar{\bar{P}}^T$

c) $d_{min} = 3 \longrightarrow d = 2 \to$ propiedades detectoras

$t = 1 \to$ propiedades correctoras



$d_{min} = 3$

$d = 2 \to$ no pertenecen al código

Hamming Canónico

$A_0 = A_7 = 1$

$d_{mín}=3 \rightarrow A_1 = A_2 = 0 \; (\cancel{7})$

$A_5 = A_6 = 0$

$\underbrace{A_3 = A_4 = 7}$

TOTAL $7 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 16$

16 palabras (OK!)

$\longrightarrow$

Hamming Exp.

$A_0 = 1$

$\begin{cases} A_1 = A_2 = 0 \\ A_5 = A_6 = 0 \end{cases}$

$d_{mín}=4 \rightarrow A_3 = 0 \; (\cancel{7})$

$A_4 = 7$

$\underbrace{A_7 = 0}$

TOTAL = 8

Hamming Ext.

$A_0 = 1$

$A_1 = A_2 = 0$

$A_3 = 0$ (se ha añadido '1')

$A_4 = 14$

$A_5 = A_6 = A_7 = 0 \rightarrow$ peso impar no hay A_6 habría si hubiera A_5

$\underbrace{A_8 = 1 \text{ (todo '1')}}$

TOTAL = 16

NOTA: el elemento nulo siempre está

$P_u(E) \simeq 6'79 \cdot 10^{-6}$

$R = \frac{4}{7} > \frac{1}{2}$

$P_u(E) \simeq 6'79 \cdot 10^{-8}$

$R = \frac{3}{7} < 1/2$

(he sacrificado la tasa)

$P_u(E) \simeq 1'34 \cdot 10^{-7}$

$R = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(he sacrificado la tasa)

P(E) también se mejora => prob. corrección errónea

Códigos Convolucionales

15

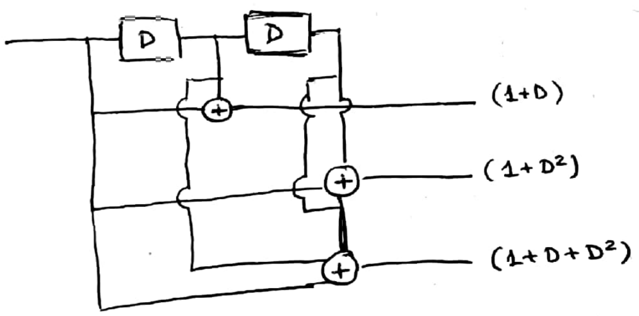
Código $(3, 1, 2)$ — n, k, r $\rightarrow 2^r = 4$ estados

$g_1^{(1)} = (110) \longrightarrow$ vector generador entrada 1 salida 1

$g_1^{(2)} = (101)$

$g_1^{(3)} = (111)$

a)



D = retardo

b) Matriz generadora:

$$\bar{\bar{G}}(D) = \left(1+D \quad 1+D^2 \quad 1+D+D^2\right)$$

$k \times n$

(1×3)

c) $\boxed{c.1}$ $\bar{b} = (11101)$ $\quad \bar{b} \cdot \bar{\bar{G}} = \bar{c}$

$$\bar{\bar{G}} = \begin{array}{c} g_{10}\,g_{21}\,g_{31} \;\; g_{12}\,g_{22}\,g_{32} \;\; g_{13}\,g_{23}\,g_{33} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 111 & 101 & 011 & & & & \\ & 111 & 101 & 011 & & & \\ & & 111 & 101 & 011 & & \\ & & & 111 & 101 & 011 & \\ & & & & 111 & 101 & 011 \end{array}\right] \end{array}$$

$b_1=1$ | $b_1=1$, $b_2=1$ | $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=1$ | ~~$b_1=1$~~, $b_2=1$, $b_3=1$, $b_4=0$ | ~~$b_1=1$~~, ~~$b_2=1$~~, $b_3=1$, $b_4=0$, $b_5=1$ | ~~$b_1=1$~~, ~~$b_2=1$~~, ~~$b_3=1$~~, $b_4=0$, $b_5=1$ | ~~$b_1=1$~~, ~~$b_2=1$~~, $b_3=1$, ~~$b_4=0$~~, $b_5=1$ $\longrightarrow$ ya han salido todos los bits

$\bar{c} = (\underbrace{111 \;\; 010 \;\; 001 \;\; 110 \;\; 100}_{5 \text{ bits } (\bar{b})} \;\vdots\; \underline{101 \;\; 011})$

transiciones extra: se considera que se introducen '0' $\{\; \bar{b} + (00)$

no entran nuevos bits

no tiene por qué enviarse

trellis termination $\longrightarrow$ se lleva al estado 0

c.2

$\bar{b} \rightarrow \bar{b}(D) = \left(\sum b_i \cdot D^i\right) = (1 + D + D^2 + D^4)$

$1 \times K$
(1×1)

$\left[\bar{b} = (1\;1\;1\;0\;1) \atop \;\;1\;D\;D^2\;\;D^4\right]$

$\underset{1\times1}{\bar{b}(D)} \cdot \underset{1\times3}{\bar{\bar{G}}(D)} = \underset{1\times3}{\bar{C}(D)}$

$(1 + D + D^2 + D^4) \cdot (1 + D) = (1 + \cancel{D} + \cancel{D^2} + D^4 + \cancel{D} + \cancel{D^2} + D^3 + D^5) = 1 + D^3 + D^4 + D^5$

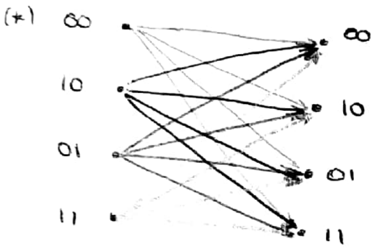
$1 + 1 = 0$

$\bar{b}(D) = (\underbrace{1 + D^3 + D^4 + D^5}_{\text{primera salida}} \quad \underbrace{1 + D + D^3 + D^6}_{\text{segunda salida}} \quad \underbrace{1 + D^2 + D^5 + D^6}_{\text{tercera salida}}) \longrightarrow (\underset{1}{111}\;\; \underset{D}{010}\;\; \underset{D^2}{001}\;\; \underset{D^3}{100}\;\; \underset{D^4}{100}\,|\,\underset{D^5}{101}\;\; \underset{D^6}{011})$

[mismo resultado de antes!!!]

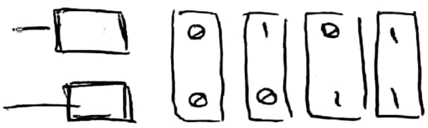
16 $(3,2,2) \longrightarrow 2^r = 4$ posibles estados

TRELLIS



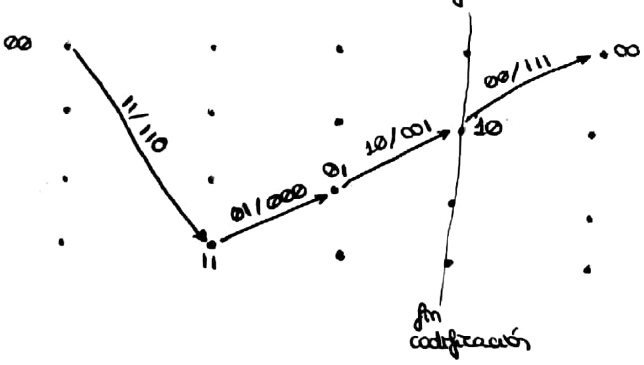
conectividad alta (máxima)

(*) Estado



Estado Inicial	Estado final	Bits entrada	Bits salida
00	00	00	000
	10	10	100
	01	01	011
	11	11	100
10	00	00	111
	10	10	010
	01	01	100
	11	11	001
01	00	00	100
	10	10	001
	01	01	111
	11	11	010
11	00	00	011
	10	10	110
	01	01	000
	10	11	101

$\bar{b} = (11 \quad 01 \quad 10) \longrightarrow$ codificación



$\bar{c} = (110 \quad 000 \quad 001\,|\,111)$

trellis termination

(17) a) ~~en todas las salidas deberían estar los bits iniciales sistemáticos~~

sistemático: porque todos los bits de entrada aparecen sin codificación en la secuencia de salida.

recursivo : tiene lazo de realimentación

b) $(n, k, \nu) \longrightarrow$ $n = 3$ (salidas)
$k = 1$ (entradas)
$\nu = 2$ (estados)
nº pos memoria

c)

$$g_1^{(1)}(D) = 1$$
$$g_1^{(2)}(D) = 1 + D^2$$
$$g_1^{(3)}(D) = 1 + D$$

no se tiene en cuenta realimentación

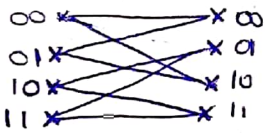
$$g_1^{(0)}(D) = 1 + D + D^2$$

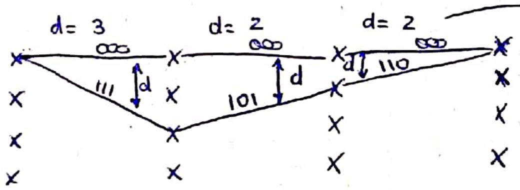
realimentación

$$\overline{\overline{G}}_{k\times n}(D) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} & \frac{1+D}{1+D+D^2} \end{pmatrix}$$

d)

Estado inicial	Entrada	Salida	Estado Final
00	0	000	00
00	1	111	10
01	0	001	10
01	1	110	00
10	0	010	11
10	1	101	01
11	0	011	01
11	1	100	11





suma bucle

$d_{min} = 7$

(18) Parámetros : $n = 1$, $k = 2$, $\nu = 3$ (8 estados) } CC (2, 1, 3)

$$g_1^{(1)}(D) = g_{1,0}^{(1)} + g_{1,1}^{(1)} \cdot D + g_{1,2}^{(1)} D^2 + g_{1,3}^{(1)} \cdot D^3$$

$\longrightarrow$ se supone no realimentación

$$g_1^{(2)}(D) = g_{1,0}^{(2)} + g_{1,1}^{(2)} \cdot D + g_{1,2}^{(2)} \cdot D^2 + g_{1,3}^{(2)} \cdot D^3$$

$$g_1^{(0)}(D) = 1$$

los vectores generadores serán respuestas al impulso (no hay realimentación)

10 — 0 — 0

contenido inicial memoria = $\overline{0} \rightarrow S_0$

$$S_0 \xrightarrow[1/11]{} S_1 \xrightarrow[0/01]{} S_2 \xrightarrow[0/11]{} S_4 \xrightarrow[0/11]{} \Big| \; S_0 \xrightarrow[0/00]{} S_0 \dots$$

$g_{1,0}^{(1)} \quad g_{1,0}^{(2)} \quad g_{1,1}^{(1)} \quad g_{1,1}^{(2)} \quad g_{1,2}^{(1)} \quad g_{1,2}^{(2)} \quad g_{1,3}^{(1)} \quad g_{1,3}^{(2)}$

respuesta finita al impulso $\longrightarrow$ NO HAY REALIMENTACIÓN

$$\left.\begin{aligned} g_1^{(1)}(D) &= 1 + D^2 + D^3 \\ g_1^{(2)}(D) &= 1 + D + D^2 + D^3 \end{aligned}\right\} \left[\bar{\bar{G}}(D) = \left(1+D^2+D^3 \quad 1+D+D^2+D^3 \right) \right]$$

Si tuviéramos una respuesta infinita al impulso es más complejo $\left(\frac{1+D}{1+D+D^2}\right) = \dots$ (∞ términos)

$\hookrightarrow$ habría que encontrar un bucle : entrada 1XXX1

---

(25) $R = \frac{1}{3} = \frac{k}{n}$

DONATO RODRÍGUEZ

$\bar{b}_1, \bar{b}_2$: vector binario de N bits

a_1, a_2 : escalares binarios

$\bar{c}^{(1)}$: si $a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 = \bar{b}$

$\bar{c}^{(2)}$: $cod_1 (a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2) \Big|_{cc\ lineal} = a_1\, cod_1(\bar{b}_1) + a_2\, cod_1(\bar{b}_2)$

$\bar{c}^{(3)}$: $c^{(3)} = cod_2 (\underbrace{\pi(\bar{b})}_{d}) = cod_2 (\pi(a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2)) = cod_2 (a_1 \pi(\bar{b}_1) + a_2 \pi(\bar{b}_2)) =$

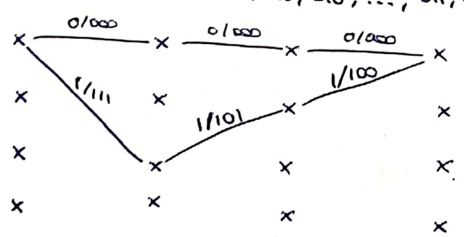
$= cod_2 (a_1 \bar{d}_1 + a_2 \bar{d}_2) \Big|_{cod_2 = cc \rightarrow lineal} = a_1\, cod_2(\bar{d}_1) + a_2\, cod_2(\bar{d}_2) =$

La salida es $\vec{0}$ si la entrada es $\vec{0}$: $\bar{c} = \vec{0}$ si $\bar{b} = \vec{0}$

(26) $\Pi_{16} = [1, 9, 16, 10, \dots, 11, 3]$

$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{16})$

$\bar{d} = \Pi_{16}(\bar{b}) = [b_1, b_9, b_{16}, b_{10}, \dots, b_{11}, b_3]$



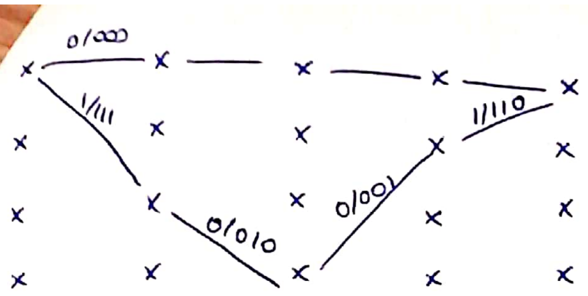
$\bar{e} = (111)$

$L = 3$ (longitud mín bucle de error)

$\downarrow$

Se debe evitar que la permutación sea igual

$\underbrace{b_i, b_{i+1}, b_{i+2}}_{n^o = L} \not\rightarrow d_j, d_{j+1}, d_{j+2}$



$L = 4$

$\bar{e} = (1\,0\,0\,1)$

$b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, b_{i+3} \not\rightarrow d_j, d_{j+1}, d_{j+2}, d_{j+3}$

al permutar no deben seguir siendo ordenados.

(29)

a) $n = 3$, $k = 1$, $\nu = 3$ $\Big\{$ $(3,1,3)$

$R = k/n = 1/3$

Sistematicidad: la entrada se da en alguna salida — si

Recursividad: realimentación — si

matriz $G(D)$:

$$\underset{k\times n}{G(D)} = \left(1 \quad \frac{1+D+D^3}{1+D^2+D^3} \quad \frac{1+D+D^2+D^3}{1+D^2+D^3}\right)$$

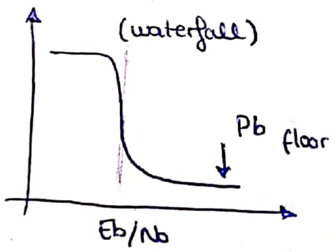
b) X, Y_0, Y_1, Y_0', Y_1'

$$R_{turbo} = \frac{\text{bits entrada}}{\text{c salida}} = \frac{1}{5}$$

c) $N_{turbo} = 762$ bits

$N_{turbo} = 12\,282$ bits

error floor $\rightarrow$ cual es el más conveniente?



$$Pb_{floor} \geq \frac{W_{min} N_{min}}{N}\, \mathrm{erfc}\left(\sqrt{d_{min} R \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$N\uparrow\uparrow \rightarrow Pb_{floor} \downarrow\downarrow$ (error floor $\downarrow$)

mejor $N_{turbo} = 12\,282$, pero más retardo y cálculo.

d) Desde el punto de vista del retardo sería preferible el menor, $N = 762$.

(31) **Propiedades:**

LDPC: el nº de '1's en filas y columnas da su densidad → baja densidad (nº '1's ↓↓)
cada dos columnas solo un '1' en común

dimensiones 10x5 $(J \times n)$

$\bar{\bar{H}}$: # 1's en J filas, $\rho = 2$
1's en n colum., $\gamma = 4$ } densidad $r = \frac{\rho}{n} = \frac{\gamma}{J} = \frac{2}{5}$

¿λ? $\lambda = 1$ (un '1' en común cada pareja de columnas)

¿ rango? linealmente independientes → rango filas = 4 (resto se pueden expresar como combinación lineal de otras)

rango colum = 4 → sumando las 5 columnas obtenemos el vector $\vec{0}$

dmin = 5

Palabras de espacio nulo:

$$\bar{\bar{H}}_{LBC} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$(n-k) \times n$

LBC equivalente (se comporta como ese)
↳ $n = 5$
$k = 1$
$(n-k) = 4$

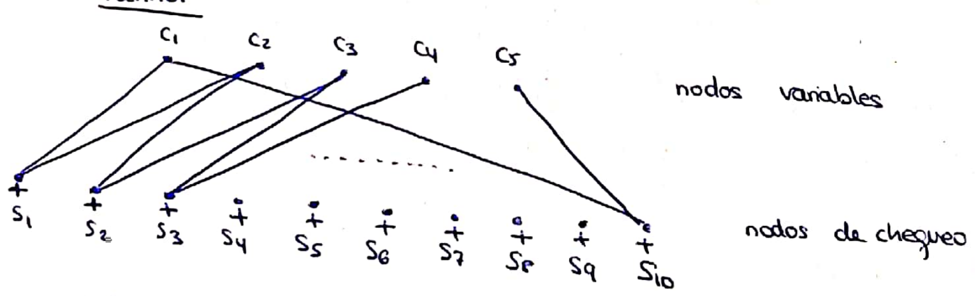
$\bar{c}_0 = (00000)$
$\bar{c}_1 = (11111)$
dmin = 5
} código de repetición (5,1)

Ventajas: ...

(34) $\bar{s} = \bar{c} \cdot \bar{\bar{H}}^T$ → $s_1 = c_1 + c_2$
$(1 \times J)\ (1 \times n)(n \times J)$
$s_2 = c_2 + c_3$
$s_3 = c_3 + c_4$
⋮
$s_{10} = c_1 + c_5$

$\bar{c} = (c_1 \dots c_5)$
$\bar{s} = (s_1 \dots \dots s_{10})$

Tanner



decodificación iterativa, algoritmo de paso de mensajes.

Q10 matriz dada es $\bar{\bar{H}}^T$

1) a) parámetros n y k

dimensiones $[\bar{\bar{H}}]$: $J \times n$, con $J \geq n-k$ ⟶ $\boxed{n=20}$

La suma de pesos = nº palabras = $\sum A_i = 32 = 2^5 = 2^k$ ⟶ $\boxed{k=5}$

b) Cumple las características?

1. Nº '1's en filas y columnas es bajo :
2.

'1's en filas : $\rho = 4$
'1's en columnas : $\gamma = 3$

$r = \frac{\rho}{n} = \frac{\gamma}{J} =$

$r = \frac{4}{20} = \frac{3}{15}$

$\boxed{r = 5^{-1} = 0'2}$

3. '1's en común : máximo un '1' en común ⟶ $\lambda = 1$

Cumple las condiciones.

c) Distancia mínima del código

$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \emptyset$, $\underline{A_5 = 1}$ ⟶ $\boxed{d_{min} = 5}$

d) palabra código?

$\bar{c} = (111111\,0 \ldots\ldots 0)$ ⟶ $\bar{s} = \bar{c} \cdot \bar{\bar{H}}^T \neq \bar{\emptyset}$ ⟶ no pertenece al código

e) Pe no detectado, $p = 0'05$

$P_u(\bar{E}) = \sum_{i=d_{min}}^{n} A_i \cdot p^i (1-p)^{n-i} = 1'605 \cdot 10^{-7}$, despreciando términos aprox $= 1'604 \cdot 10^{-7}$
$(A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13})$

Muy buena aproximación

f) 5 ecuaciones que cumplan las palabras códigos: $\bar{S} = \bar{c} \cdot \bar{\bar{H}}^T = \vec{\emptyset}$

$c_1 + c_{12} + c_{14} + c_{20} = \emptyset$

$c_1 + c_2 + c_{13} + c_{15} = \emptyset$

$c_2 + c_3 + c_8 + c_{16} = \emptyset$

$c_1 + c_8 + c_{17} + c_{18} = \emptyset$

$c_2 + c_9 + c_{19} + c_{20} = \emptyset$

$\bar{c} = (c_1 \ldots c_{20})$