Transformación de campo cercano a campo lejano en modos esféricos.

José Luis Álvarez Pérez

1 El desarrollo modal del campo en componentes de simetría esférica

El campo electromagnético se puede describir de múltiples maneras, en concreto las basadas en los campos $\vec{E}$ o $\vec{B}$ o en los potenciales vectoriales, ya sea el potencial vector $\vec{A}$ o los llamados potenciales de Hertz $\vec{\Pi}_e$ y $\vec{\Pi}_m$, pero en todas ellas es una descripción vectorial mediante una ecuación diferencial del tipo

$$\nabla^2\vec{C} - \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{C}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

donde $\vec{C}$ es uno cualquiera de esos vectores. Esta ecuación es lineal en el tiempo ya que los dos operadores diferenciales en el tiempo lo son[1], de modo que la solución completa en el tiempo se puede poner como una integral de Fourier y basta con estudiar cada componente armónica por separado

$$\tilde{\vec{C}}(\vec{r},t) = \vec{C}(\vec{r})\, e^{j\omega t}. \tag{2}$$

Se puede abordar la solución general de la ecuación (1) como una combinación lineal de tres funciones vectoriales, denominadas $\vec{L}$, $\vec{M}$ y $\vec{N}$, que se pueden expresar como (Stratton, pp.392-95)

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \nabla\psi\\ \vec{M} &= \nabla\times\hat{a}\psi\\ \vec{N} &= \frac{1}{k}\nabla\times\vec{M}\end{aligned} \tag{3}$$

con la función $\psi = \psi(\vec{r})$

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi+k^2\psi &= 0\\ k^2 &= \varepsilon\mu\,\omega^2 + i\sigma\mu\omega\end{aligned} \tag{4}$$

Las tres funciones vectoriales $\vec{L}$, $\vec{M}$ y $\vec{N}$ son soluciones particulares de (1) para cualquier vector $\hat{a}$ de longitud constante. En concreto, $\vec{M}$ y $\vec{N}$ son dos soluciones solenoidales (es decir, $\nabla\cdot\vec{M} = \nabla\cdot\vec{N} = 0$), mientras que $\vec{L}$ es irrotacional ($\nabla\times\vec{L} = 0$). Fuera de las fuentes, la solución del campo eléctrico es solenoidal y, por tanto, se puede poner como combinación de $\vec{M}$ y $\vec{N}$ únicamente. Dado que la solución más general de la ecuación (4) se puede poner como la suma infinita de componentes en una cierta base funcional $\psi = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_{n_1 n_2 \ldots}$, las funciones vectoriales $\vec{M}$ y $\vec{N}$ se pueden descomponer en una base que se puede ver que es ortonormal en una cierta métrica (Morse and Feshbach).

En particular, en un sistema de representación esférico, dichas bases funcionales vienen dadas por (Tsang

[1] Se verifica tanto que $\frac{\partial}{\partial t}\left(f(t)+g(t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}f(t) + \frac{\partial}{\partial t}g(t)$ como que $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(f(t)+g(t)\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t) + \frac{\partial^2}{\partial^2 t}g(t)$

and Kong, vol. I, pp. 24-30), por

$$\begin{aligned}
\psi_{mn}(r,\theta,\phi) &= h_n^1(r)\,P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\phi}\\
\vec{P}_{mn}(\theta,\phi) &= \vec{V}_{mn}^{(1)}(\theta,\phi) = \hat{r}\,P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\phi}\\
\vec{B}_{mn}(\theta,\phi) &= \vec{V}_{mn}^{(2)}(\theta,\phi) = \left[\hat{\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m(\cos\theta) + \hat{\phi}\,\frac{im}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\right]e^{im\phi}\\
\vec{C}_{mn}(\theta,\phi) &= \vec{V}_{mn}^{(3)}(\theta,\phi) = \left[\hat{\theta}\,\frac{im}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta) - \hat{\phi}\,\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m(\cos\theta)\right]e^{im\phi}\\
\vec{M}_{mn} &= \gamma_{mn}\,h_n(kr)\,\vec{C}_{mn}(\theta,\phi)\\
\vec{N}_{mn} &= \gamma_{mn}\left[\frac{n(n+1)\,h_n(kr)}{kr}\vec{P}_{mn}(\theta,\phi) + \frac{[krh_n(kr)]'}{kr}\vec{B}_{mn}(\theta,\phi)\right]
\end{aligned} \tag{5}$$

con

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi n(n+1)(n+m)!}} \tag{6}$$

y con $h_n(kr)$ la función esférica de Hankel de primer orden y $P_n^m(\cos\theta)$ la función asociada de Legendre.

La notación de $\vec{V}_{mn}^{(1)}$, $\vec{V}_{mn}^{(2)}$ y $\vec{V}_{mn}^{(3)}$ para $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{M}$, respectivamente, permite expresar las relaciones de ortogonalidad de manera más compacta:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi\,\vec{V}_{mn}^{(\alpha)}\cdot\vec{V}_{-m'n'}^{(\beta)} &= \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{mm'}\,\delta_{nn'}\,z_{\alpha mn}\\
z_{1mn} &= (-1)^m\frac{4\pi}{2n+}\\
z_{2mn} = z_{3mn} &= (-1)^m\frac{4\pi n(n+1)}{2n+1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

La derivación implicada en $[k\,r\,h_n(k\,r)]'$, donde $h_n(x) = j_n(x) + j\,y_1(x)$ es la función esférica de Hankel de primera clase, corresponde a la siguiente derivada:

$$[k\,r\,h_n(k\,r)]' = \frac{d}{dx}\Big(x\,h_n(x)\Big)|_{x=k\,r} = (1+n)\,h_1(n,k\,r) - k\,r\,h_1(1+n,k\,r). \tag{8}$$

Todas estas funciones permiten expresar el campo radiado como

$$\vec{E}(r,\theta,\phi) = E_0\,e^{j\,\omega t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\Big(a_{mn}\,\vec{M}_{mn} + b_{mn}\,\vec{N}_{mn}\Big) \tag{9}$$

Los coeficientes a_{mn} y b_{mn} se pueden determinar analíticamente si se conoce la expresión de $\vec{E}(r,\theta,\phi)$ en (9). Para ello podemos hacer uso de la ortogonalidad expresada en (7). En efecto, si $\vec{E}(r = r_0,\theta,\phi) = \vec{E}^{\text{known}}(\theta,\phi)$, podemos integrar este campo con los componentes de la base funcional para obtener la descomposición modal:

$$\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi\,\vec{E}^{\text{known}}(\theta,\phi)\vec{P}_{-mn}(\theta,\phi) = (-1)^m\,4\pi\,b_{mn}\,\gamma_{mn}\frac{h_n(k\,r)}{k\,r}\,E_0 \tag{10a}$$

$$\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi\,\vec{E}^{\text{known}}(\theta,\phi)\vec{B}_{-mn}(\theta,\phi) = (-1)^m\,4\pi\,b_{mn}\,\gamma_{mn}\frac{[k\,r\,h_n(k\,r)]'}{k\,r}\,E_0 \tag{10b}$$

$$\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi\,\vec{E}^{\text{known}}(\theta,\phi)\vec{C}_{-mn}(\theta,\phi) = (-1)^m\,4\pi\,a_{mn}\,\gamma_{mn}h_n(k\,r) \tag{10c}$$

The right side of the equations (10) can be computed either analytically or numerically to produce expressions or numbers that we can define as

$$d_{mn} \triangleq \int_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \vec{E}^{\text{known}}(\theta,\phi)\vec{P}_{-mn}(\theta,\phi) \tag{11a}$$

$$e_{mn} \triangleq \int_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \vec{E}^{\text{known}}(\theta,\phi)\vec{B}_{-mn}(\theta,\phi) \tag{11b}$$

$$g_{mn} \triangleq \int_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \vec{E}^{\text{known}}(\theta,\phi)\vec{C}_{-mn}(\theta,\phi) \tag{11c}$$

De las ecuaciones (11a) y (11b) vemos que hay dos maneras de obtener los coeficientes b_{mn}, dependiendo de si tomamos d_{mn} o e_{mn} como valores conocidos. Ambas maneras deberían dar lugar a los mismos valores de b_{mn}. No obstante, en el caso de (11a) dependemos del campo en su componente radial, ya que se basa en la proyección de la función sobre las componentes radiales $\vec{P}_{mn}(\theta,\phi)$. Estas componentes serán en general más pequeñas que las transversales a la dirección de propagación. Enseguida vamos a dar un paso que tendrá consecuencia sobre esto, además de ser una utilidad en sí misma: vamos a aproximar los valores de d_{mn}, e_{mn} y g_{mn} mediante el uso de medidas en lugar de mediante el uso de un conocimiento *a priori*, que no tenemos en la práctica, de la "fórmula" que define el campo. Dicho de otra manera, esta formulación nos permite suponer que, con un conjunto finito de medidas $\vec{E}^{\text{known}}(\theta_s,\phi_t)$ para $s = 1,\ldots,N$ y $t = 1,\ldots,M$, podemos poner

$$d_{mn} \triangleq \Delta\theta \, \Delta\phi \sum_{s,t=1}^{M,N} \sin\theta \, \vec{E}^{\text{known}}(\theta_s,\phi_t)\vec{P}_{-mn}(\theta_s,\phi_t) \tag{12a}$$

$$e_{mn} \triangleq \Delta\theta \, \Delta\phi \sum_{s,t=1}^{M,N} \sin\theta \, \vec{E}^{\text{known}}(\theta_s,\phi_t)\vec{B}_{-mn}(\theta_s,\phi_t) \tag{12b}$$

$$g_{mn} \triangleq \Delta\theta \, \Delta\phi \sum_{s,t=1}^{M,N} \sin\theta \, \vec{E}^{\text{known}}(\theta_s,\phi_t)\vec{C}_{-mn}(\theta_s,\phi_t) \tag{12c}$$

Despejando los coeficientes en los que estamos interesados, es decir, a_{mn} y b_{mn}, obtenemos

$$\tilde{a}_{mn} = \frac{(-1)^m \, g_{mn}}{h_n(k\,r)} \, \Delta\theta \, \Delta\phi \sqrt{\frac{n(n+1)(n+m)!}{4\pi(2n+1)(n-m)!}} \tag{13a}$$

$$\tilde{b}_{mn} = \frac{(-1)^m \, d_{mn} \, k\,r}{h_n(k\,r)} \, \Delta\theta \, \Delta\phi \sqrt{\frac{n(n+1)(n+m)!}{4\pi(2n+1)(n-m)!}} \tag{13b}$$

$$\tilde{b}_{mn} = \frac{(-1)^m \, e_{mn} \, k\,r}{[krh_n(kr)]'} \, \Delta\theta \, \Delta\phi \sqrt{\frac{n(n+1)(n+m)!}{4\pi(2n+1)(n-m)!}} \tag{13c}$$

La diferencia entre a_{mn} y b_{mn} con $\tilde{a}_{mn}$ y $\tilde{b}_{mn}$ es que los coeficientes con las tildes han absorbido el factor teórico E_0, es decir incluyen la amplitud del campo en su definición. En concreto,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{mn} &= a_{mn} \, E_0 \\ \tilde{b}_{mn} &= b_{mn} \, E_0 \end{aligned} \tag{14}$$

Ahora podemos volver sobre el hecho de que, de las dos expresiones para $\tilde{b}_{mn}$ in (13) deberían producir los mismos resultados. Sin embargo, la componente radial no la vamos a medir en la cámara anecoica, de modo que no usaremos la ecuación (13b) sino (13c).

Con estos coeficientes, podemos calcular el campo como

$$\vec{E}(r,\theta,\phi) = e^{j\,\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\tilde{a}_{mn} \, \vec{M}_{mn} + \tilde{b}_{mn} \, \vec{N}_{mn} \right) \tag{15}$$

El campo lejano se calcula a partir de esta ecuación con las aproximaciones:

$$\vec{M}_{mn}(k\,r,\theta,\phi) \simeq j^{n+1}\,\gamma_{mn}\frac{e^{-j\,k\,r}}{k\,r}\vec{C}_{mn}(\theta,\phi)$$
$$\vec{N}_{mn}(k\,r,\theta,\phi) \simeq j^{n}\,\gamma_{mn}\frac{e^{-j\,k\,r}}{k\,r}\vec{B}_{mn}(\theta,\phi) \tag{16}$$