

# Transformación entre puntos del campo cercano.

José Luis Álvarez Pérez

## 1 El desarrollo modal del campo

Vamos a empezar por justificar la ecuación (12-73) del libro de Balanis *Antenna Analysis and Design*, que para nosotros va a ser la ecuación (10) de estas notas. Partimos de considerar un campo eléctrico de frecuencia dada  $\omega$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \quad (1)$$

La ecuación de ondas para el campo eléctrico tiene esta forma:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

lo que, evidentemente, lleva a la denominada ecuación de Helmholtz:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \\ k &= \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad (3a)$$

Suponemos ahora que tenemos un campo  $\vec{E}(\vec{r})$  que estamos en condiciones de medir en un plano, que suponemos que está colocado de manera paralela al eje  $XY$  y en una posición  $z = z_m$ . La función bidimensional  $\vec{E}(x, y, z = z_m)$  se puede representar mediante una integral de Fourier:

$$\vec{E}(x, y, z = z_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(k_x, k_y, z = z_m) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (4)$$

Si introducimos esta expresión en (3a) y devolvemos la generalidad a la coordenada  $z$  más allá de ser, como hasta ahora, un punto de medida  $z_m$ , obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(k_x, k_y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right) = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2) \left[ \vec{E}(k_x, k_y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} \right] dk_x dk_y = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Operando el Laplaciano, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (-k_x^2 - k_y^2 + k^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[ \vec{E}(k_x, k_y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} \right] dk_x dk_y = 0. \quad (6)$$

Dado que esta igualdad se verifica para todo valor de  $x$  e  $y$ , el integrando ha de ser nulo:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}(k_x, k_y, z) + w^2 \vec{E}(k_x, k_y, z) = 0 \quad (7)$$

con

$$w^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2. \quad (8)$$

La solución de (7) viene dada, en general, por la siguiente expresión

$$\vec{E}(k_x, k_y, z) = \vec{\mathcal{E}}^+(k_x, k_y) e^{-jwz} + \vec{\mathcal{E}}^-(k_x, k_y) e^{jwz} \quad (9)$$

donde  $\vec{\mathcal{E}}^+(k_x, k_y) e^{-jwz}$  representa una onda que se propaga en la dirección creciente de la  $z$  mientras que  $\vec{\mathcal{E}}^-(k_x, k_y) e^{jwz}$  lo hace en la dirección decreciente de la  $z$ . Para nuestro caso, solamente consideramos la

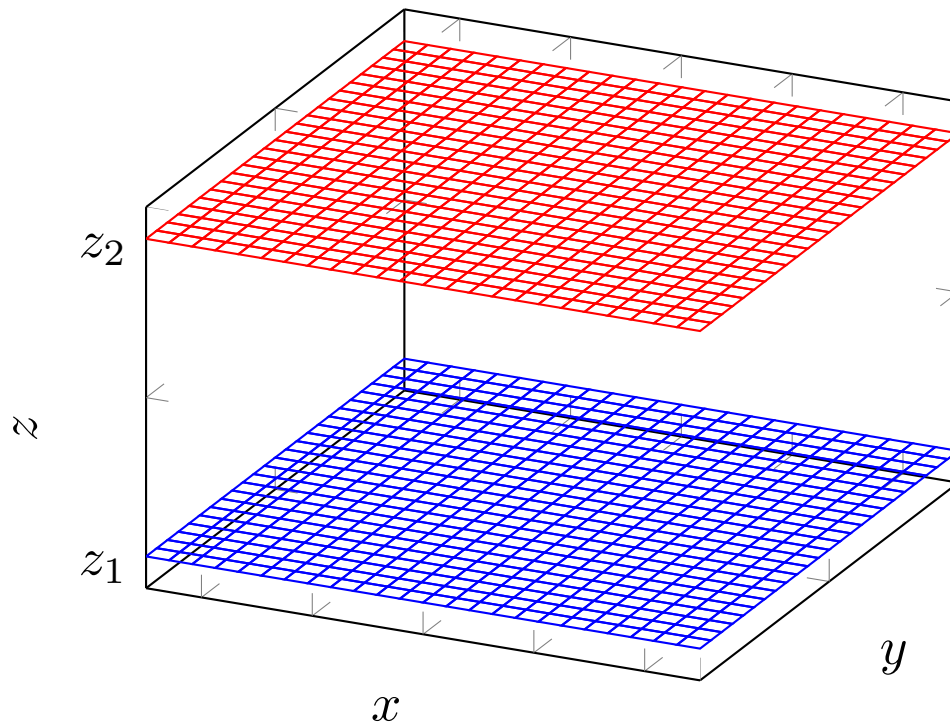


Figure 1: Se representan dos planos: sobre el plano azul hemos realizado las medidas del valor del campo en todos los puntos que son nodos de la rejilla y en el plano rojo se pretende inferir el campo a partir de las medidas en el plano azul. La separación entre nodos es de  $\Delta x$  en la dirección  $x$  y de  $\Delta y$  en la dirección  $y$

solución que contiene la  $\vec{\mathcal{E}}^+(k_x, k_y) e^{-jwz}$ . Eso nos lleva a la siguiente expresión para la ecuación (4), que es la ecuación (12-73) del libro de Balanis

$$\vec{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}^+(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y + w z)} dk_x dk_y \quad (10)$$

De todo esto extraeremos en la siguiente sección los pasos de un algoritmo que nos permitirá calcular el campo eléctrico en una posición  $z$  cualquiera, en la que se supone que lo conocemos, y que no tiene por qué ser la de salida de la onda, es decir, no tiene por qué corresponderse al plano radiante de una antena, sino que puede ser cualquier plano colocado delante de la misma. Estamos hablando por tanto de un algoritmo para calcular el campo en un plano geométrico dado por una  $z$  concreta a partir de los valores en otro plano del campo cercano. ¿Por qué lo denominamos “cercano”? ¿Dónde hemos introducido la hipótesis de que sea “cercano”? En ningún sitio. Precisamente, la hipótesis será después la de considerar el “campo lejano” como aquel para el que  $z$  es suficientemente grande, y en el que haremos algunas simplificaciones, propias de una distancia grande a la fuente de la onda. Para contraponer ese campo lejano al caso en el que no añadimos hipótesis simplificadoras basadas en un valor de  $z$  grande, utilizamos el adjetivo “cercano” como antónimo de “lejano”, queriendo decir que no se pueden hacer esas hipótesis derivadas de una  $z$  grande.

## 2 Algoritmo para transformar el valor del campo cercano en un plano $z = z_1$ en el campo cercano en otro plano $z = z_2$

Los pasos serían los siguientes:

- Estimamos los modos dados por la función  $\vec{E}(k_x, k_y, z = z_1)$ . Para ello hay que partir de la ecuación

(4) e invertirla. En principio, la ecuación inversa<sup>1</sup> sería

$$\vec{E}(k_x, k_y, z = z_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(x, y, z = z_1) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (11)$$

Las medidas de las que partimos no son continuas, sino que conocemos el campo  $\vec{E}(x, y, z = z_1)$  en un conjunto de puntos  $(x, y) = (x_{n_x}, y_{n_y})$  con  $n_x = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1$  y  $n_y = 0, 1, 2, \dots, N_y - 1$ . Eso nos lleva a discretizar tanto (4) como (11) de la siguiente manera: empezamos por la ecuación (11), que es la que nos permite hallar los modos  $\vec{E}(k_x, k_y, z = z_1)$

$$\vec{E}(k_x, k_y, z = z_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \Delta x \Delta y \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} \vec{E}(x = n_x \Delta x, y = n_y \Delta y, z = z_1) e^{j(k_x n_x \Delta x + k_y n_y \Delta y)} \quad (12)$$

Con esta ecuación podemos estimar los modos para cualesquier valores de  $k_x$  y  $k_y$ , que podríamos utilizar luego para calcular (4). Parece, por tanto conveniente utilizar el mayor número de valores posibles y construir una “malla” de puntos  $(k_x, k_y)$  mucho mayor potencialmente que la de puntos en  $(x, y)$ , donde hemos visto que tenemos  $N_x \times N_y$  puntos. Este razonamiento tiene dos errores: no tiene en cuenta el teorema del muestreo ni conecta con el conveniente algoritmo de la Fast Fourier Transform (FFT). No vamos a entrar en todo el detalle del primero, y basta decir que no por tomar valores de  $(k_x, k_y)$  vamos a tener una mejor descripción de  $\vec{E}(x, y, z)$  ya que hay un nivel de información máximo asociado al muestreo en  $(x, y)$ . La FFT y su inversa están diseñadas para tener esto en cuenta. Vamos a ponerlas a ambas como sigue

$$\vec{E}_{m_x, m_y} = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} \vec{E}(x = n_x \Delta x, y = n_y \Delta y, z = z_1) e^{j2\pi \frac{m_x n_x}{N_x}} e^{j2\pi \frac{m_y n_y}{N_y}} \quad (13)$$

para la FFT y

$$\vec{E}_{n_x, n_y} = \sum_{m_x=0}^{N_x-1} \sum_{m_y=0}^{N_y-1} \vec{E}_{m_x, m_y} e^{-j2\pi \frac{m_x n_x}{N_x}} e^{-j2\pi \frac{m_y n_y}{N_y}} \quad (14)$$

para la IFFT (Inverse Fourier Transform). Podemos comparar ahora las ecuaciones (13) y (12) y vemos que, para poder aprovechar la herramienta que nos brinda la FFT -y que, recordemos, lleva de serie el teorema de muestreo-, tenemos que hacer las siguientes identificaciones:

$$k_x = m_x \Delta k_x \quad (15a)$$

$$k_y = m_y \Delta k_y \quad (15b)$$

$$\Delta x \Delta k_x = \frac{2\pi}{N_x} \quad (15c)$$

$$\Delta y \Delta k_y = \frac{2\pi}{N_y}. \quad (15d)$$

Vemos que las dos últimas igualdades, que son de obligado cumplimiento si queremos ver la ecuación (12) como una FFT, nos permiten definir los valores de  $\Delta k_x$  y  $\Delta k_y$ <sup>2</sup> mediante

$$\Delta k_x = \frac{2\pi}{\Delta x N_x} \quad (16)$$

$$\Delta k_y = \frac{2\pi}{\Delta y N_y} \quad (17)$$

---

<sup>1</sup>En realidad, (11) tiene la forma de la transformada de Fourier directa de  $\vec{E}(x, y, z = z_1)$  como función de  $x$  e  $y$ , mientras que la ecuación (4) es formalmente la transformada inversa

<sup>2</sup>Los de  $\Delta x$  y  $\Delta y$  están definidos por nuestro muestreo del campo en el plano bajo análisis, pero los de  $\Delta k_x$  y  $\Delta k_y$  aún no lo estaban.

Lo que nos queda ahora es que la relación entre la  $\vec{E}_{m_x, m_y}$  de la ecuación (13) y la  $\vec{E}(k_x, k_y, z = z_1)$  de la ecuación (12) es la siguiente:

$$\vec{E}(k_x = m_x \Delta k_x, k_y = m_y \Delta k_y, z = z_1) = \Delta x \Delta y \vec{E}_{m_x, m_y} \quad (18)$$

donde, computacionalmente, usamos

$$\vec{E}_{m_x, m_y} = \text{FFT}\{\vec{E}(x = n_x \Delta x, n_y \Delta y, z = z_1)\}. \quad (19)$$

Con esto hemos calculado los modos  $\vec{E}(k_x = m_x \Delta k_x, k_y = m_y \Delta k_y, z = z_1)$ .

- Se trata ahora de utilizar la ecuación (10) (la pondremos realmente como (4) con (9) y  $\mathcal{E}^- = 0$ , para ir más despacio, pero es (10) lo que usamos) para calcular el campo en los puntos de otro plano  $z = z_2$ . Pero hemos dicho que vamos a utilizar la pareja FFT-IFFT. Eso significa que, ahora, vamos a discretizar la ecuación (10) para que tome la forma de la IFFT en (14). Eso lo conseguimos poniendo la primera como

$$\begin{aligned} \vec{E}(x = n_x \Delta x, n_y \Delta y, z = z_2) = \\ \Delta k_x \Delta k_y \sum_{m_x=0}^{N_x-1} \sum_{m_y=0}^{N_y-1} \vec{E}(k_x = m_x \Delta k_x, k_y = m_y \Delta k_y, z = z_2) e^{-j(n_x m_x \Delta x \Delta k_x + n_y m_y \Delta y \Delta k_y)} \end{aligned} \quad (20)$$

Gracias a la ecuación (9) con  $\mathcal{E}^-(k_x, k_y) = 0$ , podemos poner

$$\vec{E}(k_x, k_y, z_1) = \mathcal{E}^+(k_x, k_y) e^{-jw z_1} \quad (21)$$

de donde despejamos la  $\mathcal{E}^+(k_x, k_y)$

$$\mathcal{E}^+(k_x, k_y) = \vec{E}(k_x, k_y, z_1) e^{jw z_1} \quad (22)$$

y utilizamos ahora este valor en (9) pero esta vez para  $z = z_2$  y los valores de las  $k_x$  y  $k_y$  correspondientes a nuestro muestreo

$$\begin{aligned} \vec{E}(k_x = m_x \Delta k_x, k_y = m_y \Delta k_y, z = z_2) = \mathcal{E}^+(k_x, k_y) e^{-jw z_2} = \\ \vec{E}(k_x = m_x \Delta k_x, k_y = m_y \Delta k_y, z = z_1) e^{-jw(z_2 - z_1)} \end{aligned} \quad (23)$$

De ahí obtenemos el campo en este otro plano  $z = z_2$  mediante

$$\vec{E}(x = n_x \Delta x, n_y \Delta y, z = z_2) = \Delta x \Delta y \text{IFFT}\{\vec{E}(k_x = m_x \Delta k_x, k_y = m_y \Delta k_y, z = z_2)\}. \quad (24)$$

Advertencias:

1. Como el campo es vectorial, hay que aplicar separadamente este algoritmo a todas las componentes.
2. Por supuesto, podemos trabajar con  $\Delta x = \Delta y$
3. Los dos planos y las dos rejillas de medidas tienen que tener las mismas dimensiones pero pueden ser subdominios de áreas mayores en las cuales, por lo que sea, eliminamos ciertos márgenes. Eso ocurre en el caso de trabajar con medidas simuladas sobre espacios esféricos, donde los cortes con  $z$ 's dados no son iguales: nos quedamos con los subdominios de iguales dimensiones.