

Resumen*

Aixa Xiuhyolotzin Andrade Hernández

I. TRANSPORTE DE LUZ EN MEDIOS DISPERSORES

El coeficiente de absorción de un medio μ_a está definido como la probabilidad de absorción de un fotón por unidad de longitud.

La longitud de absorción promedio se define como el inverso de μ_a . Por ejemplo, $\mu_a = .1 \frac{1}{cm}$ para tejido biológico.

Para una partícula absorbente, la capacidad de absorción está dada por la sección transversal σ_a y ésta está relacionada con el área de la sección transversal geométrica σ_g mediante la siguiente relación:

$$\sigma_a = Q_a \sigma_g$$

Si consideramos un medio con N_a absorbentes, el coeficiente de absorción es considerado como la sección transversal de absorción total por unidad de volumen:

$$\mu_a = N_a \sigma_a$$

El cambio de intensidad de la luz por unidad de longitud es proporcional al coeficiente de absorción por la intensidad de la luz en esa diferencial de longitud, entonces:

$$\frac{dI}{dx} = -\mu_a I$$

El signo negativo se debe a que la intensidad disminuye a medida que se incrementa la distancia.

Al resolver esta ecuación diferencial obtenemos la ley de Beer:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu_a x}$$

donde $I_0 = I(0)$.

La transmitancia está definida como $T(x) = \frac{I(x)}{I_0}$ y representa la supervivencia de la intensidad de un haz de luz tras haber recorrido una distancia x .

La dispersión de la luz puede ser modelada para un medio dispersor donde los agentes dispersores están distribuidos aleatoriamente en el espacio, nosotros consideraremos un medio tal que la distancia entre partículas es mucho más grande que su longitud de onda y el tamaño del dispersor.

Análogamente a la absorción, consideramos un coeficiente de dispersión μ_t que está definido como la probabilidad de dispersión de un fotón en un medio por unidad de longitud.

Para una partícula dispersora, la capacidad de absorción está dada por la sección transversal σ_s y ésta está relacionada con el área de la sección transversal geométrica σ_g por:

$$\sigma_s = Q_s \sigma_g$$

Para un medio con N_s dispersores el coeficiente de dispersión es considerado como la sección transversal de absorción total por unidad de volumen:

$$\mu_s = N_s \sigma_s$$

Por último definimos la transmitancia como la propiedad de no absorción y la relacionamos con la distancia x mediante la ley de Beer:

$$T(x) = e^{-\mu_s x}$$

El coeficiente que relaciona la absorción y la dispersión es el coeficiente de extinción y está compuesto por la suma de los coeficientes de absorción y transmisión :

$$\mu_t = \mu_a + \mu_s$$

[1]

Ahora utilizamos el método de Monte Carlo para muestrear la trayectoria del fotón en un medio dispersor. Consideraremos un haz de fotones que entra a dos capas de un material con una dirección inicial dada, por ejemplo, $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Las placas son perpendiculares al eje z y están separadas por una distancia d . [2]

Entonces la función de probabilidad *PDF* de que el fotón se absorba o se disperse está dada por la ley de Beer:

$$PDF(t) = e^{-\mu_t t}$$

donde t es el camino libre medio o la distancia que recorre un fotón antes de ser dispersado o absorbido.

Tomamos $PDF = \xi$, donde ξ es un número aleatorio, entonces podemos muestrear la posición del fotón usando $t = \frac{-\ln(\xi)}{\mu_t}$ y las coordenadas x, y, z estarán dadas a cada instante de tiempo por: $x = t x$, $y = t y$, $z = t z$.

Durante la simulación se debe considerar que la dirección se actualiza a cada paso mientras no ocurra una

* A footnote to the article title

absorción. La dirección se actualiza utilizando la fórmula de Henyey Greenstein:

$$\cos(\theta) = \begin{cases} 1 - 2\xi & \text{si } g=0 \\ g_1 & \text{si } g \neq 0 \end{cases}$$

donde

$$g_1 = \frac{1}{2g} (1 + g^2) \left(\frac{1 - g^2}{1 - g + 2g\xi} \right)^2$$

entonces:

$$v'_x = v_x \cos\theta + \frac{\sin\theta (v_x v_z \cos\phi - v_y \sin\phi)}{\sqrt{1 - v_z^2}}$$

$$v'_y = v_y \cos\theta + \frac{\sin\theta (v_y v_z \cos\phi + v_x \sin\phi)}{\sqrt{1 - v_z^2}}$$

$$v'_z = v_z \cos\theta - \sqrt{1 - v_z^2} \sin\theta \cos\phi$$

v_x, v_y, v_z son los cosenos directores del fotón.

En vez de lanzar fotón tras fotón se considera un paquete de fotones de peso w que disminuye con las absorciones tal que a cada paso de la simulación $w = w - \Delta w$, donde $\Delta w = \frac{\mu_a}{\mu_t}$.

Para detener la simulación se utiliza el método de Ruleta Rusa que consiste en elegir un peso crítico (un peso muy pequeño), cuando el paquete alcanza el peso crítico se le otorgan m oportunidades de sobrevivir, entonces el peso w estará dado por:

$$w = \begin{cases} mw & \text{si } \xi \leq 1/m \\ 0 & \text{si } \xi > 1/m \end{cases}$$

[1]

Para saber si el fotón se sale de las placas, comparamos la distancia entre las placas con una distancia x que recorrerá el fotón como resultado del muestreo, como la dirección del fotón v sale con una componente en la dirección z , que llamaremos v_z y sea s la distancia del fotón antes de redireccionarlo y P_z la proyección de la dirección de s sobre el eje z , entonces usando la técnica de triángulos semejantes podemos encontrar que:

$$\frac{\|v\|}{v_z} = \frac{s}{P_z}$$

Pero v es una dirección por lo tanto su norma es igual a 1, entonces:

$$s = \frac{P_z}{v_z}$$

entonces si $s < x$ la distancia entre las placas es menor a la que recorrerá el fotón, por lo tanto el fotón deja las placas.

Además necesitamos checar si la dirección del fotón apunta para la placa superior o la placa inferior, si $v_z > 0$ el fotón apunta para la placa inferior y en caso contrario apunta para la placa superior.

Si el fotón apunta hacia la placa superior consideramos a s como:

$$s = \frac{d - P_z}{v_z}$$

Si el fotón deja las placas por medio de la superficie superior, éste contribuye a la reflectancia difusa, si deja las placas por medio de la superficie inferior contribuye a la transmitancia, pues si consideramos m placas superpuestas, el fotón se transmitiría a la siguiente capa.[2]

En resumen, los pasos necesarios para la simulación de Monte Carlo son:

Definir las variables necesarias para la simulación, definir las funciones de cambio de fase de Henyey Greenstein, luego dentro de un ciclo infinito que se rompe mediante el método de ruleta rusa la posición del fotón se muestreará mediante la inversa de la función de probabilidad que en este caso es la ley de Beer. Cuando tenemos la posición actualizada del fotón es necesario compararla con la distancia entre las placas para saber si se transmitió o se reflejó.

A. Bibliografía

- [1] Lihong V. Wang, Hsin-i Wu, Biomedical Optics, Principles and Imaging, WILEY-INTERSCIENCE 2007.
- [2] <http://www.scratchapixel.com/lessons/mathematics-physics-for-computer-graphics/monte-carlo-methods-in-practice/monte-carlo-simulation>