

内积空间



2025/6/10/

Speaker: 马俊

majun904@sjtu.edu.cn

上海交通大学数学科学学院



目录

提纲

- ① 内积和内积空间
- ② 正交和斯密特正交化
- ③ 内积和正定二次型

内积和内积空间



内积空间

设 \mathbb{F} 是实数域 \mathbb{R} , 或者是复数域 \mathbb{C} , V 是 \mathbb{F} 上线性空间。

若对 V 中任意两个向量 α 和 β , 都有 \mathbb{F} 中唯一的数与之对应, 记这个数为 (α, β) , 此外, 这个对应还满足:

- (1) $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$ (共轭对称性);
- (2) $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 且 $(\alpha, \alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$ (正定性);
- (3) $(k\alpha + l\beta, \gamma) = k(\alpha, \gamma) + l(\beta, \gamma)$ (双线性性),

则称 V 为一个内积空间。

- ▶ 欧氏空间 (或欧几里得空间): 有限维实内积空间 (取 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$);
- ▶酉空间: 有限维复内积空间 (取 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)。



内积空间

令 $V = \mathbb{R}[x]_{n+1}$ 是所有次数不超过 n 的实系数多项式和零多项式一起构成的 $n+1$ 维线性空间， $a < b$ 是实数。

例

对任何 $f, g \in \mathbb{R}[x]_{n+1}$, 定义

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

则 (f, g) 定义了 V 上一个内积。



内积空间

例

令 $V = \mathbb{R}^n$, 对任何列向量 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$(\alpha, \beta) = \beta^T \alpha = \alpha^T \beta,$$

则 (α, β) 定义了 V 上一个内积。

例

令 $V = \mathbb{C}^n$, 对任何列向量 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$, 定义

$$(\alpha, \beta) = \beta^* \alpha = \overline{\alpha^* \beta},$$

则 (α, β) 定义了 V 上一个内积。



内积空间

例

设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 则

- (1) 方程组 $A^*Ax = 0$ 与 $Ax = 0$ 有相同的解空间;
- (2) $r(A) = r(A^*) = r(AA^*) = r(A^*A)$;
- (3) 对任何 n 维列向量 b , 方程组 $A^*Ax = A^*b$ 都有解.



内积空间

利用共轭对称性和双线性性，可以得到

$$(\alpha, k\beta + l\gamma) = \bar{k}(\alpha, \beta) + \bar{l}(\alpha, \gamma).$$



第五节 内积空间

V 为一个内积空间。

向量的模

对任意向量 $\alpha \in V$, 称

$$\sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

为向量 α 的模, 记作 $\|\alpha\|$ 。

模为 1 的向量称为单位向量, 或者标准向量。



内积空间

V 为数域 \mathbb{F} 上的内积空间。

柯西不等式和三角不等式

(1) 柯西不等式:

$$(\alpha, \beta) \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$$

(2) 三角不等式:

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

模为 1 的向量称为单位向量，或者标准向量。



内积空间

V 为数域 \mathbb{F} 上内积空间。由柯西不等式，可以定义向量的夹角。

向量夹角

一般地，设 α 和 β 的夹角为 θ ，那么

$$\cos \theta = \frac{|(\alpha, \beta)|}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|},$$

及

$$\theta = \arccos \frac{|(\alpha, \beta)|}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$$

那么 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。



内积空间

V 为数域 \mathbb{F} 上内积空间。由柯西不等式，可以定义向量的夹角。

向量夹角

若 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ，设 α 和 β 的夹角为 θ ，那么

$$\cos \theta = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|},$$

及

$$\theta = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$$

那么 $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

正交和斯密特正交化



正交和斯密特正交化

V 为数域 \mathbb{F} 上内积空间。定义两个向量正交。

两个向量正交

两个内积为 0 的向量称为是正交的。

- (1) 正交组：一组非零的两两正交的向量组；
- (2) 标准正交组：由单位向量构成的正交组。



正交和斯密特正交化

V 为数域 \mathbb{F} 上 n 维内积空间。

斯密特正交化

令 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是 V 中线性无关的向量组。那么

- (1) 存在 V 中正交向量组 β_1, \dots, β_m , 使得对每一个 $k = 1, 2, \dots, m$,
 $span\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = span\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ 。
- (2) 存在 V 中标准正交向量组 $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, 使得对每一个
 $k = 1, 2, \dots, m$, $span\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = span\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ 。

其中 $span\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = \{a_1\alpha_1 + \dots + a_k \mid a_i \in \mathbb{F}\}$ 是由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 的所有可能线性组合生成的空间。



正交和斯密特正交化

V 为数域 \mathbb{F} 上 n 维内积空间。

斯密特正交化

- step1. 正交化：令 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是 V 中线性无关的向量组。

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

...

$$\beta_m = \alpha_m - ??$$

- step2. 单位化：对每一个 $i = 1, 2, \dots, m$, 令 $\gamma_i = \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$ 。

正交和斯密特正交化



V 为数域 \mathbb{F} 上 n 维内积空间。

标准正交基

内积空间必存在标准正交基。



正交和斯密特正交化

V 为数域 \mathbb{F} 上 n 维内积空间。

斯密特正交化再认识

正交化过程以后的矩阵形式：

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} & \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \\ 0 & 1 & \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

正交化、单位化过程以后的矩阵形式：

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \begin{pmatrix} \|\beta_1\| & (\alpha_2, \gamma_1) & (\alpha_3, \gamma_1) \\ 0 & \|\beta_2\| & (\alpha_3, \gamma_2) \\ 0 & 0 & \|\beta_3\| \end{pmatrix}$$



正交和斯密特正交化

推论

设 A 是一个 $n \times r$ 列满秩矩阵，则存在 $n \times r$ 阵 B 和 r 阶上三角矩阵 R ，使得

$$A = BR,$$

且 B 的列是两两正交的向量组， R 的对角线元素全等于 1。此外， B 和 R 是唯一的。



正交和斯密特正交化

推论

设 A 是一个 n 阶可逆矩阵，则存在 n 阵 U 和上三角矩阵 R ，使得

$$A = UR,$$

且 U 的列是两两正交的向量组， R 的对角线元素全等于 1。此外， U 和 R 是唯一的。



正交和斯密特正交化

推论

设 A 是一个 $n \times r$ 列满秩矩阵，则存在 $n \times r$ 阵 B 和 r 阶上三角矩阵 R ，使得

$$A = BR,$$

且 B 的列是两两正交的标准向量组， R 的对角线元素全大于 0。此外， B 和 R 是唯一的。



正交和斯密特正交化

推论

设 A 是一个 n 阶可逆矩阵，则存在 n 阵 U 和上三角矩阵 R ，使得

$$A = UR,$$

且 U 的列是两两正交的标准向量组(酉矩阵)， R 的对角线元素全大于 0。此外， U 和 R 是唯一的。

注：

- ▶ 将可逆矩阵 A 写成上述 $A = UR$ 形式，叫做方阵 A 的正交三角分解，也叫 UR 分解。当 A 为实矩阵时， U 和 R 也都是实矩阵，这时 UR 分解也称为 QR 分解。
- ▶ 将 A 的列看作一组基， U 的列看作一组标准正交基，则 R 是从一组标准正交基到一组基的过渡矩阵。



正交和斯密特正交化

例

在 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中, 令

$$W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}.$$

- (1) 试证: W 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间。
- (2) 对任意的 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 令 $(A, B) = \text{tr}(A^T B)$. 试证明: (A, B) 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上一个内积。
- (3) 试求 W 的一组标准正交基。

正交和斯密特正交化



例

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的正交三角分解.



正交和斯密特正交化

例

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A 的 QR 分解.

内积和正定二次型



内积和正定二次型

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 n 维列向量, 内积空间 $V = \mathbb{R}^n$, 或者 $V = \mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基。

酉矩阵

称矩阵

$$Q = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

为酉矩阵; 如果酉矩阵 Q 是实矩阵, 则称为正交矩阵。



内积和正定二次型

酉矩阵

矩阵 Q 为酉矩阵的充分必要条件是 $Q^*Q = I$ 。特别地, Q 为正交矩阵的充分必要条件是 $Q^TQ = I$ 。



内积和正定二次型

Hermite 矩阵

方阵 A 满足 $A^* = A$, 称 A 为 Hermite 矩阵。

方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 Hermite 矩阵当且仅当

$$\begin{cases} a_{ij} = \overline{a_{ji}} & \text{若 } i \neq j \\ a_{ii} \in \mathbb{R} & \text{若 } i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

。



内积和正定二次型

Hermite 矩阵性质

设 A 为 Hermite 矩阵，那么

- (1) A 的 n 个特征值全为实数；
- (2) A 的属于不同特征值的特征向量正交；
- (3) 存在酉矩阵 U , 使得 U^*AU 为对角矩阵，即， A 可以酉对角化。特别地，实对称矩阵可以正交对角化。



内积和正定二次型

设 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 是未定元向量。

复二次型

下述关于 $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 的复系数二次多项式

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \bar{x}_i x_j = x^* A x,$$

其中 $A = (b_{ij})_{n \times n}$, 那么称 $f(x)$ 为复二次型。称 A 为复二次型 $f(x)$ 的矩阵, $r(A)$ 也叫做 $f(x)$ 的秩。



内积和正定二次型

例 (复二次型)

设 $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \bar{x}_i x_j = x^* A x$, 其中 $A = (b_{ij})_{n \times n}$, 是关于 $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 的复二次型。则

$$f(x) = x^* \frac{A^* + A}{2} x + x^* \frac{A - A^*}{2} x,$$

且

$$x^* \frac{A^* + A}{2} x$$

是复数 $f(x)$ 的实部,

$$x^* \frac{A - A^*}{2} x$$

为 0, 或者是复数 $f(x)$ 的虚部.



内积和正定二次型

例

设对任意 $x \in \mathbb{C}^n$, 都有 $x^*Bx = 0$, 那么 $B = 0$ 。



内积和正定二次型

设 $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \bar{x}_i x_j = x^* A x$, 其中 $A = (b_{ij})_{n \times n}$.

复二次型

若 $f(x)$ 满足对任意 $x \in \mathbb{C}^n$, 都有 $f(x) \in \mathbb{R}$, 那么称 $f(x)$ 为 Hermite 二次型。

注意: Hermite 二次型是一类特殊的复二次型;



内积和正定二次型

设 $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \bar{x}_i x_j = x^* A x$, 其中 $A = (b_{ij})_{n \times n}$ 。

复二次型

$f(x)$ 为 Hermite 二次型当且仅当 A 为 Hermite 矩阵。

注意：

- (1) 研究 Hermite 二次型就是研究 Hermite 矩阵，反之，研究 Hermite 矩阵就是研究 Hermite 二次型；
- (2) 一般地，当 $f(x)$ 是实二次型时， A 不一定是对称矩阵。



内积和正定二次型

令 $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \bar{x}_i x_j = x^* A x$ 为 Hermite 二次型，其中
 $A = (b_{ij})_{n \times n}$ 。存在酉矩阵 U ，使得

$$U^* A U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$



内积和正定二次型

Hermite 二次型和酉矩阵

令 $x = Uy$ (也称为酉变换, 保距变换), 则

$$f(x) = x^*Ax = y^*U^*AUy = y^*Dy = \sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2$$

注意:

- (1) 由于 $x = Uy$, 总有 $\|x\| = \|y\|$;
- (2) 对任何 $\|x\| = 1$, 总有 $\lambda_{min} \leq f(x) \leq \lambda_{max}$ 。



内积和正定二次型

令 $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \bar{x}_i x_j = x^* A x$ 为复二次型, 其中 $A = (b_{ij})_{n \times n}$ 。

正定复(实)二次型

如果对任意非零向量 $\alpha \in \mathbb{C}^n$, 都有 $f(\alpha) > 0$, 则称 $f(x)$ 为正定二次型,
 A 为正定矩阵。

注意: 可以类似定义负定, 半正定, 半负定, 不定二次型。



内积和正定二次型

令 $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \bar{x}_i x_j = x^* A x$ 为复二次型, 其中 $A = (b_{ij})_{n \times n}$ 。

正定复(实)二次型

下述说法等价:

- (1) 复二次型 $f(x)$ 正定;
- (2) A 是正定矩阵;
- (3) A 为 Hermite 矩阵, 且 n 个特征值全大于 0;
- (4) 存在 n 阶可逆矩阵 M , 使得 $A = M^* M$;
- (5) 存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^* A P = I$;
- (6) 存在 $m \times n$ 阶列满秩矩阵 M , 使得 $A = M^* M$ 。
- (7) A 的所有顺序主子式均大于 0;
- (8) 存在唯一的正定矩阵 B , 使得 $A = B^2$ 。



内积和正定二次型

设 A 是 n 阶 Hermite 矩阵。

半正定矩阵的算术平方根

A 是半正定矩阵当且仅当存在唯一的半正定矩阵 B 使得 $A = B^2$, 称矩阵 B 是 A 的算术平方根。



内积和正定二次型

设 V 是 n 维复内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 中一组基。

正定矩阵和内积

思路: 已知内积, 取定基以后, 得到矩阵。

- ▶ step1. 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 写出这两个向量在基下的坐标

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)x, \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)y.$$

- ▶ step2. 利用内积定义, 计算内积

$$(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (\alpha_j, \alpha_i) x_j \overline{y_i}$$

- ▶ step3. 令 $a_{ij} = (\alpha_j, \alpha_i)$ 。将上式写成矩阵形式, $(\alpha, \beta) = y^* Ax$, 其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 。



内积和正定二次型

设 V 是 n 维复内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 中一组基。

正定矩阵和内积

思路: 已知内积, 取定基以后, 得到度量矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_1) \\ (\alpha_1, \alpha_2) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_1, \alpha_n) & (\alpha_2, \alpha_n) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}$$

称 A 为内积在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的度量矩阵。



内积和正定二次型

设 V 是 n 维复内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 中一组基。

正定矩阵和内积

设方阵 A 为内积在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的度量矩阵。那么

- (1) A 是 Hermite 矩阵; (根据内积共轭对称性)
- (2) A 是正定矩阵; (根据内积正定性)



内积和正定二次型

设 V 是 n 维复线性空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 中一组基, 给定方阵 A 为正定 Hermite 矩阵。

正定矩阵和内积

思路: 已知线性空间和一个正定 Hermite 阵, 取定基以后, 定义出一个对应 (α, β) , 证明这个对应形成内积。

- step1. 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 写出这两个向量在基下的坐标

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)x, \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)y.$$

- step2. 定义对应 $(\alpha, \beta) = y^*Ax$.
- step3. 证明定义的对应满足内积的三个性质。

构造出一个内积空间 V 。

注意:

- (1) 实际上相当于先指定了 $(\alpha_j, \alpha_i) = a_{ij}$;
- (2) 任意取定一组基, 都存在 V 上一个内积, 使得在这个内积下, 这组基成为标准正交基(取 $A = I$)。



内积和正定二次型

设 V 是 n 维复线性空间,

正定矩阵和内积

V 上的内积与正定矩阵之间一一对应。

注意：简单地说，研究内积就是在研究某个正定矩阵，反之，研究正定矩阵，就是在研究某个内积。



内积和正定二次型

例

设 2 维欧氏空间 V 的一组基为 α_1, α_2 , 其度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ 。

求 V 中一组标准正交基到基 α_1, α_2 的过渡矩阵。



内积和正定二次型

例

在 \mathbb{R}^2 中, 设 $\alpha_1 = (1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -1)^T$ 和 $\beta_1 = (0, 2)^T$, $\beta_2 = (6, 12)^T$ 是其中的两组基。设四个向量之间内积为

$$(\alpha_1, \beta_1) = 1, (\alpha_1, \beta_2) = 15, (\alpha_2, \beta_1) = -1, (\alpha_2, \beta_2) = 3.$$

- (1) 求两组基的度量矩阵。
- (2) 求 \mathbb{R}^2 的一组标准正交基。



内积和正定二次型

例

设二维欧氏空间 V 的一组基为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 其度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. 求向量 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的内积。



内积和正定二次型

例

复数域 \mathbb{C} 是实数域 \mathbb{R} 上的二维线性空间。试定义 \mathbb{C} 上的一个内积，使得 1 与 $1+i$ 成为 \mathbb{C} 的一个标准正交基，并 $1-i$ 的长度。

Thank you for your attention !

感谢您的关注！