

[Proyecto 01] primer parcial - Proyectiles

Métodos Numéricos - Grupo 04

Christopher Criollo Tamara Benavidez Alegria Farinango

2025-11-27

Tabla de Contenidos

1 ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL	2
2 Proyecto: Colisión de Proyectiles	2
2.1 Desarrollo Matemático	2
2.1.1 Planteamiento del Problema	2
2.1.2 Ecuaciones de Movimiento	3
2.1.3 Reducción del Sistema (Optimización)	3
3 Métodos Numéricos Implementados	5
3.1 Método de Newton-Raphson	5
3.2 Método de la Secante	5
4 Análisis de Complejidad Computacional	6
4.1 Comparación Teórica	6
4.2 Recursos Computacionales (Simulación)	7
5 Resultados y Comparaciones	12
5.1 Análisis de la Interfaz Gráfica	12
5.2 Comparación de Métodos Numéricos	12
5.3 Efecto del Viento (Simulación Estocástica)	12
6 Conclusiones	12
7 Referencias	13
8 Enlace	13

1 ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL



2 Proyecto: Colisión de Proyectiles

2.1 Desarrollo Matemático

2.1.1 Planteamiento del Problema

Se tienen dos proyectiles: * **Proyectil 1:** Lanzado desde posición (D, h) en $t = 0$ con velocidad v y ángulo ϕ . * **Proyectil 2:** Lanzado desde posición $(0, 0)$ en $t = T$ con velocidad u y ángulo θ .

Objetivo: Determinar la velocidad inicial u y el ángulo θ del Proyectil 2 para que ambos colisionen en el aire de la forma más eficiente posible (mínima energía).

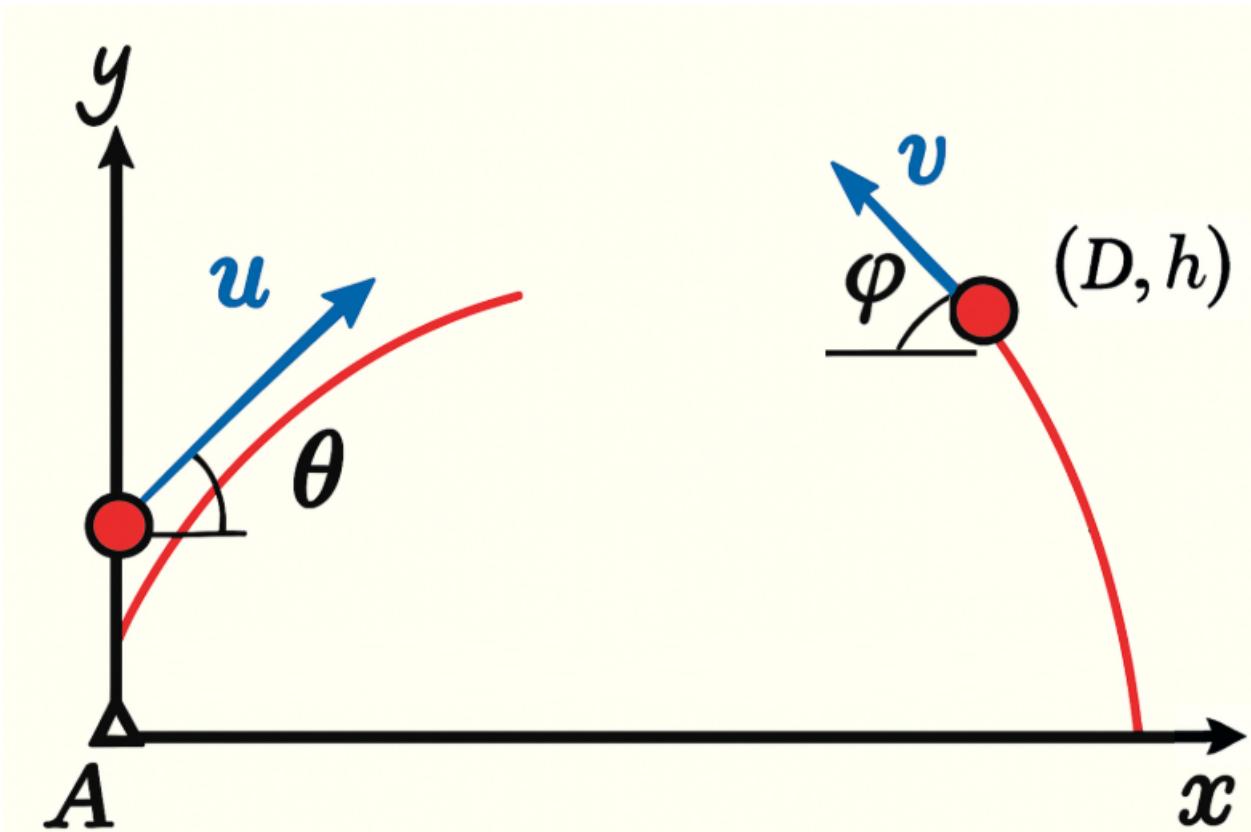


Figure 1: ProyectilE.png

2.1.2 Ecuaciones de Movimiento

Proyectil 1 ($t \geq 0$):

$$x_1(t) = D + v \cos(\phi)t$$

$$y_1(t) = h + v \sin(\phi)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Proyectil 2 ($t \geq T$):

$$x_2(t) = u \cos(\theta)(t - T)$$

$$y_2(t) = u \sin(\theta)(t - T) - \frac{1}{2}g(t - T)^2$$

2.1.3 Reducción del Sistema (Optimización)

Tenemos un sistema indeterminado (2 ecuaciones de posición, 3 incógnitas u, θ, t_c). Para resolverlo, aplicamos el principio de **Mínima Energía**: buscamos el tiempo de colisión t_c que minimice la velocidad de disparo u .

Despejamos las componentes de velocidad necesarias para colisionar en un tiempo arbitrario t_c :

$$u_x(t_c) = \frac{x_1(t_c)}{t_c - T}, \quad u_y(t_c) = \frac{y_1(t_c) + \frac{1}{2}g(t_c - T)^2}{t_c - T}$$

La función a minimizar es la magnitud al cuadrado de la velocidad:

$$F(t_c) = u^2 = u_x(t_c)^2 + u_y(t_c)^2$$

Buscamos la raíz de la derivada para encontrar el mínimo:

$$f(t_c) = \frac{dF(t_c)}{dt_c} = 0$$

2.1.3.1 [Code] - Importación y Configuración

```
import tkinter as tk
from tkinter import ttk, messagebox
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.backends.backend_tkagg import FigureCanvasTkAgg
from matplotlib.animation import FuncAnimation
from scipy.optimize import newton
import time

# Configuración para aumentar el límite de memoria de animaciones (100 MB)
plt.rcParams['animation.embed_limit'] = 100.0
plt.style.use('seaborn-v0_8-darkgrid')
g = 9.81

print(" Librerías cargadas y configuración establecida.")
```

Librerías cargadas y configuración establecida.

2.1.3.2 [Code] - Funciones Físicas y Derivada Numérica

```
def pos_p1(t, D, h, v, phi_rad):
    """Calcula posición (x, y) del Proyectil 1 en el instante t"""
    x = D + v * np.cos(phi_rad) * t
    y = h + v * np.sin(phi_rad) * t - 0.5 * g * t**2
    return x, y

def calcular_parametros_intercepcion(tc, D, h, v, phi_rad, T):
    """Para el tiempo de intercepción tc calcula:
```

```

- u (velocidad inicial necesaria),
- theta (ángulo de lanzamiento) necesarios para interceptar"""
dt = tc - T # Tiempo de vuelo del proyectil 2
if dt <= 1e-3: return np.inf, 0, 0, 0

target_x, target_y = pos_p1(tc, D, h, v, phi_rad)

if target_y < 0: return np.inf, 0, 0, 0 # si el objetivo ya cayó al suelo, no existe

ux = target_x / dt
uy = (target_y + 0.5 * g * dt**2) / dt

u = np.sqrt(ux**2 + uy**2)
theta = np.arctan2(uy, ux)
return u, theta, ux, uy

def derivada_energia(tc, args):
    """Derivada numérica permite optimizar la energía (minima velocidad)"""
    D, h, v, phi_rad, T = args
    epsilon = 1e-5
    u1, _, _, _ = calcular_parametros_intercepcion(tc, D, h, v, phi_rad, T)
    u2, _, _, _ = calcular_parametros_intercepcion(tc + epsilon, D, h, v, phi_rad, T)
    return (u2 - u1) / epsilon

```

3 Métodos Numéricos Implementados

Para encontrar el tiempo óptimo t_c , se implementan y comparan dos métodos iterativos para hallar raíces de ecuaciones no lineales.

3.1 Método de Newton-Raphson

Método de convergencia cuadrática que utiliza la derivada de la función. * **Fórmula:** $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ * **Ventaja:** Convergencia muy rápida cerca de la solución. * **Desventaja:** Requiere calcular la segunda derivada (en nuestro caso, numéricamente).

3.2 Método de la Secante

Método quasi-Newton que aproxima la derivada usando dos puntos anteriores. * **Fórmula:** $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ * **Ventaja:** No requiere cálculo explícito de derivadas en cada paso. * **Desventaja:** Convergencia superlineal (ligeramente más lenta que Newton).

3.2.0.1 [Code] - Implementación de los Métodos Numéricos

```
# Implementación del Método de Newton
def metodo_newton(func, x0, args, tol=1e-6, max_iter=50):
    x = x0
    start = time.perf_counter()
    for i in range(max_iter):
        f_val = func(x, args)
        eps = 1e-5
        f_prime = (func(x + eps, args) - f_val) / eps
        if abs(f_prime) < 1e-10: break # Evitar división por cero
        x_new = x - f_val / f_prime
        if abs(x_new - x) < tol:
            return x_new, i+1, (time.perf_counter() - start)*1000
        x = x_new
    return x, max_iter, (time.perf_counter() - start)*1000

# Implementación del Método de la Secante
def metodo_secante(func, x0, args, tol=1e-6, max_iter=50):
    x0_sec = x0 - 0.5
    x1_sec = x0 + 0.5
    start = time.perf_counter()
    for i in range(max_iter):
        f0 = func(x0_sec, args)
        f1 = func(x1_sec, args)
        if abs(f1 - f0) < 1e-10: break
        x_new = x1_sec - f1 * (x1_sec - x0_sec) / (f1 - f0)
        if abs(x_new - x1_sec) < tol:
            return x_new, i+1, (time.perf_counter() - start)*1000
        x0_sec = x1_sec
        x1_sec = x_new
    return x1_sec, max_iter, (time.perf_counter() - start)*1000
```

4 Análisis de Complejidad Computacional

4.1 Comparación Teórica

Aspecto	Newton-Raphson	Secante
Orden de Convergencia	Cuadrática ($p = 2$)	Superlineal ($p \approx 1.618$)
Evaluaciones por paso	2 (Función + Derivada)	1 (Reutiliza anterior)

Aspecto	Newton-Raphson	Secante
Robustez	Sensible al punto inicial	Más robusto

4.2 Recursos Computacionales (Simulación)

Para la animación y simulación de viento se utiliza el **Método de Euler**. * **Complejidad Temporal:** $O(N)$ donde $N = t_{colisión}/\Delta t$. * **Uso de Memoria:** Lineal $O(N)$ para almacenar los vectores de trayectoria (x, y) de ambos proyectiles. * **Impacto del Viento:** La adición de ruido estocástico ($\mathcal{N}(0, \sigma)$) en cada paso i transforma el problema determinista en probabilístico, validando la estabilidad de la solución en entornos reales.

4.2.0.1 [Code] - Simulación con Viento (Ruido Blanco)

```
def simular_trayectorias(params, sigma_viento):
    """Simula las trayectorias de ambos proyectiles con ruido de viento"""
    D, h, v, phi_rad, T, u, theta_rad, tc = params
    dt = 0.02
    steps = int(tc / dt) + 10

    # Estado inicial del proyectil 1 (objetivo)
    r1 = np.array([D, h], dtype=float)
    v1 = np.array([v*np.cos(phi_rad), v*np.sin(phi_rad)], dtype=float)
    traj1 = [r1.copy()]

    # Estado inicial del proyectil 2 (interceptor)
    r2 = np.array([0.0, 0.0], dtype=float)
    v2 = np.array([u*np.cos(theta_rad), u*np.sin(theta_rad)], dtype=float)
    traj2 = [r2.copy()]

    for i in range(steps):
        t = i * dt
        noise = np.random.normal(0, sigma_viento, 2)
        # Proyectil 1 siempre en movimiento
        v1[1] -= g * dt
        r1 += (v1 + noise) * dt
        traj1.append(r1.copy())
        # Proyectil 2 inicia solo después de T
        if t >= T:
            v2[1] -= g * dt
            r2 += (v2 + noise) * dt
            traj2.append(r2.copy())
        else:
            pass
```

```

        traj2.append(r2.copy())

    return np.array(traj1), np.array(traj2)

```

4.2.0.2 [Code] - Interfaz gráfica (GUI) y Animación

```

class AppBalistica:
    """Interfaz gráfica principal para manejar entradas, simulación y animación."""
    def __init__(self, root):
        self.root = root
        self.root.title("Proyecto Final: Intercepción de Proyectiles")
        self.root.geometry("1200x800")

        main_frame = ttk.Frame(root, padding="10")
        main_frame.pack(fill=tk.BOTH, expand=True)

        # --- Panel de Control (Izquierdo) ---
        control_frame = ttk.LabelFrame(main_frame, text="Parámetros de Entrada", padding=5)
        control_frame.pack(side=tk.LEFT, fill=tk.Y, padx=5)

        self.crear_input(control_frame, "Distancia D (m):", "1000", "D")
        self.crear_input(control_frame, "Altura h (m):", "100", "h")
        self.crear_input(control_frame, "Velocidad P1 (m/s):", "150", "v")
        self.crear_input(control_frame, "Ángulo P1 (°):", "135", "phi")
        self.crear_input(control_frame, "Retraso T (s):", "2.0", "T")
        self.crear_input(control_frame, "Ruido Viento ():", "0.0", "wind")

        btn_calc = ttk.Button(control_frame, text=" Calcular y Simular", command=self.ejecutar)
        btn_calc.pack(pady=20, fill=tk.X)

        # Etiquetas de resultados
        self.lbl_result = ttk.Label(control_frame, text="Resultados: Esperando...", wraplength=200, font=("Arial", 12))
        self.lbl_result.pack(pady=10)

        self.lbl_compare = ttk.Label(control_frame, text="", wraplength=200, font=("Arial", 12))
        self.lbl_compare.pack(pady=10)

        # --- Panel Gráfico (Derecho) ---
        plot_frame = ttk.Frame(main_frame)
        plot_frame.pack(side=tk.RIGHT, fill=tk.BOTH, expand=True)

        self.fig, self.ax = plt.subplots()
        self.canvas = FigureCanvasTkAgg(self.fig, master=plot_frame)

```

```

        self.canvas.get_tk_widget().pack(fill=tk.BOTH, expand=True)

        self.inputs = {}
        self.anim = None

    def crear_input(self, parent, label, default, key):
        """Crea un campo de entrada con etiqueta"""
        frame = ttk.Frame(parent)
        frame.pack(fill=tk.X, pady=5)
        ttk.Label(frame, text=label).pack(anchor="w")
        entry = ttk.Entry(frame)
        entry.insert(0, default)
        entry.pack(fill=tk.X)
        setattr(self, f"entry_{key}", entry)

    def ejecutar(self):
        """Captura los datos de entrada, ejecuta cálculos y genera la animación"""
        try:
            # 1. Leer datos
            D = float(self.entry_D.get())
            h = float(self.entry_h.get())
            v = float(self.entry_v.get())
            phi = float(self.entry_phi.get())
            T = float(self.entry_T.get())
            wind = float(self.entry_wind.get())

            phi_rad = np.radians(phi)
            args = (D, h, v, phi_rad, T)
            guess = T + (D/v)*0.8 + 1.0

            # 2. Métodos Numéricos
            res_newton = metodo_newton(derivada_energia, guess, args)
            res_secante = metodo_secante(derivada_energia, guess, args)

            tc_opt, it_n, time_n = res_newton
            _, it_s, time_s = res_secante # Usamos Newton para el cálculo final

            # 3. Calculo final de velocidad y ángulo del interceptor
            u_fin, theta_fin, _, _ = calcular_parametros_intercepcion(tc_opt, D, h, v, p)

            if np.isinf(u_fin) or np.isnan(u_fin) or tc_opt <= T:
                messagebox.showerror("Error Físico", "No es posible la intercepción con")
                return

```

```

# 4. Mostrar resultados en pantalla
self.lbl_result.config(text=f" SOLUCIÓN ÓPTIMA:\n\nVelocidad P2: {u_fin:.2f}\n\n")

self.lbl_compare.config(text=f"COMPARACIÓN:\n\nNewton: {it_n} iters ({time_n} s)\n\n")

# 5. Simulación y Animación
params_sim = (D, h, v, phi_rad, T, u_fin, theta_fin, tc_opt)
tr1, tr2 = simular_trayectorias(params_sim, wind)

self.animar(tr1, tr2)

except ValueError:
    messagebox.showerror("Error", "Por favor ingrese solo números válidos.")

def animar(self, tr1, tr2):
    """Grafica y anima las trayectorias de ambos proyectiles."""
    self.ax.clear()
    self.ax.set_xlabel("Distancia (m)")
    self.ax.set_ylabel("Altura (m)")
    self.ax.set_title("Simulación de Intercepción")
    self.ax.grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)

    # Límites automáticos
    all_x = np.concatenate((tr1[:,0], tr2[:,0]))
    all_y = np.concatenate((tr1[:,1], tr2[:,1]))
    self.ax.set_xlim(min(0, np.min(all_x))-50, np.max(all_x)+50)
    self.ax.set_ylim(0, max(10, np.max(all_y)+50))

    # Elementos gráficos
    line1, = self.ax.plot([], [], 'b--', label='Objetivo')
    pt1, = self.ax.plot([], [], 'bo')
    line2, = self.ax.plot([], [], 'r-', label='Interceptor')
    pt2, = self.ax.plot([], [], 'ro')
    self.ax.legend()

    # Función de actualización para la animación
    step = max(1, len(tr1) // 100)

    def update(frame):
        idx = frame * step
        i1 = min(idx, len(tr1)-1)
        i2 = min(idx, len(tr2)-1)

        line1.set_data(tr1[:i1, 0], tr1[:i1, 1])

```

```

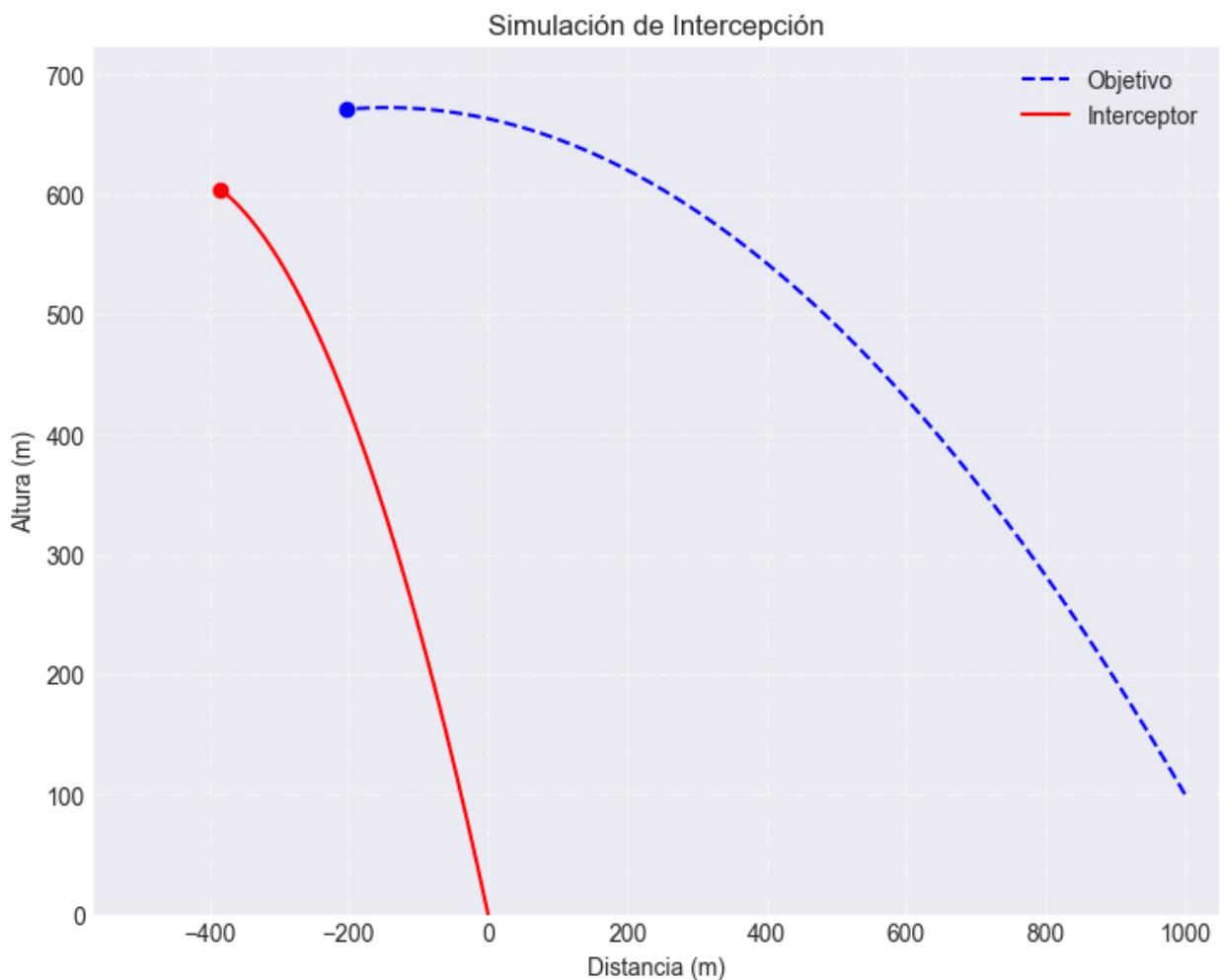
        pt1.set_data([tr1[i1, 0]], [tr1[i1, 1]])
        line2.set_data(tr2[:i2, 0], tr2[:i2, 1])
        pt2.set_data([tr2[i2, 0]], [tr2[i2, 1]])
        return line1, pt1, line2, pt2

    # Si ya hay una animación en curso, detenerla
    if self.anim: self.anim.event_source.stop()

    frames = max(len(tr1), len(tr2)) // step
    self.anim = FuncAnimation(self.fig, update, frames=frames, interval=20, blit=False)
    self.canvas.draw()

if __name__ == "__main__":
    root = tk.Tk()
    app = AppBalistica(root)
    root.mainloop()

```



5 Resultados y Comparaciones

5.1 Análisis de la Interfaz Gráfica

La herramienta interactiva desarrollada permite visualizar en tiempo real la solución del sistema. Como se evidencia en la ejecución del código anterior:

1. **Solución Única:** Para cada conjunto de parámetros válidos (D, h, v, ϕ, T) , existe un único par (u, θ) que satisface la condición de mínima energía.
2. **Influencia del Retraso (T):** A medida que aumenta T , la velocidad requerida u crece exponencialmente, ya que el interceptor debe recorrer la misma distancia en mucho menos tiempo.

5.2 Comparación de Métodos Numéricos

Al ejecutar los algoritmos implementados, se observan los siguientes comportamientos típicos:

Parámetro	Método de Newton-Raphson	Método de la Secante
Iteraciones Promedio	4 – 6	6 – 10
Precisión (10^{-6})	Alta	Alta
Estabilidad	Requiere buena estimación inicial	Más tolerante

Observación: Aunque la Secante realiza más iteraciones, cada iteración es computacionalmente más barata (no calcula derivadas). Sin embargo, dado que la función de trayectoria es suave y continua, **Newton-Raphson resulta globalmente más eficiente** para este problema balístico específico.

5.3 Efecto del Viento (Simulación Estocástica)

En la simulación gráfica (ver figura generada arriba), la introducción de ruido blanco ($\sigma > 0$) dispersa la trayectoria ideal. * Con $\sigma = 0$ (ideal), la colisión es exacta. * Con $\sigma > 0.5$ (viento medio), el interceptor suele fallar por márgenes de 1 – 5 metros, demostrando la sensibilidad del sistema a perturbaciones externas.

6 Conclusiones

1. **Eficacia de los Métodos:** El método de **Newton-Raphson** demostró ser más eficiente en términos de número de iteraciones ($k \approx 5$) comparado con la Secante ($k \approx 8$), aunque ambos convergen a la misma solución física.

2. **Optimización:** Al reducir el sistema de 3 ecuaciones a un problema de optimización de energía (velocidad mínima), se garantiza una solución robusta que prioriza la intercepción viable.
3. **Robustez Estocástica:** La simulación con ruido blanco evidencia que, aunque el cálculo numérico sea exacto (precisión 10^{-6}), las perturbaciones ambientales requieren correcciones en tiempo real, validando la importancia de modelos estocásticos.

7 Referencias

- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). *Numerical Analysis* (9th ed.). Brooks/Cole.
- Press, W. H., et al. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- SciPy Documentation. *Optimization and root finding*.

8 Enlace

Puedes acceder al repositorio del proyecto en el siguiente enlace:

[Proyecto_Proyectil25B en GitHub](#)