

# チエバの定理の高次元一般化と Lean4/mathlib4への形式化

秋田 隼

2026/1/9



# 要旨

本研究は、2次元の古典的シェバの定理を出発点として、 $n$ 次元アフィン空間における適切な一般化およびその逆を定式化し、Lean4/mathlib4 上での形式化を目標とする。主な貢献は以下である。

- (数学)  $n$ 次元アフィン空間でのシェバ型定理とその逆の明確なステートメント。
- (形式化) 既存の mathlib4 の構造を調査し、再利用可能部分と不足部分を切り分ける設計指針。
- (実装) 不足する補題・定義をモジュール化して追加し、主定理の機械検証を通す。



# 目次

要旨	i
<b>第1章 序論</b>	1
1.1 研究背景と動機 . . . . .	1
1.2 本研究の目的 . . . . .	1
1.3 本研究の貢献 . . . . .	1
1.4 本論文の構成 . . . . .	2
<b>第2章 概念の紹介</b>	3
2.1 アフィン空間 . . . . .	3
2.2 アフィン写像 . . . . .	3
2.3 重心座標 . . . . .	4
2.4 チェビアン . . . . .	4
2.5 チェビアンの足 . . . . .	4
2.6 単体 (Simplex) . . . . .	5
2.7 面 (Face) . . . . .	5
2.8 共点性 . . . . .	5
<b>第3章 チェバの定理(2次元)とアフィン性</b>	7
3.1 チェバの定理(2次元)の主張 . . . . .	7
3.2 チェバの定理がアフィンな結果であること . . . . .	7
<b>第4章 高次元への一般化の候補</b>	9
4.1 一般化の設計空間 . . . . .	9
4.2 候補 A : 周囲空間のみ高次元化 . . . . .	9
4.3 候補 B : $n$ 単体版,solopede,1-チェビアン . . . . .	9
4.4 候補 D : $n$ 単体版,solopede,2-チェビアン . . . . .	9
4.5 候補 C : $n$ 単体版,multipede . . . . .	9

---

第 5 章	先行プロジェクトの紹介	11
5.1	Lean3 時代の形式化	11
5.2	Aristotle.AI (Harmonic 社) を用いた形式化	11
5.3	$n$ 次元アフィン空間に一般化された初の形式化	11
第 6 章	mathlib4 に加える一般化の選定	13
6.1	評価軸	13
6.2	候補の比較	13
6.3	採用する一般化	14
第 7 章	採用した一般化チェバの定理とその逆の自然言語証明	15
7.1	補題群	15
7.2	主定理	15
第 8 章	既存モジュールの転用可能性	17
8.1	転用できる部分	17
8.2	不足している部分	17
第 9 章	追加すべきライブラリと実装上の工夫	19
9.1	追加ライブラリ一覧 (ファイル／モジュール単位)	19
9.2	各モジュールの設計方針	19
9.3	実装の工夫事項・特記事項	19
第 10 章	本ライブラリで示せる別定理と発展例	21
10.1	メネラウスの定理	21
第 11 章	結論と今後の展望	23
11.1	結論	23
11.2	今後の課題	23
11.3	Lean4 普及と形式化研究の展望	23
付録 A	付録：主要 Lean4 コード抜粋	25
付録 B	付録：概念対応表 (数学用語 $\leftrightarrow$ Lean4 の型／定義)	27
付録 C	付録：実装ログ (ハマりどころ集)	29
謝辞		31





# 第1章

## 序論

### 1.1 研究背景と動機

近年の生成 AI は、言語モデルに推論能力を付与する工夫や、計算ツール・検証器との連携によって急速に性能を向上させている。特に 2025 年には、複数の AI モデルが国際数学オリンピック (IMO) の問題セットに対して金メダル基準 (gold-medal standard) に相当する得点を達成したと報告された [1]。

一方で、自然言語のみで推論する LLM は、もっともらしいが誤りを含む出力（ハルシネーション）を生成しうる。定理証明器（例：Lean4）を統合した枠組みでは、自然言語の解法案を全部または部分的に形式化して検証し、失敗時はフィードバックによる修正ループを回せる。そのため、形式検証が及ぶ範囲についてはハルシネーションを大幅に抑制でき、結果として出力全体に対するハルシネーションの頻度も抑えられる。ただし、問題文の形式化や自然言語への説明生成には依然として誤りが入りうる。よって、「形式検証の及ぶ範囲を拡大する」、「問題文の形式化精度を向上させる」ことで生成 AI の数学力は向上すると考えられる。

### 1.2 本研究の目的

本研究の目的は、チェバの定理の高次元一般化およびその逆を Lean4/mathlib4 に追加可能な形で整備し、生成 AI の数学力向上に寄与する基盤を拡充することである。

### 1.3 本研究の貢献

- チェバの定理の高次元一般化の候補を「数学的自然さ」「形式化コスト」「再利用性」の観点で比較し、mathlib4 に適した版を選定する。
- 選定した版について、自然言語証明を整理し、Lean4 への翻訳方針（依存関係・不足補題）を明確化する。

- 不足する補助ライブラリをモジュールとして実装し、主定理とその逆を機械検証する。

## 1.4 本論文の構成

第2章で以降に登場する数学的概念を定義し、第3章で2次元チエバとアフィン性を整理する。第4章でどのような一般化が考えられるかを述べ、第5章で先行プロジェクトを紹介する。第6章でmathlib4へ導入する一般化を選定し、第7章で数学的証明を与える。第8章以降で形式化の詳細、再利用可能性、追加ライブラリ設計、応用例を述べる。

## 第2章

# 概念の紹介

本章では、本論文の以降の章で登場する数学的概念を定義する。これらの概念は、チェバの定理の高次元一般化を理解し、形式化するために必要不可欠である。チェバの定理を Lean4/mathlib4 で形式化するために必要な数学的構造を整理する。以下では、各概念の数学的定義と、mathlib4 における対応する型・構造を明示する。

### 2.1 アフィン空間

**定義 2.1** (アフィン空間). 体  $k$  上のベクトル空間  $V$  に対して、集合  $P$  が  $V$  上のアフィン空間であるとは、以下の条件を満たす写像  $+ : P \times V \rightarrow P$  (点とベクトルの和) が存在することである：

- 任意の  $p \in P$  に対して、 $p + \mathbf{0} = p$  ( $\mathbf{0}$  は  $V$  の零ベクトル)
- 任意の  $p \in P$  と  $v, w \in V$  に対して、 $(p + v) + w = p + (v + w)$
- 任意の  $p, q \in P$  に対して、 $p + (q - p) = q$  を満たすベクトル  $q - p \in V$  が一意に存在する

mathlib4 では、`AffineSpace V P` という型クラスがこの構造を提供する。ここで、`V` はベクトル空間、`P` は点の型である。

### 2.2 アフィン写像

**定義 2.2** (アフィン写像). アフィン空間  $P_1$  (ベクトル空間  $V_1$  上) からアフィン空間  $P_2$  (ベクトル空間  $V_2$  上) へのアフィン写像とは、線形写像  $L : V_1 \rightarrow V_2$  と点  $b \in P_2$  が存在して、任意の  $p \in P_1$  に対して

$$f(p) = L(p - p_0) + b$$

と表される写像  $f : P_1 \rightarrow P_2$  である ( $p_0$  は  $P_1$  の任意の基点)。

`mathlib4` では、`AffineMap k P ⊗ P` がアフィン写像の型として定義されている。アフィン写像は平行性と比を保つ変換である。

## 2.3 重心座標

**定義 2.3** (重心座標). アフィン空間  $P$  上の  $n+1$  個の点  $p_0, p_1, \dots, p_n$  がアフィン独立 (affinely independent) であるとき、任意の点  $p \in P$  は

$$p = \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$$

と一意に表される。このとき、 $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  を  $p$  の  $p_0, p_1, \dots, p_n$  に関する重心座標 (barycentric coordinates) という。

三角形  $\triangle ABC$  の場合、任意の点  $P$  は  $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$  ( $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ) と表され、 $(\alpha, \beta, \gamma)$  が  $P$  の重心座標である。

`mathlib4` では、`Finsset.affineCombination` や関連する補題が重心座標の計算をサポートする。

## 2.4 チェビアン

**定義 2.4** (チェビアン (2次元)). 三角形  $\triangle ABC$  において、頂点  $A$  と対辺  $BC$  上の点  $D$  を結ぶ直線  $AD$  を、頂点  $A$  から引いたチェビアン (cevian) という。同様に、 $BE$  ( $E$  は辺  $CA$  上)、 $CF$  ( $F$  は辺  $AB$  上) もチェビアンである。

チエバの定理は、3本のチェビアンが1点で交わる条件を与える定理である。

## 2.5 チェビアンの足

**定義 2.5** (チェビアンの足). 三角形  $\triangle ABC$  において、頂点  $A$  から引いたチェビアン  $AD$  と対辺  $BC$  の交点  $D$  を、チェビアン  $AD$  の足 (foot) という。同様に、 $E$  はチェビアン  $BE$  の足、 $F$  はチェビアン  $CF$  の足である。

チエバの定理では、各辺上の点  $D, E, F$  がチェビアンの足として機能する。形式化においては、これらの点が適切な辺上にあることを保証する条件が必要となる。

## 2.6 単体 (Simplex)

**定義 2.6** (単体).  $n + 1$  個のアフィン独立な点  $p_0, p_1, \dots, p_n$  を含むアフィン空間  $P$  において、これらの点の凸包を  $n$  次元単体 ( $n$ -simplex) という。すなわち、 $n$  次元単体は

$$\left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i \middle| \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

で定義される。

三角形は 2 次元単体、四面体は 3 次元単体の例である。`mathlib4` では、`Geometry.Euclidean.Simplex` モジュールに単体の定義が存在する。

## 2.7 面 (Face)

**定義 2.7** (面).  $n$  次元単体  $S$  の頂点集合の部分集合  $F$  に対して、 $F$  の要素の凸包を  $S$  の面 (face) という。特に、 $k + 1$  個の頂点からなる面を  $k$  次元面という。

三角形 (2 単体) の場合、0 次元面は頂点、1 次元面は辺、2 次元面は三角形全体である。

**定義 2.8** (対向する).  $n$  次元単体  $S$  の頂点  $v$  に対して、 $v$  を含まない  $n - 1$  次元面を  $v$  の対向面 (opposite face) という。また、 $S$  の頂点  $v$  と面  $F$  について、 $F$  が  $v$  の対向面であるとき、 $F$  は  $v$  に対向する (opposite to  $v$ ) という。

例えば、三角形  $\triangle ABC$  において、頂点  $A$  の対向面は辺  $BC$  である。 $n$  次元単体の各頂点に対し、その頂点を含まない  $n - 1$  次元面が対向面として一意に定まる。

## 2.8 共点性

**定義 2.9** (共点性). 有限個の直線または線分が 1 点で交わるとき、それらは共点 (concurrent) であるという。

チエバの定理は、複数のチエビアンが共点であるための条件を与える定理である。



## 第3章

# チェバの定理(2次元)とアフィン性

### 3.1 チェバの定理(2次元)の主張

**定理 3.1** (チェバの定理 (2 次元)). 三角形  $\triangle ABC$  の各辺  $BC, CA, AB$  またはその延長線上にそれぞれ点  $D, E, F$  をとる (頂点とは異なる)。このとき、3 直線  $AD, BE, CF$  が 1 点で交わるための必要十分条件は、

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

が成り立つことである。

### 3.2 チェバの定理がアフィンな結果であること

チェバの定理の主張には、一見すると線分の長さ ( $BD, DC$  など) が現れるため、ユークリッド幾何に依存する定理のように見えるかもしれない。しかし、実際には定理の条件は線分の長さの比  $\frac{BD}{DC}$  のみで記述されており、これらの比はアフィン変換で不变である。したがって、チェバの定理は本質的にアフィン幾何の結果である。この結果は `mathlib4` のどのライブラリにファイルを追加するかを決定する際に重要となる。

#### 3.2.1 アフィン変換と比の不変性

アフィン変換とは、平行性と比を保つ変換である。より正確には、アフィン空間  $\mathbb{R}^n$  上の変換  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が  $\varphi(x) = Ax + b$  ( $A$  は正則行列、 $b$  はベクトル) の形で表されるとき、 $\varphi$  をアフィン変換という。

アフィン変換の重要な性質として、同一直線上にある 3 点  $P, Q, R$  ( $Q$  は  $P$  と  $R$  の間) に

対して、比  $\frac{PQ}{QR}$  はアフィン変換で不变である：

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{QR}} = \frac{\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}}{\overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)}}$$

これは、アフィン変換が線形変換と平行移動の合成であり、線形変換がベクトルの比を保つことから従う。

### 3.2.2 重心座標による説明

三角形  $\triangle ABC$  内の任意の点  $P$  は、重心座標 (barycentric coordinates) を用いて

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

と一意に表される。ここで、 $\alpha, \beta, \gamma$  は実数である。

辺  $BC$  上の点  $D$  は、 $D = (1-t)B + tC$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) と表せる。このとき、有向比は

$$\frac{BD}{DC} = \frac{t}{1-t}$$

となる。同様に、 $E = (1-u)C + uA$ 、 $F = (1-v)A + vB$  とすると、

$$\frac{CE}{EA} = \frac{u}{1-u}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{v}{1-v}$$

である。

3直線  $AD, BE, CF$  が1点  $P$  で交わることは、 $P$  の重心座標が

$$P = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

と表され、かつ  $P$  が各辺上にあることと同値である。この条件は、重心座標の比のみで記述され、ユークリッド距離には依存しない。

### 3.2.3 アフィン同値性

以上の考察から、チェバの定理は以下の意味でアフィンな結果であることがわかる：

- 定理の条件 (比の積=1) は、アフィン変換で不变な量 (比) のみで記述されている。
- 定理の結論 (3直線の共点性) も、アフィン変換で保存される性質である。
- したがって、任意のアフィン変換を施しても、チェバの定理の真偽は変わらない。

以上より、チェバの定理はユークリッド距離や角度に依存せず、アフィン構造 (平行性、比、共線性) のみに基づく定理であることが示された。

## 第4章

# 高次元への一般化の候補

### 4.1 一般化の設計空間

2次元のチェバの定理を非公式に表現すれば、「三角形の頂点から対辺に線分を下ろした時」の定理と言える。言い換えると、「2-単体の各頂点から対向する1次元面に1次元のチェビアンを下ろした時」の定理と言える。自然数が現れる箇所の扱い次第で一般化にバリエーションが存在する。

### 4.2 候補A：周囲空間のみ高次元化

$n$ 次元アフィン空間に2次元の三角形を埋め込み、周囲空間のみ高次元化する。2-単体の各頂点から対向する1-面に1-チェビアンを下ろした時の( $n$ 次元空間内の)定理。定理の主張自体は大きく変わらない。

### 4.3 候補B： $n$ 単体版,solopede,1-チェビアン

$n$ -単体の各頂点から対向する $n-1$ -面への1-チェビアンを下ろした時の定理。

### 4.4 候補D： $n$ 単体版,solopede,2-チェビアン

$n$ -単体の各頂点から対向する $n-1$ -面への2-チェビアンを下ろした時の定理。

### 4.5 候補C： $n$ 単体版,multipede

$n$ -単体の各頂点から対向する $k$ -面( $1 \leq k \leq n-1$ )への1-チェビアンを下ろした時の定理。

第6章で詳細な比較を行う。



## 第5章

# 先行プロジェクトの紹介

過去にいくつかチェバの定理の形式化に関する先行研究があったので紹介する。

### 5.1 Lean3 時代の形式化

期間: 2021年12月～2023年7月

GitHub: <https://github.com/leanprover-community/mathlib3/pull/10632>

### 5.2 Aristotle.AI (Harmonic社) を用いた形式化

期間: 2025年12月～2026年1月

GitHub: <https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/33388>

Boris Alexeev 氏による試み。Harmonic 社が提供する Lean プログラム用の AI サービス Aristotle.AI を用いて形式化した。全てのコードが Lean の機械検証を通過し、安全性が保証された。しかし、2次元のチェバの定理のみを形式化しており、高次元への一般化は行われていなかったため、mathlib4 に追加するには一般性が足りないとして採用されなかった。

### 5.3 $n$ 次元アフィン空間に一般化された初の形式化

期間: 2026年1月～現在

GitHub: <https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/33409>

Joseph Myers 氏による試み。過去の不十分な事例を踏まえて、 $n$  次元アフィン空間に一般化されたチェバの定理を形式化した。おそらく現時点では最も一般性が高い形式化であり、

`mathlib4` に追加する最適な候補であると考えられる。一般化チエバの定理の順方向のみを形式化している。現在 PR レビュー中。

## 第6章

# mathlib4 に加える一般化の選定

### 6.1 評価軸

- 数学的自然さ（数学的に自然な一般化であるか）
- 形式化コスト（既存定義・補題の有無）
- 再利用性（他定理への応用のしやすさ）

### 6.2 候補の比較

#### 6.2.1 候補 A：周囲空間のみ高次元化

定理の主張が変わらないため、一般化としての価値が低い。

#### 6.2.2 候補 B： $n$ 単体版,solopede,1-チェビアン

定理の主張が変わらないため、一般化としての価値が低い。

#### 6.2.3 候補 C： $n$ 単体版,solopede,2-チェビアン

定理の主張が変わらないため、一般化としての価値が低い。

#### 6.2.4 候補 D： $n$ 単体版,multipede

定理の主張が変わらないため、一般化としての価値が低い。

### 6.3 採用する一般化

本稿では以降候補 B の一般化を採用する。

## 第7章

# 採用した一般化チェバの定理とその逆の自然言語証明

### 7.1 補題群

#### 7.1.1 補題 1

*Proof.*

□

#### 7.1.2 補題 2

*Proof.*

□

### 7.2 主定理

**定理 7.1** (チェバの定理).

*Proof.*

□



## 第8章

# 既存モジュールの転用可能性

8.1 転用できる部分

8.2 不足している部分



## 第9章

# 追加すべきライブラリと実装上の工夫

9.1 追加ライブラリ一覧（ファイル／モジュール単位）

9.2 各モジュールの設計方針

9.3 実装の工夫事項・特記事項



## 第10章

# 本ライブラリで示せる別定理と発展例

### 10.1 メネラウスの定理



## 第11章

# 結論と今後の展望

### 11.1 結論

チェバの定理の  $n$  次元の一般化を「各頂点に対向する  $n - 1$  次元面またはその延長上の点を結ぶ 1 次元チェビアンが共点する条件」として定式化。既に Joseph Myers 氏によって形式化された順方向のチェバの定理に加えて、逆方向のチェバの定理を形式化し、mathlib4 に PR を提出した。

### 11.2 今後の課題

コミュニケーション不足によりチェバの定理の順方向の形式化については、Joseph Myers 氏に先行されてしまった。今回培った OSS 開発の作法に従い、次回以降のプロジェクトに取り組んでいきたい。

### 11.3 Lean4 普及と形式化研究の展望

現在 Lean4 の Autoformalization という技術開発が進んでおり、自然言語で記述した数学の証明をそのまま Lean4 の形式言語に書き換えることが目指されている。今回は個別の定理を形式化すると言うプロジェクトであったが、この技術を用いればある数学的な証明を自然言語で記述するだけで、立ちどころに形式証明が得られると考えられている。この技術は、Lean4 研究を飛躍的に促進すると考えられる。個別の定理の形式化だけでなく、この Autoformalization に関する見識も深めていきたい。



## 付録A

### 付録：主要 Lean4 コード抜粹

```
-- import ... (後で差し替え)
-- theorem ... := by
-- ...
```



## 付録B

付録：概念対応表（数学用語 ↔ Lean4の型／定義）



## 付録C

付録：実装ログ（ハマりどころ集）



# 謝辭



# 参考文献

- [1] Google DeepMind, *Advanced version of Gemini with Deep Think officially achieves gold-medal standard at the International Mathematical Olympiad*, 2025.
- [2] Dov Samet, *An Extension of Ceva's Theorem ton-Simplices*, 2021.