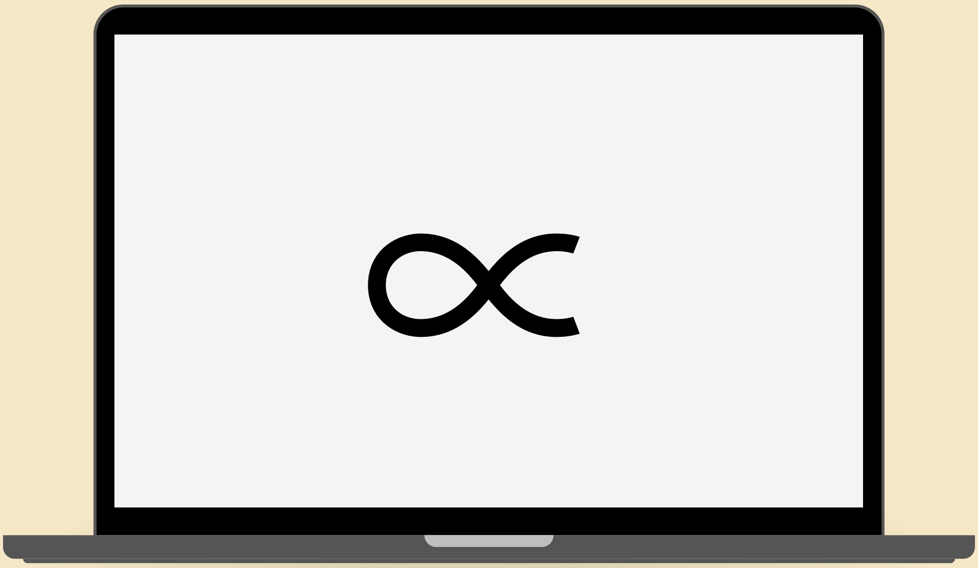
Universidad de La Laguna

Reducción entre 3DM y PARTITION



Complejidad Computacional

2021-2022

Javier Correa Marichal
José Daniel Escánez Expósito
Alejandro Peraza González
Nerea Rodríguez Hernández

Índice

1. Problema de la Partición

1.1. Problemas involucrados

PROBLEMA DE LA PARTICIÓN

Entrada: Un conjunto finito A y el "tamaño" $s(a) \in Z^{+}$ para cada $a \in A$.

Pregunta: ¿Existe un subconjunto $A' \subseteq A$ tal que $\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A - A'} s(a)$?

PROBLEMA DEL EMPAREJAMIENTO TRIDIMENSIONAL

Entrada: Un conjunto $M \subseteq W x X x Y$, donde W, X, e Y son conjuntos disjuntos que tienen el mismo número q de elementos.

Pregunta: ¿Contiene M un emparejamiento, el cual sea un subconjunto $M' \subseteq M$ tal que $|M'| = q$ y en el que no coincida ninguna coordenada?

1.2. Demostración de NP-completitud

Teorema: El problema de la partición es NP-completo

Prueba: Es sencillo demostrar que $PARTITION \subseteq NP$, ya que un algoritmo no determinista solo necesita computar un subconjunto $A' \subseteq A$ y comprobar en tiempo polinomial que la suma de los tamaños de los elementos en A' es la misma que la de los elementos en $A - A'$.

Sean los conjuntos W, X, Y con $|W| = |X| = |Y| = q$, y $M \subseteq W x X x Y$ es una instancia arbitraria del Problema del Emparejamiento Tridimensional. Nos referiremos a los elementos de estos conjuntos de la siguiente forma:

$W = \{w_1, w_2, \dots, w_q\}$
$X = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$
$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$
$M = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$

donde $k = |M|$. Debemos construir un conjunto A, y un tamaño $s(a) \in Z^{+}$ para cada $a \in A$, tal que A contiene un subconjunto A' que satisfaga

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A - A'} s(a)$$

si y solo si M contiene un emparejamiento.

El conjunto A contendrá un total de $k + 2$ elementos y se construirá en dos pasos. Los primeros k elementos de A son $\{a_i: 1 \leq i \leq k\}$, donde el elemento a_i está asociado con la tripleta $m_i \in M$. El tamaño $s(a_i)$ de a_i será especificado dando su representación binaria, en términos de una cadena de ceros y unos dividida en $3q$ "zonas" de $p = \lceil log_2(k + 1) \rceil$ bits cada una. Cada una de estas zonas está etiquetada por un elemento de $W \cup X \cup Y$, como se muestra en la siguiente figura:

w_1	w_2	...	w_q	x_1	x_2	...	x_q	y_1	y_2	...	y_q

La representación de $s(a_i)$ depende de la tripleta correspondiente $m_i = (w_{f(i)}, x_{g(i)}, y_{h(i)}) \in M$ (donde f, g y h son sólo las funciones que dan los subíndices de la primera, segunda y tercera componentes para cada m_i). Tiene un 1 en la posición del bit más a la derecha de las zonas etiquetadas por $w_{f(i)}$, $x_{g(i)}$ y $y_{h(i)}$ y 0 en todas las demás. Como alternativa, podemos escribir

$$s(a_i) = 2^{p(3q-f(i))} + 2^{p(2q-g(i))} + 2^{p(q-h(i))}$$

puesto que cada $s(a_i)$ puede expresarse en binario con no más de $3pq$ bits, está claro que $s(a_i)$ puede construirse a partir de la instancia 3DM dada en tiempo polinomial.

Lo importante que hay que observar sobre esta parte de la construcción es que, si sumamos todas las entradas de cualquier zona, sobre todos los elementos de $\{a_i: 1 \leq i \leq k\}$, el total nunca puede superar $k = 2^p - 1$. Por lo tanto, al sumar $\sum_{a \in A'} s(a)$ para cualquier subconjunto $A' \subseteq \{a_i: 1 \leq i \leq k\}$, nunca habrá "carries" de una zona a la siguiente. De ello se deduce que si definimos

$$B = \sum_{j=0}^{3q-1} 2^{pj}$$

(que es el número cuya representación binaria tiene un 1 en la posición más a la derecha posición de cada zona), entonces cualquier subconjunto $A' \subseteq \{a_i: 1 \leq i \leq k\}$ satisfará

$$\sum_{a \in A'} s(a) = B$$

si y solo si $M' = \{m_i : a_i \in A'\}$ es un emparejamiento para M.

El paso final de la construcción especifica los dos últimos elementos de A. Estos están denotados por b_1 y b_2 y tienen tamaños definidos por

$$s(b_1) = 2\left(\sum_{i=1}^{k} s(a_i)\right) - B$$

y

$$s(b_2) = \left(\sum_{i=1}^{k} s(a_i)\right) + B$$

Ambos de estos pueden ser especificados en binario con no más de $3pq + 1$ bits y, por tanto, pueden ser construidos en tiempo polinomial en el tamaño de la instancia de 3DM dada.

Supongamos que tenemos un subconjunto $A' \subseteq A$ tal que

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A - A'} s(a)$$

Entonces, ambas sumas han de ser iguales a $2\sum_{i=1}^{k} s(a_i)$, y uno de los 2 conjuntos, A' o $A - A'$, contiene b_1 pero no b_2. Se deduce que los elementos restantes de este conjunto son un subconjunto de $\{a_i : 1 \leq i \leq k\}$ cuyos tamaños suman hasta B; por tanto, de acuerdo a lo comentado hasta ahora, este subconjunto correspondería con un emparejamiento M' en M. De igual forma, si $M' \subseteq M$ es un emparejamiento, entonces el conjunto $\{b_1\} \cup \{a_i : m_i \in M'\}$ forma el conjunto A' deseado para la instancia de PARTITION. Por tanto, se demuestra que 3DM $\propto$ PARTITION, y el teorema ha sido probado.

2. Referencias

Lavrov, M. (2020, 25 marzo). The Bipartite Matching Problem. University of Illinois Urbana-Champaign, College of Liberal Arts & Sciences, Department of Mathematics. Recuperado 18 de enero de 2022, de https://faculty.math.illinois.edu/~mlavrov/slides/482-spring-2020/slides21.pdf

Wikipedia contributors. (2021a, octubre 16). Partition problem. Wikipedia. Recuperado 18 de enero de 2022, de https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_problem

Wikipedia contributors. (2021b, noviembre 6). *3-dimensional matching*. Wikipedia. Recuperado 18 de enero de 2022, de https://en.wikipedia.org/wiki/3-dimensional_matching

Garey, M. R., & Johnson, D. S. (2000). Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness (22.a ed.). W. H. Freeman and Company.