Solusi Ujian 1 Olimpiade SMP Intermediate

Arief Anbiya

August 20, 2019

1. - Nilai x yg memenuhi $2 \leq x^2 - x < 6$ adalah nilai x yang memenuhi $2 \leq x^2 - x$ dan juga memenuhi $x^2 - x < 6$.

   $$2 \leq x^2 - x \implies x^2 - x - 2 \geq 0 \implies (x-2)(x+1) \geq 0$$

   maka solusinya $x \geq 2$ atau $x \leq -1$.

   $$x^2 - x - 6 < 0 \implies (x-3)(x+2) < 0$$

   maka solusinya $-2 < x < 3$.
   Jadi solusi dari $2 \leq x^2 - x < 6$ adalah

   $$(-2 < x \leq -1) \cup (2 \leq x < 3)$$

   - $\frac{2}{x} \geq x + 1$
   Cara 1:

   $$\frac{2}{x} - (x+1) \geq 0 \implies \frac{2 - x(x+1)}{x} \geq 0$$
   $$\frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 0 \implies \frac{(x+2)(x-1)}{x} \leq 0$$

   kemudian buat garis bilangan dengan daerah yang dipisah oleh $x = 0, 1, -2$. Solusinya adalah
   $$(0 < x \leq 1) \cup (x \leq -2)$$

   Cara 2:
   Bagi dua kasus, $x > 0$ dan $x < 0$.

     - $x > 0$:

       $$\frac{2}{x} \geq x + 1 \implies 2 \geq x(x+1) \implies 0 \geq x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

       solusinya $(-2 \leq x \leq 1) \cap x > 0$, yaitu $0 < x \leq 1$.
     - $x < 0$:

       $$\frac{2}{x} \geq x + 1 \implies 2 \leq x(x+1) \implies 0 \leq x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

       solusinya $(-2 \geq x \cup x \geq 1) \cap x < 0$, yaitu $x \leq -2$.

Jadi total solusinya: $(0 < x \leq 1) \cup (x \leq -2)$

2. *Perhatikan bahwa

$$4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3 \implies 4a^3+4b^3 \geq (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$\implies 4a^3+4b^3 \geq a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$$
$$a^3+b^3 \geq (a^2b+b^2a) \implies a^2(a-b)+b^2(b-a) \geq 0$$

$(a-b)(a^2-b^2) = (a-b)^2(a+b) \geq 0 \longleftarrow$ ketaksamaan ini benar dan bisa dipakai dari awal

Jadi kita bisa mulai pembuktiannya dari ketaksamaan terakhir.

Bukti:

$$(a-b)^2(a+b) = (a-b)(a^2-b^2) \geq 0 \implies a^2(a-b)+b^2(b-a) \geq 0$$
$$\implies a^3+b^3 \geq (a^2b+b^2a) \implies 3(a^3+b^3) \geq 3(a^2b+b^2a)$$
$$\implies 4a^3+4b^3 \geq a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$$
$$\implies 4a^3+4b^3 \geq (a+b)(a^2+2ab+b^2) \implies 4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$$

3. m dan n adalah akar-akar dari $x^2-2px-5q$ itu artinya m, n solusi dari $x^2-2px-5q=0$, maka

$$x^2-2px-5q = (x-m)(x-n) = x^2-(m+n)x+mn$$

, dengan argumen serupa kita punya

$$x^2-2mx-5n = (x-p)(x-q) = x^2-(p+q)+pq$$

Jadi

$$m+n = 2p, \ \ mn = -5q$$
$$p+q = 2m, \ \ pq = -5n$$

sekarang jumlahkan $m+n$ dan $p+q$ maka kita dapat:

$$m+n+p+q = 2p+2m = p+m+p+m$$
$$\implies n+q = m+p$$

Kemudian perhatikan bahwa dengan menulis $n = 2p-m$ dan $q = 2m-p$, kita bisa peroleh

$$mn = -5q \implies m(2p-m) = -5(2m-p) \implies 2mp = m^2-10m+5p$$

dan

$$pq = -5n \implies p(2m-p) = -5(2p-m) \implies 2mp = p^2-10p+5m$$

maka

$$m^2 - 10m + 5p = p^2 - 10p + 5m$$
$$(m-p)(m+p) - 10(m-p) - 5(m-p) = 0$$
$$(m-p)[m+p-15] = 0$$

karena $m \neq p$ maka haruslah $m + p = 15$. Jadi $p + q + m + n = m + p + m + p = 30$.