Formulario Elettrotecnica T

Edoardo Carra'

May 12, 2022

1 Circuiti elettrici

Def circuito: interconnessione di multipoli.
Def nodo: punto di incontro di 2 o più rami.
Def nodo funzionale: punto di interconnessione di almeno 3 bipoli.
Def ramo: composizione di bipolo più morsetto
Def lato: elemento topologico formato dalla serie di componenti connessi a 2 nodi funzionali.
Def maglia: insieme di rami che formano una linea chiusa.
Def potenza: $p(t) = v(t) * i(t)$
Def energia: $\int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dx$
Def risolvere un circuito: calcolare tensioni e correnti (to),per ogni lato della rete.

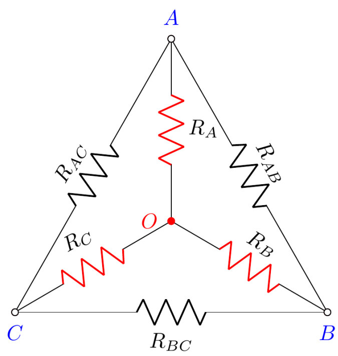
Teorema di Tellegen: la somma delle potenze generate all'interno di un circuito è pari alla somma delle potenze assorbite. $\sum_{n=1}^{N_G} P_n = \sum_{k=1}^{N_U} P_k$

1.1 Componenti elettrici

Def componenti passivi: $E(t) >= 0 \forall t$
Def componenti attivi: $E(t) <= 0$ per almeno una t
Def controllato in tensione: $i = f(v)$
Def controllato in corrente: $v = g(i)$
Def con memoria: la tensione e la corrente all'istante t dipendono da grandezze al tempo $t_1 < t$
Def senza memoria: la tensione e la corrente all'istante t non dipendono da grandezze al tempo $t_1 < t$

1.1.1 Resistenza e conduttanza

$$\mathbf{V{=}RI}\ \ \mathbf{V{=}}\frac{I}{G}$$
$[\Omega]$ e $[\Omega^{-1}]$



Da stella a triangolo:

- $R_A = \dfrac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}}$
- $R_B = \dfrac{R_{BC}R_{AB}}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}}$
- $R_C = \dfrac{R_{CA}R_{BC}}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}}$

Da triangolo a stella:

- $R_{AB} = \dfrac{R_AR_B+R_BR_C+R_CR_A}{R_C}$
- $R_{BC} = \dfrac{R_AR_B+R_BR_C+R_CR_A}{R_A}$
- $R_{CA} = \dfrac{R_AR_B+R_BR_C+R_CR_A}{R_B}$

Nel caso in cui $R_{xy} = R_\Delta$ si ha che $R_\star = \dfrac{R_\Delta}{3}$. Oppure nel caso in cui R_x=$R_\star$ si ha che $R_\Delta = 3R_\star$

1.1.2 Condensatore

$$\mathbf{I=C}\frac{dv(t)}{dt}$$
$$[F]$$

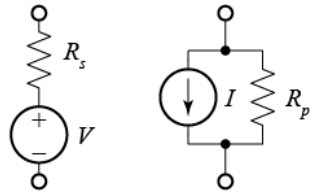
- $P(t) = v(t)i(t) = v(t)C\dfrac{dv(t)}{dt}$ può assorbire potenza ma anche erogarla.
- La tensione definisce lo stato energetico: V è una **variabile di stato** per i componenti capacitativi. $E(t) = \dfrac{CV_2^2}{2} - \dfrac{CV_1^2}{2}$
- Il condensatore può comportarsi come un componente attivo oppure come un componente passivo.
- È un componente con memoria.
- I condensatori reali si rappresentano con una resistenza in parallelo. (perché non in serie come i generatori?)
- Non sono permesse variazioni istantanee della tensione.

1.1.3 Induttanza

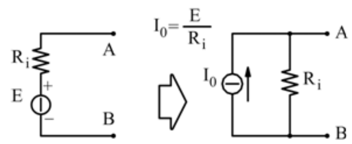
$$\mathbf{V=L}\frac{di(t)}{dt}$$
$$[H]$$

- $P(t) = v(t)i(t) = i(t)L\dfrac{di(t)}{dt}$ può assorbire potenza ma anche erogarla.
- La corrente definisce lo stato energetico: V è una **variabile di stato** per i componenti induttivi. $E(t) = \dfrac{LI_2^2}{2} - \dfrac{LI_1^2}{2}$
- Il condensatore può comportarsi come un componente attivo oppure come un componente passivo.
- È un componente con memoria.
- Le induttanze reali si rappresentano con un'induttanza in serie.(perché non in parallelo come i generatori?)
- Non sono permesse variazioni istantanee della corrente.

1.1.4 Generatori reali di corrente e di tensione



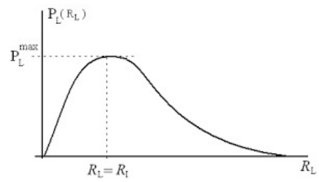
Teorema del generatore equivalente: un generatore di corrente A in parallelo con una resistenza R è equivalente a un generatore di tensione E in serie alla stessa resistenza R, di valore $E = AR$.

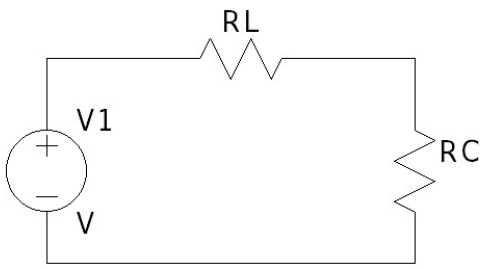


Ricorda, due generatori ideali di tensione possono essere messi in serie, ma mai in parallelo. Invece due generatori ideali di corrente non possono mai essere messi in serie. Questo perché altrimenti non sarebbero rispettate LKT e LKC.

1.2 Teorema del massimo trasferimento di potenza

1.2.1 Generatori reali di corrente e di tensione





Il massimo valore della potenza trasferita dal generatore alla resistenza di carico si ottiene per $R_c = R_l$ per un valore $P_{Lmax} = \dfrac{E^2}{4R}$. Dal grafico si può notare che la potenza tende a 0 per $R_c- > \infty$ e per $R_c = 0$. Nel primo caso il circuito tende a un aperto non facendo circolare corrente nel circuito, mentre nel secondo caso la resistenza tende se $R_c < R_l$ la potenza dissipata su R_l è maggiore di quella dissipata su R_c.

2 Metodi di analisi

2.1 Metodo di Tableau

Si individuano N nodi e L lati. Si imposta un sistema di N-1 LKC e L-N+1 LKT indipendenti (cioè le maglie non si devono intersecare). Il sistema creato sarà composto da 2L equazioni in 2L incognite(2 per ramo).

2.2 PSE

Le variabili di rete(effetti) si possono ottenere come sovrapposizione delle risposte dovute alle singole cause. Si procede attivando un generatore alla volta, passivando tutti gli altri.

N.B. non si può applicare il PSE alle potenze, in quanto non si trattano di grandezze lineari.

2.3 Teorema di Thevenin

Se il circuito da semplificare non è accoppiato con il carico è possibile applicare il teorema di Thevenin. Qualunque circuito lineare, indipendentemente dalla sua complessità, visto da due terminali è equivalente ad un generatore reale di tensione costituito da un generatore ideale di tensione in serie a un resistore: l'equivalenza vale limitatamente alla tensione e alla corrente in corrispondenza dei terminali del circuito.
E_{eq} è pari alla tensione a vuoto sui morsetti del carico, mentre Z_{eq} è pari all'impedenza equivalente sui terminali del carico.

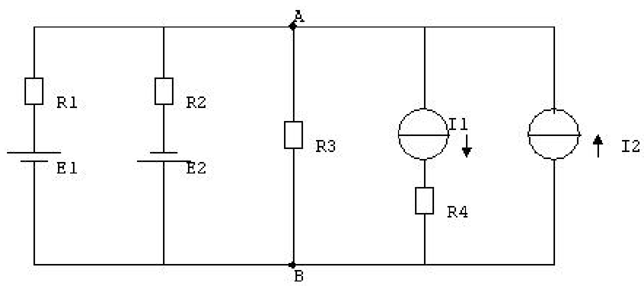
2.4 Teorema di Norton

Se il circuito da semplificare non è accoppiato con il carico è possibile applicare il teorema di Norton. Qualunque circuito lineare, comunque complesso, visto da due nodi A-B è equivalente ad un generatore reale di corrente costituito da un generatore ideale di corrente in parallelo con un resistore: l'equivalenza vale limitatamente alla tensione e alla corrente in corrispondenza dei nodi A-B.
A_{eq} è pari alla corrente di cortocircuito sui morsetti del carico, mentre Z_{eq} è pari all'impedenza equivalente sui terminali del carico.

2.5 Teorema di Millman

Data una rete di 2 o più lati in parallelo, la tensione ai capi della rete è pari al rapporto delle correnti di cortocircuito di ogni singolo lato e la sommatoria delle conduttanze di ogni lato.

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_{lati}} i_k}{\sum_{j=1}^{N_{lati}} \frac{1}{R_k}} = \frac{\sum_{k=1}^{N_{tensione}} \frac{E_k}{R_k} + \sum_{y=1}^{N_{corrente}} I_y}{\sum_{j=1}^{N_{lati}} \frac{1}{R_k}}$$



3 Transitori

Durante il transitorio ci interessiamo delle variazioni delle variabili di stato dei componenti nel tempo. Queste sono particolarmente interessanti perché descrivono il comportamento dell'energia del nostro sistema.

1. <u>Condensatore</u>: $E = \frac{1}{2}LI^2$

2. <u>Induttore</u>: $E = \frac{1}{2}CV^2$

Postulato di continuità dell'energia: l'energia varia con continuità, perciò le variabili di stato non possono subire delle discontinuità.

3.1 Risoluzione dei circuiti

Le LKT portano alla risoluzione di equazioni differenziali di ordine N, dove N è il numero di componenti dinamici presenti nel nostro sistema. Tutti i circuiti, lineari, trattati in questo corso sono ipoteticamente risolubili con equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti(ODE). Queste insieme alle condizioni iniziali del sistema si riducono ad un unico problema di Cauchy.
N.B. conoscere lo stato iniziale del sistema significa conoscere lo stato energetico, quindi le variabili di stato prima dell'inizio del transitorio.

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_o x(t) = b(t)$$

Dove $x(t)$ rappresenta la grandezza incognita, a_i rappresentano i coefficienti costanti e $b(t)$ è il termine noto(generatori ecc...).
La soluzione del nostro sistema sarà quindi formata dalla somma di due contributi:

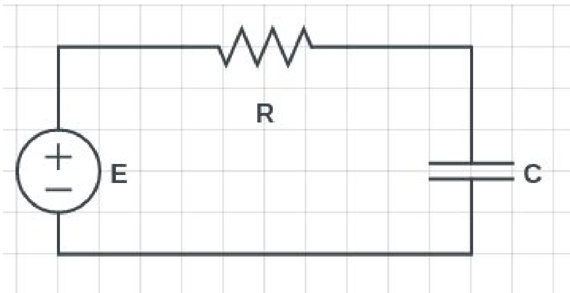
1. La soluzione particolare $p(t)$, che avrà la stessa evoluzione temporale di $b(t)$. (se $b(t) = k$ anche $p(t) = c$)

2. La soluzione dell'omogenea associata $o(t)$, la quale rappresenta **l'evoluzione libera del sistema** con i generatori passivati. Nella maggior parte dei casi
   $o(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + k_n e^{\lambda_n t}$ con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n < 0$ per la convergenza per $t- > \infty$.
   Per ogni esponenziale si calcola una costante di tempo $\tau_n = \frac{1}{\lambda_n}[s]$, il quale rappresenta la rapidità dell'evoluzione libera del sistema. Più piccolo sarà τ, minore sarà il tempo di transitorio. Il transitorio per convenzione infatti, ha durata pari a $T = 5max\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$.

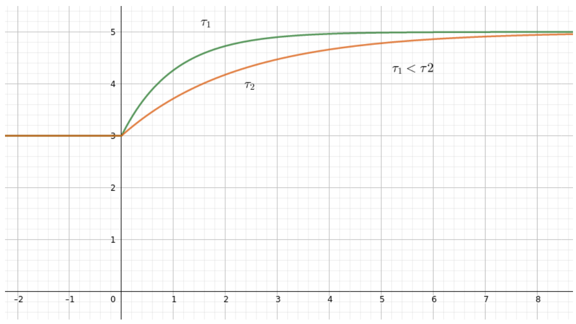
   N.B. i τ_i non sono associati ai dispositivi dinamici, ma rappresentano un fenomeno transitorio di interazione tra i componenti dinamici. (vedi circuito RLC)

3.1.1 Circuito RC

$$v_C(t) = (V_{C0} - E)e^{-\frac{t}{RC}} + E = V_{C0}e^{-\frac{t}{RC}} + E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$
$$\tau = RC$$

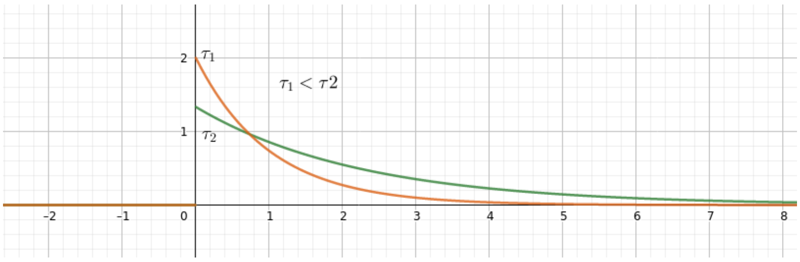


- $V_{C0} - E)e^{-\frac{t}{RC}}$ è detta risposta transitoria;
- E è detta risposta a regime.
- $V_{C0}e^{-\frac{t}{RC}}$ è detta evoluzione libera, cioè l'evoluzione senza il generatore. Per $t- > \infty$ sarà uguale a 0.
- $E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$ è detta risposta forzata, cioè l'evoluzione dettata dal generatore e che si avrebbe nel caso di $V_{C0} = 0$. Per $t- > \infty$ sarà uguale alla *forzante.*
- $\dfrac{dv(0)}{dt} = \tau$



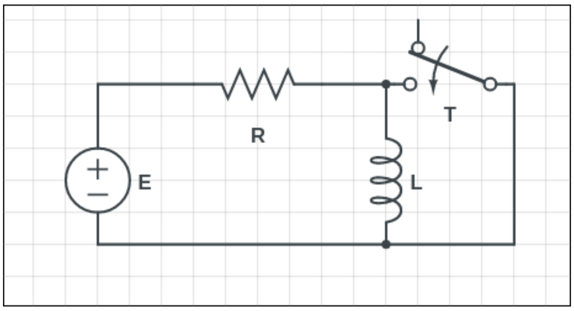
Per quanto riguarda la corrente è possibile notare la presenza di una discontinuità nel punto t=0. Per questo motivo la corrente non è una variabile di stato per il condensatore. $i(t) = 0$ per $t < 0$, $i(t) = \dfrac{E - V_{C0}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ per $t > 0$.

Nel caso reale la presenza di induttanze parassite non permette tale variazione istantanea.

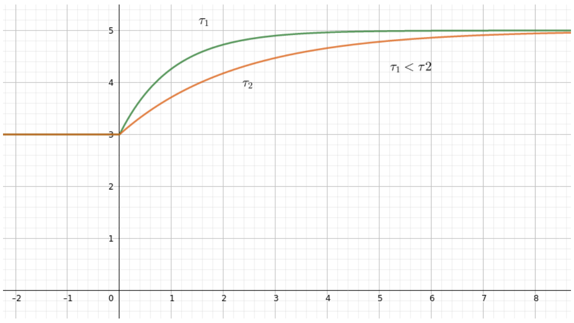


3.1.2 Circuito RL

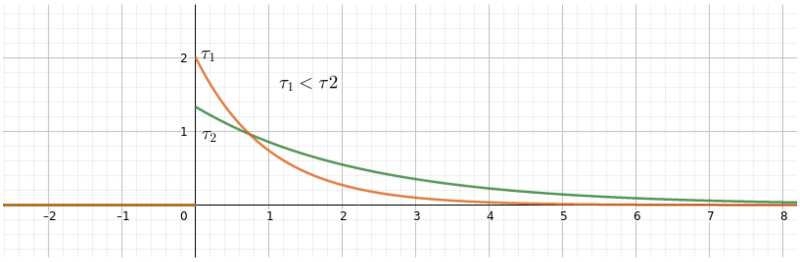
$$i_L(t) = (I_{L0} - \frac{E}{R})e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E}{R} = I_{L0}e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$$
$$\tau = \frac{L}{R}$$



- $(I_{L0} - \frac{E}{R})e^{-\frac{Rt}{L}}$ è detta risposta a transitorio;
- $\frac{E}{R}$ è detta risposta a regime.
- $I_{L0}e^{-\frac{Rt}{L}}$ è detta evoluzione libera, cioè l'evoluzione senza il generatore. Per $t- > \infty$ sarà uguale a 0.
- $\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{Rt}{L}})$ è detta risposta forzata, cioè l'evoluzione dettata dal generatore e che si avrebbe nel caso di $V_{C0} = 0$. Per $t- > \infty$ sarà uguale alla *forzante*.
- $\frac{di(0)}{dt} = \tau$
- I_{L0} è la corrente che circola nella maglia di destra prima del tempo zero.



Per quanto riguarda la tensione è possibile notare la presenza di una discontinuità nel punto t=0. Per questo motivo la tensione non è una variabile di stato per l'induttanza. $v(t) = 0$ per $t < 0$, $v(t) = (E - RI_{L0})e^{-\frac{Rt}{L}}$ per $t > 0$. Nel caso reale la presenza di capacità parassite non permette tale variazione istantanea.



N.B. Anche se la tensione non è una variabile di stato per l'induttanza, è di fondamentale importanza per l'analisi dei picchi di corrente durante il transitorio (alcuni componenti possono essere sottoposti a certo tetto massimo di corrente).

3.1.3 Confronto tra RL e RC

Per i circuiti RC e RL vale: $\frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)}{\tau} = X_{forzante}$

con $x(t) = (x_0 - x_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} + x_\infty$

Dove: $x(t)$ è la grandezza incognita, x_0 è il valore dell'incognita al tempo t_0 e x_∞ è il valore dell'incognita a regime.

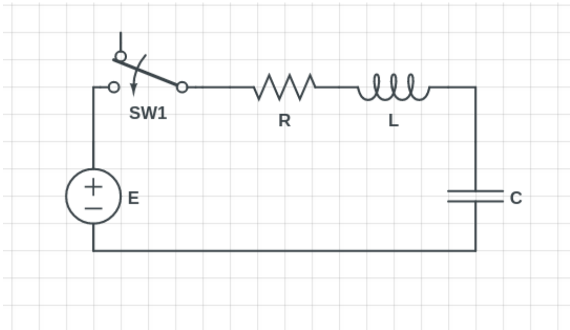
3.2 Circuito RLC

$$i(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = \frac{E - V_{C0}}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}(e^{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}t} - e^{-\sqrt{\alpha^2-\omega^2}t})e^{-\alpha t}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$$



3.2.1 $\Delta = 0$ risposta sovrasmorzata