二维微分同胚动力学及其拓展 (2022 夏，杨大伟)

Ajorda Jiao

目录

§1 7.18

- M 是闭 Riemann 流形.
- $f: M \to M$ 为一个 C^1 微分同胚.
- Λ 是一个 f 不变集 (未必要求 Λ 是紧的).

定义 1.1. 称 Λ 具有一个**控制分解**, 是指在 Λ 的切丛 $T_\Lambda M$ 上存在一个 Df-不变的分解 $TM = E \oplus F$ 以及两个常数 $C > 0, \lambda \in (0,1)$ 使得对任意 $x \in M$ 和单位向量 $u \in E(x), v \in F(x)$, 都有

$$\|Df^n(u)\| \leqslant C\lambda^n \|Df^n(v)\|, \quad \forall n \geqslant 0.$$

定理 1.2

如果 $T_\Lambda M = E \oplus F$ 是一个 Df-不变的分解, 那么以下几条等价.

(1) 这是一个满足前面定义的控制分解.

(2) 存在 $C > 0, \lambda \in (0,1)$ 使得

$$\frac{\left\|Df^n|_{E(x)}\right\|}{m(Df^n|_{F(x)})} = \|Df^n|_{E(x)}\| \cdot \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| \leqslant C\lambda^n, \quad \forall n \geqslant 0,$$

其中, $m(\cdot) = \|\cdot^{-1}\|^{-1}$ 表示算子的小模.

(3) 存在 $N \in \mathbb{Z}_+$. 使得对任意 $x \in \Lambda$, 有

$$\|Df^N|_{E(x)}\| \cdot \|Df^{-N}|_{F(f^N(x))}\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

定义 1.3. 称 Λ 具有一个**双曲分解**, 是指在 Λ 的切丛 $T_\Lambda M$ 上存在一个 Df-不变的分解 $TM = E^s \oplus E^u$ 以及两个常数 $C > 0, \lambda \in (0,1)$ 使得对任意 $x \in M$ 和单位向量 $u \in E(x), v \in F(x)$, 都有

$$\|Df^n(u)\| \leqslant C\lambda^n, \quad \left\|Df^{-n}(v)\right\| \leqslant C\lambda^n, \quad \forall n \geqslant 0.$$

此时, 称 Λ 是一个**双曲集**.

注 1.4 — 显见双曲分解一定是一个控制分解, 但控制分解不一定是双曲分解.

定义 1.5. f 的**周期点集**$\mathrm{Per}(f) := \{x \in M : \exists n \in \mathbb{Z}_+, f^n x = x\}$. f 的**非游荡点集**

$$\Omega(f) := \{x \in M : \text{对任何}\, x\, \text{的邻域}\, U, \exists y \in U, n \in \mathbb{Z}_+, \text{使得}\, f^n y \in U\}.$$

由此显见, 如果存在 $\{x_n\} \subset \mathrm{Per}(f)$ 使得 $x_n \to x$, 那么 $x \in \Omega(f)$. 也即 $\overline{\mathrm{Per}(f)} \subset \Omega(f)$.

定义 1.6. 称 f 为满足**公理 A**的, 如果满足 $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$ 且为一个双曲集.

注 1.7 — 公理 A 系统在某种意义上具有一种整体双曲性.

定义 1.8. 称 f 是C^1 **结构稳定的**, 是指存在一个 f 在微分同胚空间中 C^1 拓扑下的邻域 $\mathcal{U}$, 使得对任意 $g \in \mathcal{U}$, 都存在一个微分同胚 $h : M \to M$ 使得 $g \circ h = h \circ f$.

定义 1.9. 称 f 是Ω **稳定的**, 指存在一个 f 的邻域 $\mathcal{U}$ 使得对任意 $g \in \mathcal{U}$, 都存在微分同胚 $h : \Omega(f) \to \Omega(g)$, 使得 $g \circ h|_{\Omega(g)} = h \circ f|_{\Omega(f)}$.

Palis-Smale 猜测

1. 结构稳定 $\iff$ 公理 A+ 强横截.

2. Ω 稳定 $\iff$ 公理 A+ 无环.

定理 1.10 (Smale)
公理 A+ 无环 $\implies$ Ω 稳定.

证明 Palis-Smale 猜测的主要困难点在于证明公理 A. 为此, 引入了如下星号条件.

定义 1.11. 称 f 满足**星号条件**, 如果存在一个 f 的邻域 $\mathcal{U}$ 使得对任意 $g \in \mathcal{U}$, g 的任何一条周期轨道都是双曲的.

周期轨道的双曲性可以保证在扰动下不会出现周期轨道的分支现象 (bifurcation). 而如果不满足星号条件, 则可以通过扰动获得不可数多的周期轨道, 这和 Kupka-Smale 的可数周期轨结论矛盾.
于是关于 Palis-Smale 猜测 2 的证明历史大概可以分为如下几步.

1. Ω 稳定 $\implies$ 星号条件.

2. Liao 1979, Mañe 1982: 星号条件 $\implies$ 周期轨道上的控制分解的好估计.

3. 星号条件 + 控制分解的好估计 $\implies$ 公理 A.

控制分解

我们首先讨论一些关于控制分解的基本性质. 不同于双曲分解的是, 控制分解可能是不唯一的, 但我们可以说明维数固定的控制分解是唯一的.

命题 1.12
在一条轨道 $\mathrm{Orb}(x)$ 上如果具有两个控制分解 $E \oplus F, E' \oplus F'$, 那么必有

$$E(x) \subset E'(x) \quad \text{或} \quad E'(x) \subset E(x).$$

对 F 结论类似.

证明. 否则, 取 $u \in E(x) \setminus E'(x)$ 和 $v \in E'(x) \setminus E(x)$. 写 $u = u_1 + u_2 \in E'(x) \oplus F'(x)$, 那么 $u_2 \neq 0$. 于是可知

$$\frac{\|Df^n u\|}{\|Df^n v\|} \geqslant \frac{\|Df^n u_2\| - \|Df^n u_1\|}{\|Df^n v\|} \to \infty,$$

类似可知 $\|Df^n v\| \,/\, \|Df^n u\| \to \infty$, 矛盾. $\square$

推论 1.13
固定维数的控制分解唯一.

命题 1.14
如果 Λ 上具有一个控制分解, 那么 $\overline{\Lambda}$ 上也有一个类型相同的控制分解.

证明. 利用 Grassman 丛的紧性, 通过取子列的方式在闭包上定义分解 $E \oplus F$, 容易验证这给出一个类型相同的控制分解. □

定理 1.15
维数固定的控制分解是连续的.

证明. 利用唯一性, 可知收敛序列极限定义的控制分解与该点处控制分解相同. □

定理 1.16
给定 $C > 0, \lambda \in (0,1)$. 如果 $f_n \to f, \Lambda_n \to \Lambda$ 满足 f_n 在 Λ_n 上有 (C,λ)-控制分解, 那么 f 在 Λ 上就有 (C,λ)-控制分解.

定理 1.17
若 f 的紧不变集 Λ 上具有一个控制分解 $T_\Lambda M = E \oplus F$, 那么存在一个 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}$, 使得对任意 $g \in \mathcal{U}$, g 在 U 上的极大不变集 (如果存在) 上也有一个相同类型的控制分解.

注 1.18 — 扰动后的双曲分解虽然类型相同, 但常数可能被弱化.

注 1.19 — 这样的极大不变集未必存在. 而在一致双曲的情形, 这样的不变集总是存在的.

引理 1.20
设 $g : M \to M$ 是一个微分同胚, $\Delta \subset M$ 为一个 g-不变集. 设 $B : T_\Delta M \to T_\Delta M$ 为一个覆盖 g 的有界 C^0 丛同构. 设存在一个分解 $T_\Delta M = E_1 \oplus E_2$, 使得在这个分解下, B 可以写成

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{ij} : E_j \to E_i.$$

如果存在 $T_\Delta M$ 的一个 C^0 范数 $\|\cdot\|$ 和三个常数 $K > 1, \lambda \in (0,1), \varepsilon > 0$, 使得

$$K^{-1} \leqslant \left\|B_{11}^{\pm 1}\right\|, \left\|B_{22}^{\pm 1}\right\| \leqslant K, \quad \max\left\{\|B_{12}\|, \|B_{21}\|\right\} < \varepsilon,$$

$$K^{-1} + \varepsilon < 1, \quad \lambda + 2K\varepsilon < 1,$$

$$\|B_{22}(x)\| \cdot \|B_{11}^{-1}(g(x))\| \leqslant \lambda < 1.$$

那么存在唯一覆盖 Id 的有界 C^0 丛同态 $P = P_B : E_1 \to E_2, |P| < 1$ 使得 $\mathrm{gr}(P)$ 在 B 下不变. 同时, P_B 随 B 连续变化.

证明. 目标是找 P 使得 $B_x(\mathrm{gr}(P_x)) \subset \mathrm{gr}(P_{gx})$, 这就是

$$P_{gx} = [(B_{21})_x + (B_{22})_x P_x][(B_{11})_x + (B_{12})_x P_x]^{-1}.$$

令 $L(E_1, E_2, \mathrm{Id})(1)$ 表示所有覆盖 Id 的有界 C^0 丛同态 $P: E_1 \to E_2$ 且满足 $|P| \leqslant 1$ 所构成的集合. 于是我们考虑**图像变换**$T: L(E_1, E_2, \mathrm{Id})(1) \to L(E_1, E_2, \mathrm{Id})(1)$ 由上式给出. 可以得到该映射是一个压缩映射, 从而具有唯一不动点, 这就是我们想要的. □

定理 1.21 (Liao 1979, Mañe 1982)
对于星号微分同胚 f, 存在 f 的一个邻域 $\mathcal{V}$ 和常数 $l \in \mathbb{Z}_+, \lambda \in (0,1)$, 使得对任意 $g \in \mathcal{V}$ 和 g 的周期点 p, 设 p 的周期为 $\tau(p) > l$, 那么

1. $\|Dg^l|_{E^s(p)}\| \cdot \|Dg^{-l}|_{E^u(g^l(p))}\| \leqslant \lambda$.
2. $\prod_{i=0}^{[\tau(p)/l]-1} \|Dg^l|_{E^s(g^{il}(p))}\| \leqslant \lambda^{[\tau(p)/l]}$, $\prod_{i=0}^{[\tau(p)/l]-1} \|Dg^{-l}|_{E^u(g^{-il}(p))}\| \leqslant \lambda^{[\tau(p)/l]}$.

注 1.22 — 定理叙述中的 E^s, E^u 即为周期轨的自然双曲分解 (星号条件保证). 但每个周期轨道上的常数 (C, λ) 可能有不同, 无法保证 λ 的一致性. 该定理的第一条说明了在控制分解的意义下可以有一致常数 λ. 定理的第二条则说明了在一整个周期上看, 可以体现出一致的双曲性.

§2 7.20

今天我们来证明星号微分同胚都是公理 A 的.

定理 2.1 (Pugh 的封闭引理)
对任何微分同胚 f, 给定 $x \in \Omega(f)$. 对任何 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}$ 和 x 的邻域 U, 都存在 $g \in \mathcal{U}, p \in U, N \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $g^N(p) = p$.

注 2.2 — 这一结论说明了, 每个非游荡点都能被附近系统的周期点逼近.

这促使我们考虑集合

$$P^*(f) = \left\{x \in M : \exists f_n \to f, x_n \to x, N_n > 0,\ \text{使得} f_n^{N_n}(x_n) = x_n\right\},$$

我们称 $P^*(f)$ 为 f 的**预周期点集 (pre-periodic set)**.

定义 2.3. 对于一个双曲集 Λ, 我们将 $\dim E^s$ 称为 Λ 的**指标**, 记作 $\mathrm{Ind}(\Lambda)$.

设 $\dim M = d$, 那么对 $0 \leqslant i \leqslant d$, 我们定义

$$P_i^*(f) = \{x \in M : \exists f_n \to f, x_n \to x, \text{满足}\mathrm{Orb}(x_n)\text{双曲, 且}\,\mathrm{Ind}(\mathrm{Orb}(x_n)) = i\}.$$

事实 2.4. 每个非双曲周期轨都能在小扰动下成为双曲的.

结合这一事实和 Pugh 的封闭引理, 我们可以得到如下结论

$$\Omega(f) \subset P^*(f) = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant d} P_i^*(f).$$

根据定义, 容易看出 $P_i^*(f), P^*(f)$ 都是闭集. 再注意到固定常数的控制分解是可以取极限的, 利用定理1.21, 我们有如下推论.

推论 2.5
$P_i^*(f)$ 上有一个控制分解 $E \oplus F$ 满足 $\dim E = i$.

为证明公理 A, 首先证明 $\mathrm{sink}(P_d(f))$ 和 $\mathrm{source}(P_0(f))$ 都是有限的.

定理 2.6 (Pliss)
如果 f 是星号微分同胚, 那么 $P_0^*(f)$ 是有限多排斥型双曲周期轨, $P_d^*(f)$ 是有限多吸引型双曲周期轨.

引理 2.7 (无穷版本的 Pliss 引理)
给定 $A > 0$ 和两个常数 $\lambda_1 < \lambda_2$. 对于数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 满足 $|a_n| \leqslant A$, 只要

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \leqslant \lambda_1,$$

那么存在 $j \geqslant 0$, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_{j+i} \leqslant \lambda_2.$$

命题 2.8 (有限版本的 Pliss 引理)
给定 $A > 0$ 和两个常数 $\lambda_1 < \lambda_2$, 都存在常数 $N = N(A, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}_+$ 和 $\rho = \rho(A, \lambda_1, \lambda_2) \in (0, 1)$. 对任意正整数 $n > N$ 和实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, |a_i| \leqslant A, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i < n\lambda_1,$$

都存在正整数 $m > \rho n$, 和 m 个数 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n$, 使得对任意 $1 \leqslant l \leqslant n - j_k + 1$, 有

$$\sum_{i=i_k}^{i_k+l-1} a_i \leqslant \lambda_2 l.$$

命题 2.9 (稳定流形大小的估计)
对于 $l \in \mathbb{Z}_+, \lambda \in (0, 1)$, 存在 $\delta = \delta(l, \lambda)$. 使得对任意 $x \in M$, 只要满足

$$\prod_{i=0}^{n-1} \left\| Df^l(f^{il}(x)) \right\| \leqslant \lambda^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

那么对任意 $y \in B(x, \delta)$, 都有

$$d(f^{nl}(x), f^{nl}(y)) \leqslant \lambda^{n/2} d(x, y).$$

我们首先说明 $P_d(f)$ 是有限集. 否则就存在无限多个 sinks. 我们利用 Liao-Mane 的定理, 对于 p_n 来说, 我们有

$$\prod_{i=0}^{[\tau(p_n)/l]-1} \left\| Df^l(f^{il}(p_n)) \right\| \leqslant \lambda^{[\tau(p_n)/l]}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

我们不妨设 $l=1$, 然后利用 Pliss 引理. 因为 p_n 均是周期点, 我们可以不妨设 Pliss 引理中取出的 j 均为 0. 于是得到

$$\prod_{i=0}^{n-1} \|Df(f^i p_n)\| \leqslant \lambda^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

而根据刚才的稳定流形大小的估计, 我们存在一个与 p_n 无关的 $\delta > 0$, 使得 $B(p_n, \delta)$ 在 p_n 的稳定流形中. 但这些稳定流形是不交的, 就和 M 的体积有限性矛盾.

现在已经证明 $P_d(f)$ 是有限个 sink, 下一步就是说明 $P_d^*(f) = P_d(f)$.

断言 2.10. 假设 γ_n 是 f_n 的一个 sink, 满足 $f_n \to f, \gamma_n \to \Lambda$. 如果 Λ 不包含在 $P_d(f)$ 中, 则 $\Lambda \cap P_d(f) = \varnothing$.

证明. 稳定流形的存在给出了一种 trapping 性质, 即如果进入 sink 的一个邻域中, 那么再也无法出来. 而这是一个扰动稳定的性质, 从而如果存在 $x \in \Lambda \cap P_d(f)$, 那么存在 $\mathrm{Orb}(x, f)$ 的一个邻域, 对任意充分大的 $n, f^n(\gamma_n)$ 必然落在这个邻域中, 矛盾. □

于是如果 $P_d^*(f) \setminus P_d(f) \neq \varnothing$, 那么一定存在相应的集合 $\Lambda \subset P_d^*(f) \setminus P_d(f)$ 使得 $\gamma_n \to \Lambda$, 此时必然有 $\tau(\gamma_n) \to \infty$. 我们对 f_n 利用定理1.21和 Pliss 引理, 在每个 γ_n 上取 p_n 使得

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df_n(f_n^i(p_n))\| \leqslant \lambda^k, \quad \forall k \geqslant 0.$$

不妨 $p_n \to x \in \Lambda$, 那么同样对任意 $k \geqslant 0$, 有

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df(f^i(x))\| \leqslant \lambda^k.$$

不仅如此, 因 x 不是周期点, 再用 Pliss 引理可知, 在 x 的轨道上有无穷多的点满足上述不等式. 根据稳定流形大小的估计, 每个点具有一个一致大小的邻域为其 basin. 矛盾. 这就证明了定理2.6. □

根据前面的讨论, 对于二维的情形, 我们可知 $P_0^*(f), P_1^*(f), P_2^*(f)$ 是三个不交的闭集. 其中 $P_0^*(f)$ 是有限多 source, $P_1^*(f)$ 是有限多 sink. 在 $P_1^*(f)$ 上则有控制分解 $E \oplus F$, 其中 $\dim E = \dim F = 1$. 我们希望证明 E 是压缩的, F 是扩张的.

回忆一致双曲集的追踪引理. 如果 Λ 是一个双曲集, 那么对任意 $\alpha > 0$, 都存在 $\beta > 0$ 使得任何 β-伪轨可以被一条真轨道 α-追踪. 廖证明了在控制分解的情况下, 对准双曲轨弧也有追踪引理.

记号 2.11. 对于 $x \in \Lambda, n \in \mathbb{N}$, 用 $(x, f^n(x))$ 表示轨道段 $\{x, fx, \cdots, f^n x\}$.

定义 2.12. 我们称轨道段 $(x, f^n(x))$ 为一个**λ-准双曲轨弧**, 如果

$$\prod_{i=0}^{j-1} \|Df|_{E(f^i(x))}\| \leqslant \lambda^j, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$\prod_{i=j}^{n} \|Df|_{F(f^i(x))}\| \leqslant \lambda^{n-j+1}, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant n.$$

定理 2.13 (廖的追踪引理)
对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$ 使得对任意 λ-准双曲轨弧 $(x, f^n(x))$, 只要满足 $d(x, f^n(x)) < \delta$, 就存在一个周期点 p, 使得 $f^n(p) = p$ 且对任意 $0 \leqslant i \leqslant n-1$, 有

$$d(f^i(x), f^i(p)) < \varepsilon.$$

注意到 Λ 上有控制分解, 而 $\mathrm{Orb}(p)$ 在 Λ 的 ε-邻域中. 结合控制分解的鲁棒性, 知当 ε 充分小时, 在 $\mathrm{Orb}(p)$ 上也有控制分解 $E \oplus F$. 不仅如此, 还可以让 p 在 E 方向上的压缩率接近 x 在 E 方向的压缩率. 于是如果在某个 $E(x)$ 上 Df 压缩率不够强,(如果能找到相应的周期轨追踪,) 我们应该可以期待在某个周期点 p 所对应的 $E(p)$ 上压缩率也不够强, 这会和1.21中 Liao-Mañe 给出的估计相矛盾.

观察 2.14. 相继续的准双曲轨弧拼接起来也是准双曲轨弧.

根据这个观察, 只要我们可以找到充分多头尾相接的准双曲轨弧, 那么一定可以得到一个头尾距离充分近的准双曲轨弧.

§3 7.22

§4 7.25

§5 7.27