MONTY HALL PROBLEM

몬티홀 문제

problem: 어떤 사람이 예를 들어 1번 문을 선택했을 때, 게임쇼 진행자는 3번 문을 열어 문뒤에 염소가 있음을 보여주면서 1번 대신 2번을 선택하겠냐고 물었다. 참가자가 자동차를 가지려할 때 원래 선택했던 번호를 바꾸는 것이 유리할까?

몬티홀 문제의 딜레마

몬티 홀 문제에서 딜레마를 유발하는 생각은 총 **3**가지로 다음과 같다.

1. 남은 문은 두 개이니, 선택을 바꾸든 바꾸지 않든 동일한 확률을 가진다.

2. 선택을 바꾸는 것이 퀴즈에서 이겨 자동차를 상품으로 받을 가능성을 높게 만든다.

3. 선택을 바꾸지 않는 편이 더 낫다.

경우의 수

<자동차, 염소,염소>일때

1.첫번째 문 선택 ->두번째 문 개방

선택을 바꿀때 차를 얻을 확률 :

(첫번째문을 고를 확률)*(두번째문이 개방될 확률)*(바꿀 때 차를 얻을 확률)

=(1/3)*(1/2)*0=0

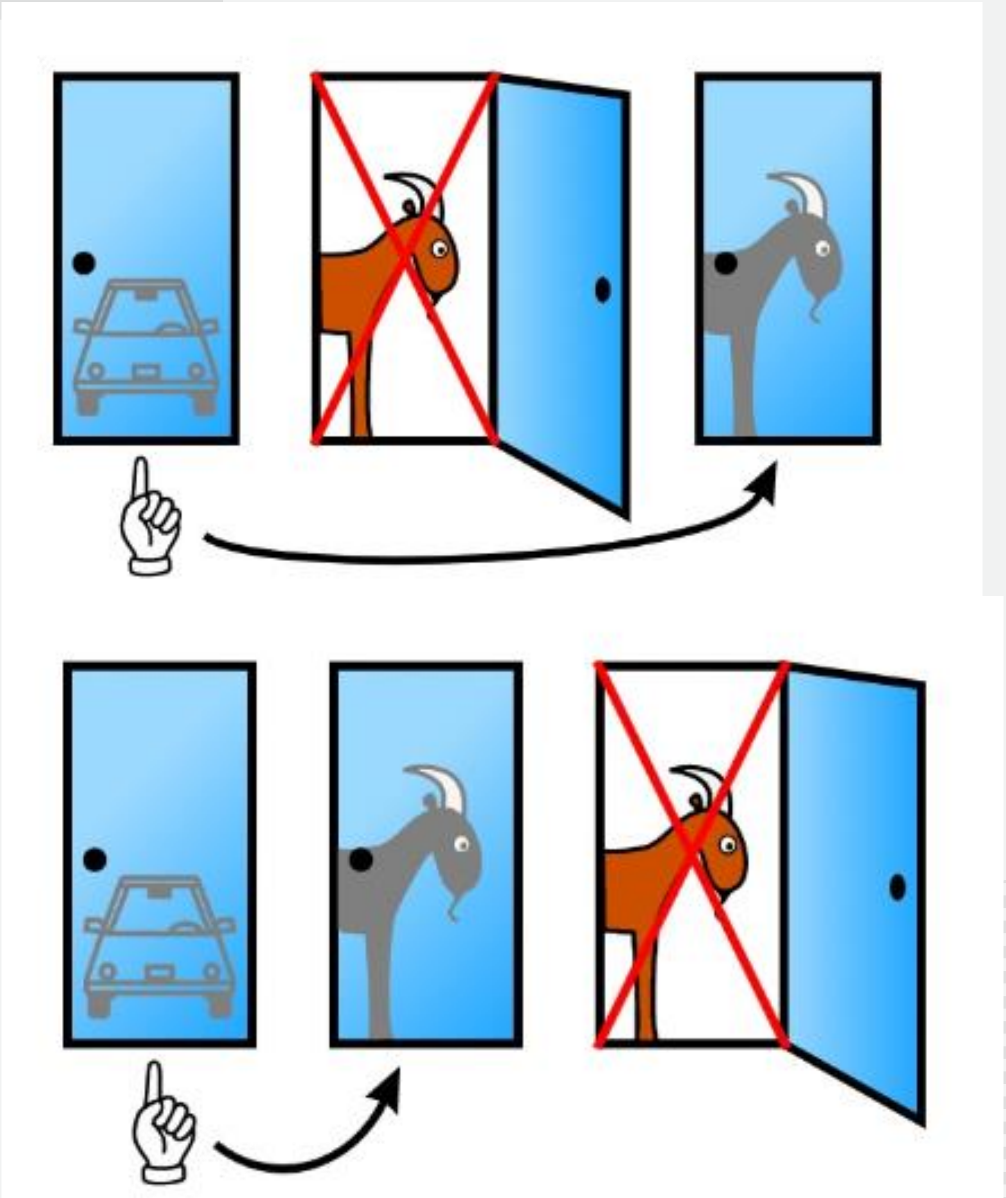
선택을 바꾸지 않았을 때 차를 얻을 확률 :

(첫번째 문을 고를 확률)*(두번째문이 개방될 확률) *(바꾸지 않았을 때 차를 얻을 확률)

=(1/3)*(1/2)*1 =1/6

2.첫번째 문 선택 -> 세번째 문 개방

확률 동일



경우의 수

<자동차, 염소,염소>일때

3.두번째 문 선택**->** 세번째 문 개방

선택을 바꿀 때 차를 얻을 확률**:**

(두번째 문을 고를 확률**)*(**세번째 문이 개방될 확률**)*(**바꿀 때 차를 얻을 확률**)**

=(1/3)*1*1=1/3

선택을 바꾸지 않을 때 차를 얻을 확률 **:**

(두번째 문을 고를 확률**)*(**세번째 문이 개방될 확률**)*(**바꾸지 않을 때 차를 얻을 확률**)**

=(1/3)*1*0=0

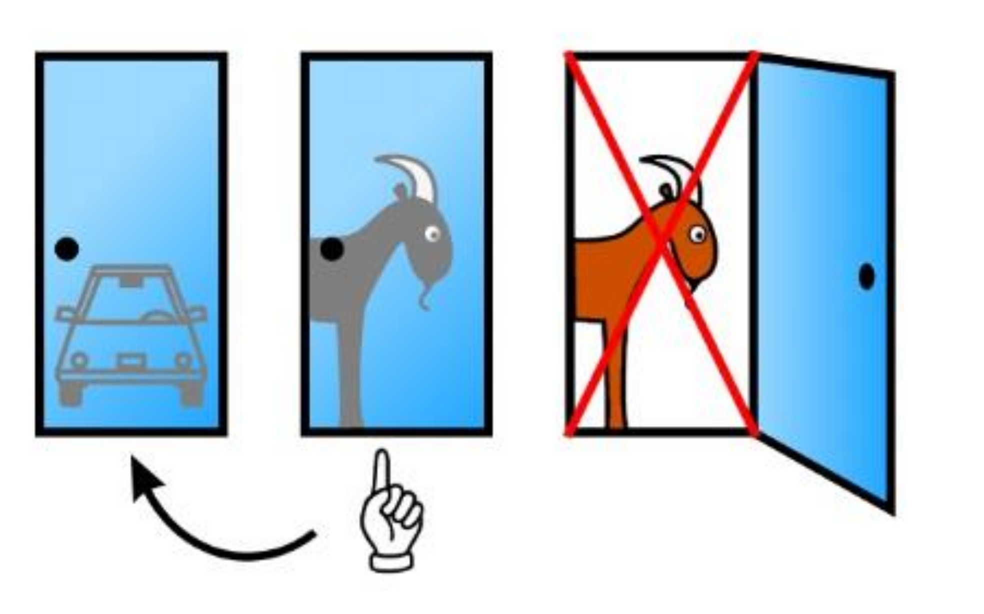
4.세번째 문을 선택 **->** 두번째 문 개방

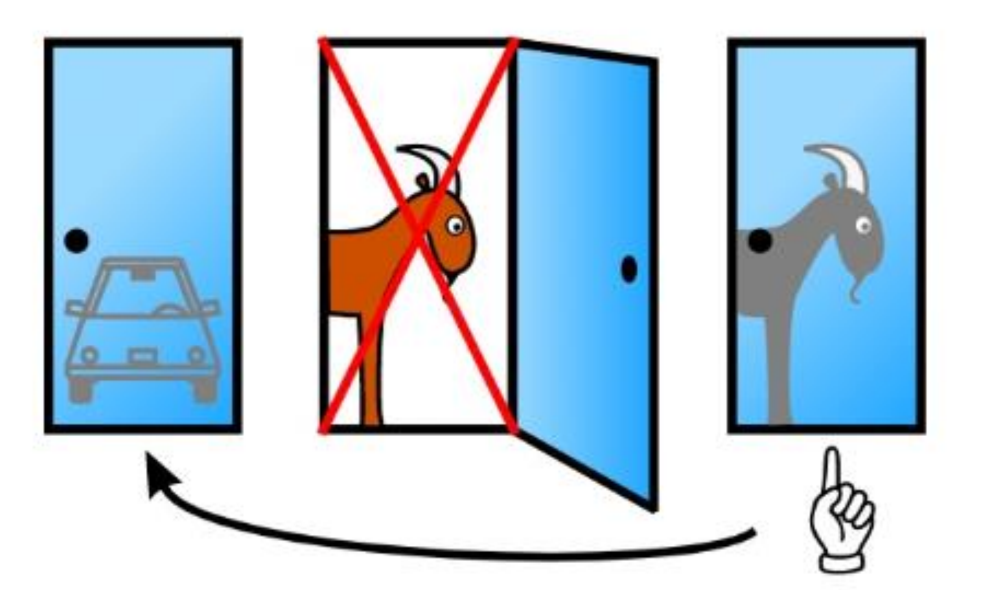
확률 동일

5.결론

선택을 바꿀 때 차를 얻을 확률 **=0+0+(1/3)+(1/3)=2/3**

선택을 바꾸지 않을 때 차를 얻을 확률 **=(1/6)+(1/6)+0+0=1/3**





Bayes 정리

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Bayes 정리 :
A = 이벤트
B = 또 다른 이벤트
P(A|B) =사후확률 **=** 다를 이벤트가 발생하는 경우 이벤트가 발생할 확률
P(A) = 사전확률 **=** 다를 이벤트가 발생했는지 알기 전에 이벤트가 발생할 확률

Bayes 정리

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

참여자가 1번문을 열었다고 가정
자동차가 1번문에 있을 확률 P[C1]=1/3
자동차가 2번문에 있을 확률 P[C2]=1/3
자동차가 3번문에 있을 확률 P[C3]=1/3

사회자가 1번문을 열 확률 P[A1]=0
사회자가 2번문을 열 확률 P[A2]=1/2
사회자가 3번문을 열 확률 P[A3]=1/2

→

사회자가 2번문을 열어줬다고 가정
선택을 바꾸지 않고 차를 얻는 경우:
P[C1|A2] =P[A2|C1]P[C1]/P[A2]
={(1/2)*(1/3)}/(1/2)=1/3

선택을 바꿔 차를 얻을 경우
P[C3|A2]=P[A2|C3]P[C3]/P[A2]
={1*(1/3)}/(1/2)=2/3

Bayes 정리

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

가정:C1문을 선택하고 사회자가 C2문을 열어서 양을 보여줬다고 가정

A2=C2의 문을 열어서 보여줌
B= ~문 뒤에 차가 있다.

총확률의 법칙:
$P(A)=P(C1\cap A)+P(C2\cap A)+P(C3\cap A)$
$=P(C1)P(A|C1)+P(C2)P(A|C2)+P(C3)P(A|C3)$
$=1/6+0+1/3=1/2$

B:가설	P[B]	P[A2|B]	P[B]P[A2|B]	P[B|A2]
C1	1/3	1/2	1/6	1/3
C2	1/3	0	0	0
C3	1/3	1	1/3	2/3
			P[A2]=1/2	

선택을 바꾸지 않았을 때

선택을 바꿨을 때

몬티홀 일반화

문이 **N**개 일때

[자동차,염소,염소,....염소]라면

1)

1번문을 선택하고 **2**번문이 개방될 경우

자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률:**1/n**

1번문을 선택할 확률:**1/n**

2번 문이 개방될 확률:**1/(n-1)**

선택을 바꾸지 않을 때 자동차를 얻을 확률:**1**

전체 확률=(자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률)*(1번문을 선택할 확률)*(2번문을 개방할 확률)*(선택을 바꾸지 않을 때 자동차를 얻을 확률)

$=1/(N^2)(N-1)$

몬티홀 일반화

문이 N개 일때

[자동차,염소,염소,....염소]라면

2)

1번문을 선택하고 N번문이 개방될 경우

자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률:1/n

1번문을 선택할 확률:1/n

N번 문이 개방될 확률:1/(n-1)

선택을 바꾸지 않을 때 자동차를 얻을 확률:1

전체 확률=(자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률)*(1번문을 선택할 확률)*(N번문을 개방할 확률)*(선택을 바꾸지 않을 때 자동차를 얻을 확률)

$=1/(N^2)(N-1)$

몬티홀 일반화

문이 N개 일때

[자동차,염소,염소,.... 염소]라면

선택을 바꾸지 않을 때 자동차를 얻을 확률 n-1개

= (N-1)*{1/N²(N-1)}

배치가 총 N개 있으므로

선택을 바꾸지 않을 때 자동차를 얻을 확률=N/N²=1/N

몬티홀 일반화

문이 **N**개 일때

[자동차,염소,염소,....염소]라면

3)

2번문을 선택하고 **3**번문이 개방될 경우

자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률:**1/n**

2번문을 선택할 확률:**1/n**

3번 문이 개방될 확률:**1/(n-2)**

선택을 바꿀 때 자동차를 얻을 확률:**1/(n-2)**

전체 확률=(자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률)*(2번문을 선택할 확률)*(3번문을 개방할 확률)*(선택을 바꿀 때 자동차를 얻을 확률)

$=1/(N^2)(N-2)^2$

몬티홀 일반화

문이 **N**개 일때

[자동차,염소,염소,....염소]라면

4)

2번문을 선택하고 **N**번문이 개방될 경우

자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률:**1/n**

2번문을 선택할 확률:**1/n**

N번 문이 개방될 확률:**1/(n-2)**

선택을 바꿀 때 자동차를 얻을 확률:**1/(n-2)**

전체 확률=(자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률)*(2번문을 선택할 확률)*(N번문을 개방할 확률)*(선택을 바꿀 때 자동차를 얻을 확률)

$=1/(N^2)(N-2)^2$

몬티홀 일반화

문이 **N**개 일때

[자동차**,**염소**,**염소**,....**염소**]**라면

5)

N번문을 선택하고 **2**번문이 개방될 경우

자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률**:1/n**

N번문을 선택할 확률**:1/n**

2번 문이 개방될 확률**:1/(n-2)**

선택을 바꿀 때 자동차를 얻을 확률**:1/(n-2)**

전체 확률=(자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률)*(N번문을 선택할 확률)*(2번문을 개방할 확률)*(선택을 바꿀 때 자동차를 얻을 확률)

$=1/(N^2)(N-2)^2$

몬티홀 일반화

문이 N개 일때

[자동차,염소,염소,....염소]라면

6)

N번문을 선택하고 **N-1**번문이 개방될 경우

자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률:**1/n**

N번문을 선택할 확률:**1/n**

N-1번 문이 개방될 확률:**1/(n-2)**

선택을 바꿀 때 자동차를 얻을 확률:**1/(n-2)**

전체 확률=(자동차가 위와 같은 배치를 가질 확률)*(N번문을 선택할 확률)*(N-1번문을 개방할 확률)*(선택을 바꿀 때 자동차를 얻을 확률)

$=1/(N^2)(N-2)^2$

몬티홀 일반화

문이 N개 일때

[자동차,염소,염소,....염소]라면

배치가 총 N개 있으므로

선택을 바꿀 때 자동차를 얻을 확률 (N-2)*(N-1)개

$=(N-2)*(N-1)*\{1/(N^2)(N-2)^2\}=(N-1)/N^2(N-2)$ →

선택을 바꿀 때 자동차를 얻을 확률 =

$N(N-1)/N^2(N-2)=(N-1)/N(N-2)$

몬티홀 일반화

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

가정:C1문을 선택하고 사회자가 C2문을 열어서 양을 보여줬다고 가정

A2=C2의 문을 열어서 보여줌
B= ~문 뒤에 차가 있다.

B:가설	P[B]	P[A2|B]	P[B]P[A2|B]	P[B|A2]
C1	1/n	1/(n-1)	1/n(n-1)	1/n
C2	1/n	0	0	0
C3	1/n	1/(n-2)	1/n(n-2)	(n-1)/n(n-2)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
CN	1/n	1/(n-2)	1/n(n-2)	(n-1)/n(n-2)
			P[A2]=1/(n-1)	

선택을 바꾸지 않았을 때

선택을 바꿨을 때

몬티홀 문제와 경제학적 접근

전통적인 경제학 이론에서는 사람들이 기대 가치를 극대화하는 방향으로 논리적이고 합리적인 의사결정을 한다고 가정합니다.
몬티홀 문제에서도 참가자는 각 선택에 대한 기대 가치를 고려하여 가장 높은 승리 확률을 가진 문을 선택해야 합니다.

대부분의 사람들은 선택을 바꾸지 않았다.

대부분의 사람들은 자신의 선택을 바꾸지 않는다. 사회자가 염소가 있는 문을 열어주었기 때문에 정답을 맞출 확률이 3분의 1에서 2분의 1로 늘어났다고 생각하기 때문이다.

행동 경제학과 판단의 오류

몬티홀 문제에서 많은 사람들이 직관적으로 '문을 바꾸지 않는' 선택을 하는데, 이는 합리적 분석과 대조되는 행동입니다. 이는 행동 경제학의 연구 분야와 연관되며, 사람들이 심리적 편향, 판단의 오류 및 불완전한 정보로 인해 항상 최적의 결정을 내리지는 않는다는 것을 보여줍니다.

행동 경제학

- 주류 경제학의 기본 가정을 거부하는 경제학
- 경제학의 합리성 가정을 약화시킨데서 출발합니다.
- 관측된 심리적 편향의 사례들을 소개하고 이를 분석합니다.

몬티홀 문제와 행동경제학

전통 경제학의 가정의 허를 찌를 사례로 유명하다

보석상에 한 사람이 들어와서 70만원짜리 보석을 샀다.

100만원짜리 수표를 냈는데 보석상 주인은 거스름 돈을 줄 것이 없다.

래서 보석상 주인은 그 수표를 들고 옆 제과점에 가서 현금으로 바꿔온 뒤 30만원을 신사에게 거슬러줬다.

그 신사가 가고난 뒤, 그 수표가 가짜 수표인 걸 알게 됐다.

그래서 보석상 주인이 제과점 주인에게 100만원을 물어주었다.

보석상 주인이 총 손해 본 금액은?

확률론과 위험관리

몬티홀 문제에서의 핵심은 확률 이론을 올바르게 이해하고 적용하는 것입니다. 경제학에서도 투자, 보험, 그리고 다양한 재정적 의사결정을 내릴 때 확률론적 접근은 위험을 계산하고 관리하는 데 필수적입니다.

게임 이론과 전략적 상호 작용

게임 이론은 경제적인 상황에서의 전략적인 상호작용을 연구하는 학문입니다. 몬티홀 문제는 사실상 한 명의 참가자가 참여하는 간단한 게임이지만, 참가자의 선택이 상대방 (게임쇼 호스트)의 행동에 의해 영향을 받는 방식을 연구함으로써 게임 이론과 관련됩니다.

네가 생각하는 것을 내가 생각하고 있다고 네가 생각하고 있다는 것을 나는 생각한다

여러 경제주체가 모여 의사결정을 하는 상황을 경제학에서는 게임 상황이라고 한다. 게임 상황의 대표적인 본질은 상호의존성으로, 이는 각 경제주체의 의사결정이 자신뿐만 아니라 다른 경제주체의 편익에도 영향을 주는 성질을 일컫는다. 이 상호의존성을 고려하는 것을 전략적 고려라고 하며, 게임 이론은 합리적인 경제주체들이 상호 의존성 아래에서 전략적 고려를 할 때 어떤 의사결정을 내리는지를 탐구하는 경제학의 한 분야이다.

게임 이론

비록 기본적으로는 경제학의 한 분야라고는 하지만, 게임 상황은 수없이 많은 상황에서 발생하므로 그 응용의 여지는 실로 무궁무진하다. 게임 이론은 엄연히 응용 수학의 한 분야로 자리잡아, 탄생과 함께 정치학, 경제학, 사회학, 심리학, 생물학, 군사학, 컴퓨터과학 등 여러 종류의 학문에 매우 큰 영향을 미쳤다. 현재는 학제간 연구의 가장 대표적인 주제로 꼽히고 있다.

이전부터 경쟁, 협력, 갈등, 대립 등 개체의 집단에서의 현상 등을 수학적으로 나타내려는 시도는 있었다. 하지만 기존의 연구들은 대부분 특정한 게임에서의 전략 등을 연구하는데 그쳤고, 게임 그 자체에 대한 이론이라 할 것은 존재하지 않았다. 게임에 대한 이론을 본격적으로 정립한 것은 폰 노이만이 최초였다.

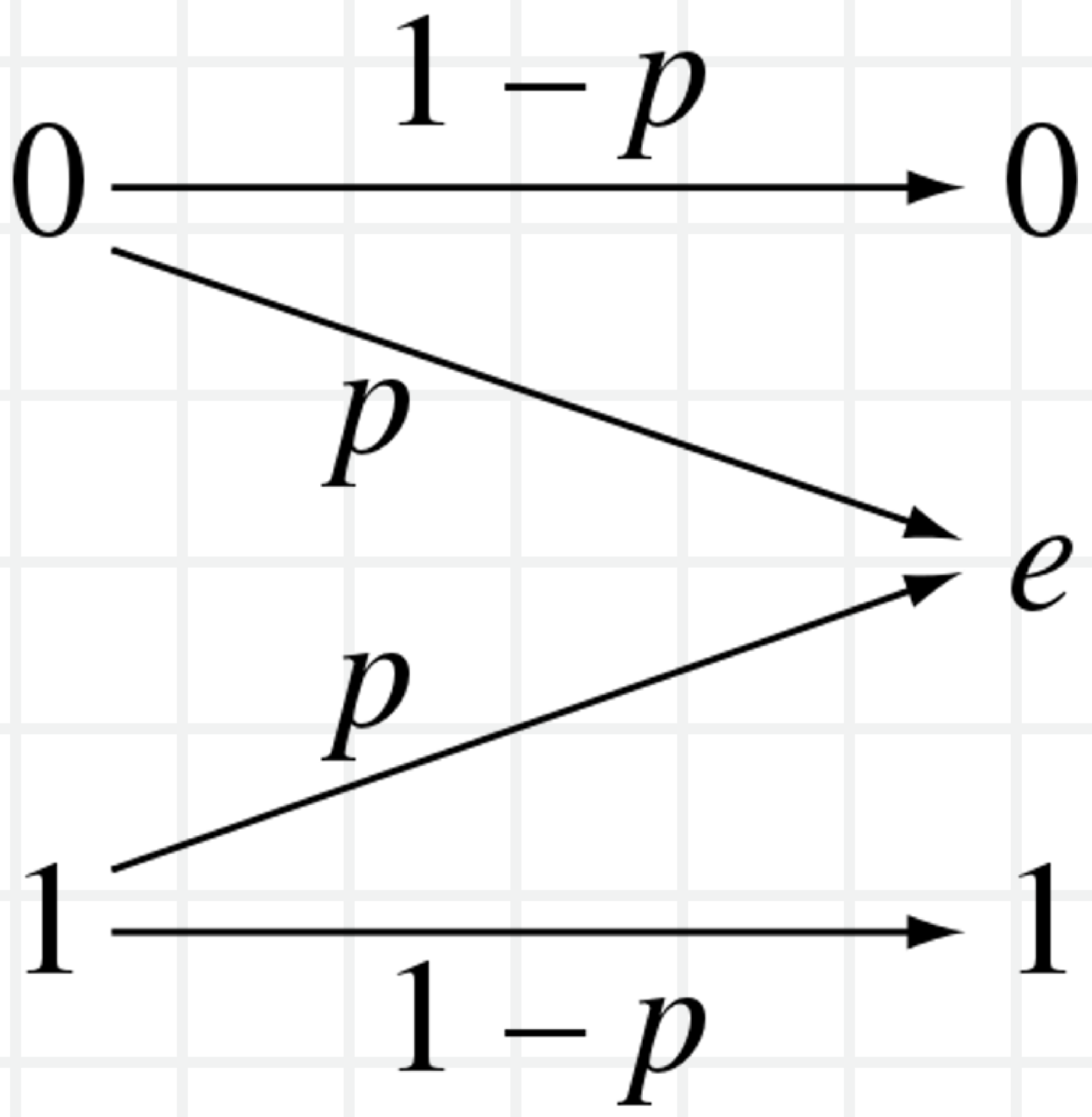
경제학의 게임 이론

미시경제학에서 **SCP** 접근 분석법과 시카고 학파 접근법이 충돌하였는데, 이 논란들이 게임이론으로 정리되었다. 메커니즘 디자인 분야도 조금 다루는데, 메커니즘 디자인의 경우는 애초에 석사급 난이도라 학부생 때는 사실상 들어볼 일이 없을 것이다. **MWG** 미시경제학 책 끝부분부터 나온다. 주로 과점 시장을 연구할 때 많이 쓰인다.

- 실 해석학에 대한 지식이 필요.

참고: 예일대에서 게임 이론 강의를 무료로 제공하고 있다. 영어를 알아들을 수만 있다면, 쉽게 풀어서 설명했기에 어렵지 않게 이해할 수 있다.

정보 이론



몬티홀 문제에서 정보의 가치는 선택을 바꿀 때 명시됩니다. 경제학에서 정보는 시장 참여자들이 의사 결정을 하고 거래를 할 때 중심적인 역할을 합니다. 정보 비대칭은 시장 결과에 영향을 미치며, 이는 몬티홀 문제를 통해 모델링할 수 있습니다.

정보이론에서의 정보 : 놀람의 정도, **I(x)= -logP(x)**

예 : 이세돌 **4**국의 **78**번째 수 **0.007%**

정보량 **: -ln0.00007 = 9.567**

70퍼센트라고 가정할 시 정보량은 **0.357**

몬티홀 문제와 파생상품 설계

이 파생상품은 투자자가 초기에 여러 투자 옵션(예: 다양한 자산 클래스나 특정 주식 세트) 중 하나를 선택하도록 합니다. 약속된 시간이 지나면 일부 투자 옵션들이 시장 상황에 따라 제거되고, 투자자는 다시 한 번 선택을 할 기회를 얻습니다.

이 상품은 특정 시장 지표나 이벤트(예: 특정 주식의 가격 변동, 금리 발표 등)에 대한 정보 업데이트 시, 상품의 지급 구조가 변경되는 형태입니다. 예를 들어, 중간 지표에 따라 배당률이 조정되거나, 상품의 만기 일을 서로 다른 시기 중에서 선택할 수 있게 하는 등의 조건을 부여할 수 있습니다.

시나리오 별 배당 조정 상품

사전에 정의된 여러 시나리오에 따라 투자자의 배당이 조정되는 상품을 만들 수 있습니다. 각 시나리오는 특정 시장 조건에 기반하여 설계되고, 시나리오가 현실화될 때마다 투자자는 좋은 조건으로 그들의 투자를 업데이트하기 위해 선택할 수 있습니다.

멀티 스테이지 페이 오프 옵션

이 옵션은 여러 단계를 거치며 투자자가 각 단계마다 정보가 업데이트됨에 따라 자신의 포지션을 유지할지 조정할지를 결정할 수 있습니다. 각 단계에서 포지션을 유지하면 페이오프가 증가하고, 변경할 경우 리셋될 수 있는 구조입니다.

확률적 페이오프 구조

결과의 확률 분포에 기반하여 페이오프가 결정되는 상품을 만들 수 있습니다. 예를 들면, 특정 지수의 연간 수익률이 임계값을 초과할 확률에 따라서 투자자의 배당이 결정됩니다.

이런 옵션은 **ELS**와 어느정도 궤를 같이 하는 옵션이 될 수 있다.

옵션타입의 종류

유러피안 옵션

옵션 권리를 정해진 만기일에만 행사할 수 있는 옵션

아메리칸 옵션

옵션 권리를 만기 이전에 행사할 수 있는 옵션

이 외에도 아시안 옵션, 바이너리 옵션

버뮤다 옵션

옵션 권리를 만기 이전에 행사할 수 있으나, 미리 정해둔 시점에만 행사 할 수 있는 옵션

몬티홀 문제와 옵션의 유사성

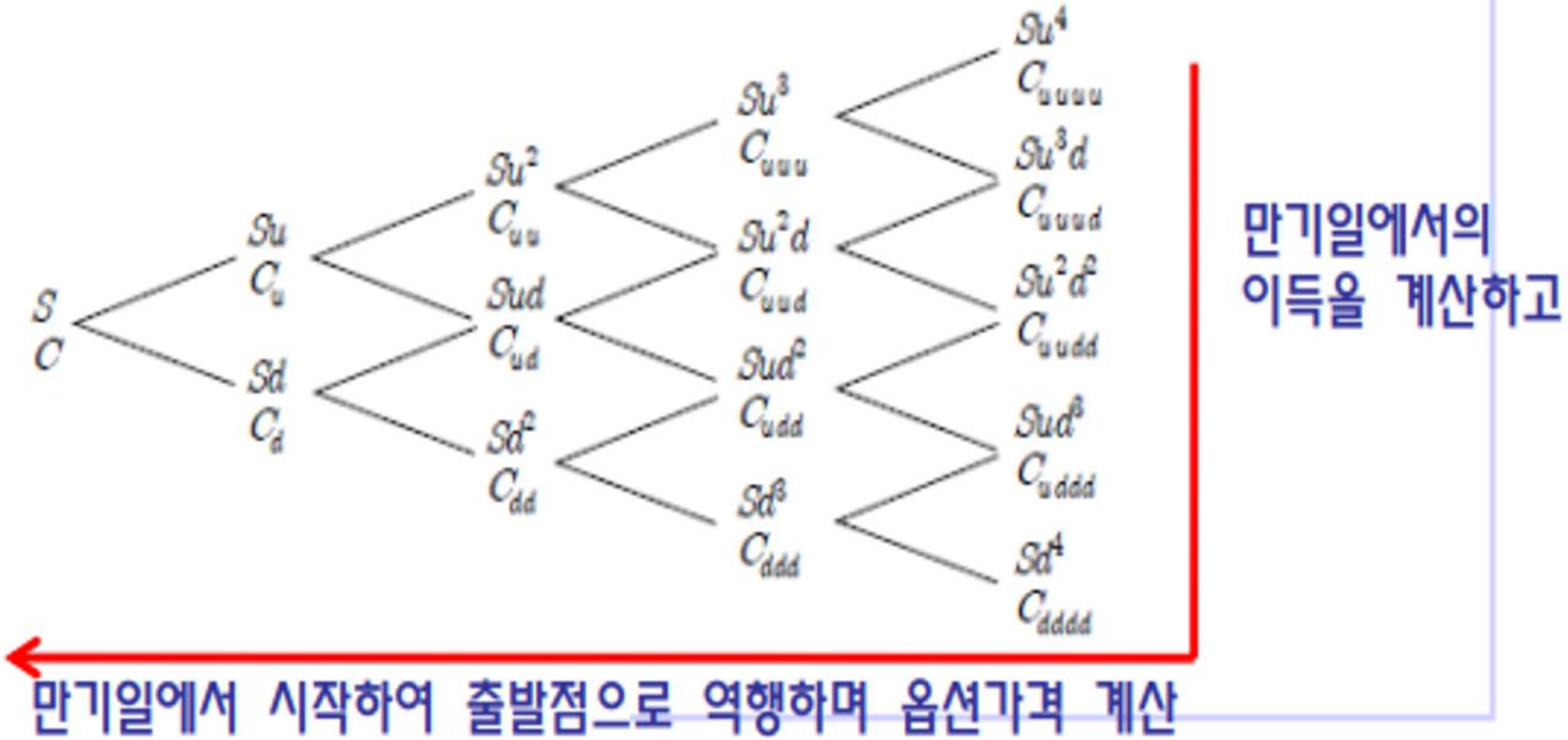
(옵션에서 주가가 바뀌는 것) = (새로운 정보가 주어지는 것) = (몬티홀 문제에서 사회자가 문을 여는 것) 으로 보고 새로운 정보에 대한 변화를 비교해보면.

- 아메리칸 옵션: 주가가 바뀌면서 옵션가격이 달라짐
- 몬티홀 문제: 사회자가 문을 열어서 당첨확률이 달라짐

위와 같은 결과가 나오게 되고, 따라서 새로운 정보를 받았을 때 미래가치(확률)이 변화하는 부분에서 유사성을 발견할 수 있다.

이항옵션가격결정모형

- 기본원리: " 복제(replication)와 차익거래(arbitrage)”
기초자산과 채권을 이용하여 옵션과 동일한 현금흐름을 제공하는 복제 포트폴리오를 구성하고 이를 이용하여 옵션가격을 구함
- 장점: 블랙-숄즈 모형에 비해 이해하기 쉽고 옵션의 조기행사를 쉽게 고려할 수 있음
- 여기서 사용하는 모형은 콕스-로스 루빈스타인 모형임
- 주가가 미래시점에서 내가격과 외가격, 단 두가격에만 있도록 하여 불확실성을 모형화 함


S
C
Su
Cu
Sd
Cd
Su2
Cuu
Sud
Cud
Sd2
Cdd
Su3
Cuuu
Su2d
Cuud
Sud2
Cudd
Sd3
Cddd
Su4
Cuuuu
Su3d
Cuuud
Su2d2
Cuudd
Sud3
Cuddd
Sd4
Cdddd
만기일에서의
이득을 계산하고
만기일에서 시작하여 출발점으로 역행하며 옵션가격 계산

THANK YOU