Team. Two-rillion

몬티홀
MONTI

23-2 가을학기 이산수학_PBL2

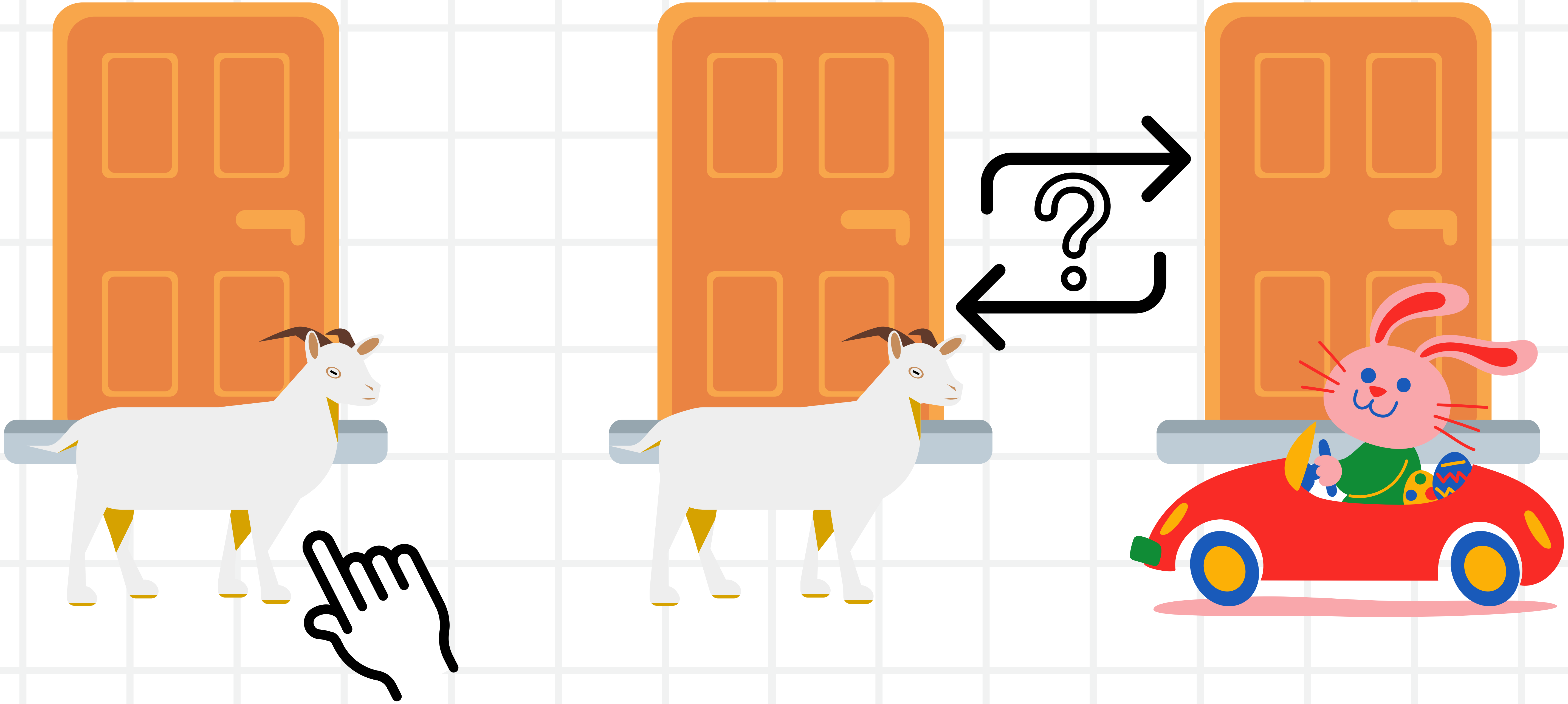
금융공학과 박수빈 / 금융공학과 서보규
금융공학과 선두연 / 금융공학과 전민욱
e-비즈니스학과 심푸름

목차

01

몬티홀 문제 설명

몬티홀 문제 설명



몬티홀 문제 설명

‘진행 순서의 정보’ 중요

자동차 배치 → 참여자의 선택 → 사회자가 선택적으로 문을 개방

배치 순서 (자동차, 염소, 염소) , (염소, 자동차, 염소), (염소, 염소, 자동차)

선택 확률에 대한 **대칭성** 존재 = **한 가지 배치**에 대한 확률을 구하면 됨

02

몬티홀 문제 해결방법

문제 해결 - 조건부확률

i.

처음에 **염소**가 있는 문을 선택할 확률

= 2/3

사회자는 무조건 염소가 있는 문을 선택

= 1/1

문을 바꿨을 때 자동차가 있을 확률

= 1/1

∴ 2/3 x 1/1 x 1/1 = 2/3

나는 문을

무조건 바꾼다

2/3 + 0/6

= 2/3

ii.

처음에 **자동차**가 있는 문을 선택할 확률

= 1/3

a) 사회자가 염소가 있는 문 중 첫 번째 선택 = 1/2

문을 바꿨을 경우 자동차가 있을 확률 = 0/1

∴ 1/3 * 1/2 * 0/1 = 0/6

b) 사회자가 염소가 있는 문 중 두 번째 선택 = 1/2

문을 바꿨을 경우 자동차가 있을 확률 = 0/1

∴ 1/3 * 1/2 * 0/1 = 0/6

0/6 + 0/6 = 0/6

문제 해결 - 조건부확률

i.

처음에 **염소**가 있는 문을 선택할 확률

= 2/3

사회자는 무조건 염소가 있는 문을 선택

= 1/1

문을 바꾸지 않았을 때 자동차가 있을 확률

= 0/1

∴ 2/3 x 1/1 x 0/1 = 0/3

나는 문을

바꾸지 않는다

0/3 + 1/3 =

1/3

ii.

처음에 **자동차**가 있는 문을 선택할 확률

= 1/3

a) 사회자가 염소가 있는 문 중 첫 번째 선택 = 1/2

문을 바꾸지 않았을 경우 자동차가 있을 확률 = 1/1

∴1/3 * 1/2 * 1/1 = 1/6

b) 사회자가 염소가 있는 문 중 두 번째 것을 선택 = 1/2

문을 바꾸지 않았을 경우 자동차가 있을 확률 = 1/1

∴ 1/3 * 1/2 * 1/1 = 1/6

1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3

문제 해결 - 베이즈 정리

n개의 사건 $B_1, B_2, \ldots, B_n$은 표본공간 S를 분할하고,

사건 A가 표본공간 S의 임의의 사건이라면,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) * P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) * P(A|B_i)}$$

$$, P(B_i) > 0, P(A) > 0$$

증명

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_i) * P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_i) * P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) * P(A|B_i)}$$

분자 = 확률의 곱셈정리

분모 = 전체 확률의 법칙

문제 해결 - 베이즈 정리

가정 : 참가자 A문 염 → 사회자 C문 열어서 염소 확인

문 뒤에 **차**가 있는 사건 : **A, B, C**

사회자가 **C문**을 고르는 사건 : **D**

P(A) = P(B) = P(C) = 1/3 (생략 가능)

사건 D가 일어났을 때,

선택을 바꿀 때의 당첨 확률 $P(B \mid D)$

안 바꿀 때의 당첨 확률 $P(A \mid D)$

문제 해결 - 베이즈 정리

어떤 **조건부 사건이 일어날** 확률 = 모든 **역사건의 가짓수** 중 해당 사건의 **역사건이 일어날** 확률

안 바꿀 때의 당첨 확률 $\boldsymbol{P(A \mid D)}$

$$= \frac{P(D \mid A) * P(A)}{P(D \mid A) * P(A) + P(D \mid B) * P(B) + P(D \mid C) * P(C)} = \frac{0.5}{0.5 + 1 + 0} = \frac{1}{3}$$

선택을 바꿀 때의 당첨 확률 $\boldsymbol{P(B \mid D)}$

$$= \frac{P(D \mid B) * P(B)}{P(D \mid A) * P(A) + P(D \mid B) * P(B) + P(D \mid C) * P(C)} = \frac{1}{0.5 + 1 + 0} = \frac{2}{3}$$

문제 해결 - 큰 수의 법칙

사건을 무한히 반복할 때

일정한 사건이 일어나는 비율은 횟수를 **거듭하면** 할수록 **일정한 값**에 **수렴**하는 법칙

(전제 조건 : 샘플링하는 것은 복원 추출을 기반으로하며 각 사건은 동일하다.)

Ex) 동전을 던지는 횟수(n)를 무한히 늘리면 앞면이 나올 확률은 결국 0.5에 근사할 것

문제 해결 - 몬테카를로 방법

1. 땅에 가로, 세로 길이가 동일한 **정사각형**을 그리고, 정사각형의 각 면과 **맞닿도록 원**을 그린다.

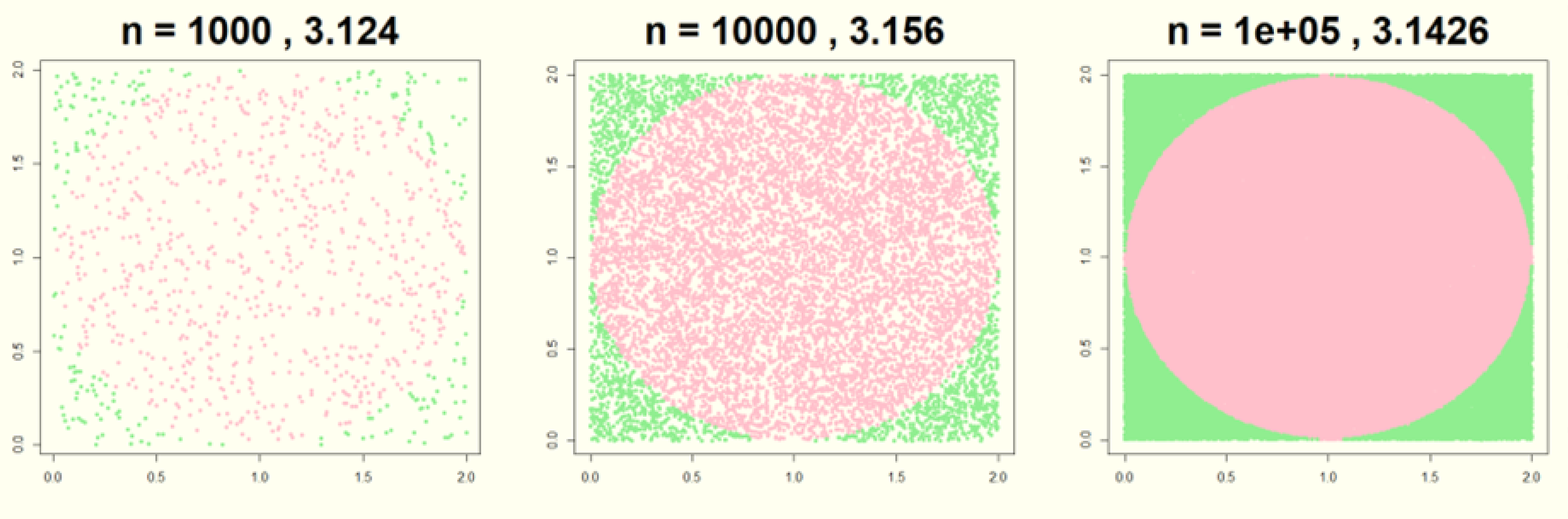
2. 정사각형이 **가득 찰** 때까지 돌을 던진다.

3. 던진 돌의 개수와, 던진 돌 중 **몇 개**가 **원 안**으로 들어갔는지 센다.

4. 원의 면적/정사각형의 면적 = 원 안의 돌 개수/정사각형 안의 돌 개수

큰 수의 법칙에 따라, **시행 횟수가 늘어나면 실제 면적 비율에 근사**

문제 해결 - 몬테카를로 방법



문제 해결 - 몬테카를로 방법

```python
import random

door = [1,2,3] # 문 3개에 대한 리스트 설정
trial = 1000000
```

```python
import random

door = [1,2,3] # 문 3개에 대한 리스트 설정
trial = 1000000
change_no = 0 # 선택 미변경
change_yes = 0 # 선택 변경

for i in range(0,trial):
    car_door = random.choice(door)  # 차가 있는 문 랜덤 설정
    select_door = random.choice(door) # 참여자가 고를 문 랜덤 설정
    if car_door == select_door:
        change_no = change_no + 1  # 참여자가 차가 있는 문을 고를 때마다 +1
```

문제 해결 - 몬테카를로 방법

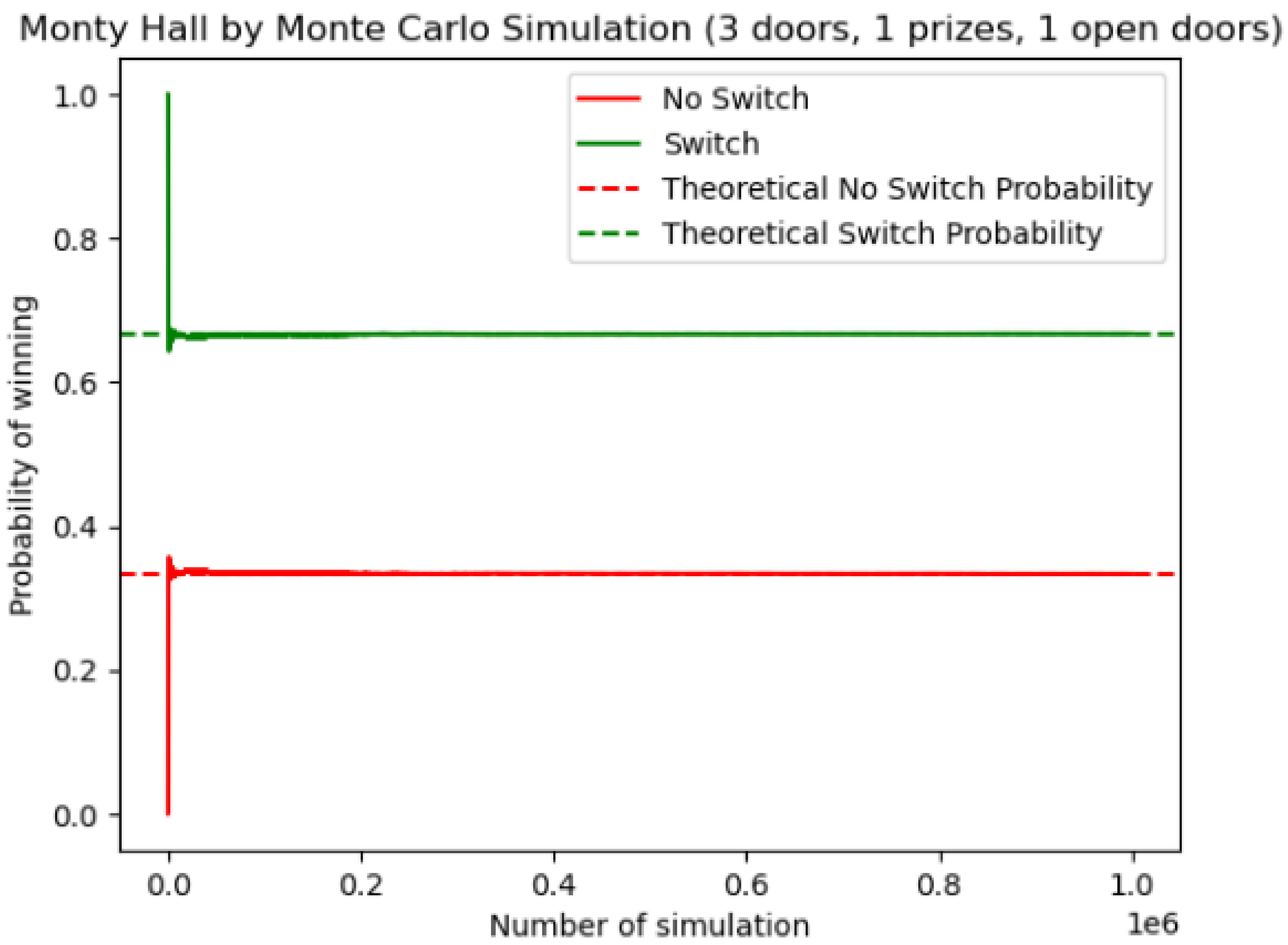
```
for i in range(0,trial):
    car_door = random.choice(door)
    select_door = random.choice(door)
    monthy_door = []
    new_yes = []
    for j in door:
        if j != car_door and j != select_door:
            monthy_door = monthy_door + [j]   # 사회자가 개방 가능한 문
    monthy_open = random.choice(monthy_door)  # 개방 가능한 문에서 무작위 개방
    for k in door:
        if k != monthy_open and k != select_door:
            new_yes = new_yes + [k]  # K는 참여자가 선택을 바꿀 수 있는 나머지 문의 번호
    if car_door == new_yes[0]:
        change_yes = change_yes + 1 # 나머지 문이 차가 있는 문일 때마다 +1
```

```
print(change_yes/trial)
print(change_no/trial)
```

```
0.666279
0.333838
```

문제 해결 - 몬테카를로 방법

문의 개수를 입력하세요: 3
상품의 개수를 입력하세요: 1
사회자가 여는 문의 개수를 입력하세요: 1
시뮬레이션 횟수를 입력하세요: 1000000
1000000번 시도 중 처음선택을 바꾸지 않았을 때 승리 확률은 약 33.325600%입니다.
1000000번 시도 중 처음선택을 바꾸어서 얻을 승리 확률은 약 66.674400%입니다.
이론적으로 처음선택을 바꾸지 않았을 때 승리 확률은 약 33.333333%입니다.
이론적으로 처음선택을 바꾸어서 얻을 승리 확률은 약 66.666667%입니다.



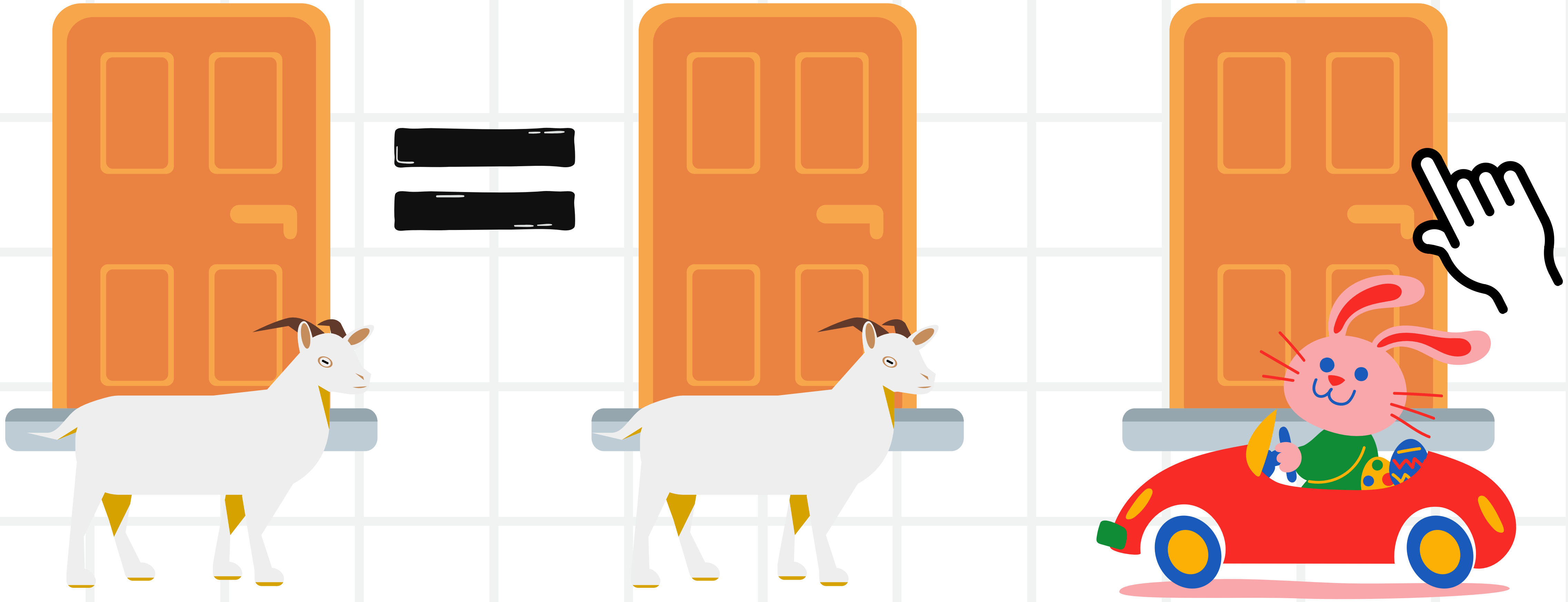
03

몬티홀 문제 원리

이유 불충분의 원리

이유 불충분의 원리(principle of indifference)?

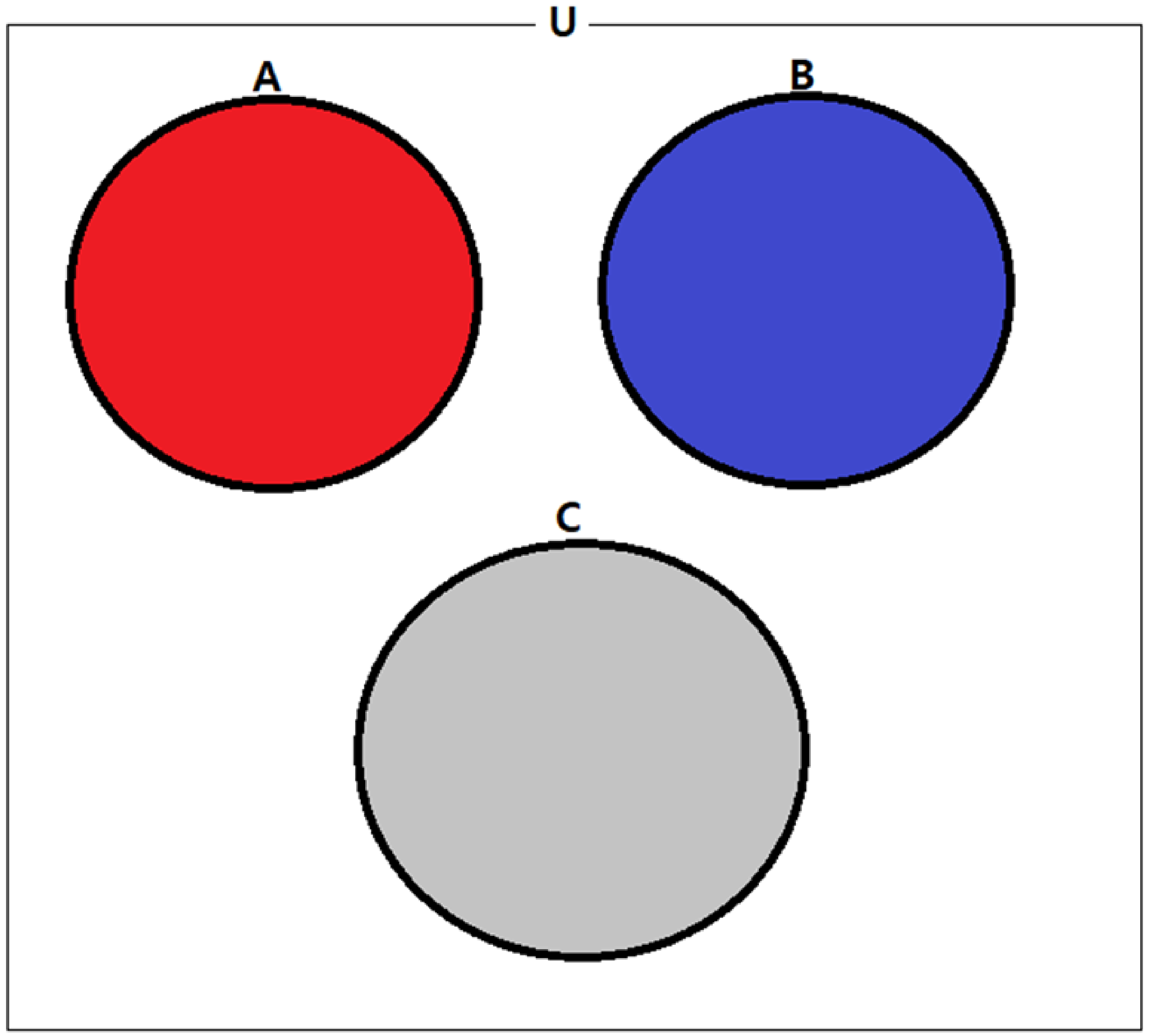
관련 증거가 **없는** 경우 고려 가능한 모든 결과에 대해 **동등한 신뢰도**



자동차가 있는 문이 선택 될 때,
나머지 문들에 대한 사회자의 선호도는 동등하다.

이유 불충분의 원리

상호배타 (Mutual exclusivity)



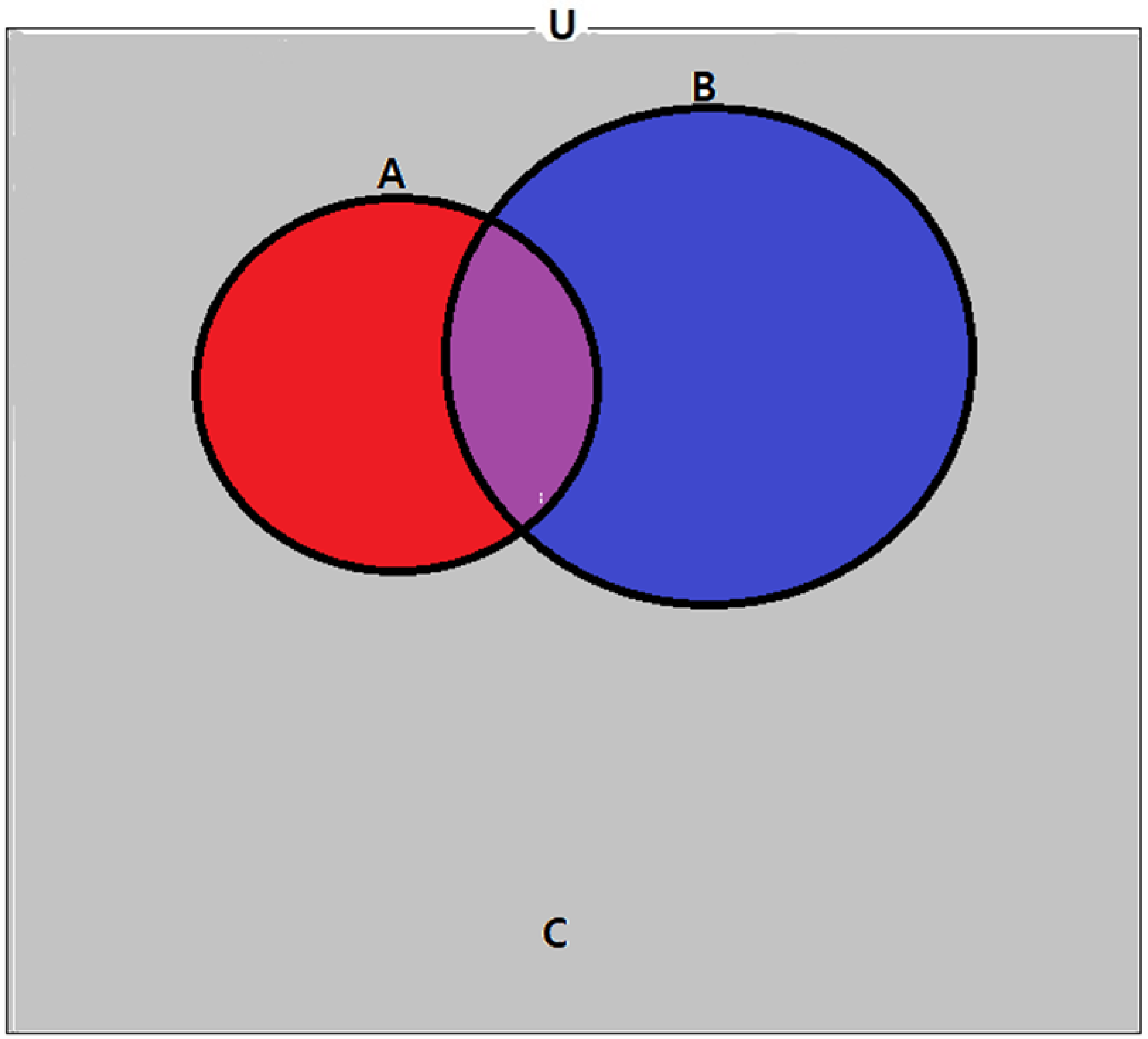
$A \cap B = \varnothing$

$B \cap C = \varnothing$

$A \cap C = \varnothing$

이유 불충분의 원리

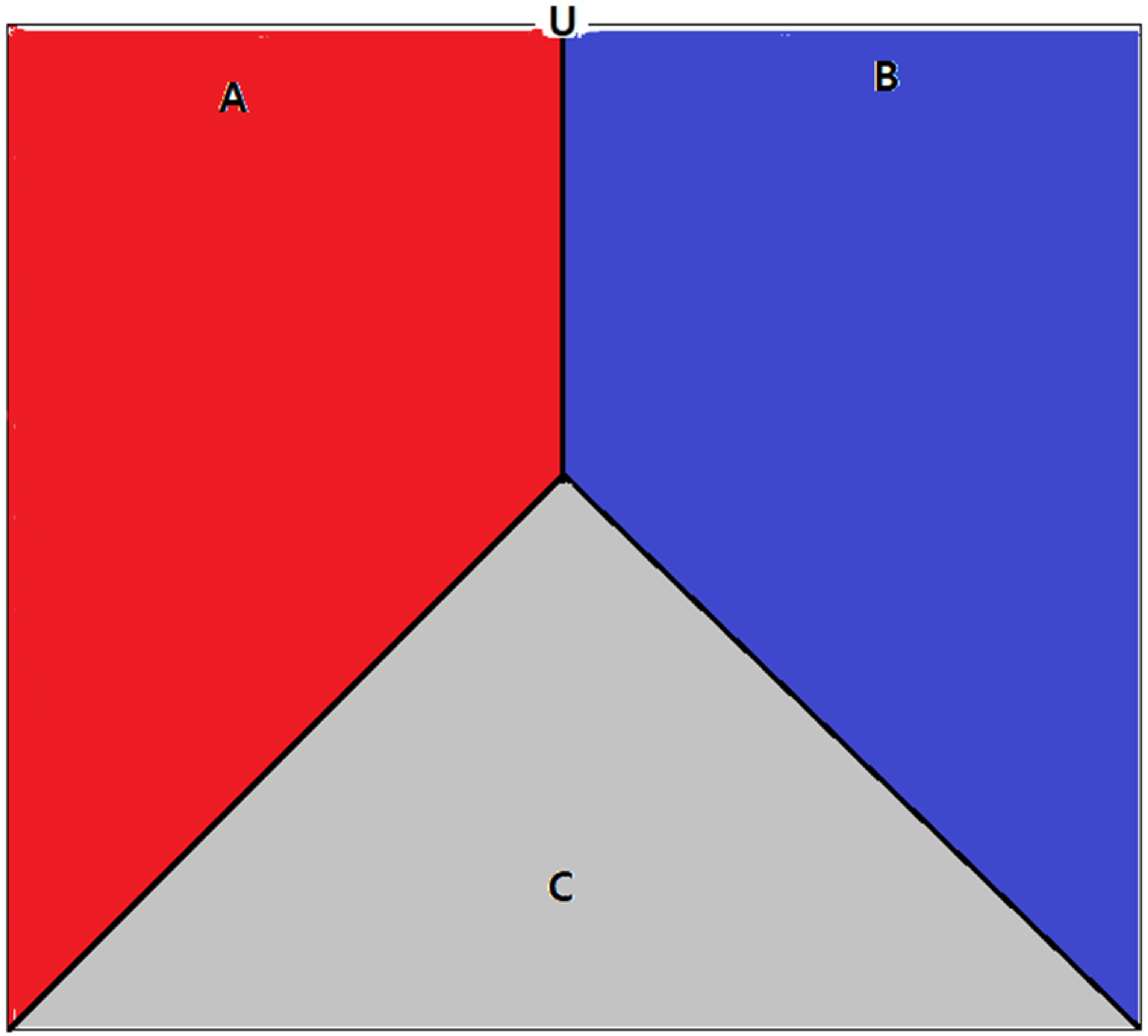
전체 포괄 (Collectively exhaustive)



$A \cup B \cup C = U$

이유 불충분의 원리

상호 배타적이면서 전체 포괄적인 관계 (Mutually Exclusive Collectively Exhaustive)



이유 불충분의 원리

이유 불충분의 원리(principle of indifference)?

가능한 세계의 집합 S를 **상호배타적이며 전체 포괄적인 관계**를 갖게 자연수 n만큼 분할할 때

이들의 집합 $W = \{w_1, w_2, \ldots w_n\}$ 이면,

원소들을 구분해야 할 어떠한 **정보가 없다** = 각 원소의 **1/n**의 **동등한 초기 확률**을 부여

Q. 사회자가 이것을 어기고 특정 전략을 가지면 어떻게 될까?

이유 불충분의 원리

가정 : 사회자가 왼쪽에 가까운 문은 p의 확률로, 오른쪽에 가까운 문은 1-p의 확률로 개방, 참가자가 당첨될 때.

여전히 **대칭성이 유지**되므로 [자동차,염소,염소]에 대해서만 고려, 이유 불충분의 원리 적용 **불가능**

	참여자	방향	사회자	선택		결과
좌측	O	좌측		바꾸지 않음	$\frac{1}{3}\times p\times 1=\frac{p}{3}$	$\frac{1}{3}$
중앙		중앙	O			
우측		우측				
					+	
좌측	O	좌측			$\frac{1}{3}\times(1-p)\times 1=\frac{(1-p)}{3}$	
중앙		중앙				
우측		우측	O			
좌측		좌측		바꿈	$\frac{1}{3}\times 1\times 1=\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
중앙	O	중앙				
우측		우측	O			
					+	
좌측		좌측			$\frac{1}{3}\times 1\times 1=\frac{1}{3}$	
중앙		중앙	O			
우측	O	우측				

여전히 선택을 **바꿀 때** 차를 얻을 확률이 **더 높다**

이유 불충분의 원리

가정 : 사회자가 **중앙** 문을 **될 수 있는 한 개방**하는 전략, 참가자가 당첨될 때 [염소,염소,자동차]에 대해서 고려, 이유 불충분의 원리 적용 **불가능**

	참여자	방향	사회자	선택		결과
좌측	O	좌측				
중앙		중앙	O	바꿈	$\frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$	
우측		우측				
					+	$\frac{2}{3}$
좌측		좌측	O			
중앙	O	중앙		바꿈	$\frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$	
우측		우측				
좌측		좌측				
중앙		중앙	O	바꾸지 않음	$\frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
우측	O	우측				

여전히 선택을 **바꿀 때** 차를 얻을 확률이 **더 높다**

이유 불충분의 원리

Q. 진행 순서가 바뀐다면?

가정 : 순서를 바꿔서

사회자가 왼쪽에 가까운 문은 p의 확률로, 오른쪽에 가까운 문은 1-p의 확률로 개방, 참가자가 당첨될 때.

대칭성이 유지되므로 참여자의 1번 문 선택의 경우만 고려.

전통적인 몬티 홀 문제

자동차가 특정 위치에 배치

↓

참여자가 문을 선택

↓

사회자가 선택적으로 문을 개방

순서가 바뀐 문제

참여자가 문을 선택

↓

사회자가 선택적으로 문을 개방

↓

자동차를 배치

이유 불충분의 원리

Q. 진행 순서가 바뀐다면?

참여자가 1번 문을 선택

	사회자	방향	자동차	선택		결과
좌측		좌측	O	바꾸지 않음	$p * \frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$
중앙	O	중앙				
우측		우측				
좌측		좌측		바꿈	$p * \frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$
중앙	O	중앙				
우측		우측	O			
좌측		좌측	O	바꾸지 않음	$(1-p) * \frac{1}{2}$	$\frac{1-p}{2}$
중앙		중앙				
우측	O	우측				
좌측		좌측		바꿈	$(1-p) * \frac{1}{2}$	$\frac{1-p}{2}$
중앙		중앙	O			
우측	O	우측				

선택을 바꿀 때 자동차를 얻을 확률:

$$\frac{p}{2} + \frac{1-p}{2} = \frac{1}{2}$$

선택을 바꾸지 않을 때 자동차를 얻을 확률:

$$\frac{p}{2} + \frac{1-p}{2} = \frac{1}{2}$$

이유 불충분의 원리

Q. 진행 순서만 바꾼다면?(특정 전략X)

참여자가 2번 문을 선택

	사회자	방향	자동차	선택		결과
좌측	O	좌측		바꾸지 않음	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * 1$	$\frac{1}{4}$
중앙		중앙	O			
우측		우측				
좌측	O	좌측		바꿈	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * 1$	$\frac{1}{4}$
중앙		중앙				
우측		우측	O			
좌측		좌측	O	바꿈	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * 1$	$\frac{1}{4}$
중앙		중앙				
우측	O	우측				
좌측		좌측		바꾸지 않음	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * 1$	$\frac{1}{4}$
중앙		중앙	O			
우측	O	우측				

이유 불충분의 원리

'진행 순서의 정보' 가 확률에 영향을 줌

1. 자동차가 배치 - 참여자가 문을 선택 - **사회자가 전략에 맞춰 개방**
2. 참여자가 문을 선택 - 자동차가 배치 - **사회자가 전략에 맞춰 개방**

전통적인 몬티 홀 문제

(2/3,1/3)

3. 참여자가 문을 선택 - **사회자가 전략에 맞춰 개방** - 자동차가 배치
4. 자동차가 배치 - **사회자가 전략에 맞춰 개방** - 참여자가 문을 선택
5. **사회자가 전략에 맞춰 개방** - 자동차가 배치 - 참여자가 문을 선택
6. **사회자가 전략에 맞춰 개방** - 참여자가 문을 선택 - 자동차가 배치

비전통적인 몬티 홀 문제

(1/2,1/2)

04

몬티홀 문제 일반화

몬티홀 문제 일반화 전제 조건

1

전체 문의 개수 n

상품의 수 w

문의 수 r

2

제거하는 문(r)에
상품(w)을 포함하지
않는다

3

$1 \le w, r \ (w, r \in N)$

$w + r + 1 \le n (w, r, n \in N)$

사회자가 **제거하는** 문의 수를 말함

몬티홀 문제 조건이 다른 문제

$n=7$ $w=2$ $r=3$ 일 때 몬티홀 문제의 확률

1. 처음 선택한 문이 상품이 있는 문일 때 $\frac{2}{7}$

1) 문을 사회자가 제거한 후 바꿔서 당첨인 확률 $\frac{1}{3}$

2) 문을 사회자가 제거한 후 바꿔서 꽝일 확률 $\frac{2}{3}$

2. 처음 선택한 문이 상품이 없는 문일 때 $\frac{5}{7}$

1) 문을 사회자가 제거한 후 바꿔서 당첨인 확률 $\frac{2}{3}$

2) 문을 사회자가 제거한 후 바꿔서 꽝일 확률 $\frac{1}{3}$

문을 바꿨을 때 당첨이 될 총 확률 $\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{12}{21}$

몬티홀 일반화

1. 처음 선택한 문이 상품이 있는 문일 때 $\frac{w}{n}$

1) 문을 사회자가 제거한 후 바꿔서 당첨인 확률 $\frac{w-1}{n-1-r}$

2) 문을 사회자가 제거한 후 바꿔서 꽝일 확률 $\frac{n-w-r}{n-1-r}$

2. 처음 선택한 문이 상품이 없는 문일 때 $\frac{n-w}{n}$

1) 문을 사회자가 제거한 후 바꿔서 당첨인 확률 $\frac{w}{n-1-r}$

2) 문을 사회자가 제거한 후 바꿔서 꽝일 확률 $\frac{n-1-r-w}{n-1-r}$

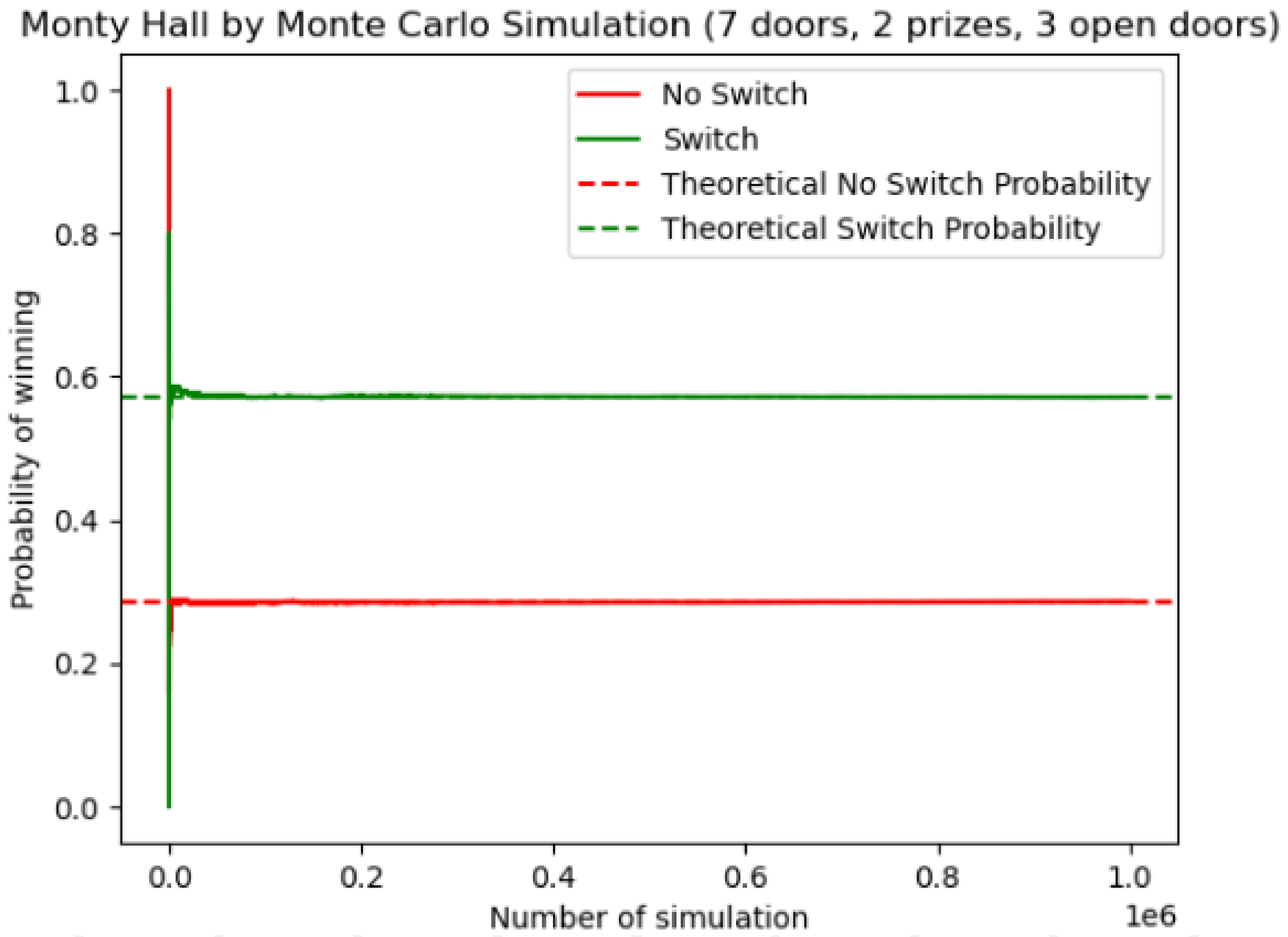
문을 바꿨을 때 당첨이 될 총 확률

$$\frac{w}{n} \times \frac{w-1}{n-1-r} + \frac{n-w}{n} \times \frac{w}{n-1-r}$$

$$= \frac{w}{n} \times \frac{n-1}{n-1-r}$$

몬테 카를로 시뮬레이션

문의 개수를 입력하세요: 7
상품의 개수를 입력하세요: 2
사회자가 여는 문의 개수를 입력하세요: 3
시뮬레이션 횟수를 입력하세요: 1000000
1000000번 시도 중 처음선택을 바꾸지 않았을 때 승리 확률은 약 28.597300%입니다.
1000000번 시도 중 처음선택을 바꾸어서 얻을 승리 확률은 약 57.121100%입니다.
이론적으로 처음선택을 바꾸지 않았을 때 승리 확률은 약 28.571429%입니다.
이론적으로 처음선택을 바꾸어서 얻을 승리 확률은 약 57.142857%입니다.



05

공평한 몬티홀 문제

공평한 몬티홀 문제

공평한 몬티홀 문제 만들기 1

처음 선택한 문의 당첨확률과 사회자가 문을 제거한 이후 바뀠을 때,

당첨확률이 같은 n,w,r이 존재하는가?

$\frac{w}{n} = \frac{w}{n} \times \frac{n-1}{n-1-r}$을 만족해야 하는데

$\frac{w}{n}$는 w<n이고 문제조건에 의해 둘 다 1보다 크므로 0이 아니다. 따라서

$\frac{n-1}{n-1-r}$=1을 만족하는 n,w,r이 존재해야 하는데 1<r 이므로 $\frac{n-1}{n-1-r}$>1 따라서 만족하는 n, w, r은

존재하지 않는다.

공평한 몬티홀 문제

공평한 몬티홀 문제 만들기 2

그렇다면 사회자가 문을 제거한 후에 문을 바꾸든 바꾸지 않든

당첨확률이 같은 n,w,r은 존재하는가?

$\frac{w}{n} \times \frac{n-1}{n-1-r} = \frac{1}{2}$를 만족하는 n,w,r을 찾아보자

문제 조건에 의해 분모들이 모두 0보다 크므로 양변에 곱해주면

$2w \times (n-1) = n \times (n-1-r)$

여기서 $n-1=N$으로 가정하자 ($N \in$ N이고, N>1)

$2wN = (N+1)(N-r)$

좌변이 N의 배수이므로 우변도 N의 배수여야 한다 따라서 $N^2 + (1-r)N - r$은 N의배수

r은 N의배수여야 한다.

여기서 N=n-1이므로 문제조건 w+r+1<n에서 r+w<N

따라서 r은 N의배수이며 r<N인 자연수 r이 존재해야 하는데 이는 불가능하므로 문제조건에 위배된다.

따라서 이를 만족하는 자연수 n,w,r은 **존재하지 않는다.**

Team. TWO-rillion