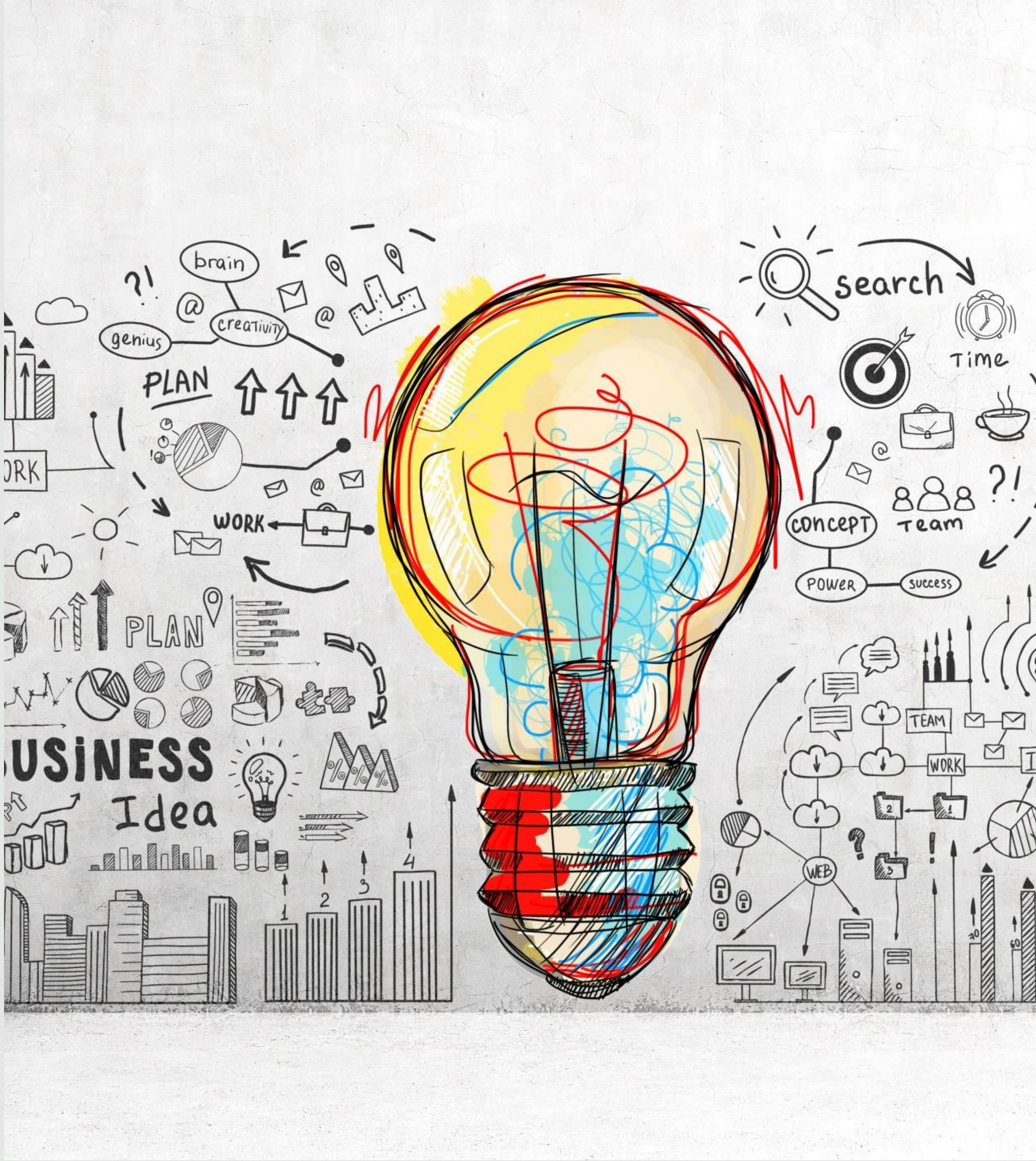
몬티 홀 문제 분석

5조

공대영 양원준

김용호 임승호

전지웅



몬티홀 문제

Monty Hall problem

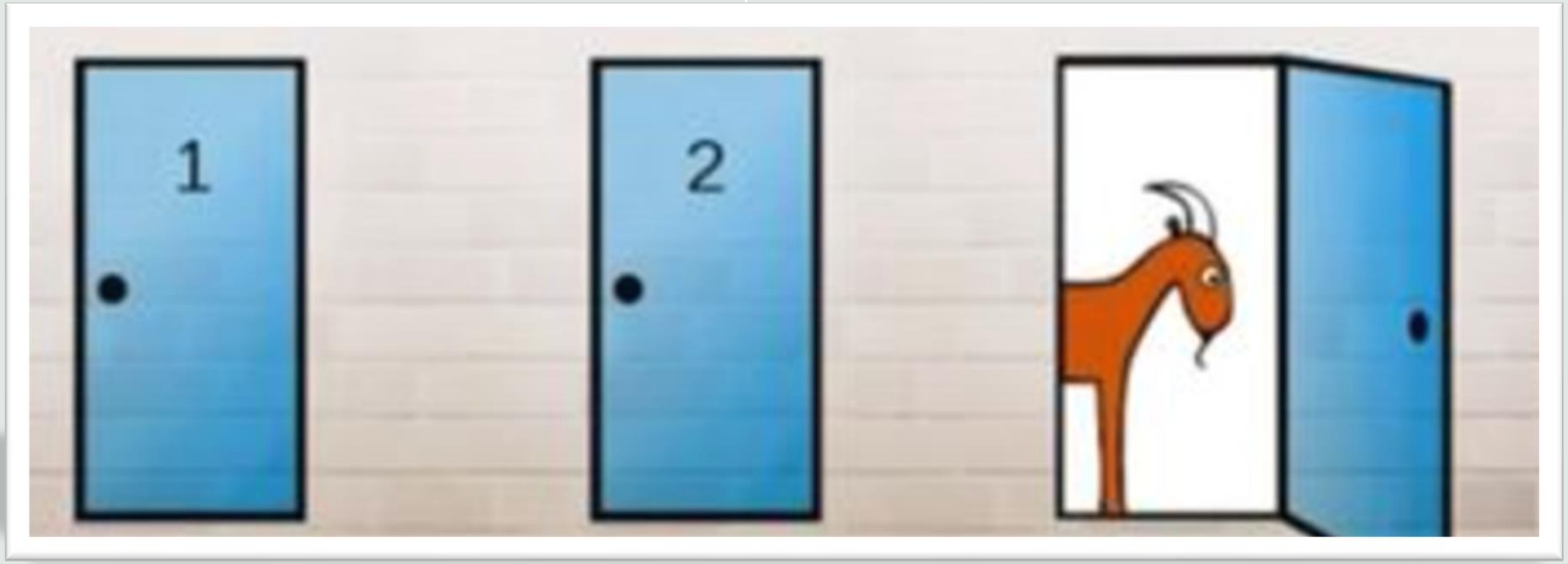
미국의 TV게임 쇼
《거래를 합시다(Let's Make a Deal)》에서 유래한 퍼즐

❖ 퍼즐의 이름은 이 게임 쇼의 진행자 몬티 홀의 이름에서 따온 것

세 개의 문 중 하나를 골라야 한다

한 개의 문 뒤에는 **슈퍼카**

나머지 두 개의 문 뒤에는 **염소**



여러분이 문 하나를 선택하면

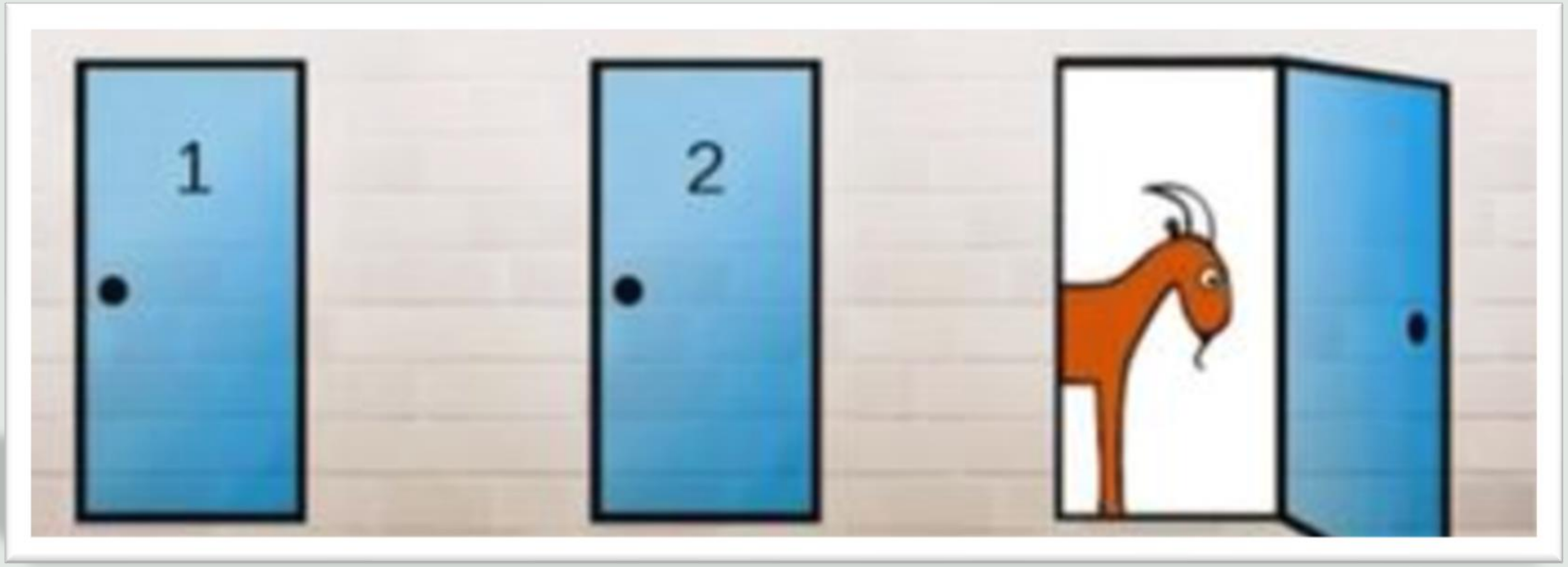
모든 상황을 알고 있는 사회자가

나머지 두 개의 문 중에

염소가 있는 문 하나 연다

그리고 열리지 않은 문을 두고

다시 한 번 선택할 수 있는 기회를 준다



So, 선택을 바꾸는 것과

바꾸지 않는 것 중

어느 쪽이 유리한가?


여러분들은
어떻게 생각하시나요?

택을

는 것

유리!

Sol, 참가자가 1번 문을 선택했다고 가정하자!

슈퍼카	사회자
1번 문에 있을 확률 P(C1) = $\frac{1}{3}$	1번 문을 열 확률 P(O1) = 0
2번 문에 있을 확률 P(C2) = $\frac{1}{3}$	2번 문을 열 확률 P(O2) = $\frac{1}{2}$
3번 문에 있을 확률 P(C3) = $\frac{1}{3}$	3번 문을 열 확률 P(O3) = $\frac{1}{2}$

Sol, 이제 진행자가 2번 문을 열어줬다고 가정하자!

1. 선택을 바꾸지 않고 차를 얻을 경우

진행자가 2번 문을 열어 염소를 보여줬을 때,
참가자가 고른 1번 문에 자동차가 있을 확률
P[C1|O2]

$$P[C1|O2] = \frac{P(O2|C1) * P(C1)}{P(O2)} = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Sol, **참가자가 선택을 바꿔 3번 문을 선택했다고 가정한다면!**

2. 선택을 바꿔(3번 문 선택) 차를 얻을 경우

이번에는 P[C3|O2] 를 구해야 하는 상황

진행자는 차가 어디 있는지 알고 있으므로
무조건 2번 문을 열게 되어 P[O2|C3] = 1

$$P[C3|O2] = \frac{P(O2|C3) * P(C3)}{P(O2)} = \frac{1 * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

결과적으로,

바꾸지 않을 때의 확률은 $\frac{1}{3}$

선택을 바꿨을 경우 확률은 $\frac{2}{3}$

So, 선택을 바꾸는 것이 **더 유리**하다고 볼 수 있다.

베이즈 정리

확률사건 A와 B의 조건부 및 주변확률을 연결시켜주는 것
해석적인 측면, 새로운 증거에 기반하여
과거의 정보를 향상시키거나 개선한다고 할 수 있음

빈도주의	베이즈 주의
연역적 추론	귀납적 추론
확률 '사건의 빈도'	사건발생에 대한 믿음 , 척도

베이즈 주의에서는
‘앞면이 나왔다’는
주장의 신뢰도 0.5
라고 생각

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

사전확률 사후확률

$$P(A|B)$$
$$= P(A \cap B)/P(B)$$
$$= P(B|A) * P(A)/P(B)$$

사건 A가 발생했다는 전제,
사건 B가 일어날 확률인 조건부 확률을 기반

“ 베이즈 주의 ”

여러 번의 사건을 관측할 수 없는 경우,

빈도주의의 단점을 보완하기 위해 사용할 수 있습니다.

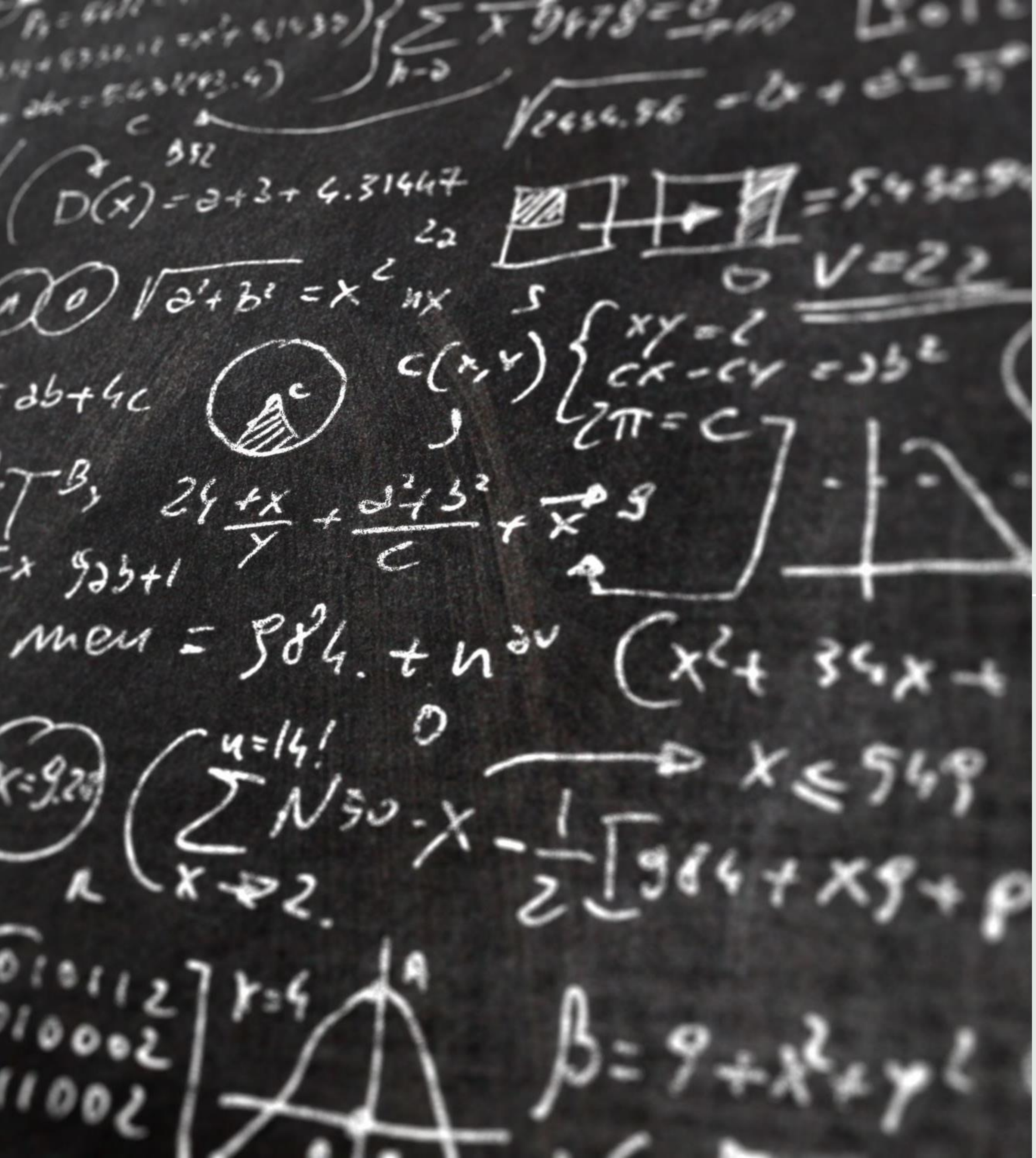
Ex) 자연재해의 예측문제를 생각해볼 수 있다.

즉, 자연재해가 발생하기 위해서는 여러 변수가 있는데,
자연재해처럼 발생횟수가 적은 사건들은 빈도주의를 적용하기 힘들다는 것.



So, 이를 해결하기 위해
베이즈 주의를 사용해 귀납적인 추론으로
자연재해가 발생할 **확률**을 구할 수 있게 되는 것입니다.



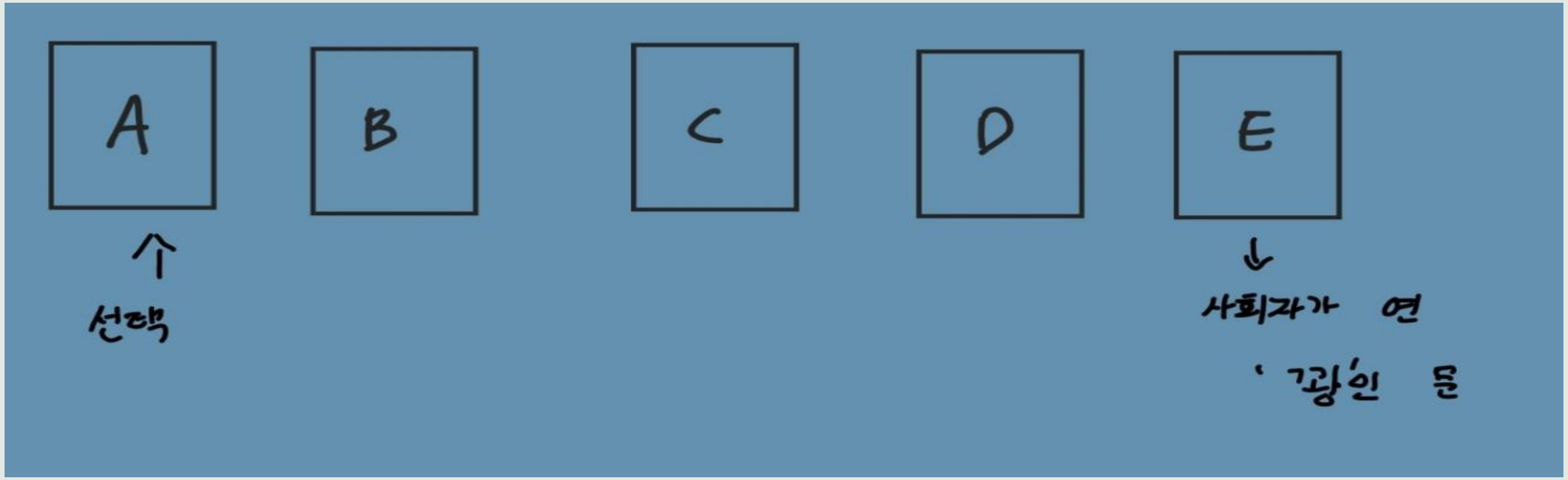


몬티 홀 문제 일반화

1. 문: n개 / 상품 수: k개 / 알려주는 문: 1개

2. 문: n개 / 상품 수: 1개 / 알려주는 문: k개

1. 문: n개 / 상품 수: k개 / 알려주는 문: 1개



	1. A문을 뽑아서 당첨일 때, 바꿔서 당첨일 확률			
	2. A문을 뽑아서 꽝일 때, 바꿔서 당첨될 확률			
상품수:	1	2	3	4
1번 경우	0	1/3.	2/3.	1
2번 경우	1/3.	2/3.	1	0

$$z = k-1$$

전체 확률의 합 = $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k-1}{n-2} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k}{n-2} \right)$

상품이 k개일 때의 확률 $\left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1}\right) \times \left(\frac{k-1}{n-2} + \frac{k}{n-2} \right)$

∴ 베이즈의 정리에서 상품수가 k개일 때 당첨될 확률은

$$\frac{\left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1}\right) \times \left(\frac{k-1}{n-2} + \frac{k}{n-2} \right)}{\frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k-1}{n-2} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k}{n-2} \right)}$$

$$= \frac{\frac{2k-1}{n-2}}{\left(\sum_{k=1}^{n-2} \frac{2k-1}{n-2} + 1 \right)}$$ //

2. 문: n개 / 상품 수: 1개 / 알려주는 문: k개

- 처음 선택 후 변경하지 않았을 경우 : $\frac{1}{n}$
- 처음 선택 후 변경하여 당첨될 경우 : $\frac{n-1}{n(n-k-1)}$
- $k > 0$ 이므로 변경할 경우가 당첨될 확률이 더 크다.

P(D)

$$= \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{k(k-1)\cdots(1)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)} + \frac{k(k-1)\cdots(1)}{(n-2)(n-3)\cdots\cancel{(n-k-1)}} \times \cancel{(n-k-1)} \right\}$$

$$= \frac{n \cdot k(k-1)\cdots(1)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}$$

베이즈 주의

check Point!

베이즈 주의

확률은 사건에 발생에 대한 믿음 또는 척도

Ex) 동전을 던졌을 때 앞면이 나올 확률은 0.5

> 동전의 앞면이 나왔다는 주장의 신뢰도는 0.5

Ex) 검진결과에 의해 암에 걸렸을 확률이 90%

> 암에 걸렸다는 의사의 말이 사실일 가능성이 90%

check point!

베이즈 주의

베이즈 정리를 활용하여 사전확률을 갱신

질병A의 발병률P(H): 0.1%

질병이 있는데 양성반응을 보일 확률 P(E|H): 99%

질병이 없는데 음성반응을 보일 확률 $P(E|H^c)$:98%

베이즈 정리 활용

양성반응을 보였을 때,
실제로 질병에 걸렸을 확률

P(H|E):4.7%

check point!

베이즈 주의

베이즈 정리를 활용하여 사전확률을 갱신

질병A의 발병률P(H): 0.1%

질병이 있는데 양성반응을 보일 확률 P(E|H): 99%

질병이 없는데 양성반응을 보일 확률 $P(E|H^c)$:98%

베이즈 정리 활용

양성반응을 보였을 때,
실제로 질병에 걸렸을 확률

P(H|E):4.7%

check point!

베이즈 주의

베이즈정리를 활용하여 사전확률을 갱신

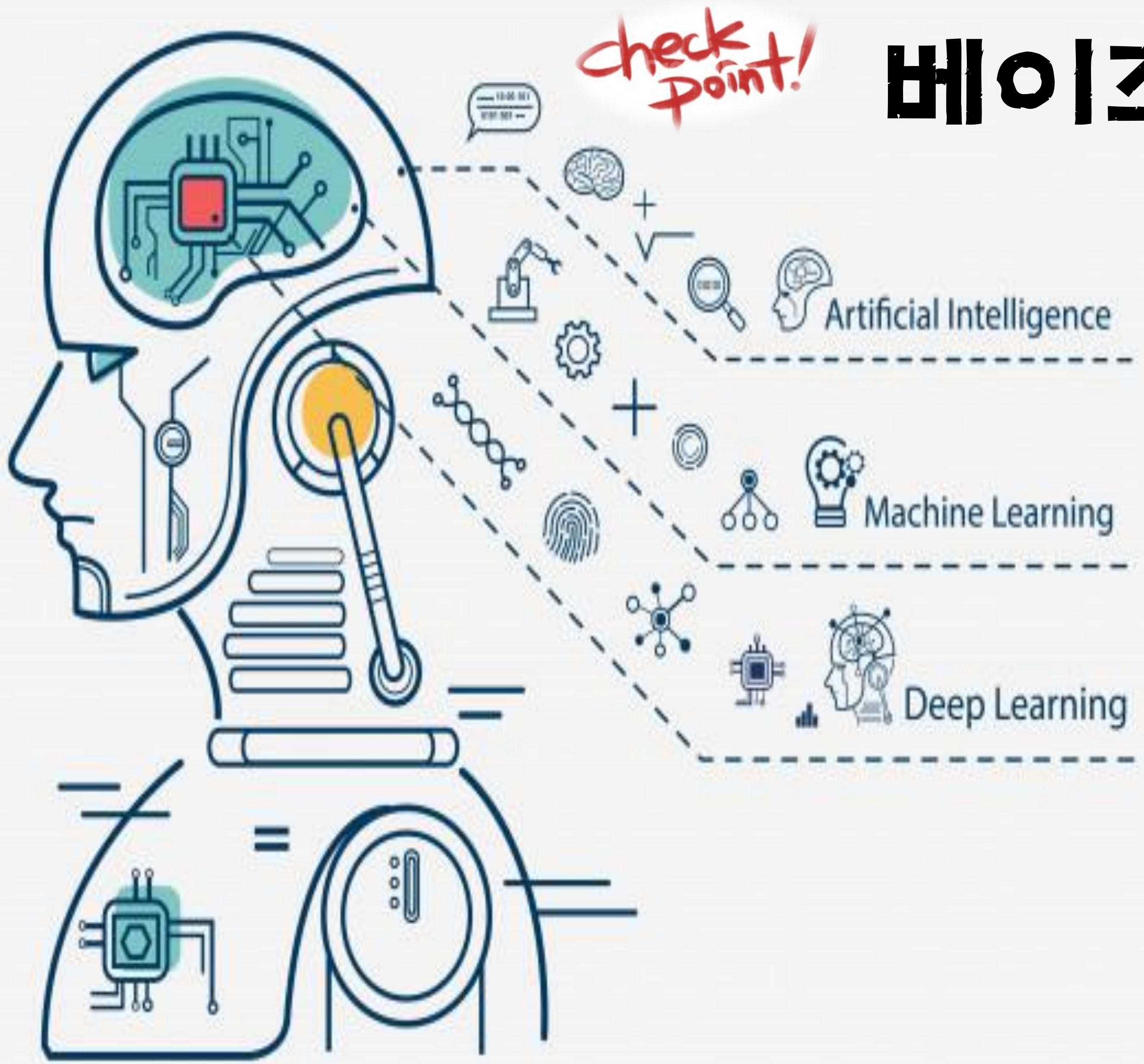
양성판정을 받았던 사람이 두 번째 검진을 받고 또 양성판정을 받았을 때,

실제로 질병에 걸린 확률: P(H|E) = 70.9%

질병A의 발병률P(H): 0.1%

질병 A의 발병률P(H): 4.7%

사후확률이 사전확률로 갱신



베이즈 주의

I. 베이지안 방법의 단점

수학적 배경이 까다로움, 사전지식에 대한 모델링의 한계

II. 현대기술의 발전

컴퓨터의 연산능력 확장, 알고리즘의 개발


PROHIBIDO PESCAR
EN EL PUENTE

check Point!

베이즈 주의

빈도주의 방식으로는 불확실성을 고려할 수 없음

일어나지 않은 사건에 불확실성과 사건과 관련되어 있는 과거의 경험, 현재의 증거를

바탕으로 여러 확률을 추정하고 일어나지 않은 사건을 추정하는 것

금융권의 활용

1. 금융분야에는 불확실성과 위험이 존재

2. 과거의 사건과 베이즈 정리를 활용하여 새로운 정보를 수용하고 기존 예측을 수정

금융모델링

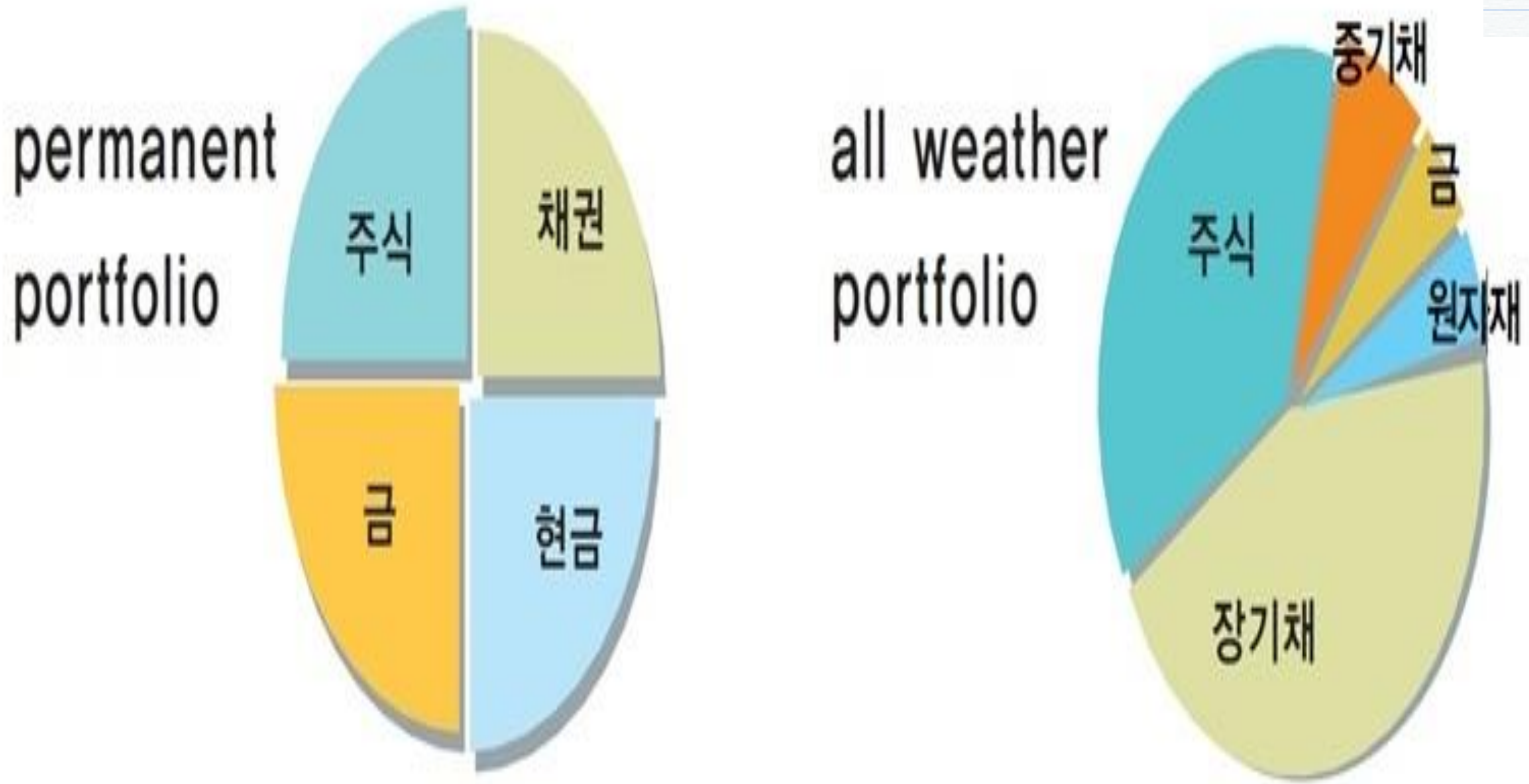
1. 주가예측
2. 옵션가격측정
3. 리스크관리

모든 분야에서 통계적모델을 사용

베이즈주의를 모델에 적용

시장 변화에 대한 유연한 대응가능

투자의사결정과 포트폴리오 관리



1. 금리인상 등과 같은 새로운 이벤트가 발생했을 때 새로운 투자결정

2. 투자 포트폴리오의 수익과 위험을 평가할 때 베이즈 주의를 활용하여 포트폴리오 선택 및 수정

지금까지 발표를

들어주셔서 감사드립니다