Alžbeta Jurečeková

2) $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad A_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ pre ktoré $\alpha$ má $A_\alpha$ diagonálnu maticu $[A_\alpha]_{XY}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\alpha-\lambda) - (\alpha-\lambda) = (\alpha-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-1)$$

$$\begin{matrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \end{matrix}$$

$$= (\alpha-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-0}^{\,2}}{2} < {2 \atop 0}$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = \alpha$$

$\lambda_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x_1 = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$\lambda_2$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x_2 = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$\lambda_3$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & 0 \end{array}\right] \overset{\alpha_3 \cdot \frac{1}{\lambda}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{\alpha_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\cdot\frac{1}{2-\lambda}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{2-\lambda} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2-\lambda} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} b \\ -b\frac{2-\lambda}{2} \\ b \end{bmatrix}$$

$\alpha$ môže byť akékoľvek reálne číslo okrem 0 a 2

$\alpha = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 + \lambda = \lambda(-(1-2\lambda+\lambda^2)+1) = \lambda(-\lambda^2+2\lambda) = \lambda^2(2-\lambda) = 0$$

$$\begin{matrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{matrix} \qquad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ t \end{bmatrix} \quad \dim = 2$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \quad \dim = 1 \qquad = 3 \checkmark$$

$\alpha$ sa môže rovnať 0 a teda $\alpha = \mathbb{R} / \{2\}$

Alžbeta Jurečková

3) $T^2 = 2T$ $\lambda$ je vlastná hodnota $T$, potom $\lambda \in \{0, 2\}$

$T\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$T^2\vec{x} = m\vec{x}$

$2T\vec{x} = m\vec{x}$

$T \cdot T\vec{x} = m\vec{x}$

$T \cdot \lambda\vec{x} = m\vec{x}$

$T \cdot \vec{x}\lambda = m\vec{x}$

$\lambda\vec{x}\lambda = m\vec{x}$

$\lambda^2\vec{x} = m\vec{x}$

$\lambda^2 = m$

$2T\vec{x} = m\vec{x}$

$2\lambda\vec{x} = m\vec{x}$

$2\lambda = m$

$\lambda^2 = 2\lambda$

čo platí iba pre

$\lambda = 0$ a $\lambda = 2$

Alžbeta Jurečková

4)

$\langle x, y \rangle_s := \langle Sx, Sy \rangle$ definuje nový skal. súčin

Čo musí platiť ?

1). Symetria

$\langle x, y \rangle_s$

z definície $\langle Sx, Sy \rangle$

keďže pôvodný je skalárny súčin tak $\langle y, x \rangle_s$ a teda platí

symetria rovná sa to $\langle Sy, Sx \rangle$

2. Linearita

a) násobenie skalárom

$\langle ax, y \rangle_s = \langle S(ax), Sy \rangle = \langle aSx, Sy \rangle = a \langle x, y \rangle_s$

↳ áno sedí s pôvodným skalárnym súčinom

b) sčítanie

$\langle x+y, z \rangle_s = \langle S(x+y), Sz \rangle = \langle Sx + Sy, Sz \rangle = \langle Sx, Sz \rangle + \langle Sy, Sz \rangle$

$= \langle x, z \rangle_s + \langle y, z \rangle_s$

↳ aj v tomto prípade sa to zhoduje

3. Pozitívna definitnosť

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_s >= 0$ $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_s = 0$ ak $\vec{x} = 0$

$\langle x, x \rangle_s = \langle Sx, Sx \rangle >= 0$

pôvodný je nezáporný takže aj tento bude

$\langle S\vec{x}, S\vec{x} \rangle = 0$ ak $\vec{x} = 0$

↓

iba ak

$Sx = 0$

a podľa injektivity vieme že toto platí len vtedy, keď $x = 0$

A teda naozaj vznikol nový skalárny súčin

Naskenované pomocou CamSc

5, Nech $A: V \to V$ je lin. transformácia. Ak $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\vec{x} = \vec{O}$. Potom

a) hovoríme, že $\lambda$ je vlastná hodnota $A$ a $\vec{x}$ je k nej prislúchajúci vlastný vektor.

b) $R^\infty$ všetky postupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ reálnych čísel vybavený zvyčajným súčtom postupností a násobením postupnosti reálnym číslom

na $R^\infty$ zobrazenie $L : R^\infty \to R^\infty$ dané ako "vynechanie prvého prvku"

$$L(a_1, a_2 \dots) = (a_2, a_3 \dots)$$

- lineárna transformácia je lin. zobrazenie vektorového priestoru do seba

  pri lineárnom zobrazení $L$ sú vzormi všetky postupnosti reálnych čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ a obrazmi postupnosti reálnych čísel $(a_i)_{i=2}^{\infty}$ čo je stále postupnosť, ktorá má tiež $\infty$ veľa prvkov a teda a teda sa zobrazuje do seba

- matica zobrazenia: $\ast$ pod pokračovaním 5

=

→ vlastné hodnoty

vlastné vektory

$\lambda = 1$

Alžbeta Jurečková

Alžbeta Jurečeková

5, pokračovanie

- $U$ je podpriestor $\mathbb{R}^\infty$ obsahujúci postupnosti pre ktoré platí $2a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ pre $n \in \{1,2,3 \dots\}$

  $\dim(U) = 2$ nájdi bázu $X$

$(1, 2, 4, 8, 16, 32$ $\quad (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4)$

$(1, 3, 5, 11, 21, 43,$

$(1, 1, 3, 5, 11$

$(1, 4, 6, 14, 26, 54, \dots)$

$(\overset{1}{a_n}, \overset{2}{a_{n+1}}, \overset{3}{2a_n + a_{n+1}}, \overset{4}{2a_n + 3a_{n+1}}, \overset{5}{6a_n + 5a_{n+1}}, \overset{6}{10a_n + 11a_{n+1}},$
$\overset{7}{22a_n + 21a_{n+1}}$

$X = ((2^0, 2^1, 2^2, \dots), (1, 4, 6, 14, \dots))$

- $U$ je invariantný vzhľadom na $L$

$L\vec{u} = L(\overset{\vec{u}}{a_n, a_{n+1}, 2a_n + a_{n+1} \dots}) = (a_{n+1}, 2a_n + a_{n+1}, 2a_n + 3a_{n+1}, \dots)$

keďže sa odstráni len prvý prvok nevyplynie to ostatné a teda $L\vec{u} \in U$ ak $\vec{u} \in U$ lebo $2a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ platí ďalej

a teda $U$ je invariantný vzhľadom na $L$

- $L \restriction U : U \to U$

---

$*$ matica zobrazenia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

vl. hodnoty $\lambda = 0$

vlastné vektory

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vlastný vektor: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$