Jurečková

$6 + 10 + 8 + 10 + 3 = 37$

Alžbeta Jurečková

1) Nech $f: V \to U$ je lin. zobrazenie konečnorozmerného vektorového priestoru. Potom $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

1

$B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$B(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\ker(B): \{\vec{x} \in V: f(\vec{x}) = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{2}a \\ a \end{array}$$

$$\ker(B) = \{(-\tfrac{1}{2}a, -\tfrac{1}{2}a, a) : a \in \mathbb{R}\}$$

$\mathrm{Im}(B): \{\vec{y} \in U : f(\vec{x}) = \vec{y}$ pre $\vec{x} \in V\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ -1 & 1 & 0 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c+b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & a-b \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c+b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c+b \end{array}\right] \quad c = -b$$

$\mathrm{Im}(B) \{(a, b, -b), a, b \in \mathbb{R}\}$

$\dim(\ker B) = 1$
$\dim(\mathrm{Im}(B)) = 2$

3

6

Báza $\ker(B) = ((-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1))$

$\langle(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$

ortonormálna báza $\ker(B) = (\sqrt{\frac{2}{3}}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1))$

2

Báza $\mathrm{Im}(B) = ((\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}))$

TO SÚ PRVKY $\mathbb{R}^2$, nie $\mathbb{R}^3$!

$\langle(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})\rangle = 0$
$\langle(\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0)\rangle = \frac{1}{4}$
$\langle(0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2})\rangle = \frac{1}{4}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ortonormálna báza $\mathrm{Im}(B)$

$= ((1, 0), (0, 1))$

nie.

$(0, 1, -1)$
$(1, 0, 0)$

$a(1,0,0) + b(0,1,-1)$

$= a + b - b$

Naskenované pomocou CamSc

Alžbeta Jurečeková

2) $\alpha \in \mathbb{R}$ $A_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ pre ktoré α má A_α diagonálnu maticu $[A_\alpha]_{XY}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\alpha-\lambda) - (\alpha-\lambda) = (\alpha-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-1)$$

$\begin{matrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \end{matrix}$

$$= (\alpha-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-0}^{\,2}}{2} \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = \alpha$ 2.

λ_1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x_1 = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

áno, ale iba ak ak $\alpha \neq 0$

λ_2
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x_2 = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

λ_3 tu má byť miesto λ α všade

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

ak $\alpha = 0$ táto úprava je delenie nulou

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \tfrac{1}{2-\lambda} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{2-\lambda} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2-\lambda} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ak $\alpha = 2$ delíte nulou

$$x_3 = \begin{bmatrix} b \\ -b\frac{2-\lambda}{2} \\ b \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = \alpha$$

α môže byť akékoľvek reálne číslo okrem 0 a 2

OK, toto zrejme legalizuje predošlý výpočet ex post. HMM.

$\alpha = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 + \lambda = \lambda(-(1-2\lambda+\lambda^2)+1) = \lambda(-\lambda^2+2\lambda) = \lambda^2(2-\lambda) = 0$$

$\begin{matrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{matrix}$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$

$$\lambda_1 = 0 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ t \end{bmatrix} \quad \dim = 2$$

$= 3$ ✓ 10

$$\lambda_2 = 2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad x_2 \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \quad \dim = 1$$

α sa môže rovnať 0 a teda $\alpha = \mathbb{R}/\{2\}$

OK. Potlačím jemnú skepsu a dám body.

Alžbeta Jurečková

3) $T^2 = 2T$ λ je vlastná hodnota T, potom $\lambda \in \{0, 2\}$

$T\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$T^2\vec{x} = m\vec{x}$

$2T\vec{x} = m\vec{x}$

$T \cdot T\vec{x} = m\vec{x}$

$T \cdot \lambda\vec{x} = m\vec{x}$

$T \cdot \vec{x}\lambda = m\vec{x}$

$\lambda\vec{x}\lambda = m\vec{x}$

$\lambda^2\vec{x} = m\vec{x}$

$\lambda^2 = m$

$2T\vec{x} = m\vec{x}$

$2\lambda\vec{x} = m\vec{x}$

$2\lambda = m$

Tu sa používa $\vec{x} \neq \vec{0}$, že?

$\lambda^2 = 2\lambda$

čo platí iba pre

$\lambda = 0$ a $\lambda = 2$

DALO by sa do toho rýpať. Tu ste dokázali, že „každá vlastná hodnota a lineárnej transf $T^2 = 2T$ je $m = \lambda^2$, kde $\lambda \in spec(T)$".

Podobne „$m = 2\lambda$, kde $\lambda \in spec(T)$"

ako viete, že tá λ je rovnaká?

spec(T) nemusí byť jednoprvková!

Ergo cestou ste to tvrdenie zoslabili a potom zase zosilnili.

8

Alžbeta Jurečková

4)

$\langle x, y\rangle_S := \langle Sx, Sy\rangle$ definuje nový skal. súčin

Čo musí platiť ?

1). Symetria

$\langle x, y\rangle_S$

z definície $\langle Sx, Sy\rangle$

keďže pôvodný je skalárny súčin tak $\langle y, x\rangle_S$ a teda platí symetria rovná sa to $\langle Sy, Sx\rangle$

2. Linearita

a) násobenie skalárom

$\langle ax, y\rangle_S = \langle S(ax), Sy\rangle = \langle aSx, Sy\rangle = a\langle x, y\rangle_S$

↳ áno sedí s pôvodným skalárnym súčinom

b) sčitanie

$\langle x+y, z\rangle_S = \langle S(x+y), Sz\rangle = \langle Sx + Sy, Sz\rangle = \langle Sx, Sz\rangle + \langle Sy, Sz\rangle$

$= \langle x, z\rangle_S + \langle y, z\rangle_S$

↳ aj v tomto prípade sa to zhoduje

3. Pozitívna definitnosť

$\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle_S >= 0$ $\qquad \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle_S = 0$ ak $\vec{x} = 0$

$\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle_S = \langle Sx, Sx\rangle >= 0$

~~tento teraz~~ pôvodný je nezáporný takže aj tento bude

$\langle S\vec{x}, S\vec{x}\rangle = 0$ ak $\vec{x} = 0$

↓

iba ak

$Sx = 0$

a podľa injektivity vieme že toto platí len vtedy, keď $x = 0$

A teda naozaj vznikol nový skalárny súčin

10

5) Nech $A: V \to V$ je lin. transformácia. Ak $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Potom

a) hovoríme, že λ je vlastná hodnota A a $\vec{x}$ je k nej prislúchajúci vlastný vektor.

6

b) R^∞ všetky postupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ reálnych čísel vybavený zvyčajným súčtom postupností a násobením postupnosti reálnym číslom

na R^∞ zobrazenie $L: R^\infty \to R^\infty$ dané ako "vynechanie prvého prvku"

$$L(a_1, a_2 \dots) = (a_2, a_3 \dots)$$

NIE KAŽDÉ ZOBRAZENIE VEKTOROVÝCH PRIESTOROV JE LINEÁRNE!

- lineárna transformácia je lin. zobrazenie vektorového priestoru do seba
  pri lineárnom zobrazení L sú vzormi všetky postupnosti reálnych čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ a obrazmi postupnosti reálnych čísel $(a_i)_{i=2}^{\infty}$ čo je stále postupnosť, ktorá má tiež ∞ veľa prvkov a teda a teda sa zobrazuje do seba

6

- matica zobrazenia:

* pod pokračovaním 5

→ vlastné hodnoty

vlastné vektory

$\lambda = 1$

Alžbeta Jurečeková

Alžbeta Jurečeková

5, pokračovanie

- U je podpriestor $\mathbb{R}^\infty$ obsahujúci postupnosti pre ktoré platí $2a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ pre $n \in \{1,2,3\dots\}$

dim $(U) = 2$ nájdi bázu X

$(1, 2, 4, 8, 16, 32$ $(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4)$

$(1, 3, 5, 11, 21, 43,$

$(1, 1, 3, 5, 11$

$(1, 4, 6, 14, 26, 54, \dots)$

$(\overset{1}{a_n}, \overset{2}{a_{n+1}}, \overset{3}{2a_n + a_{n+1}}, \overset{4}{2a_n + 3a_{n+1}}, \overset{5}{6a_n + 5a_{n+1}}, \overset{6}{10a_n + 11a_{n+1}},$
$\overset{7}{22a_n + 21a_{n+1}}$

$X = ((2^0, 2^1, 2^2, \dots), (1, 4, 6, 14, \dots))$

ako viete, že sú LN?

1

- U je invariantný vzhľadom na L

$L\vec{u} = L(\overset{\vec{u}}{a_n, a_{n+1}, 2a_n + a_{n+1} \dots}) = (a_{n+1}, 2a_n + a_{n+1}, 2a_n + 3a_{n+1}, \dots)$

keďže sa odstráni len prvý prvok nedoplynú to ostatné a teda $L\vec{u} \in U$ ak $\vec{u} \in U$ lebo $2a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ platí ďalej

a teda U je invariantný vzhľadom na L ✓

2

3

- $L|U : U \to U$

---

* matica zobrazenia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vl. hodnoty $\lambda = 0$

nekonečné matice nie sú.

vlastné vektory

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vlastný vektor: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$