Traitement du signal

M1 PPN

A. Coillet

aurelien.coillet@u-bourgogne.fr

Année universitaire 2023-2024

Signal numérique

Les exercices suivant seront réalisés sur ordinateur avec le logiciel de calcul Octave. L'objectif est de se familiariser avec les concepts de base de traitement du signal numérique, notamment la transformée de Fourier rapide (FFT).

1 Rapide introduction

Le logiciel Octave est un logiciel libre de calcul numérique similaire à Matlab. Il permet de travailler sur des tableaux et des matrices de valeurs numériques, et d'y effectuer des opérations plus ou moins complexes.

Pour arriver à utiliser Octave efficacement, quelques réflexes seront nécessaires. Le premier réflexe consiste à **aller chercher de la documentation,** soit dans l'aide d'Octave (`help command`) , soit sur internet, sur les sites de Octave et Matlab ou sur des forums d'échanges comme stackexchange.com. Le deuxième réflexe consiste à **lire et interpréter les messages d'erreur.** Ces messages vous donnent des informations sur ce qui ne va pas dans votre code. Leur langage peut être difficilement compréhensible, mais c'est votre meilleure chance de trouver une solution…

On peut utiliser Octave en mode interactif, via la fenêtre de commande. Dans ce cas, à chaque fois que la touche entrée est utilisée, la commande est executée. On peut également utiliser des fichiers de script qui enregistrent une suite de commandes. Pour cela, Octave propose un éditeur de script avec lequel on peut écrire et enregistrer les commandes souhaitées, et éxecuter le script une fois terminé avec la touche F5.

Dans Octave, on utilise des variables pour stocker des données, chiffres, tableaux, matrices, …

```
txt = 'Hello world!';      % Chaine de caractères
var = 5.867;               % Valeur numérique
tab = [1 3 5 19 0];        % Tableau de valeurs
mat = [1 i; -i 1];         % Matrice et nombres complexes
```

Le point-virgule en fin de ligne permet d'éviter d'afficher le résultat de la ligne :

```
mat = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]            % Matrice 3x3
    mat =
          1   2   3
          4   5   6
```

```
        7   8   9
```

On accède aux éléments d'une matrice avec la notation `(i,j)` :

```
mat(3,2)
    ans = 8
mat(2,:)
    ans =
          4   5   6
```

La notation `*` appliquée à des matrices ou des tableaux correspond au produit matriciel. Pour obtenir le produit d'éléments de tableaux 2 à 2, on utilise la notation `.*` :

```
A = [1 2 3]; B = [4 5 6];
A*B
    error: operator *: nonconformant arguments (op1 is 1x3, op2 is 1x3)
A.*B
    ans =
          4 10 18
```

On applique une fonction à une variable avec la notation `(var)` :

```
m = mean(tab)
    m =  5.6000
```

Certaines fonctionnalités d'Octave sont disponibles sous la forme de *packages* qu'il faut charger pour pouvoir y accéder. C'est le cas d'un certain nombre de fonctions utiles en traitement du signal (`audioread`, `findpeaks`, …). Pour ce faire, on utilisera la ligne de commande :

```
pkg load signal
```

2 Son

Le traitement des signaux audio se prête très bien au traitement du signal numérique. L'objectif de ces activités est de se familiariser avec les signaux audio ainsi que l'utilisation d'Octave.

Note et timbre d'un instrument Dans le répertoire `TDSound` se trouvent quatre fichiers audio : `PianoLaPeriod.wav`, `TrumpetLaPeriod.wav`, `ViolinLaPeriod.wav` et `FluteLaPeriod.wav`. Ils contiennent une période du signal sonore issu de l'enregistrement d'un piano, d'une trompette, d'un violon et d'une flute jouant la note La.

Q 2 - 1 En utilisant l'aide d'Octave pour la fonction `audioread`, trouver comment lire chacun des fichiers et stocker le tableau de valeur et la fréquence d'échantillonnage dans deux variables pour chaque instrument. Commenter cette fréquence d'échantillonnage vis à vis du théorème de Shannon-Nyquist.

Q 2 - 2 Quel est l'intervalle de temps entre deux valeurs d'un signal sonore ? En déduire comment construire un tableau contenant les temps correspondant à chaque mesure du signal sonore. On utilisera la documentation disponible sur internet pour construire ce tableau (pour chaque instrument).

Q 2 - 3 En utilisant la fonction `plot`, dessiner sur le même graphique les quatre signaux. On n'oubliera pas de rajouter des titres pour les axes et une légende (ce qui devra être fait pour tous les autres graphiques).

Q 2 - 4 La durée de ces échantillons est trop courte pour pouvoir l'écouter. Construire un tableau comportant 1000 périodes, et le jouer avec la fonction `sound`. Quelles sont les différences notables entre ces sons ? Est-ce que ces sons paraissent naturels ?

Q 2 - 5 On cherche à calculer les coefficients de Fourier de ces signaux périodiques. Comme les signaux utilisés sont périodiques et avec un nombre de points en puissance de 2, on utilisera la fonction `fft` pour faire cette opération. Pour cela, commencer par lire la page d'aide de la fonction `fft`. Stocker la transformée de Fourier de chacun de ces quatre sons dans quatre variables.

Q 2 - 6 Construire l'axe des fréquences comme vu dans le cours.

Q 2 - 7 Dessiner le spectre de Fourier de ces quatre signaux. On pourra utiliser préférentiellement la fonction `stem`. Comme précédemment, on donner un titre pour chaque axe et une légende.

Q 2 - 8 Interpréter le graphique obtenu. Où est localisée la fréquence fondamentale ? Quelle est sa valeur, et à quelle note cela correspond-il ? Quel est l'instrument possédant le plus d'harmonique ? Relier cette observation à la perception auditive que vous avez de ces trois sons. À quoi correspond la partie droite du spectre ? Est-ce que le critère de Shannon-Nyquist est bien respecté pour ces quatre sons ?

Spectrogramme Les sons que nous avons étudiés et écoutés précédemment ne ressemble que modérément à notre expérience d'écoute d'un piano ou d'un violon.

Q 2 - 9 Proposer une explication à cette apparence non naturelle des sons écoutés dans la partie précédente.

Q 2 - 10 Les fichiers `PianoLa.wav`, `TrumpetLa.aif`, `ViolinLa.aif` et `FluteLa.aif` contiennent les enregistrement audio complets d'où ont été extraites les périodes vues précédemment. Comme dans la partie précédente, charger ces fichiers, déterminer la fréquence d'échantillonnage et commenter cette dernière. Jouer ce son. Retrouve-t-on une écoute naturelle correspondant à notre expérience de ces instruments ?

Q 2 - 11 Dessiner le signal audio de ces 4 instruments. On remarquera que ces signaux contiennent en fait 2 tableaux de valeurs, car il s'agit d'un enregistrement stéréo ; on n'en gardera qu'un pour simplifier l'étude. En utilisant les fonctions de zoom de la fenêtre graphique d'Octave, interpréter l'allure des signaux sonores. On pourra en particulier diviser le signal en plusieurs parties successives et lier ces parties à votre sensation auditive. On essaiera de retrouver une période du signal pour des temps différents.

Q 2 - 12 Calculer la transformée de Fourier des signaux et créer l'axe de fréquence correspondant. Dessiner le spectre de Fourier. Contrairement au cas précédent, ces signaux ne sont pas périodiques, et il s'agit donc bien d'une transformée de Fourier et non pas d'un développement en série de Fourier.

Q 2 - 13 Commenter ce spectre, et en particulier les points suivants :
— la présence de pics,
— les structures à l'intérieur de chaque pic,
— le nombre de points de chacune des courbes.

Lors de l'écoute de ces sons, nous avons l'impression que le son évolue, selon les phases décrites dans les questions précédentes. L'oreille humaine est en effet un détecteur « mixte » : il est sensible à des notes, donc des fréquences du domaine de Fourier, mais perçoit leurs variations dans le temps. Pour reproduire cette perception, nous allons avoir besoin d'une analyse *spectro-temporelle* faisant appel à la notion de *spectrogramme*. Le principe du spectrogramme est de réaliser une transformée de Fourier sur une fenêtre temporelle correspondant au temps de réponse de l'oreille humaine, puis de recommencer cette opération successivement en décalant cette fenêtre dans le temps.

Q 2 - 14 Donner une estimation de l'ordre de grandeur du temps de réponse d'un son par le cerveau. En dessous de cette valeur, nous parlerons de contenu spectral et nous en ferons une transformée de Fourier, et au delà de cette valeur, nous resterons dans le domaine temporel. À combien de points `Nw` des signaux sonores étudiés cela correspond-il ? Par facilité pour la transformée de Fourier, on prendra un nombre égal à une puissance de 2 ; on pourra utiliser la fonction `nextpow2` d'Octave pour réaliser cela.

Q 2 - 15 Pour réaliser le spectrogramme, on réalisera la transformée de Fourier sur ce nombre `Nw` de points, puis on décalera la fenêtre dans le temps d'un nombre `Nw/4`. À quelle durée temporelle cela correspond-il ? Combien de décalages successifs faudra-t-il faire pour parcourir l'ensemble de l'enregistrement ? Construire une matrice remplie de zéros pour l'instant, dont les lignes contiendront les spectres de Fourier, et les colonnes correspondront aux différents temps.

Q 2 - 16 En utilisant une boucle `for` (ou `while`) et la notation `A(i:j)` qui permet de ne garder que les éléments d'un tableau compris entre les indices `i` et `j`, remplir la matrice initialisée à la question précédente avec le spectrogramme des enregistrements étudiés.

Q 2 - 17 On cherche maintenant à afficher les spectres obtenus d'une manière lisible. La fonction `pcolor` permet d'afficher des données du type `A(i,j)` en utilisant un code de couleur. Afficher le spectrogramme du son en utilisant cette fonction. On utilisera une échelle verticale en décibel afin de mieux visualiser les différentes composantes.

Q 2 - 18 Construire les axes de temps et de fréquences pour ce graphique, ajouter des titres aux axes, limiter l'affichage à une zone de fréquences appropriée, et répéter l'opération pour les 3 autres échantillons sonores. On pourra utiliser la fonction `subplot` qui permet de diviser la fenêtre de graphique.

Q 2 - 19 Ces graphiques sont particulièrement complexes à interpréter, et l'une des raisons pour expliquer cela est l'utilisation d'une fenêtre rectangulaire : l'utilisation de la commande `A(i:j)` revient à multiplier le signal par une fenêtre rectangulaire. Modifier le code permettant de calculer les spectrogrammes des sons précédents en utilisant une fenêtre de Hamming et de Hann. Commenter les différences visibles par rapport à la fenêtre rectangulaire.

Q 2 - 20 À ce stade, nous devons avoir obtenu une représentation riche et fidèle des sons étudiés. Quelles en sont les caractéristiques principales ? Quelles sont les différences visibles entre les différents instruments ? Peut-on relier certaines caractéristiques des spectrogrammes à des propriétés physiques des instruments ?

Sons complexes

Q 2 - 21 Faire la même analyse à base de spectrogramme pour le son d'une guitare, d'une cymbale et d'un gong, ou tout autre instrument (voir le site http://theremin.music.uiowa.edu/MIS.html pour des échantillons de sons d'instruments variés). Commenter l'allure des spectrogrammes obtenus et les différences entre instruments.

Q 2 - 22 Utiliser la même méthode pour analyser l'échantillon sonore `Piano.ogg` et commenter le spectrogramme obtenu.

Dans la gamme tempérée, une octave est composée de 12 demi-tons égaux. Ces demi-tons correspondent au rapport entre les fréquences de deux notes successives, rapport que l'on appelle *r*. Monter d'un demi-ton revient donc à multiplier la fréquence par *r*, et le faire douze fois (monter d'une octave) revient à multiplier la fréquence par 2. On a donc l'équation :

$$2 = r^{12} \tag{2.1}$$

Le rapport entre les fréquences de deux notes consécutives est donc $\sqrt[12]{2}$.

Q 2 - 23 Sachant que le La_3 a une fréquence de 440 Hz, calculer (avec Octave) les fréquences des notes jusqu'à une octave au dessus du La_3. Rajouter ces notes sur le spectrogramme calculé précédemment. En déduire la partition du morceau de piano.

3 Images et filtres

Dans cet exercice, nous allons étudier la transformée de Fourier en deux dimensions, dans le cadre du traitement d'images.

Exemples simples Nous allons commencer par nous familiariser avec la transformée de Fourier en 2 dimensions sur des exemples simples.

Q 3 - 1 Construire une matrice de 256 lignes et 256 colonnes remplies de zéros, puis assigner aux éléments de cette matrice les valeurs :

$$\texttt{Image1(i,j)} = \sin\left(\frac{2\pi(i+j)}{5}\right) \tag{3.1}$$

Dessiner l'image obtenue en utilisant la fonction `imagesc`. Pourquoi l'image est-elle colorée ? On peut changer cette échelle de couleur en utilisant la fonction `colormap`.

Q 3 - 2 Calculer la transformée de Fourier en 2 dimensions avec la fonction `fft2` d'Octave, et dessiner les spectres de phase et d'amplitude de l'image précédente. On pourra utiliser la fonction `fftshift` qui ramène la fréquence nulle au centre de l'image. Interpréter les spectres obtenus avec vos connaissances sur la transformée de Fourier.

Q 3 - 3 Faire de même que précédemment pour une fonction gaussienne centrée en $O = (129, 129)$, une fonction gaussienne centrée en $i = j = 100$, une porte en 2 dimensions centrée en O et une porte centrée en $(100, 100)$. À chaque fois, interpréter les spectres d'amplitude et de phase.

Image réelle et filtrage

Q 3 - 4 Charger l'image `LymphocyteGray.jpg` avec la commande `imread`. Comme précédemment, afficher cette image avec Octave, ainsi que ces spectres d'amplitude et de phase. Pour mieux visualiser les composantes spectrales de faibles amplitudes, on pourra utiliser une échelle de couleur logarithmique. Commenter ces figures.

Q 3 - 5 À partir du spectre calculé précédemment, montrer qu'on revient bien à l'image initiale en utilisant la transformée inverse `ifft2`. Appliquer également cette fonction sur le module du spectre et conclure sur l'importance du spectre de phase en traitement de l'image.

Q 3 - 6 Créer une matrice 256 par 256 telle que :

$$\texttt{Flp(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i-129)^2 + (j-129)^2 \leq 20^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.2}$$

Dessiner cette matrice avec `imagesc`. À quel type de filtre cette matrice correspond-elle ? Appliquer ce filtre au spectre de l'image et représenter le spectre d'amplitude résultant. Réaliser la transformée de Fourier inverse et la dessiner. Commenter le résultat. Quel pourrait être l'usage d'un tel filtre ?

Q 3 - 7 Faire la même chose que précédemment pour le filtre suivant :

$$\texttt{Fhp(i,j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } (i-129)^2 + (j-129)^2 \leq 20^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.3}$$

Quel est ce filtre ? Quelle est la source des oscillations visibles sur l'image filtrée par ce filtre et le précédent ?

Q 3 - 8 Faire la même étude que précédemment avec le filtre gaussien suivant :

$$\texttt{Glp(i,j)} = \exp\left(\frac{-(i-129)^2 - (j-129)^2}{20^2}\right) \tag{3.4}$$

ainsi qu'avec le filtre de Butterworth suivant :

$$\texttt{Blp(i,j)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{(i-129)^2}{20^2} + \frac{(j-129)^2}{20^2}\right)^n} \tag{3.5}$$

où on fera varier l'ordre du filtre n. Quels sont les avantages de ces filtres par rapport au simple filtre porte ?

Q 3 - 9 Charger les autres images du répertoire, et représenter leurs spectres d'amplitude. Relier les caractéristiques spectrales et les caractéristiques spatiales de ces images.

4 Radar

Dans cet exercice, nous simulons le principe d'un radar. Un système radar est composé d'une antenne émettant des ondes radio, et d'un détecteur de ces mêmes ondes. En présence d'un objet réfléchissant les ondes radio, le détecteur détecte un écho du signal envoyé avec un délai temporel correspondant au temps de parcours des ondes. Le signal envoyé doit être suffisamment reconnaissable pour que la détection soit efficace. On utilise souvent un signal chirpé, c'est à dire dont la fréquence change avec le temps :

$$x(t) = \sin(2\pi f t(t + 2\pi)) \tag{4.1}$$

Q 4 - 1 Créer un vecteur temps allant de 0 à 20, puis le vecteur x correspondant au signal chirpé précédent. On prendra $f = 0.1$. Dessiner ce signal et vérifier que le nombre de points choisi est suffisant.

Q 4 - 2 Crée un nouveau vecteur temps allant de 0 à 100 avec le même pas que précédemment. Ce nouveau vecteur servira de base à la simulation du signal détecté. Pour tenir compte des perturbations dues aux bruits environnementaux et de détection, créer un vecteur `bruit` avec la fonction `randn` d'Octave.

Q 4 - 3 Créer un signal détecté `y` correspondant à la somme du bruit et d'une fraction (on prendra 0.3) du signal `x` décalé d'un indice `i` arbitraire. Dessiner les signaux `bruit` et `y`. Peut-on déceler la présence du signal `x` dans le signal détecté `y` ?

Q 4 - 4 Calculer l'intercorrélation entre `x` et `bruit` d'une part, et entre `x` et `y` d'autre part. La fonction `xcorr` d'Octave permet de réaliser une version numérique de l'intercorrélation ; il est suggéré de lire l'aide de cette fonction pour en comprendre les particularités. Dessiner ces deux fonctions et retrouver la valeur du décalage.

5 Impulsions optiques

Q 5 - 1 On peut modéliser une impulsion optique par le produit d'une oscillation très rapide (typiquement $\sim$ 100 THz) par une fonction gaussienne de largeur typique 1 ps. Créer deux vecteurs dans Octave, l'un représentant le temps allant de -50 ps à 50 ps, et l'autre le signal optique. On prendra une fréquence d'oscillation de l'onde optique de 10 THz, de manière à éviter de saturer la mémoire de l'ordinateur.

Q 5 - 2 Déterminer la transformée de Fourier de cette impulsion, l'axe des fréquences, et dessiner ses spectres d'amplitude et de phase. On pourra utiliser la fonction `unwrap` pour ce dernier.

Q 5 - 3 En pratique, on ne peut mesurer que la densité spectrale de puissance d'une onde optique (l'information de phase est donc perdue). Dessiner la densité spectrale de puissance de l'impulsion modélisé précédemment.

Q 5 - 4 Refaire les mêmes étapes que précédemment avec deux impulsions espacées d'un délai de `t0` $= 6$ ps. On prendra la même fréquence optique pour ces deux impulsions, elles pourront en revanche avoir une différence de phase ϕ. Interpréter l'allure de la densité spectrale de puissance en faisant varier les deux paramètres, et indiquer si ce genre de caractéristiques seront visibles lors de mesures expérimentales. Justifier que l'on puisse parler d'interférences.

Q 5 - 5 Calculer l'autocorrelation de ce signal optique comportant deux impulsions en utilisant la fonction `xcorr`. Représenter le résultat en utilisant le correct axe des abscisses. Quel est l'autre moyen de calculer l'autocorrélation ? Montrer grâce à Octave que nous obtenons bien le même résultat.

Dans les dix dernières années, une technique expérimentale de mesure de la densité spectrale de puissance a été développée pour permettre une acquisition pour chaque impulsion, ce qui était jusqu'alors impossible. Elle utilise la propriété de fibres optique de transmettre la lumière à des vitesses différentes selon leur longueurs d'onde. Ainsi, une longueur d'onde faible arrivera (par exemple) en avance sur une photodiode par rapport à une longueur d'onde plus grande. On parle ainsi de transformée de Fourier dispersive (DFT). En utilisant un oscilloscope rapide, on peut ainsi reconstruire l'évolution de la densité spectrale de puissance d'une impulsion en sortie d'un laser, tour de cavité après tour de cavité.

Q 5 - 6 Justifier l'appellation de transformée de Fourier dispersive.

Q 5 - 7 Un enregistrement obtenu lors d'une expérience avec un laser à fibres utilisant la technique de DFT est disponible dans le fichier `DFT.dat`. Les colonnes de la matrice obtenue après utilisation de `load` correspondent aux fréquences optiques (en THz) du fichier `freqTHz.dat`, et les lignes correspondent aux spectres successifs. Charger ces deux fichiers et utiliser la commande `pcolor` pour visualiser l'évolution des densités spectrales de puissance des impulsions. Comparer l'allure du spectre à un tour donné à ceux modélisés précédemment. Que peut-on en déduire ?

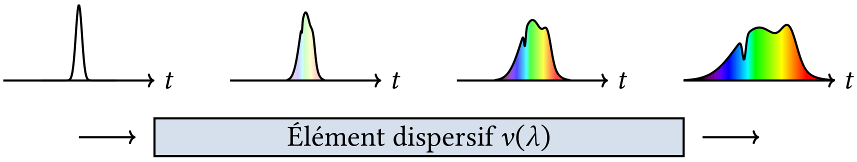

Figure 1 – Principe de la transformée de Fourier dispersive

Q 5 - 8 Afin de vérifier qu'il s'agit bien de deux impulsions a proximité l'une de l'autre, nous allons calculer la transformée de Fourier de la densité spectrale de puissance pour chaque tour de cavité. À quelle grandeur physique cette transformée de Fourier correspondra ? Dessiner l'évolution de cette grandeur avec les tours de cavité. Retrouve-t-on les résultats des questions précédentes ?

Q 5 - 9 À quoi correspond l'axe des x ? Construire le tableau correspondant, et en déduire la caractéristique primordiale de l'impulsion.