Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи

Лабораторна робота № 6

Інтерполяційні поліноми

Зміст

1 Теоретичні відомості

Інтерполяція – в обчислювальній математиці спосіб знаходження проміжних значень величини по наявному дискретному набору відомих значень.

Нехай маємо n значень x_i, кожному з який відповідає своє значення y_i. Потрібно знайти таку функцію F, що

$$F(x_i) = y_i,\ i = 0,\dots,n. \tag{1}$$

При цьому x_i називаються вузлами інтерполяції; пари (x_i, y_i) – точками даних; функцію $F(x)$ – інтерполянтом.

Інтерполянти, як правило, будуються у вигляді лінійних комбінацій деяких елементарних функцій:

$$y = \sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(x),$$

де $\Phi_k(x)$ – фіксовані лінійно незалежні функції; $c_0,\dots,c_n$ – не визначені поки що коефіцієнти.

З умови (1) отримуємо систему $n+1$ рівнянь відносно коефіцієнтів c_k:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(x_i) = y_i,\ i = 0,\dots,n.$$

В якості системи лінійно незалежних функцій $\Phi_k(x)$ частіше за все обирають: степеневі функції $\Phi_k(x) = x^k$ (в цьому випадку $F = P_n(x)$ – поліном ступеня n); тригонометричні функції.

Поліном Лагранжа

Будемо шукати інтерполяційний поліном у вигляді

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k. \tag{2}$$

Звідси отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{gathered} c_0 + c_1 x_0 + \dots + c_n {x_0}^n = y_0 \\ \dots \\ c_0 + c_1 x_n + \dots + c_n {x_n}^n = y_n \end{gathered}$$

Ця система має єдиний розв’язок, а отже і інтерполяційний поліном вигляду (2) також єдиний. Форм запису його існує багато.

Лагранж запропонував наступну форму поліному, в основі якої лежить базис поліномів Лагранжа $l_k(x)$ ступеня n:

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & якщо\ i = k \\ 0, & якщо\ i \neq k \end{cases}.$$

Поліноми Лагранжа мають вигляд:

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_n)}. \tag{3}$$

Тоді поліном $P_n(x)$ набуде вигляду:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}. \tag{4}$$

Цей поліном має ступінь не вищу за n та $P_n(x_i) = y_i$. Формулу (4) називають формулою Лагранжа. Кількість арифметичних дій для обчислення за (4) пропорційна n^2.

Поліном Ньютона

При використанні інтерполяційного поліному Ньютона застосовується поняття роздільної різниці:

роздільна різниця першого роду: $y(x_i, x_j) = \dfrac{y(x_i) - y(x_j)}{x_i - x_j}$, роздільна різниця другого роду $y(x_i, x_j, x_k) = \dfrac{y(x_i, x_j) - y(x_j, x_k)}{x_i - x_k}$ і т.д.

Якщо $y(x) = P_n(x)$ – поліном ступеню n, то для нього перша роздільна різниця $P(x,x_0)$ – поліном n-1 ступеню, друга роздільна різниця $P(x,x_0,x_1)$ – поліном n-2 ступеню і т.д., так що (n+1)-а роздільна різниця дорівнює нулю.

Із визначення роздільних різниць отримуємо:

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)P(x, x_0)$$

$$P(x, x_0) = P(x_0, x_1) + (x - x_1)P(x, x_0, x_1)$$

$$P(x, x_0, x_1) = P(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)P(x, x_0, x_1, x_2)$$

$$\ldots$$

Звідси отримуємо формулу для $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x_0) + (x - x_0)P(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)P(x_0, x_1, x_2) + \ldots + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})P(x_0, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{5}$$

Якщо $P_n(x)$ – інтерполяційний поліном для функції $y(x)$, то його роздільні різниці співпадають із роздільними різницями функції. Тоді можна записати:

$$F(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})y(x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Частіше використовують поліном Ньютона у формі Горнера (перед цим необхідно обчислити всі роздільні різниці):

$$F(x) = y(x_0) + (x - x_0)[y(x_0, x_1) + (x - x_1)[y(x_0, x_1, x_2) + \ldots]] \tag{6}$$

Обчислення $F(x)$ для кожного x потребує n множень та $2n$ додавань або віднімань.

Кубічна сплайн-інтерполяція

Нехай у вузлах $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ відрізка $[a; b]$ задані значення функції $f(x)$: $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Довжину частинного відрізка $[x_{i-1}; x_i]$ позначимо через $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Будемо шукати кубічний сплайн на кожному частинному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ у вигляді

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

де a_i, b_i, c_i, d_i — четвірка невідомих коефіцієнтів для одного частинного відрізка $[x_{i-1}; x_i]$.

Формули для обчислення коефіцієнтів кубічного сплайну мають наступний вигляд:

$$a_i = y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{7}$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \quad i = 2, 3, \ldots, n, \quad c_1 = 0, \ c_{n+1} = 0; \tag{8}$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{1}{3}h_i(c_{i+1} + 2c_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{9}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Коефіцієнти a_i визначають з рівності (7). Далі проводять обчислення коефіцієнтів c_i за системою рівнянь (8) методом прогону, оскільки матриця цієї системи є тридіагональною матрицею (всі елементи, що не розташовані на головній та двох побічних діагоналях, дорівнюють нулеві). Після знаходження коефіцієнтів c_i обчислюють коефіцієнти b_i та d_i за формулами (9) та (10).

Метод прогону (100balov.com/data/bib/Dijscijplinij/KMD/Metod**_progony.doc)**

Більшість технічних задач зводиться до розв'язування систем ЛАР, в яких матриці містять багато нульових елементів, а ненульові елементи розміщені за спеціальною структурою (стрічкові квазітрикутні матриці).

Задачі побудови інтерполяційних сплайнів, різницевих методів розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь зводяться до розв'язування систем ЛАР з тридіагональною матрицею А. В матриці А всі елементи, що не лежать на головній діагоналі і двох сусідніх паралельних діагоналях, дорівнюють нулю.

В загальному вигляді такі системи записують так:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \qquad (1)$$
$$1 \le i \le n\,;\ a_1 = 0\,;\ c_n = 0$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = d_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1} \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{cases} \qquad (2)$$

Вибір найбільшого елемента при виключенні невідомих за методом Гауса в таких системах робити не можна, оскільки перестановка рядків руйнує структуру матриці. Найчастіше для розв'язку системи з тридіагональною матрицею використовують метод прогону, який є частковим випадком методу Гауса.

Прямий хід прогону (алгоритм прямого ходу методу Гауса).

Кожне невідоме x_i виражається через x_{i+1} з допомогою прогоночних коефіцієнтів A_i та B_i

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i\,;\quad i = \overline{1,n} \qquad (3)$$

Наприклад, з першого рівняння системи (2) знайдемо

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{c_1}{b_1}x_2 + \frac{d_1}{b_1} \\ x_1 &= A_1x_2 + B_1 \end{aligned}\right\}, \quad \text{звідки} \quad \begin{aligned} A_1 &= -\frac{c_1}{b_1} \\ B_1 &= \frac{d_1}{b_1} \end{aligned} \qquad (4)$$

З другого рівняння системи (3) виразимо x_2 через x_3, замінюючи x_1 формулою (3) або (4)

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = a_2(A_1x_2 + B_1) + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$$

Звідси знайдемо

$$x_2 = \frac{d_2 - c_2x_3 - a_2B_1}{a_2A_1 + b_2}, \quad \text{або} \quad x_2 = A_2x_3 + B_2$$

де $$A_2 = -\frac{c_2}{a_2A_1 + b_2}; \quad B_2 = \frac{d_2 - a_2B_1}{a_2A_1 + b_2}\,.$$

Позначивши $e_2 = a_2A_1 + b_2$, отримаємо:

$$A_2 = -\frac{c_2}{e_2}; \qquad B_2 = \frac{d_2 - a_2B_1}{e_2}$$

Аналогічно матимемо, що прогоночні коефіцієнти з рівняння $x_i = A_i x_{i+1} + B_i$ мають вигляд:

$$A_i = -\frac{c_i}{e_i}; \qquad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{e_i} \tag{5}$$

$$e_i = a_i A_{i-1} + b_i\,; \quad i = \overline{1, n}\,.$$

При цьому враховуючи, що $a_1 = c_n = 0$, приймаємо

$$A_o = 0\,; \quad B_o = 0. \tag{6}$$

В розгорнутому вигляді формула (5) буде мати вигляд формули (7).

Значення прогоночних коефіцієнтів можна одержати і таким шляхом. В рівнянні (3) понизимо індекс на одиницю $x_{i-1} = A_{i-1} \cdot x_i + B_{i-1}$ та підставимо значення x_{i-1} в i-е рівняння системи (1)

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

$$\Rightarrow \; a_i(A_{i-1} x_i + B_{i-1}) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

$$x_i = \frac{d_i - c_i x_{i+1} - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i} = -\frac{c_i}{a_i A_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i} = A_i x_{i+1} + B_i \tag{7}$$

<u>Обернений хід прогонки</u> (аналог оберненого ходу методу Гауса).

Він полягає в послідовному обчисленні невідомих x_i. Спочатку знаходять x_n. Для цього формулу (7) запишемо при i = n (враховуючи, що Cn = 0)

$$x_n = -\frac{c_n}{a_n A_{n-1} + b_n} x_{n+1} + \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n} = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n} = B_n\,.$$

Долі використовуючи формулу (3) знаходимо послідовно всі невідомі x_{n-1}, x_{n-2}, … , x_1.

Майже у всіх задачах, що приводять до розв’язку системи (2) з тридіагональною матрицею, забезпечується умова переважання діагональних коефіцієнтів

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$$

Це забезпечує існування єдиного розв’язку та достатню стійкість методу прогону відносно похибок заокруглення.

Для запису коефіцієнтів a_i, b_i, та прогоночних коефіцієнтів A_{i-1}, B_{i-1} використовують один і той же масив.

Кубічна сплайн-інтерполяція в MathCad

Для цього використовується

- **interp(s,x,y,t)** — функція, що апроксимує дані векторів x і y кубічними сплайнами;
  - s — вектор других похідних, створений однією з супутніх функцій cspline, pspline або lspline;
  - x — вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;
  - y — вектор дійсних даних значень того ж розміру;
  - t — значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююча функція.

Перед застосуванням функції interp необхідно заздалегідь визначити перший з її аргументів — векторну змінну s. Робиться це за допомогою однієї з трьох вбудованих функцій тих же аргументів (x,y).

- lspline(x,y) — вектор значень коефіцієнтів линійного сплайну;
- pspline(x,y) — вектор значень коефіцієнтів квадратичного сплайну;
- cspline(x,y) — вектор значень коефіцієнтів кубічного сплайну;
- x, y — вектори даних.

Вибір конкретної функції коефіцієнтів сплайнів впливає на інтерполяцію поблизу кінцевих точок інтервалу. Приклад сплайн-інтерполяції наведений в лістингу 1.

Листинг 1. Кубічна сплайн-інтерполяція

$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T$

$y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9)^T$

$s := \mathrm{cspline}(x,y)$

$A(t) := \mathrm{interp}(s,x,y,t)$

Інтерполююча функція наведена на рис.1.

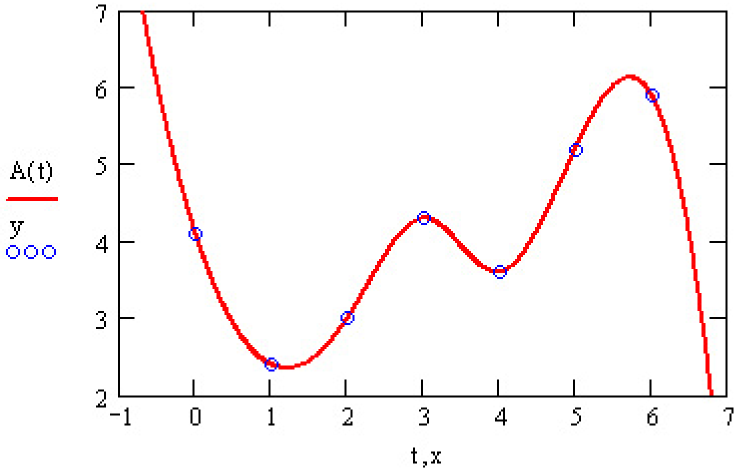

Рис.1. *Сплайн-інтерполяція до лістінгу 1*

2 Завдання

Створити програму, яка для заданої функції по заданим точкам будує інтерполяційний поліном $P_n(x)$ у формі Лагранжа або Ньютона, а також здійснює інтерполяцію кубічними сплайнами.

Програма має розрахувати значення похибки $\varepsilon = |P_n(x) - y(x)|$, для чого потрібно вивести на графік із кроком (графік можна будувати допоміжними засобами, наприклад, у Mathcad), меншим у 5-6 разів, ніж крок інтерполяції, відповідні значення поліному та точної функції. Якщо похибка дуже мала, застосувати масштабування.

Знайти кубічний інтерполяційний сплайн для заданої функції у Mathcad. Вивести графік результатів.

3 Варіанти завдань

№	Функція $y(x)$	Вузли інтерполяції x_i
1-10	$\sin(\frac{\alpha}{2}\cdot x)+\sqrt[3]{x\cdot\alpha}$	-5+k, -3+k, -1+k, 1+k, 3+k; k = №*вар* – 1
11-20	$\frac{1}{2}x\cdot\cos(\alpha\cdot x)$	-6+k, -4+k, -2+k, 0+k, 2+k; k = №*вар* – 11
21-31	$\frac{x^2}{15}+\cos(x+\alpha)$	-6+k, -4+k, -2+k, 0+k, 2+k; k = 2*(№*вар* – 21)

α – остання цифра номеру групи. Якщо номер варіанту кратний 2, то потрібно робити інтерполяцію методом Ньютона, інакше – методом Лагранжа.

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі у вигляді заданої функції (із графіком) та значень точок даних у вузлах інтерполяції;
- вигляд поліному Лагранжа або Ньютона (за варіантом);
- порівняльний графік функції та інтерполяційного поліному;
- сплайни (коефіцієнти сплайнових інтерполяційних поліномів);
- порівняльний графік функції та сплайн-інтерполяції;
- розв'язок інтерполяції сплайнами у Mathcad (із наведенням порівняльних графіків);
- лістинг програми.