Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи

Лабораторна робота № 4

Обчислення власних значень та власних векторів матриць

Зміст

1 Теоретичні відомості

Велика кількість задач математики та фізики потребує знаходження власних значень та власних векторів матриць, тобто знаходження таких значень λ, для яких існують нетривіальні розв'язки однорідної системи рівнянь

$$Ax = \lambda x, \tag{1}$$

та знаходження цих нетривіальних розв'язків. Тут A – квадратна матриця порядку m, x – невідомий вектор-стовпець.

Такий розв'язок системи (1) існує тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{D}(\lambda) = |A - \lambda E| = 0, \tag{2}$$

де E – одинична матриця.

Визначник $\mathrm{D}(\lambda)$ називається характеристичним або віковим визначником, а рівняння (2) – характеристичним або віковим рівнянням.

Метод Данилевського

Квадратну матрицю P порядку m називають подібною до матриці A, якщо її можна подати у вигляді

$$P = S^{-1}AS,$$

де S – невироджена матриця порядку m.

Виконується наступна теорема: характеристичні визначники вихідної та подібної матриці збігаються.

Ідея методу Данилевського полягає у тому, що матрицю A подібним перетворенням зводять до так званої нормальної форми Фробеніуса.

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Можна перевірити, що характеристичне рівняння для матриці P набуває простого вигляду:

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & -\lambda & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^m \left(\lambda^m - p_1\lambda^{m-1} - p_2\lambda^{m-2} - \ldots - p_{m-1}\lambda - p_m\right) = 0$$

тобто коефіцієнти при степенях λ характеристичного поліному безпосередньо виражаються через елементи першого рядка матриці P.

Зведення матриці A до нормальної форми Фробеніуса P здійснюється послідовно по рядках, починаючи з останнього рядка. Це робиться за допомогою ітеративного процесу, який виражається у вигляді:

$$A^{(i+1)} = M_{m-i}^{-1} A^{(i)} M_{m-i}, \tag{3}$$

де

$$M_{m-i}=\begin{pmatrix}1&0&...&0&0\\0&1&...&0&0\\.&.&...&.&.\\\mu_1&\mu_2&...&\mu_{m-1}&\mu_m\\.&.&...&.&.\\0&0&...&0&1\end{pmatrix},\ \mu_j=\begin{cases}\dfrac{-a^{(i)}_{m-i+1,j}}{a^{(i)}_{m-i+1,m-i}},\ j\neq m-i\\\dfrac{1}{a^{(i)}_{m-i+1,m-i}},\ j=m-i\end{cases},$$

$$M^{-1}_{m-i}=\begin{pmatrix}1&0&...&0&0\\0&1&...&0&0\\.&.&...&.&.\\a^{(i)}_{m-i+1,1}&a^{(i)}_{m-i+1,2}&...&a^{(i)}_{m-i+1,m-1}&a^{(i)}_{m-i+1,m}\\.&.&...&.&.\\0&0&...&0&1\end{pmatrix}.$$

Тут $a^{(i)}_{f,j}$ – відповідні елементи матриці $A^{(i)}$, індекс $i = 1\ldots m$-1, $A^{(1)} = A$, елемент $a^{(i)}_{m-i+1,m-i}\neq 0$.

Таким чином, нормальну форму Фробеніюса буде одержано за (m-1) крок і вона набуде вигляду

$$P = M_1^{-1}M_2^{-1}...M_{m-2}^{-1}M_{m-1}^{1}AM_{m-1}M_{m-2}...M_2M_1\,.$$

Якщо ж умова $a^{(i)}_{m-i+1,m-i}\neq 0$ не виконується на якомусь кроці i=k, то можливі два випадки. У першому випадку у (m-k+1)-рядку лівіше елемента $a^{(k)}_{m-k+1,m-k}$ є елемент $a^{(k)}_{m-k+1,l}$, де $l < m$-k. Тоді ми можемо переставити місцями (m-k)- та l-рядки та стовпці одночасно. Отже, на потрібному нам місці одержуємо ненульовий елемент $a^{(k)}_{m-k+1,l}$, вже перетворена частина матриці не змінюється і можна застосовувати звичайний крок методу Данилевського.

Розглянемо другий випадок, коли $a^{(k)}_{m-k+1,m-k}$ =0 і всі елементи цього рядка лівіше нього теж дорівнюють нулю. У цьому разі характеристичний визначник матриці $A^{(k)}$ можна подати у вигляді

$$\left|A^{(k)}-\lambda E\right| = \left|B^{(k)}-\lambda E_{m-k}\right|\left|C^{(k)}-\lambda E_k\right|,$$

де E_{m-k} та E_k – одиничні матриці відповідної вимірності, а квадратні матриці $B^{(k)}$ та $C^{(k)}$ мають вигляд:

$$B^{(k)}=\begin{pmatrix}a^{(k)}_{1,1}&...&a^{(k)}_{1,m-k}\\.&...&.\\a^{(k)}_{m-k,1}&...&a^{(k)}_{m-k,m-k}\end{pmatrix},\ C^{(k)}=\begin{pmatrix}a^{(k)}_{m-k+1,m-k+1}&...&a^{(k)}_{m-k+1,m-1}&a^{(k)}_{m-k+1,m}\\1&...&0&0\\.&...&.&.\\0&...&1&0\end{pmatrix}.$$

Звернімо увагу на те, що матриця $C^{(k)}$ вже має нормальну форму Фробеніуса, і тому співмножник $\left|C^{(k)}-\lambda E_k\right|$ просто розгортаємо у вигляді багаточлена з коефіцієнтами, що дорівнюють елементам першого рядка.

Співмножник $\left|B^{(k)}-\lambda E_{m-k}\right|$ є характеристичним визначником матриці $B^{(k)}$. Для його розгортання можна знову застосувати метод Данилевського, зводячи матрицю $B^{(k)}$ подібними перетвореннями до нормальної форми Фробеніуса.

Припустимо тепер, що матрицю A подібними перетвореннями $P = S^{-1}AS$ вже зведено до нормальної форми Фробеніуса. Розв’язуючи характеристичне рівняння

$$\lambda^m - p_1\lambda^{m-1} - p_2\lambda^{m-2} - ... - p_{m-1}\lambda - p_m = 0,$$

знаходимо одним з відомих методів його корені λ_i, i = 1,…,m, які є власними значеннями матриць P та A.

Тепер маємо задачу знайти власні вектори, які відповідають цим власним значенням, тобто вектори $x^{(i)}$, i = 1,…,m, такі що

$$Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)},\ i = 1,...,m.$$

Для цього спочатку знайдемо власні вектори для матриці *P*. Нехай це будуть вектори $y^{(i)}$. Тоді $x^{(i)} = Sy^{(i)}$, де $S = M_{m-1}M_{m-2}...M_2M_1$.

Для знаходження власних векторів *P*, запишемо рівність $Py^{(i)} = \lambda_i y^{(i)}$ у розгорнутій формі

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(i)} \\ y_2^{(i)} \\ \vdots \\ y_m^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1^{(i)} \\ \lambda_2 y_2^{(i)} \\ \vdots \\ \lambda_m y_m^{(i)} \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{cases} p_1 y_1^{(i)} + ... + p_m y_m^{(i)} = \lambda_i y_1^{(i)}, \\ y_1^{(i)} = \lambda_i y_2^{(i)}, \\ ... \\ y_{m-1}^{(i)} = \lambda_i y_m^{(i)}. \end{cases}.$$

У цій системі одна із змінних може бути вільною і може набути довільного значення. Як таку візьмемо $y_m^{(i)}$ і покладемо $y_m^{(i)} = 1$. Тоді послідовно отримуємо:

$$y_m^{(i)} = 1,\ y_{m-1}^{(i)} = \lambda,\ y_{m-2}^{(i)} = \lambda^2, ..., y_1^{(i)} = \lambda^{m-1}.$$

А звідси вже отримуємо за виразом $x^{(i)} = Sy^{(i)}$ значення власного вектору $x^{(i)}$ для матриці *A*.

2 Завдання

Створити програму, для зведення матриці *A* до нормальної форми Фробеніуса *P*.

Отримане характеристичне рівняння розв’язати довільним способом у Mathcad і отримати всі власні числа λ_i, $i = 1,\dots,m$ з точністю 5 знаків після коми.

Для кожного власного числа знайти по одному власному вектору через власні вектори матриці *P*.

Перевірити точність знайдених результатів, підставляючи у рівняння (1) знайдені власні числа та власні вектори.

Знайти власні числа матриці *A* виключно за допомогою Mathcad і порівняти з отриманими раніше результатами.

3 Варіанти завдань

Матриця *A* обчислюється за формулою

$$A = \begin{pmatrix} 6{,}26 + a & 1{,}10 - b & 0{,}97 + g & 1{,}24 - d \\ 1{,}10 - b & 4{,}16 - a & 1{,}30 & 0{,}16 \\ 0{,}97 + g & 1{,}30 & 5{,}44 + a & 2{,}10 \\ 1{,}24 - d & 0{,}16 & 2{,}10 & 6{,}10 - a \end{pmatrix},$$

де $a = 0{,}11\times t$; $b = 0{,}02\times k$; $g = 0{,}02\times k$; $d = 0{,}015\times t$; t = остання цифра № у списку групі; $k = 3\times$ (молодша цифра № групи – 4) + перша цифра № у списку групи (наприклад, для номеру 15 у списку ІС-62 t=5, k=3×(2 – 4) + 1 = –5).

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі;
- проміжні матриці M_i^{-1} та M_i, результуючу матрицю *P* у нормальній формі Фробеніуса;
- отримане характеристичне рівняння;
- власні числа – корені характеристичного рівняння;
- власний вектор для кожного власного числа;
- оцінка точності обчислень (підстановка результатів у вихідне рівняння (1));

- копія розв’язку задачі у Mathcad;
- порівняння власного розв’язку та розв’язку, отриманого у Mathcad;
- лістинг програми.