Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи

Лабораторна робота № 2

Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) прямими методами. Звичайний метод Гауса та метод квадратних коренів

Зміст

1 Теоретичні відомості

Будемо розглядати системи вигляду

$$Ax = b, \tag{1}$$

де A ($n \times n$) – матриця системи, b – вектор правої частини, x – вектор розв'язку.

Метод Гауса

Метод складається з двох етапів:

1) прямого хода методу (приведення системи (1) до еквівалентної системи з трикутною матрицею);
2) зворотного ходу (визначення невідомого вектору x) .

Існує декілька варіантів методу Гауса.

Схема з вибором головного елемента полягає у наступному:

1) <u>Прямий хід</u>.

1.1) Відшукати $a_{main} = \max\limits_{i,j} |a_{i,j}|, \ i, j = 1..n$. Нехай $a_{main} = a_{pq}$. Рядок p називається головним.

1.2) Обчислити множники $m_i = \dfrac{a_{iq}}{a_{pq}}$, $i \neq p$.

1.3) З кожного i-го неголовного рядка віднімаємо покомпонентно головний рядок, який помножено на m_i:

$$a_{ij} := a_{ij} - m_i a_{pj}, \quad i \neq p, \ j = 1..n,$$

для вектора правої частини:

$$b_i := b_i - m_i b_p .$$

В результаті отримуємо матрицю, де всі елементи стовпця q, крім a_{pq}, дорівнюють нулю. Відкидаючи стовпець q та головний рядок p, і відповідний елемент b_p, отримуємо систему з матрицею A_1 (($n - 1$) × ($n - 1$)). Якщо $n - 1 > 1$, покладаємо $n := n - 1$, і переходимо до п.1.1, інакше переходимо до п.2.

Примітка: Елементи головного рядка та відповідного елементу b_p потрібно зберігати у окремому масиві, оскільки вони знадобляться в п.2).

2) <u>Зворотний хід</u>.

2.1) Складаємо систему, еквівалентну вихідній, що складається з головних рядків, які отримувались у п.1. Права частина складається з відповідних елементів b_p. Отримана система має трикутну матрицю. Знаходимо послідовно значення елементів x_i.

Метод квадратного кореня

Метод використовується для розв'язання СЛАР виду (1), у яких матриця A є симетричною, тобто

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j .$$

Метод полягає у наступному:

1) <u>Прямий хід</u>: факторизація $A = T'T$, де

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}, \ T' = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & .. & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

1.1) Знаходимо елементи t_{ij} матриць-множників:

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}\,,\; t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \quad (j > 1)\,,$$

$$t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \quad (1 < i \le n)\,,$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}} \quad (i < j),$$

$$t_{ij} = 0 \; (i > j)\,.$$

1.2) Формуємо замість вихідної системи дві наступні системи:

$$T' y = b\,,\; Tx = y\,.$$

2) <u>Зворотний хід</u>.

2.1) Послідовно знаходимо:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}\,,\; y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}} \quad (i > 1)\,,$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}\,,\; x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik} x_k}{t_{ii}} \quad (i < n)\,.$$

2 Завдання

Розв'язати систему рівнянь з кількістю значущих цифр $m = 6$.

Якщо матриця системи симетрична, то розв'язання проводити за методом квадратних коренів, якщо матриця системи несиметрична, то використати метод Гауса.

Вивести всі проміжні результати (матриці A, що отримані в ході прямого ходу методу Гауса, матрицю зворотного ходу методу Гауса, або матрицю T та вектор y для методу квадратних коренів) та розв'язок системи.

Навести результат перевірки: вектор нев'язки $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}$, де $\boldsymbol{x}$ – отриманий розв'язок.

Розв'язати задану систему рівнянь за допомогою програмного забезпечення Mathcad. Навести результат перевірки: вектор нев'язки $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax_m}$, де $\boldsymbol{x_m}$ – отриманий у Mathcad розв'язок.

Порівняти корені рівнянь, отримані у Mathcad, із власними результатами за допомогою методу середньоквадратичної похибки:

$$\delta = \sqrt{\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{mk})^2}\,,$$

де $\boldsymbol{x}$ – отриманий у програмі розв'язок, $\boldsymbol{x_m}$ – отриманий у Mathcad розв'язок.

Зазвичай при використанні для обчислень 4-байтових чисел (тип *float* у Visual C++) порядок δ:

- у методі Гауса - $10^{-4} - 10^{-6}$,
- у методі квадратних коренів - $10^{-5} - 10^{-7}$, бувають і повні співпадіння рішень до 6 знаків після коми.

3 Варіанти завдань

Система має вигляд (1).

№ вар.	Матриця системи A	Вектор правої частини b
1-4	$\begin{pmatrix} 3{,}81 & 0{,}25 & 1{,}28 & 0{,}75+\alpha \\ 2{,}25 & 1{,}32 & 4{,}58+\alpha & 0{,}49 \\ 5{,}31 & 6{,}28+\alpha & 0{,}98 & 1{,}04 \\ 9{,}39+\alpha & 2{,}45 & 3{,}35 & 2{,}28 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}5k, k = \text{№}вар - 1,$	$\begin{pmatrix} 4{,}21 \\ 6{,}47+\beta \\ 2{,}38 \\ 10{,}48+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}5k$, $k = \text{№}вар - 1$
5-9	$\begin{pmatrix} 8{,}30 & 2{,}62+\alpha & 4{,}10 & 1{,}90 \\ 3{,}92 & 8{,}45 & 8{,}78-\alpha & 2{,}46 \\ 3{,}77 & 7{,}21+\alpha & 8{,}04 & 2{,}28 \\ 2{,}21 & 3{,}65-\alpha & 1{,}69 & 6{,}99 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}2k, k = \text{№}вар - 5$	$\begin{pmatrix} -10{,}65+\beta \\ 12{,}21 \\ 15{,}45-\beta \\ -8{,}35 \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}2k, k = \text{№}вар - 5$
10	$\begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}5 \\ 0{,}7 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}$
11-15	$\begin{pmatrix} 5{,}18+\alpha & 1{,}12 & 0{,}95 & 1{,}32 & 0{,}83 \\ 1{,}12 & 4{,}28-\alpha & 2{,}12 & 0{,}57 & 0{,}91 \\ 0{,}95 & 2{,}12 & 6{,}13+\alpha & 1{,}29 & 1{,}57 \\ 1{,}32 & 0{,}57 & 1{,}29 & 4{,}57-\alpha & 1{,}25 \\ 0{,}83 & 0{,}91 & 1{,}57 & 1{,}25 & 5{,}21+\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}25k,\ k = \text{№}вар - 11$	$\begin{pmatrix} 6{,}19+\beta \\ 3{,}21 \\ 4{,}28-\beta \\ 6{,}25 \\ 4{,}95+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}35k,\ k = \text{№}вар - 11$
16	$\begin{pmatrix} 2{,}12 & 0{,}42 & 1{,}34 & 0{,}88 \\ 0{,}42 & 3{,}95 & 1{,}87 & 0{,}43 \\ 1{,}34 & 1{,}87 & 2{,}98 & 0{,}46 \\ 0{,}88 & 0{,}43 & 0{,}46 & 4{,}44 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11{,}172 \\ 0{,}115 \\ 0{,}009 \\ 9{,}349 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 6{,}92 & 1{,}28 & 0{,}79 & 1{,}15 & -0{,}66 \\ 0{,}92 & 3{,}5 & 1{,}3 & -1{,}62 & 1{,}02 \\ 1{,}15 & -2{,}46 & 6{,}1 & 2{,}1 & 1{,}483 \\ 1{,}33 & 0{,}16 & 2{,}1 & 5{,}44 & -18 \\ 1{,}14 & -1{,}68 & -1{,}217 & 9 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}72 \\ 3{,}87 \\ 13{,}8 \\ -1{,}08 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 7{,}03 & 1{,}22 & 0{,}85 & 1{,}135 & -0{,}81 \\ 0{,}98 & 3{,}39 & 1{,}3 & -1{,}63 & 0{,}57 \\ 1{,}09 & -2{,}46 & 6{,}21 & 2{,}1 & 1{,}033 \\ 1{,}345 & 0{,}16 & 2{,}1 & 5{,}33 & -12 \\ 1{,}29 & -1{,}23 & -0{,}767 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}84 \\ 2{,}58 \\ 11{,}96 \\ -1{,}47 \end{pmatrix}$

19	$\begin{pmatrix} 5{,}5 & 7{,}0 & 6{,}0 & 5{,}5 \\ 7{,}0 & 10{,}5 & 8{,}0 & 7{,}0 \\ 6{,}0 & 8{,}0 & 10{,}5 & 9 \\ 5{,}5 & 7 & 9 & 10{,}5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 6{,}59 & 1{,}28 & 0{,}79 & 1{,}195 & -0{,}21 \\ 0{,}92 & 3{,}83 & 1{,}3 & -1{,}63 & 1{,}02 \\ 1{,}15 & -2{,}46 & 5{,}77 & 2{,}1 & 1{,}483 \\ 1{,}285 & 0{,}16 & 2{,}1 & 5{,}77 & -18 \\ 0{,}69 & -1{,}68 & -1{,}217 & 9 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}36 \\ 3{,}89 \\ 11{,}04 \\ -0{,}27 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 3{,}81 & 0{,}25 & 1{,}28 & 1{,}75 \\ 2{,}25 & 1{,}32 & 5{,}58 & 0{,}49 \\ 5{,}31 & 7{,}28 & 0{,}98 & 1{,}04 \\ 10{,}39 & 2{,}45 & 3{,}35 & 2{,}28 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4{,}21 \\ 8{,}97 \\ 2{,}38 \\ 12{,}98 \end{pmatrix}$
22-31	$\begin{pmatrix} 5{,}18+\alpha & 1{,}12 & 0{,}95 & 1{,}32 & 0{,}83 \\ 1{,}12 & 4{,}28-\alpha & 2{,}12 & 0{,}57 & 0{,}91 \\ 0{,}95 & 2{,}12 & 6{,}13+\alpha & 1{,}29 & 1{,}57 \\ 1{,}32 & 0{,}57 & 1{,}29 & 4{,}57-\alpha & 1{,}25 \\ 0{,}83 & 0{,}91 & 1{,}57 & 1{,}25 & 5{,}21+\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}25k,\ k = \lvert \text{№вар} - 25 \rvert$	$\begin{pmatrix} 6{,}19+\beta \\ 3{,}21 \\ 4{,}28-\beta \\ 6{,}25 \\ 4{,}95+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}35k,\ k = \text{№вар} - 21$

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі;
- вихідну систему рівнянь;
- проміжні результати та кінцевий результат;
- вектор нев’язки;
- розв’язок задачі у Mathcad; вектор нев’язки для цього розв’язку;
- порівняння власного розв’язку та розв’язку, отриманого у Mathcad;
- лістинг програми.