Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи

Лабораторна робота № 5

Розв'язання нелінійних рівнянь

Зміст

1 Теоретичні відомості

Знаходження коренів рівнянь за допомогою чисельних методів складається з двох етапів:

1) Відокремлення коренів: знаходження сукупності проміжків, кожен з яких містить один з коренів рівняння.
2) Уточнення коренів: знаходження приблизного значення коренів із заданою точністю ε.

Розглядається рівняння

$$f(x)=0, \tag{1}$$

де $f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, та $a_n > 0$, для якого потрібно знайти його дійсні корені x^*.

Перший етап виконується із використанням теорем, які допомагають виділити межі розташування додатніх та від'ємних коренів та знайти проміжки, що містять ці корені.

Теорема про границі усіх (комплексних) коренів рівняння.

Нехай $A = \max|a_i|$, i=0,…,n-1; $B = \max|a_i|$, i=1,…,n.

Тоді всі (комплексні) корені рівняння (1) лежать у кільці

$$\frac{|a_0|}{B+|a_0|} \le |x^*| \le \frac{|a_n| + A}{|a_n|}$$

Теорема про верхню межу додатніх коренів.

Нехай $A=\max\limits_i |a_i|$, $a_i < 0$;

$$m = \max i : a_i < 0.$$

Тоді $R = 1 + \sqrt[n-m]{\frac{A}{a_n}}$ - верхня межа додатних коренів :

$$\forall x^* \le R,\ f(x^*) = 0.$$

Цю ж теорему можна застосувати для визначення нижньої межи додатніх коренів заміною $x:= 1/y$; тоді $\forall x^* \ge \frac{1}{R_y}$. Заміна знаку x:= - y дозволяє обмежити від'ємні корені.

Теорема (теорема Гюа про необхідну умову дійсності всіх коренів алгебраїчного рівняння).

Якщо алгебраїчне рівняння (1) має дійсні коефіцієнти та всі його корені є дійсними, то квадрат кожного некрайнього коефіцієнта більше добутку двох його сусідніх коефіцієнтів, тобто виконуються нерівності

$$a_k^2 > a_{k-1} \cdot a_{k+1} \quad \left(k = 1, 2, ..., n-1\right).$$

Наслідок (про наявність комплексних коренів). Якщо при якому-небудь k виконано нерівність

$$a_k^2 \le a_{k-1} \cdot a_{k+1},$$

то рівняння (1) має принаймні одну пару комплексних коренів.

Теорема Штурма про чередування коренів.

Нехай $f(x)=P_n(x)$ – поліном без кратних коренів. Утворимо послідовність многочленів:

$f_0 = f(x);$

$f_1 = f'(x)$;

$f_{i+1} = -[f_{i-1} \bmod f_i]$, $i=1,\ldots,n-1$

– кожен наступний многочлен є залишком від ділення двох попередніх многочленів, взятим з протилежним знаком.

Стверджується, що кількість дійсних коренів полінома $f_0(x)$ на довільному відрізку [a; b] дорівнює різниці між кількістю змін знаку у цій послідовності при x = a та x = b.

Другий етап передбачає застосування одного з нижченаведених методів до кожного з проміжків, отриманих на першому етапі.

Метод бісекції

Дано: кінці інтервалу **a** та **b**, точність **ε** . На кожному кроці інтервал ділять навпіл:

$$c := (a + b) / 2,$$

та залишають той підінтервал, до якого належить корінь.

Метод хорд

Вхідні дані аналогічні тим, що використовуються методом бісекції. Проводиться січна до графіку функції. Точкою перетину її з віссю абсцис ділять інтервал:

$$c := (a*f(b) - b*f(a)) / (f(b) - f(a)),$$

та залишають той підінтервал, до якого належить корінь.

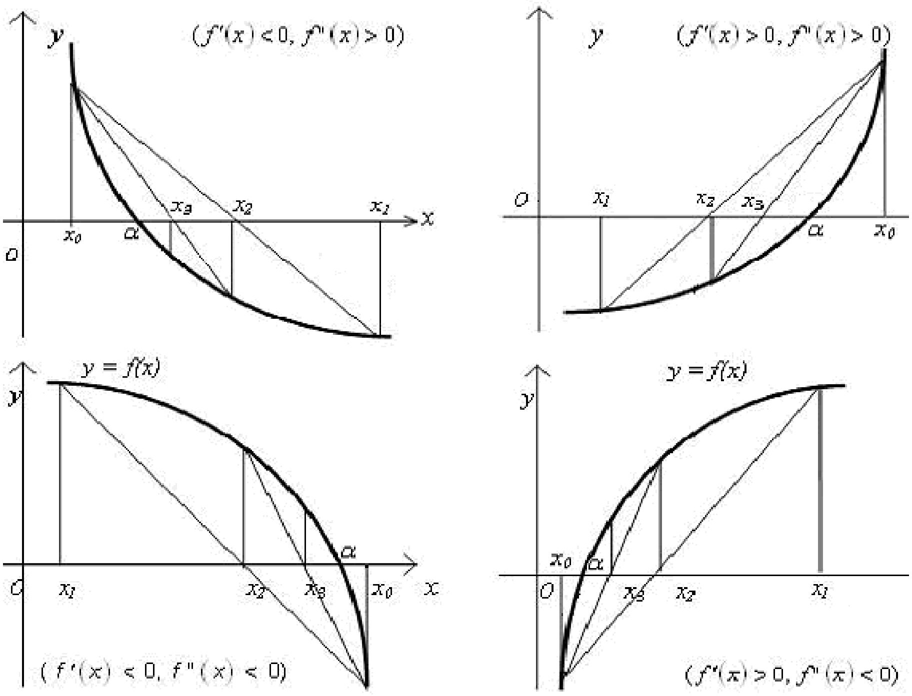

Рис.1. Графічна інтерпретація методу хорд.

Метод Ньютона (дотичних)

Дано: початкове наближення $\mathbf{x_0}$ та точність **ε** . Проводять дотичні до графіку функції, що дає формулу

$$x_{k+1} := x_k - f(x_k) / f'(x_k) .$$

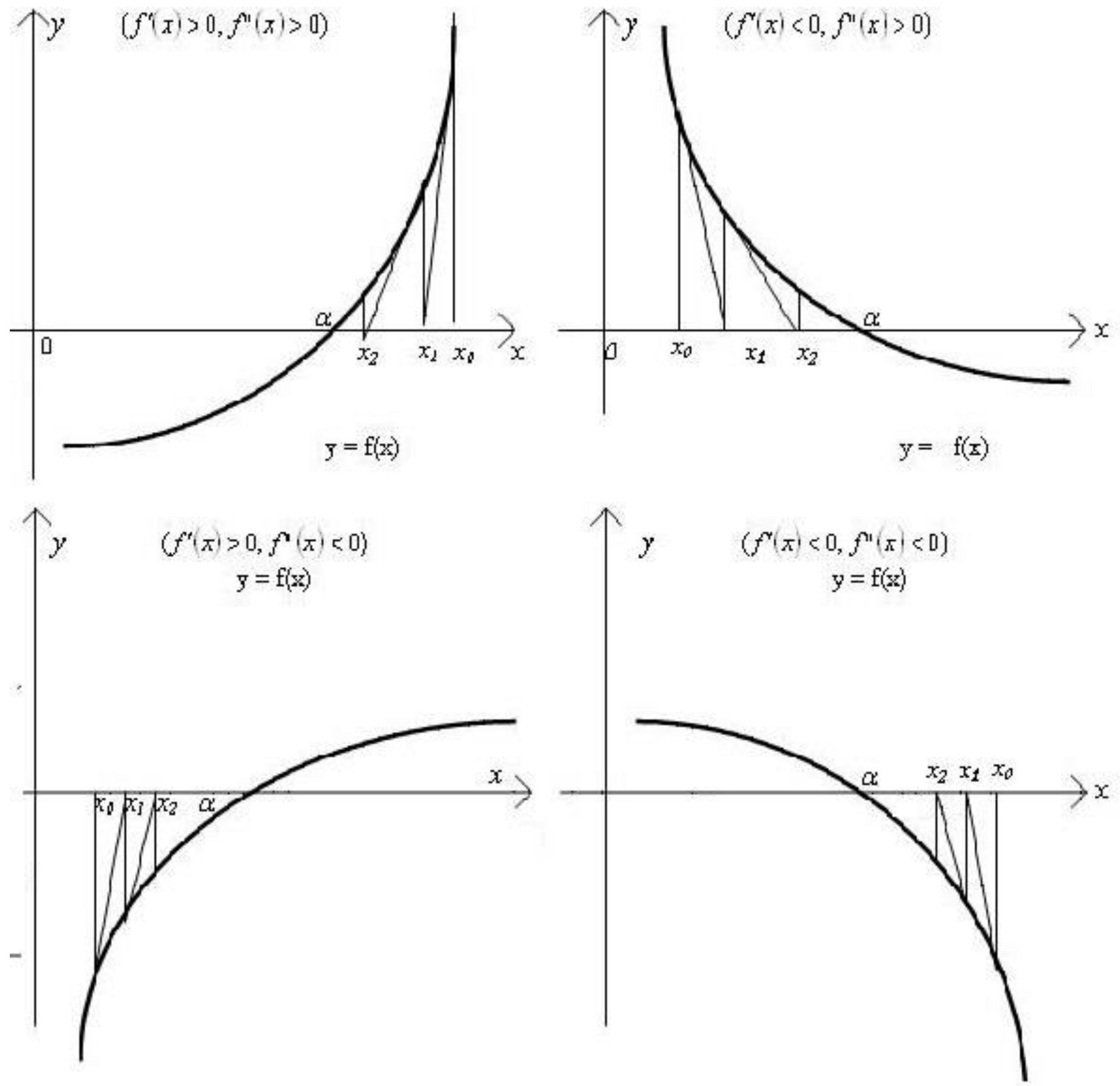

Рис.2. Графічна інтерпретація методу дотичних.

Перевірка існування кореня на відрізку $[a,b]$ здійснюється так:
корінь належить відрізку, якщо $f(a)\cdot f(b)<0$,
якщо $f(a)\cdot f(b)>0$, то відрізок не містить коренів.

2 Завдання

1. **Допрограмовий етап**: визначити кількість дійсних коренів рівняння, відокремити корені рівняння (письмово) (див. теореми про верхню та нижню границі, Гюа, метод поліномів Штурма). Результатом є висновок: перший корінь належить проміжку […], другий корінь належить проміжку […] і т.д.

2. **Програмний етап**: уточнити корені рівняння:
   2.1. методом бісекції;
   2.2. методом хорд;
   2.3. методом Ньютона (дотичних).

Критерієм закінчення ітераційного процесу мають бути нерівності:

- для методу бісекції (інтервальний метод; a та b - кінці інтервалу)

$$|\mathbf{b} - \mathbf{a}| < \boldsymbol{\varepsilon} \text{ та } |\mathbf{f}(\mathbf{x_k})| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

- для методів хорд та дотичних

$$| x_k - x_{k-1} | < \varepsilon \text{ та } | f(x_k) | < \varepsilon .$$

3. Порівняти отримані результати, зробити висновки, який метод приводить до меншої кількості ітерацій і чим це зумовлено.

3 Варіанти завдань

Номер варіанту – це молодша цифра порядкового номеру у списку групи. Параметр **k** – це молодша цифра номера групи. Параметр **α** – старша цифра порядкового номеру у списку групи.

Вигляд рівняння:

$$a_5(1+\alpha)\, x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + k\, a_0 = 0.$$

Примітка 1: поліноми, що розглядаються в даній роботі, обов'язково повинні містити дійсні корені.

Таблиця 1. Варіанти завдань

№ вар.	Коефіцієнти поліному					
	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	1	-2	-4	0	2	1
2	1	-3	0	7	0	-3
3	0	1	-3	1	-2	-2
4	0	-1	3	0	-2	1
5	2	-3	-1	0	0	3
6	0	0	2	-4	-1	1
7	2	-3	1	2	-4	1
8	1	0	0	3	-2	-1
9	0	1	-2	-9	-3	-1
10	0	-2	1	5	-2	1

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі у вигляді вихідного рівняння;
- виконання допрограмового етапу, результатом якого повинні бути проміжки, щодо яких проводиться уточнення;
- розв'язок уточнення коренів за методами бісекції, хорд, дотичних у Mathcad;
- висновки;
- лістинг програми (вхідними даними для цієї програми є координати проміжків $[a_i, b_i]$ та коефіцієнти поліному).

Примітка 2: при виконанні лабораторних робіт потрібно намагатися створювати універсальні процедури, які можуть бути використані для нелінійних рівнянь будь-якого порядку. Методи рекомендовано реалізувати у вигляді методів класу (об'єкту) «поліном», або у вигляді процедури, до якої передаються

– *посилання на функцію, корінь якої потрібно знайти,*
– *межі інтервалу, до якого належить корінь, та точність, з якою треба його знайти.*