Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи

Лабораторна робота № 3

Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) ітераційними методами. Метод простої ітерації. Метод Зейделя

Зміст

1 Теоретичні відомості....................2
2 Завдання....................3
3 Варіанти завдань....................3
4 Вимоги до звіту....................5

1 Теоретичні відомості

Ітераційними методами є такі, що навіть у припущенні, що обчислення ведуться без округлень, дозволяють отримати розв'язок системи лише із заданою точністю. До таких методів відносяться метод простої ітерації (метод Якобі) та метод Зейделя.

Будемо розглядати системи вигляду

$$Ax = b, \tag{1}$$

де A ($n\times n$) - матриця системи, b - вектор правої частини, x - вектор розв'язку.

Метод простої ітерації

Систему $Ax = b$ приводять до вигляду

$$x = Cx + d, \tag{2}$$

де C - деяка матриця, для якої виконується

$$\alpha = \max_i \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \text{ або } \alpha = \max_j \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \text{ або } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{\ 2} < 1 \tag{3}$$

d - вектор-стовпець.

Умова (3) буде виконана, якщо матриця A є матрицею з діагональною перевагою, для якої $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ або $|a_{jj}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$

Розглянемо спосіб зведення (1) до (2). Запишемо (1) у розгорнутій формі:

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = 0, i = \overline{1,n} \tag{4}$$

Якщо $a_{ii}\neq 0$ для всіх i, то можна (4) зобразити у вигляді

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n} \tag{5}$$

Звідси отримуємо значення елементів матриці C та вектору d:

$$c_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j \\ 0, i = j \end{cases} \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}$$

Запишемо розв'язок у матричному вигляді. Нехай матрицю A задано у вигляді:

$$A = A_1 + D + A_2,$$

де A_1 – нижня трикутна матриця з нульовою головною діагоналлю; D – діагональна матриця з a_{ii} на головній діагоналі; A_2 – верхня трикутна матриця з нульовою головною діагоналлю.

За припущенням $a_{ij}\neq 0$ для всіх i, існує D^{-1}. Тоді зображенню у формі (5) відповідає

$$x = -D^{-1}A_1x - D^{-1}A_2x + D^{-1}b$$

або

$$x = -D^{-1}(A_1 + A_2)x + D^{-1}b .$$

Якщо матриця A не забезпечує виконання (3), тобто не є матрицею з діагональною перевагою, її приводять до такої за допомогою еквівалентних перетворень.

Виходячи з довільного вектора $x^{(0)}$ (можна взяти вектор b, або вектор b, поділений на діагональ матриці A) будують ітераційний процес:

$$x^{(k+1)} := Cx^{(k)} + d$$

або

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(A_1 + A_2)x^{(k)} + D^{-1}b$$

Критерій закінчення ітераційного процесу:

$$\max_j |x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon .$$

Метод Зейделя

Цей метод – модифікація методу простої ітерації. В цьому методі вже знайдені компоненти беруть у правій частині співвідношення з (n+1)-го наближення, а інші – з n-го наближення:

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}.$$

Або у матричному вигляді:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}A_1 x^{(k+1)} - D^{-1}A_2 x^{(k)} + D^{-1}b.$$

Умови застосування методу Зейделя, критерій закінчення ітерацій такі самі, як для методу простої ітерації.

2 Завдання

Якщо матриця не є матрицею із діагональною перевагою, звести систему до еквівалентної, у якій є діагональна перевага (виконати письмово, включити в звіт). Можна, наприклад, провести одну ітерацію метода Гауса, зкомбінувавши рядки з метою отримати нульовий недіагональний елемент у стовпчику.

Розробити програму, що реалізує розв'язання системи методом простої ітерації та методом Зейделя. Обчислення проводити з з кількістю значучих цифр m = 6. Для кожної ітерації розраховувати нев'язку ***r = b – Ax,*** де ***x*** – отриманий розв'язок.

Розв'язати задану систему рівнянь за допомогою програмного забезпечення Mathcad. Навести результат перевірки: вектор нев'язки ***r = b – Ax$_m$,*** де ***x$_m$*** – отриманий у Mathcad розв'язок.

Порівняти корені рівнянь, отримані у Mathcad, із власними результатами за допомогою методу середньоквадратичної похибки.

3 Варіанти завдань

Система має вигляд (1).

№ вар.	Матриця системи A	Вектор правої частини b
1-4	$\begin{pmatrix} 5{,}18+\alpha & 1{,}12 & 0{,}95 & 1{,}32 & 0{,}83 \\ 1{,}12 & 4{,}28-\alpha & 2{,}12 & 0{,}57 & 0{,}91 \\ 0{,}95 & 2{,}12 & 6{,}13+\alpha & 1{,}29 & 1{,}57 \\ 1{,}32 & 0{,}57 & 1{,}29 & 4{,}57-\alpha & 1{,}25 \\ 0{,}83 & 0{,}91 & 1{,}57 & 1{,}25 & 5{,}21+\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}25k,\ k = \text{№}вар - 1$	$\begin{pmatrix} 6{,}19+\beta \\ 3{,}21 \\ 4{,}28-\beta \\ 6{,}25 \\ 4{,}95+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}35k,\ k = \text{№}вар - 1$
5-9	$\begin{pmatrix} 3{,}81 & 0{,}25 & 1{,}28 & 0{,}75+\alpha \\ 2{,}25 & 1{,}32 & 4{,}58+\alpha & 0{,}49 \\ 5{,}31 & 6{,}28+\alpha & 0{,}98 & 1{,}04 \\ 9{,}39+\alpha & 2{,}45 & 3{,}35 & 2{,}28 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}5k, k = \text{№}вар - 5,$	$\begin{pmatrix} 4{,}21 \\ 6{,}47+\beta \\ 2{,}38 \\ 10{,}48+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}5k\ ,\ k = \text{№}вар - 5$

10	$\begin{pmatrix} 2{,}12 & 0{,}42 & 1{,}34 & 0{,}88 \\ 0{,}42 & 3{,}95 & 1{,}87 & 0{,}43 \\ 1{,}34 & 1{,}87 & 2{,}98 & 0{,}46 \\ 0{,}88 & 0{,}43 & 0{,}46 & 4{,}44 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11{,}172 \\ 0{,}115 \\ 0{,}009 \\ 9{,}349 \end{pmatrix}$
11-15	$\begin{pmatrix} 8{,}30 & 2{,}62+\alpha & 4{,}10 & 1{,}90 \\ 3{,}92 & 8{,}45 & 8{,}78-\alpha & 2{,}46 \\ 3{,}77 & 7{,}21+\alpha & 8{,}04 & 2{,}28 \\ 2{,}21 & 3{,}65-\alpha & 1{,}69 & 6{,}99 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}2k, k = \text{№}вар - 11$	$\begin{pmatrix} -10{,}65+\beta \\ 12{,}21 \\ 15{,}45-\beta \\ -8{,}35 \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}2k, k = \text{№}вар - 11$
16	$\begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}5 \\ 0{,}7 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 5{,}5 & 7{,}0 & 6{,}0 & 5{,}5 \\ 7{,}0 & 10{,}5 & 8{,}0 & 7{,}0 \\ 6{,}0 & 8{,}0 & 10{,}5 & 9 \\ 5{,}5 & 7 & 9 & 10{,}5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 6{,}59 & 1{,}28 & 0{,}79 & 1{,}195 & -0{,}21 \\ 0{,}92 & 3{,}83 & 1{,}3 & -1{,}63 & 1{,}02 \\ 1{,}15 & -2{,}46 & 5{,}77 & 2{,}1 & 1{,}483 \\ 1{,}285 & 0{,}16 & 2{,}1 & 5{,}77 & -18 \\ 0{,}69 & -1{,}68 & -1{,}217 & 9 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}36 \\ 3{,}89 \\ 11{,}04 \\ -0{,}27 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 3{,}81 & 0{,}25 & 1{,}28 & 1{,}75 \\ 2{,}25 & 1{,}32 & 5{,}58 & 0{,}49 \\ 5{,}31 & 7{,}28 & 0{,}98 & 1{,}04 \\ 10{,}39 & 2{,}45 & 3{,}35 & 2{,}28 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4{,}21 \\ 8{,}97 \\ 2{,}38 \\ 12{,}98 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 6{,}92 & 1{,}28 & 0{,}79 & 1{,}15 & -0{,}66 \\ 0{,}92 & 3{,}5 & 1{,}3 & -1{,}62 & 1{,}02 \\ 1{,}15 & -2{,}46 & 6{,}1 & 2{,}1 & 1{,}483 \\ 1{,}33 & 0{,}16 & 2{,}1 & 5{,}44 & -18 \\ 1{,}14 & -1{,}68 & -1{,}217 & 9 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}72 \\ 3{,}87 \\ 13{,}8 \\ -1{,}08 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 7{,}03 & 1{,}22 & 0{,}85 & 1{,}135 & -0{,}81 \\ 0{,}98 & 3{,}39 & 1{,}3 & -1{,}63 & 0{,}57 \\ 1{,}09 & -2{,}46 & 6{,}21 & 2{,}1 & 1{,}033 \\ 1{,}345 & 0{,}16 & 2{,}1 & 5{,}33 & -12 \\ 1{,}29 & -1{,}23 & -0{,}767 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}84 \\ 2{,}58 \\ 11{,}96 \\ -1{,}47 \end{pmatrix}$
22-31	$\begin{pmatrix} 8{,}30 & 2{,}62+\alpha & 4{,}10 & 1{,}90 \\ 3{,}92 & 8{,}45 & 8{,}78-\alpha & 2{,}46 \\ 3{,}77 & 7{,}21+\alpha & 8{,}04 & 2{,}28 \\ 2{,}21 & 3{,}65-\alpha & 1{,}69 & 6{,}99 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0{,}2k, k = \text{№}вар - 22$	$\begin{pmatrix} -10{,}65+\beta \\ 12{,}21 \\ 15{,}45-\beta \\ -8{,}35 \end{pmatrix}$ $\beta = 0{,}2k, k = \text{№}вар - 22$

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі;
- вихідну систему рівнянь;
- письмовий етап приведення матриці до діагональної переваги (за необхідності);
- проміжні результати та кінцевий результат;
- результати перших трьох та останньої ітерацій методу, на кожній ітерації потрібно навести вектор нев'язки;
- копія розв'язку задачі у Mathcad; вектор нев'язки для цього розв'язку;
- порівняння власного розв'язку та розв'язку, отриманого у Mathcad;
  лістинг програми.